第八周习题课

1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，对函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

（I）确定 a 值使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

（II）对（I）中确定的 a 值，证明 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一阶导数连续。

证明（I）$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$。

当 $a=f'(0)$ 时 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

（II）$x\neq 0$ 时，$g'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

$$\begin{aligned}g'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}\end{aligned}$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=c\,\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2},$$

$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一阶导数连续。

一．不等式证明

2. 设 $x>0$，证明不等式 $\dfrac{x}{x^2+2x+2}<\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{x}{2}$。

证明：令 $f(x)=(x^2+2x+2)\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}(x^2+2x+2)-x$，则 $f(0)=0$

$$\begin{aligned}f'(x)&=(2x+2)\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}(2x+2)\\&=(2x+2)[\arctan(x+1)-\frac{\pi}{4}]>0\end{aligned}$$

于是当$x>0$时 $f(x)>0$，即原左侧不等式成立。

令 $\varphi(x)=\arctan(x+1)-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}$， $\varphi(0)=0$，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{1+(x+1)^2}-\frac{1}{2}<0,\quad \Rightarrow \varphi(x)<0$$

即原右侧不等式成立。

3. 证明：当$x\in(0,1)$时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

证明：
$$f(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$$

$$f'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$$

$$f''(x)=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}$$

显然$\ln(1+x)-x<0,\quad x\in(0,1)$，因此$f''(x)<0,\quad x\in(0,1)$，$f'(x)$为单调降函数。

因为$f'(0)=0$， $f'(x)<0,\quad x\in(0,1)$， $f(x)$为单调降函数。

因为$f(0)=0$，所以$f(x)<0, x\in(0,1)$，即当$x\in(0,1)$时，$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$。

4. $e<a<b$，求证：$a^b>b^a$。

证明：$F(x)=x\ln a-a\ln x$，$e<a<x$，

$$F'(x)>0,\quad F(a)=0$$

$$F(x)>0,\quad x>a$$

$$F(b)>0$$

$a^b>b^a$。

二．中值定理证明题

5. 设$f(x)$是以2π为周期的连续函数，则在任何一个周期内，存在$\xi\in \mathrm{R}$，使得

$f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

证明：令 $F(x)=f(x+\pi)-f(x)$，则 $F(x)$ 为连续函数，且 $F(a)=f(a+\pi)-f(a)$，

$$F(a+\pi)=f(a+2\pi)-f(a+\pi)=f(a)-f(a+\pi)$$

$F(a)\cdot F(a+\pi)\le 0$，当等号成立时，取 $\xi=a$；当等号不成立时，有连续函数介值定理可得存在 $\xi\in(a,a+\pi)\subset$ □ 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

6. 证明：若 $f\in C(-\infty,+\infty)$，$f(f(x))=x$，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$。

证明：记 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 为连续函数，

$$F(f(x))=f(f(x))-f(x)=x-f(x)$$

$$F(x)\cdot F(f(x))\le 0$$

有连续函数零点存在性可得，则存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$。

7. 设 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，$f(0)=0, f(1)=1, f(f(x))=x$。证明：

（I） $f(x)$ 是单调函数；

（II） $f(x)=x$。

证明：（1）反证法：

假设 $f(x)$ 不是单调函数，则存在 $x_1,x_2\in[0,1], x_1<x_2, f(x_2)<f(x_1)\le 1=f(1)$。

因为 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为连续函数，存在 $x_3\in[x_2,1]$ 使得 $f(x_3)=f(x_1)$，而 $x_1=f(f(x_1))=f(f(x_3))=x_3$，矛盾。

（2） $\forall x\in[0,1], x, f(x)\in[0,1]$。

如果 $x\ge f(x)$，由 f 的单调性，$f(x)\ge f(f(x))=x$，$f(x)=x$；

如果 $x\le f(x)$，由 f 的单调性，$f(x)\le f(f(x))=x$，$f(x)=x$。

故 $f(x)=x$。

8. 在$[0,1]$上，$0<f(x)<1$，$f(x)$可微，且$f'(x)\neq 1$，证明在$(0,1)$存在唯一的ξ使

$f(\xi)=\xi$。

证明：（1）存在性：作辅助函数$F(x)=f(x)-x$，

$$F(0)=f(0)>0$$
$$F(1)=f(1)-1<0$$

由连续函数的介值定理得，在$(0,1)$存在ξ使$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$。

（2）唯一性：若存在两点ξ_1,ξ_2，使$f(\xi_1)=\xi_1$，$f(\xi_2)=\xi_2$，由 Lagrange 中值定理，存在$\eta\in(\xi_1,\xi_2)$（假设$\xi_1<\xi_2$），使

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=1,$$

与条件$f'(x)\neq 1$矛盾。

9. $f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可微，且$f(1)=0$，则$\exists\xi\in(0,1)$，使$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$

证明：作辅助函数$F(x)=xf(x)$，$F(0)=F(1)=0$，存在$\xi\in(0,1)$，使

$$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$$

10. 设$f\in C[0,+\infty)$，在$(0,+\infty)$可导，$f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证：存在$\xi\in(0,+\infty)$

使$f'(\xi)=0$。

证明：（1）若$f(x)\equiv 0$，结论显然成立。

（2）若$f(x)$，不恒为零，则一定存在$\eta\in(0,+\infty)$使$f(\eta)\neq 0$。不失一般性，假设$f(\eta)>0$，由连续函数的介值定理得在$(0,\eta)$中存在一点ξ_1使$f(\xi_1)=\dfrac{f(\eta)}{2}$。同样，因为

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，存在$\zeta\in(\eta,+\infty)$，使得$f(\zeta)<\dfrac{f(\eta)}{2}$。由连续函数的介值定理得在$(\eta,\zeta)$中，存在一点$\xi_2$使$f(\xi_2)=\dfrac{f(\eta)}{2}$。由 Rolle 定理得，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,+\infty)$使$f'(\xi)=0$

11. 设 $f(x)$ $[0,+\infty)$ 内可导，且在 $0\le f(x)\le\ln\dfrac{2x+1}{1+\sqrt{1+x^2}}$，$\forall x\in[0,+\infty)$。证明：

$\exists\xi\in(0,+\infty),\quad f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$。

证明：因为$0\le f(x)\le\ln\dfrac{2x+1}{1+\sqrt{1+x^2}},\quad\forall x\in[0,+\infty)$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{1+\sqrt{1+x^2}}=0,\quad \ln\frac{2x+1}{1+\sqrt{1+x^2}}\bigg|_{x=0}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\quad f(0)=0$。记 $F(x)=f(x)-\ln\dfrac{2x+1}{1+\sqrt{1+x^2}}$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0,\quad F(0)=0$，由广义 Rolle 定理，$\exists\xi\in(0,+\infty),\quad F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$。

12. 设函数 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，

$f(a)=g(a),\ f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$。

证明：令$F(x)=f(x)-g(x)$， 则

$$F(a)=0,\ F(b)=0,$$

设 $f(x),g(x)$ 在(a,b)内的最大值为M分别在$\alpha\in(a,b),\beta\in(a,b)$取得。

当$\alpha=\beta$时，取$\eta=\alpha=\beta\in(a,b)$，则有$f(\eta)=g(\eta)$。

当$\alpha\ne\beta$时，则

$$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)\geq 0$$

$$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=g(\beta)-M\leq 0$$

由介值定理，存在$\eta\in(a,b)$使$F(\eta)=0$，即

$$f(\eta)=g(\eta)$$

由 Rolle 定理，

$$\exists\xi_1\in(a,\eta),\ F'(\xi_1)=0,\ \exists\xi_2\in(\eta,b),\ F'(\xi_1)=0$$

再由 Rolle 定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，$h''(\xi)=0$，即

$$f''(\xi)=g''(\xi)$$

13. 函数$f(x),g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)二阶可导，且$g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$。 求证

（1） $g(x)\neq 0$，$\forall \mathrm{x}\in(a,b)$；

（2）$\exists c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{f''(c)}{g''(c)}$。

证明：（1）用反证法，若在(a,b)内存在$c\in(a,b)$使得$g(c)=0$，

则由 Rolle 定理，$\exists c_1\in(a,c)$，$\exists c_2\in(c,b)$，使得$g'(c_1)=g'(c_2)=0$。

再由 Rolle 定理可知，$\exists c_0\in(c_1,c_2)$，使得$g''(c_0)=0$。此与题设矛盾。

（2）记$F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则函数$F(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)可导，

且$F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理，$\exists c\in(a,b)$，使得$F'(c)=0$，

也即 $F'(c)=f(c)g''(c)-f''(c)g(c)=0$，由此导出结论（2）。证毕。

14. 对任意正整数 n，证明方程$e^x-x^n=0$至多有三个不同的零点。

证明：显然方程$e^x-x^n=0$和方程$e^{-x}x^n-1=0$有相同的零点。考虑函数

$f(x) := e^{-x}x^n - 1$。易见 $f'(x) = e^{-x}x^{n-1}(n - x)$ 有且仅有两个不同的零点（实根）。由 Rolle 定理可知， $f(x)$ 至多有三个不同的零点。从而方程 $e^x - x^n = 0$ 至多有三个不同的实零点。结论得证。

注：在利用中值定理估计函数零点的个数时，如何构造辅助函数是非常重要的事情。对于本题而言，首先想到的辅助函数自然是 $g(x) := e^x - x^n$。但是估计导数 $g'(x) = e^x - nx^{n-1}$ 的零点个数，并不比估计函数 $g(x)$ 本身的零点个数来得更容易。 因此当我们对某个辅助函数作估计遇到困难时，应该考虑选取其他辅助函数。选取不同的辅助函数，估计的难度一般说来是不同的。本题提供了一个很好的例子。

三．泰勒公式

15. 确定 a, b 的值，使当 $x \to 0$ 时， $f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 与 x^5 为同阶无穷小。

【考点】Taylor 展开

【解析】

$$f(x) = x - a\sin x - \frac{1}{2}b\sin 2x$$

$$= x - a[x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \circ(x^5)] - \frac{1}{2}b[2x - \frac{1}{6}(2x)^3 + \frac{1}{120}(2x)^5 + \circ(x^5)]$$

$$= (1 - a - b)x + \frac{1}{6}(a + 4b)x^3 - \frac{1}{120}(a + 16b)x^5 + \circ(x^5),$$

当 $\quad 1 - a - b = 0, a + 4b = 0$

即 $\quad a = 4/3, b = -1/3$

便有 $f(x) = \frac{2}{15}x^5 + \circ(x^5)$，

亦即 $f(x) = x - (a + b\cos x)\sin x$ 与 x^5 为同阶无穷小。

16. 若 $f(x)$ 导数连续且 $f'(1) = 1$，求 $f(\cos x) - f(\frac{2}{2 + x^2})$ 当 $x \to 0$ 时等价无穷小量的阶。

【解析】 $f(\cos x) = f(1+(\cos x - 1)) = f(1) + f'(1)(\cos x - 1) + O(x^4)$，

$$f(\frac{2}{2-x^2}) = f(1+\frac{x^2}{2-x^2}) = f(1) + f'(1)(\frac{x^2}{2-x^2}) + O(x^4), \qquad x \to 0$$

$$f(\cos x) - f(\frac{2}{2+x^2}) = (\cos x - 1) - \frac{x^2}{2+x^2} + O(x^4) = -x^2 + O(x^4), \quad x \to 0$$

故等价无穷小量的阶为 2。

17. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2x}$ 在 $x_0 = 1$ 处带 Peano 的 Taylor 公式为 ______________。

【答案】 $-1-(x-1)^2-(x-1)^4-\cdots-(x-1)^{2n}+o\left((x-1)^{2n}\right)$

【考点】Taylor 展开。

【解析】 $f(x) = -\dfrac{1}{1-(x-1)^2} = -1-(x-1)^2-(x-1)^4-\cdots-(x-1)^{2n}+o\left((x-1)^{2n}\right)$,

$x \to 1$。

18. 设 $f(x) = x^2 \cos x$，则 $f^{(30)}(0) =$ _____________ 。

【答案】 870

【考点】 利用 Taylor 展开的系数求高阶导数。

【解析】 $f(x) = x^2 \cos x = x^2 - \dfrac{1}{2!}x^4 + \cdots + \dfrac{1}{28!}x^{30} + o(x^{30}), \quad x \to 0$，

$$f^{(30)}(0) = 30! \cdot \frac{1}{28!} = 870$$

19. 求函数 $f(x) = x^2 \ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)$ $(n \ge 3)$。

【考点】莱布尼茨公式求高阶导数，Taylor 展开

【解析】方法一：

由莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \cdots + u^{(0)}v^{(n)}$$

及 $\left[\ln(1+x)\right]^{(k)}=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^{k}}$（$k$ 为正整数）

得 $f^{(n)}(x)=x^{2}\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}}+2nx\dfrac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}+n(n-1)\dfrac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{(1+x)^{n-2}}$

于是可得

$$f^{(n)}(0)=(-1)^{n-3}n(-1)(n-3)!=\frac{(-1)^{n-1}n!}{n-2}$$

方法二：由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)x+\frac{f^{''}(0)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+\cdots$$

及

$$x^{2}\ln(1+x)=x^{2}\left[x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots\right]$$
$$=x^{3}-\frac{x^{4}}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots$$

比较 x^{n} 的系数得

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^{(n-1)}}{n-2}$$

所以 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{(n-1)}n!}{n-2}$