第 9 周习题课

一．求极值

1　证明对任意 $x \in (0,2)$，成立不等式 $4x\ln x \geq x^2 + 2x - 3$

2　求曲线 $y = (x-2)^{5/3} - \frac{5}{9}x^2$ 的凹凸区间与拐点。

3　求函数 $f(x) = \frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}$ 的渐近线。

二．不等式证明题

4　设 $x > 0$，证明不等式 $\frac{x}{x^2+2x+2} < \arctan(x+1) - \frac{\pi}{4} < \frac{x}{2}$。

5　证明：当 $x \in (0,1)$ 时，$(1+x)\ln^2(1+x) < x^2$

6　$e < a < b$，求证：$a^b > b^a$。

三．泰勒公式证明题

7　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，证明 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{1}{2}f''(\xi)$$

8　设 $f''(x)$ 在 (a,b) 内连续，$x_0, x_0+h \in (a,b),\ f''(x_0) \neq 0$，

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0+\theta h), \quad \theta \in (0,1)$$

求证：$\lim\limits_{h \to 0} \theta = \frac{1}{2}$。

9　设 $f(x)$ 三阶可导，且 $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$，其中 $0 < \theta < 1$，且

$f'''(x) \neq 0$，求证 $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \frac{1}{3}$。

10 （第 4 章总复习题题 11，p.125） 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f(0)=0=f(1)$。 进一步假设 $\min\{f(x), x\in[0,1]\}=-1$。证明存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\geq 8$。

11 证明：方程 $x^n+x^{n-1}+\cdots+x=1$（$n>1$）在 $(0,1)$ 内必有唯一实根 x_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

12 设 $f_n(x)=\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x$，证明

（I） $\forall n\in \mathbb{N}^+$， $f_n(x)=1$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 内有且只有一个根；

（II）设 $x_n\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ 是 $f_n(x)=1$ 的根，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{\pi}{6}$。

13 设函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内具有连续的三阶导数，且 $f(0)=1, f(1)=2, f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，证明在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使

$$\left|f'''(\xi)\right|\geq 24$$

14 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内可导，如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+xf'(x)\ln x\right]=l$，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$。

证明： $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)\ln x}{\ln x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)+xf'(x)\ln x\right]=l$

15 设 f 在 $[a,b]$ 二阶可导，求证存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(x_0)$$

16 设 f 在 $[a,b]$ 一阶可导，在 (a,b) 二阶可导，且满足 $f'(a)=f'(b)=0$，求证存在 $x_0\in(a,b)$，使得

$$|f''(x_0)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

17 设 $f\in C^2[a,b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，试证

（1）$\max\limits_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\frac{1}{8}(b-a)^2\max\limits_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$；

（2）$\max\limits_{a\leq x\leq b}|f'(x)|\leq\frac{1}{2}(b-a)\max\limits_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$。

18 设 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 可导，$0<x_1<x_2$，证明 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使

$$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

19 设 $f(x)$ 二阶导数存在且连续，$c\in(a,b)$，证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}=\frac{1}{2}f''(\xi)$$

20 已知 $f(x)$ 在 a 的 δ 邻域内四阶可导，且 $\left|f^{(4)}(x)\right|\leq M$，设 $0<h<\delta$，证明

$$\left|f''(a)-\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}\right|\leq\frac{M}{12}h^2$$

21 设 $f(x),g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义，$f'(x),f''(x)$ 存在，且满足

$$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$$

若 $f(a)=f(b)=0, a<b$，是 $f(x)$ 的两个相邻的零点，证明在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 0$。