第七周习题课　导数与微分

一阶导数与微分

1. 设 $y=f(x)$ 在 $B(x_0)$ 有定义，则与 $f'(x_0)$ 存在等价的是

(A) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}$ 存在；

(B) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0)-f(x_0-\Delta x^3)}{\Delta x^3}$ 存在；

(C) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+2\Delta x)-f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}$ 存在；

(D) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x^2)-f(x_0)}{\Delta x^2}$ 存在。

2. 设 $y=f(x)$ 在 $B(x_0)$ 有定义，则与 $f'(x_0)$ 存在不等价的是　　　(B)。

(A) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+kx)-f(x_0)}{x}\quad (k\neq 0,1)$

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0+\alpha(x))-f(x_0)}{\alpha(x)}\quad \left(\alpha(x)>0,\quad \lim\limits_{x\to 0}\alpha(x)=0\right)$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\left(f\left(x_0-\dfrac{1}{x}\right)-f(x_0)\right)\right]$ 存在

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x_0-x)-f(x_0)}{\sin x}$　存在

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos}{\sqrt{x}} & x>0\\ x^2g(x) & x\leq 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处有（ D ）。

(A) 极限不存在；　　　　(B) 极限存在，但不连续

(C) 连续，但不可导；　　(D) 可导

解：首先考查 $x=0$ 处的左右极限。

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}x^2g(x)=0\ (\text{因为 } g(x) \text{ 有界})$$

因此$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

其次再考查 $x=0$ 处的左右导数是否存在。

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-} xg(x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2x^{3/2}}=0,$$

因此 $f'(0^+)$ 与 $f'(0^-)$ 均存在，且相等。于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$，答案为(D)。

4. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则必有 (A)。

(A) $f(0)=0$，　(B) $f'(0)=0$

(C) $f(0)+f'(0)=0$，　(D) $f(0)-f'(0)=0$

解：$F(x)=f(x)+f(x)|\sin x|$，由于 $f(x)$ 可导，若令 $\varphi(x)=f(x)|\sin x|$，则只须使 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

注意到 $\varphi(0)=0$，只须使 $\varphi'(0^-)=\varphi'(0^+)$。

$$\varphi'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-f(0)$$

$$\varphi'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\varphi(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0),$$

因此应有 $f(0)=-f(0)$，或 $2f(0)=0$，即得到 $f(0)=0$ 时才能使 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导。

所以答案为(A)。

5. $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 有几个不可导点?

解：两个，0,1

6. 设函数 $g(x)$ 在 $(-1,1)$ 上连续。定义 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$。

若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，

(I) 求函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的值;

(II) 问函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处是否可导? 若可导，求出导数值。

解：(I) 由假设知 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，故有 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=f(0)=2$。根据函数 $g(x)$ 的连续性知 $g(0)=\lim\limits_{x\to 0} g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}\cdot x=0$。

(II) 由于 $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\dfrac{g(x)}{x}\to 2$，$x\to 0$。因此函数 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处可导且 $g'(0)=2$。

7. $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，$f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\dfrac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$

解：(1) 先考虑情形：$f'(a)\neq 0$。

此时我们可以断言，存在 $\delta>0$，使得 $f(x)\neq f(a)$，$\forall x\in(a-\delta,a+\delta)\setminus\{a\}$。

因此当 $x>0$ 充分大的时候，$f(a+\frac{1}{x})\neq f(a)$。

于是我们可以将函数 $\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]$ 表示为如下形式：

$$\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\left[1+\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)}\right]^{\frac{f(a)}{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}\cdot\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{\frac{1}{x}}\frac{1}{f(a)}}\text{。}$$

注意到

$$\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{f(a)}(\neq 0)\to 0,\quad x\to+\infty,$$

以及 $\dfrac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{\frac{1}{x}}\to f'(a)$，$x\to+\infty$，

我们就得到 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$。

(2) 再来考虑情形：$f'(a)=0$。记 $\delta(x)=\dfrac{f(a+\dfrac{1}{x})-f(a)}{f(a)}$，则

$$x\delta(x)=\frac{f(a+\frac{1}{x})-f(a)}{\frac{1}{x}}\frac{1}{f(a)}\to\frac{f'(a)}{f(a)}=0,\quad x\to+\infty\text{。}$$

另一方面，$\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\left[1+\delta(x)\right]^x$。于是

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left[1+\delta(x)\right]^x=\lim_{x\to+\infty}x\ln(1+\delta(x))=\lim_{x\to+\infty}x\delta(x)=0,$$

因此$\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x = \mathrm{e}^{\ln[1+\delta(x)]^x} \to e^0 = 1$， $x \to +\infty$。

以上两个情形可以统一写作 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ 。

注：同理可证 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ 。 解答完毕。

8. 讨论 $f(x)=\begin{cases} x(1-x), & x\in \mathrm{Q}; \\ x(1+x), & x\in \mathrm{R}\setminus \mathrm{Q} \end{cases}$ 的连续性与可微性。

解：（1）连续性讨论

在 $x_0=0$ 点，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$，当 $|x|<\delta$ 时，$1+|x|<2$，

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)|\le|x|(1+|x|)\le 2|x|<\varepsilon$$

所以 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 点连续。

在 $x_0\neq 0$ 点，取有理数列 $\{x_n\}, x_n\in \mathrm{Q}, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$， $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(1-x_n)=x_0(1-x_0)$；

取无理数列 $\{x_n\}, x_n\in \mathrm{R}\setminus \mathrm{Q}, \lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$， $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n(1+x_n)=x_0(1+x_0)$；

而 $x_0\neq 0$， $x_0(1-x_0)\neq x_0(1+x_0)$， $f(x)$ 在 $x_0\neq 0$ 点不连续。

（2）可微性讨论

在 $x_0\neq 0$ 点， $f(x)$ 不连续，所以不可微；

在 $x_0=0$ 点，

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x}-1\right|=\left|\frac{f(x)-x}{x}\right|=|x|\to 0,\quad x\to 0 \text{ 时, 所以} \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=1,\ f'(0)=1,$$

可微。

9. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续，问 $f(x)=g(x)\sin 2x$ 在 $x=0$ 点是否连续，是否可导，若可导，求其导数。

解： $g(x)$ 在 $x=0$ 点连续， $\sin 2x$ 在 $x=0$ 点连续，所以 $f(x)=g(x)\sin 2x$ 在 $x=0$ 点连续。

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(\Delta x)\sin 2\Delta x}{\Delta x}=2g(0)$$

所以 $f(x)=g(x)\sin 2x$ 在 $x=0$ 点可导.

10. 设 $f(0)=1, g(1)=2, f'(0)=-1, g'(1)=-2$， 求

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-f(x)}{x}$ （2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x f(x)-1}{x}$ （3） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}g(x)-2}{x-1}$

解：（1）

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-f(0)+f(0)-f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-f'(0)=1.$$

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x[f(x)-f(0)]+f(0)(2^x-1)}{x}=f'(0)+\ln 2=-1+\ln 2$.

（3）

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}g(x)-2}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}[g(x)-g(1)]+g(1)[\sqrt{x}-1]}{x-1}=1\cdot g'(1)+2\times\dfrac{1}{2}=-1$.

11. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$，求证： $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且

$f'(0)=A$。

证明：因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=A$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}=A$，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall x:0<|x|<\delta,\quad \left|\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}-A\right|<\varepsilon,$$

即
$$-\varepsilon\cdot\frac{1}{2}<\frac{f(x)-f(\frac{x}{2})}{x}-A\cdot\frac{1}{2}<\varepsilon\cdot\frac{1}{2},$$

$$-\varepsilon\cdot\frac{1}{2^2}<\frac{f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2^2})}{x}-A\cdot\frac{1}{2^2}<\varepsilon\cdot\frac{1}{2^2},$$

……

$$-\varepsilon\cdot\frac{1}{2^n}<\frac{f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n})}{x}-A\cdot\frac{1}{2^n}<\varepsilon\cdot\frac{1}{2^n},$$

相加， $\forall n\in\mathrm{N}^+$，

$$-\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{f(x)-f(\frac{x}{2^n})}{x}-A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)<\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$-\varepsilon+\frac{f(\frac{x}{2^n})}{x}+A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1\right)<\frac{f(x)}{x}-A<\varepsilon+\frac{f(\frac{x}{2^n})}{x}+A\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}-1\right).$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-1\right)=0$，且函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，所以取 n 足够大，可以使得 $\left|\dfrac{f(\frac{x}{2^n})}{x}\right|<\varepsilon,\left|A\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}-1\right)\right|<\varepsilon$， $\left|\dfrac{f(x)}{x}-A\right|<3\varepsilon$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且

$f'(0)=A$。

问题: 若本题没有“函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续”条件, 是否可以同样证明“ $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导, 且 $f'(0)=A$”?

12. 设 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$，其中 $g'(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域连续，求 $f''(a)$。

解：$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)$,

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x)}{x-a}=2g(a).$$

问题：如下做法是否正确？

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2 g'(x),$$

$$f''(x)=2g(x)+4(x-a)g'(x)+(x-a)^2 g''(x),$$

所以 $f''(a)=2g(a)$。

二．隐函数，反函数，参数函数，高阶导数

13. 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{x+y}-\sin(x+y)=x^3$ 所确定的二次可导函数。求 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

解：在方程 $e^{x+y}-\sin(x+y)=x^3$ 中，视 y 为 x 的可导函数，两边关于 x 求导得

$$[e^{x+y}-\cos(x+y)](1+y')=3x^2\text{。}(*)$$

从中解出 y' 得

$$y'=\frac{3x^2}{e^{x+y}-\cos(x+y)}-1\text{。}\qquad (**)$$

对等式（*）再次关于 x 求导得

$$[e^{x+y}+\sin(x+y)](1+y')^2+[e^{x+y}-\cos(x+y)]y''=6x\text{。}\qquad (***)$$

将一阶导数表达式（**）上式(***)得

$$y''=\frac{6x-[e^{x+y}+\sin(x+y)](1+y')^2}{e^{x+y}-\cos(x+y)}$$

$$=\frac{6x[e^{x+y}-\cos(x+y)]^2-9x^4[e^{x+y}+\sin(x+y)]}{[e^{x+y}-\cos(x+y)]^3}\text{。}$$

14. 设函数 $y=f(x)$ 的三次可导，并且 $f'(x)\neq 0$，其反函数记 $x=g(y)$。试用函数 $y=f(x)$ 的前三阶导数来表示反函数 $x=g(y)$ 的前三阶导数。（本题本质上同第三章总复习题题 15）

解：记 $x=\mathrm{g}(y)$，由反函数定理得

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

进一步关于 y 求导得

$$g''(y)=\frac{d}{dy}\big(g'(y)\big)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\frac{dx}{dy}=\frac{-1}{[f'(x)]^2}f''(x)\frac{1}{f'(x)}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}\text{。}$$

再次关于 y 求导得

$$g'''(y)=\frac{d}{dy}\big(g''(y)\big)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-f''(x)}{f'(x)^3}\right)\frac{dx}{dy}=\left(\frac{-f'''(x)}{f'(x)^3}+\frac{3f''(x)}{[f'(x)]^4}f''(x)\right)\frac{1}{f'(x)}=$$

$$=\frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}-\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^4}\text{。}$$

解答完毕。

15. 求函数 $y=x+\ln(1+x)$ 反函数的二阶导数。

16. 求参数函数 $\begin{cases}x=t+e^t\\ y=t+\ln(1+t)\end{cases}$ 的二阶导数。

17. $f(x)=(x+1)^2\ln(1-x)$，求 $f^{(n)}(-1)$

解：$f^{(0)}(-1)=0,\quad f'(-1)=0,\quad f''(-1)=2\ln 2$

记 $u(x)=(x+1)^2,\quad v(x)=\ln(1-x)$，当 $n>2$ 时，

$$\begin{aligned}f^{(n)}(-1)&=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}(-1)v^{(k)}(-1)\\&=C_n^{n-2}u^{(2)}(-1)v^{(n-2)}(-1)+C_n^{n-1}u'(-1)v^{(n-1)}(-1)+C_n^n u(-1)v^{(n)}(-1)\\&=2C_n^{n-2}v^{(n-2)}(-1)\end{aligned}$$

而 $v'(x)=\dfrac{1}{x-1},v''(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^2},\cdots,v^{(m)}(x)=\dfrac{(-1)^{m-1}}{(x-1)^m}$

$$f^{(n)}(-1)=2C_n^{n-2}\frac{(-1)^{n-3}}{(-2)^{n-2}}$$

18. 设 $y=(\arcsin x)^2$

(a) 求证：$(1-x^2)y''-xy'=2$；

(b) 求 $y^{(n)}(0)$。

解：(a) $$y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(1-x^2)(y')^2=4y$$

两边对 x 求导,

$$(1-x^2)\cdot 2yy'-2x(y')^2=4y'$$

$$(1-x^2)y''-xy'=2$$

（b） $y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=2$

$(1-x^2)y''-xy'=2$ 的两边对 x 求 n 阶导,

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$$

令 $x=0$,

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

$$y'(0)=0\Rightarrow y^{(2n+1)}(0)=0$$

$y''(0)=2\Rightarrow y^{(2n)}(0)=2[(2n-1)!!]^2$