微积分 A（1）第 6 周习题课

二．函数极限

1. 用定义证明：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1})=0$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

2. （1）讨论极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ 是否存在；

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(x^2)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$，

求证： $f(x)=f(1), x\in(0,+\infty)$。

4. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$，求证：$\forall a>0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

5. 求 $\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x-1}-1}\right)$。

6. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{1/x}$。（习题 2.3 题 8（6），p.51）

7. 求 $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$。 由于 $\tan(2y+\frac{\pi}{2})=-\dfrac{1}{\tan 2y}=-\dfrac{2\tan y}{1-\tan^2 y}$.

写错了. 答案为 e^{-1}.

8. 设 $a>0$，确定 p 的值，使得极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^p(a^{1/x}-a^{1/(x+1)})$ 存在。（习题 2.4 题 12，p.57）

9. 书上 P.65，总复习题，第 11 题

（1）求常数a,b，使得$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b}=-\frac{1}{2}$；

（2）已知$\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)$存在，求常数$c$及极限值。

$c=\frac{1}{3}$. $(x^3+x^2)^{\frac{1}{3}}-x$

$=(x^3)^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}-x$

$=x\left((1+\frac{1}{x})^{\frac{1}{3}}-1\right)=x\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{3}$

二．连续函数

10．设$f(x)=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{2+3e^{\frac{2}{x}}}$，则$x=0$是$f(x)$的（ B ）。

$x\to0^-$是$\frac{1}{2}$. $x\to0^+$是0

(A)可去间断点。(B)跳跃间断点。(C) 无穷间断点。(D) 震荡间断点。

11．设$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}\in C(-\infty,+\infty)$，求$a,b$。

12．设$f(x)$在(a,b)内至多只有第一类间断点，且

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y\in(a,b) \qquad (*)$$

证明$f\in C(a,b)$。

13．设$f\in C(R)$，且$\forall x,y\in R, f(x+y)=f(x)+f(y)$，求证：$\exists a\in R, f(x)=ax$。

证明：（1）$x=y=0$，则$f(0+0)=f(0)+f(0)$，所以$f(0)=0$；

（2）记$a=f(1)$，则当$x=n\in N^+$，$f(n)=f(1+1+\cdots+1)=nf(1)=an$；

（3）当$x=-n\in N^-$，$0=f(0)=f(-n+n)=f(-n)+f(n)$，

$f(-n)=-f(n)=a(-n)$；

（4）当$x=\frac{1}{n},n\in N^+\cup N^-$，$a=f(1)=f(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n})=nf(\frac{1}{n})$，

$f(\frac{1}{n})=a\cdot\frac{1}{n}$；

（5）当$x=\frac{m}{n}\in Q$，$f(\frac{m}{n})=mf(\frac{1}{n})=a\cdot\frac{m}{n}$。

（6）因为$f\in C(R)$，当x为无理数是用有理数列逼近，$f(x)=ax$正确。

类似的：$\forall x,y\in R, f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$？

$f(xy)=f(x)+f(y)$?

$f(xy)=f(x)\cdot f(y)$?

14. 设 $f\in C[a,b]$，且存在 $q\in(0,1)$，使得 $\forall x\in[a,b]$，$\exists y\in[a,b]$，满足 $|f(y)|\le q|f(x)|$。

证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=0$。

15. 设 $f\in C[a,b]$，$m(x)=\inf\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}, M(x)=\sup\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$，求证 $m(x),M(x)\in C[a,b]$。

16. 书上 P.64，第 10 题

设 $f\in C(\mathrm{R})$，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$，证明 f 在 R 上存在最小值。

17. 设 $f\in C[a,b]$，且 $f([a,b])\subset[a,b]$，证明：$\exists\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=\xi$。用什么定理？

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，且满足 $f(0)=f(2a)\ne f(a)$，试证明存在 $x_0\in(0,a)$，

使得 $f(x_0)=f(x_0+a)$。

如何构造辅助函数？

19. 书上 P.64，总复习题，第 7 题

设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，计算

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\right)$$

20. 设 $f\in C[a,b]$，且 $f([a,b])\subset[a,b]$，且 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\forall x,y\in[a,b]$。$|\forall x_1\in[a,b]$，

记 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)], n=1,2,\ldots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 有极限 x_0，且 $f(x_0)=x_0$。

21. 书上 P.65，总复习题，第 10 题

若对于 $x\in(-1,1)$，有 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sin kx\right|\le|\sin x|$，求证 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k\right|\le1$。