第 9 周习题课

一．求极值

1　证明对任意 $x\in(0,2)$，成立不等式 $4x\ln x\geq x^2+2x-3$

证明：令 $f(x)=4x\ln x-x^2-2x+3$，考虑 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内的正负号与极值问题。先求驻点。$f'(x)=4+4\ln x-2x-2$

令 $f'(x)=0$，解出驻点 $x_0=1\in(0,2)$，进一步考查两个单侧极限的情况。

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=3>0,\quad \lim_{x\to 2^-}f(x)=8\ln 2-5>0$$

又 $f''(x)=\dfrac{4}{x}-2$，$f''(x_0)=2>0$，因此 $f(1)=0=\min\limits_{x\in(0,2)}f(x)$。

这意味着 $f(x)\geq 0$，即原不等式成立。

2　求曲线 $y=(x-2)^{5/3}-\dfrac{5}{9}x^2$ 的凹凸区间与拐点。

解：(1) $y'=\dfrac{5}{3}(x-2)^{2/3}-\dfrac{10}{9}x$，

$$y''=\frac{10}{9}(x-2)^{-1/3}-\frac{10}{9}=\frac{10}{9}\cdot\frac{1-(x-2)^{1/3}}{(x-2)^{1/3}}.$$

(2) y'' 的零点是 $x_1=3$，y'' 不存在的点是 $x_2=2$。

(3) 列表讨论如下：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f''(x)$	−	不存在	+	0	−
曲线 $y=f(x)$	$\cap$	拐点 $\left(2,-\frac{20}{9}\right)$	$\cup$	拐点 $(3,-4)$	$\cap$

3　求函数 $f(x)=\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}$ 的渐近线。

解（1） $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=-\infty$，

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty$$

故有垂直渐近线： $x=1$

（2） $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}=+\infty$，

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1} = +\infty$，所以，无水平渐近线。

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x(x-1)} = +\infty$，

所以，当 $x \to +\infty$ 时，没有斜渐近线。

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x(x-1)} = -3 = a$，

$b = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-kx] = \lim\limits_{x\to-\infty}[\dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}+3x]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2+1)(e^x-1)+3x(x-1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(3x^2+1)e^x-3x-1}{x-1} = -3$ 所以，当 $x \to -\infty$ 时，

有斜渐近线： $y = -3(x+1)$。

二．不等式证明题

4　设 $x > 0$，证明不等式 $\dfrac{x}{x^2+2x+2} < \arctan(x+1) - \dfrac{\pi}{4} < \dfrac{x}{2}$。

证明：令 $f(x) = (x^2+2x+2)\arctan(x+1) - \dfrac{\pi}{4}(x^2+2x+2) - x$，则 $f(0)=0$

$$f'(x) = (2x+2)\arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}(2x+2)$$
$$= (2x+2)[\arctan(x+1) - \frac{\pi}{4}] > 0$$

于是当 $x > 0$ 时　$f(x) > 0$，即原左侧不等式成立。

令　$\varphi(x) = \arctan(x+1) - \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}$，　$\varphi(0) = 0$，

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1+(x+1)^2} - \frac{1}{2} < 0, \quad \Rightarrow \varphi(x) < 0$$

即原右侧不等式成立。

5　证明：当 $x \in (0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$

证明：$$f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$$

$$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$f''(x)=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}$$

显然$\ln(1+x)-x<0,\quad x\in(0,1)$，因此$f''(x)<0,\quad x\in(0,1)$，$f'(x)$为单调降函数。

因为$f'(0)=0$，$f'(x)<0,\quad x\in(0,1)$，$f(x)$为单调降函数。

因为$f(0)=0$，所以$f(x)<0, x\in(0,1)$，即当$x\in(0,1)$时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$。

6　$e<a<b$，求证：$a^b>b^a$。

证明：$F(x)=x\ln a-a\ln x$，$e<a<x$，

$$F'(x)>0,\quad F(a)=0$$

$$F(x)>0,\quad x>a$$

$$F(b)>0$$

$a^b>b^a$。

三．泰勒公式证明题

7　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，证明$\exists\xi\in(a,b)$使得

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

证明：记$F(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，则

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b}=\frac{F(x)-F(b)}{x-b}=F'(\eta),\quad \eta\in(x,b),$$

$$F'(\eta)=\frac{f'(\eta)(\eta-a)-(f(\eta)-f(a))}{(\eta-a)^2}$$

$f(a)$在η点的 Taylor 公式为

$$f(a)=f(\eta)+f'(\eta)(a-\eta)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-\eta)^2,\quad \xi\in(a,\eta)\subset(a,b)$$

$$F'(\eta)=\frac{f'(\eta)(\eta-a)-(f(\eta)-f(a))}{(\eta-a)^2}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

8　设 $f''(x)$ 在 (a,b) 内连续，$x_0,x_0+h\in(a,b),\ f''(x_0)\neq 0$，

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h),\quad \theta\in(0,1)$$

求证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$。

证明：$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0+\theta h)$，

$f'(x_0+\theta h)=f'(x_0)+\theta hf'(x_0+\xi\theta h),\quad \xi\in(0,1)$，代入

$f(x_0+h)=f(x_0)+h\left[f'(x_0)+\theta hf'(x_0+\xi\theta h)\right]$

由 Taylor 公式，$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{1}{2}h^2f''(x_0+\eta h),\quad \eta\in(0,1)$，故

$$\theta f'(x_0+\xi\theta h)=\frac{1}{2}f''(x_0+\eta h)$$

而 $f''(x)$ 在 (a,b) 内连续，$x_0,x_0+h\in(a,b),\ f''(x_0)\neq 0$，令 $h\to 0$ 可得 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{2}$。

9　设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中 $0<\theta<1$，且 $f'''(x)\neq 0$，求证 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$。

证明：$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)h^3$

$=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$

$\frac{1}{2}f''(x)h^2+\frac{1}{6}f'''(\xi)h^3=\frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$

$f''(x)+\frac{1}{3}f'''(\xi)h=f''(x+\theta h)$

$$\frac{1}{3}f'''(\xi)=\frac{f''(x+\theta h)-f''(x)}{\theta h}\cdot\theta$$

令 $h\to 0$，$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{3}$。

10 （第 4 章总复习题题 11, p.125） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0=f(1)$。进一步假设 $\min\{f(x),x\in[0,1]\}=-1$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$。

证明：设 $f(x)$ 在点 $x_0\in(0,1)$ 处取得最小值，则 $f(x_0)=-1$ 且 $f'(x_0)=0$。将函数值 $f(0)=0$ 和 $f(1)=0$ 在点 x_0 处作 Taylor 一阶展开，带 Lagrange 余项，则有

$0=f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_1)(0-x_0)^2$，$\eta_1\in(0,x_0)$，

$0=f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x_0)^2$，$\eta_2\in(x_0,1)$。

于是我们就得到 $\frac{1}{2}f''(\eta_1){x_0}^2=1$ 和 $\frac{1}{2}f''(\eta_2)(1-x_0)^2=1$。进一步由此得

$$\tfrac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]=\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\text{。}$$

一方面，上式左边是平均值 $\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$，介于两个值 $f''(\eta_1)$ 和 $f''(\eta_2)$ 之间。根据 Darboux 定理（导数介值定理）可知，存在一点 ξ 介于 η_1 和 η_2 之间，使得 $f''(\xi)=\frac{1}{2}[f''(\eta_1)+f''(\eta_2)]$。另一方面我们对右边可作如下估计：

$$\frac{1}{x_0^2}+\frac{1}{(1-x_0)^2}\ge\min\left\{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{(1-\lambda)^2},\lambda\in(0,1)\right\}\text{。}$$

不难证明，上述不等式左边当 $\lambda=1/2$ 时取得最小值 8。这就证明了存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge 8$。证毕。

11 证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（$n>1$）在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

证明：记 $F_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x-1$，$F_n(0)=-1,F_n(1)=n-1$，由连续函数介值定理可知，$F_n(x)$ 在在 $(0,1)$ 内必有一实根。

$F_n'(x)=nx^{n-1}+\cdots+1>0$，故 $F_n(x)$ 在在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n。

$x_n{}^n+x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n=1$

$x_{n-1}{}^{n-1}+x_{n-1}{}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}=1$

相减， $x_n{}^n+\left[\left(x_n{}^{n-1}+\cdots+x_n\right)-\left(x_{n-1}{}^{n-1}+x_{n-1}{}^{n-2}+\cdots+x_{n-1}\right)\right]=$

$x_n{}^n+(x_n-x_{n-1})Q=0$

其中 Q 的各项都为正，故 $x_n-x_{n-1}<0$，$\{x_n\}$ 单调降，有下界 0，故收敛。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

$$\frac{x_n(1-x_n{}^n)}{1-x_n}=1$$

$$\frac{A}{1-A}=1,\quad A=\frac{1}{2}$$

12 设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$，证明

（I） $\forall n\in\mathbb{N}^+$， $f_n(x)=1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 内有且只有一个根；

（II）设 $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\pi}{6}$。

证明：（I）令 $F_n(x)=f_n(x)-1$，则 $F_n(\frac{\pi}{2})\ge 0,F_n(\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1<0$，所以存在 $\xi\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right],F_n(\xi)=0$。

$F_n'(x)=\cos x+2\sin x\cos x+\cdots+n\sin^{n-1}x\cos x>0,x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $F_n(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 严格单调增，$F_n(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 只有一个零点。

（II）设 $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，因为 $f_n(x)>f_{n-1}(x)$，所以 $x_{n-1}>x_n$，$\{x_n\}$ 单调减且有下界，$\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，

$$1=\sin x_n+\sin^2 x_n+\cdots+\sin^n x_n=\frac{\sin x_n(1-\sin^n x_n)}{1-\sin x_n}$$

两边取极限，$1=\dfrac{\sin A}{1-\sin A}$， $\sin A=\dfrac{1}{2}$， $A=\dfrac{\pi}{6}$ 。

13 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内具有连续的三阶导数，且 $f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$\left|f'''(\xi)\right|\geq 24$$

证明：$f(0)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)+f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(0-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{2!}f''\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{3!}f'''(\xi_1)\left(0-\dfrac{1}{2}\right)^3$

$$f(1)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2!}f''\left(\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}f'''(\xi_2)\left(1-\frac{1}{2}\right)^3$$

两式相减，得

$$f(1)-f(0)=1=\frac{1}{48}\left[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)\right]$$

所以在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $\left|f'''(\xi)\right|\geq 24$.

14 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+xf'(x)\ln x\right]=l$，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ 。

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)\ln x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+xf'(x)\ln x\right]=l$

15 设 f 在 $[a,b]$ 二阶可导，求证存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(x_0)$$

证明：$f(a)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)+f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(a-\dfrac{a+b}{2}\right)+\dfrac{1}{2}f''(x_1)\left(a-\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$$f(b)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(x_2)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)^2$$

相加，$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{8}\left[f''(x_1)+f''(x_2)\right]$。

由导函数的介值定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(x_0)$。

16 设 f 在 $[a,b]$ 一阶可导，在 (a,b) 二阶可导，且满足 $f'(a)=f'(b)=0$，求证存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$$\left|f''(x_0)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$$

证明：$f(x)=f(a)+\frac{1}{2}f''(x_1)(x-a)^2$

$f(x)=f(b)+\frac{1}{2}f''(x_2)(x-b)^2$

相减，$\frac{1}{2}\left[f''(x_1)(x-a)^2-f''(x_2)(x-b)^2\right]=f(b)-f(a)$

令 $x=\frac{a+b}{2}$，上式为

$$\frac{1}{8}\left[f''(x_1)-f''(x_2)\right](b-a)^2=f(b)-f(a)$$

$$f''(x_1)-f''(x_2)=\frac{8}{(b-a)^2}\left[f(b)-f(a)\right]$$

若 $\left|f''(x_1)\right|<\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$, $\left|f''(x_2)\right|<\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$,

则 $\left|f''(x_1)-f''(x_2)\right|<\frac{8}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$，矛盾。故存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$$\left|f''(x_0)\right|\geq\frac{4}{(b-a)^2}\left|f(b)-f(a)\right|$$

17 设 $f\in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，试证

（1）$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$；

（2）$\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|\le\frac{1}{2}(b-a)\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$。

证明：（1）不妨设 $f(x)$ 不恒为零，并设 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，则 $f'(x_0)=0$，

$$f(x)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

$$0=f(a)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2 \qquad (1)$$

$$0=f(b)=f(x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2 \qquad (2)$$

如果 $x_0\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，由（1）式可得 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$；如果 $x_0\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$，由（2）式可得 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$。

（1）　设 $|f'(x_0)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|$，

$$0=f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-x_0)^2$$

$$0=f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-x_0)^2$$

相减，$|f'(x_0)(b-a)|=\frac{1}{2}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|[(b-x_0)^2+(a-x_0)^2]\le\frac{1}{2}\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|(b-a)^2$。故 $\max\limits_{a\le x\le b}|f'(x)|\le\frac{1}{2}(b-a)\max\limits_{a\le x\le b}|f''(x)|$。

18　设 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 可导，$0<x_1<x_2$，证明 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使

$$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

证明：记 $F(x)=\frac{f(x)}{x},G(x)=\frac{1}{x}$，Cauchy 中值定理得

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{G(x_2)-G(x_1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

代入即可。

19 设 $f(x)$ 二阶导数存在且连续，$c\in(a,b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

证明：$f(a)=f(c)+f'(c)(a-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(a-c)^2$

$f(b)=f(c)+f'(c)(b-c)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(b-c)^2$

代入，

$$左=\frac{1}{2}\left\{f''(\xi_1)\frac{a-c}{a-b}+f''(\xi_2)\frac{b-c}{b-a}\right\}。$$

如果 $f''(\xi_1)=f''(\xi_2)$，则已证毕；如果 $f''(\xi_1)\neq f''(\xi_2)$，不妨假设 $f''(\xi_1)<f''(\xi_2)$，则

$$f''(\xi_1)\leq\left\{f''(\xi_1)\frac{a-c}{a-b}+f''(\xi_2)\frac{b-c}{b-a}\right\}\leq f''(\xi_2)$$

由导函数的介值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\left\{f''(\xi_1)\frac{a-c}{a-b}+f''(\xi_2)\frac{b-c}{b-a}\right\}=f''(\xi)$，证毕。

20 已知 $f(x)$ 在 a 的 δ 邻域内四阶可导，且 $\left|f^{(4)}(x)\right|\leq M$，设 $0<h<\delta$，证明

$$\left|f''(a)-\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\right|\leq\frac{M}{12}h^2$$

证明：$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2+\frac{1}{6}f'''(a)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_1)h^4$

$f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a)h^2-\frac{1}{6}f'''(a)h^3+\frac{1}{24}f^{(4)}(\xi_2)h^4$

代入左式，

$$左=\frac{1}{24}\left|f^{(4)}(\xi_1)+f^{(4)}(\xi_2)\right|\leq\frac{M}{12}h^2$$

21 设 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，$f'(x),f''(x)$ 存在，且满足

$$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$$

若 $f(a)=f(b)=0, a<b$，是 $f(x)$ 的两个相邻的零点，证明在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 0$。

证明：如果 $f(x)$ 不恒为 0，至少存在一点 x_1 使得 $f(x_1)\neq 0$。不妨假设 $f(x_1)>0$。$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有最大值 $f(x_0)\geq f(x_1)>0$。因为 $f(a)=f(b)=0$，$x_0\in(a,b)$，$f(x_0)$ 为极大值。代入 $f''(x_0)+f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)=0$，$f''(x_0)=f(x_0)>0$，与 $f(x_0)$ 为极大值矛盾。所以在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 0$。