微积分 A（1）第 5 周习题课

一．实数理论（单调有界，夹逼定理，柯西收敛准则）　续

1. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)=\dfrac{1}{4}$。

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}$（$a>0$）。

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$。

4. 证明：下列数列收敛

（1）$x_n=(1+\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{2^2})\cdots(1+\dfrac{1}{2^{2^n}})$；

（2）$x_n=(1+\dfrac{1}{2})(1+\dfrac{1}{2^2})\cdots(1+\dfrac{1}{2^n})$；

类似的（3）$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n}),\quad |a|<1$；

（4）$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n),\quad |a|<1$。

5. 下列哪些命题与柯西准则等价，证明你的结论或举出反例。

（1）对于任意的 $p\in\mathrm{N}^+$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$。

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-a_N|<\varepsilon$

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in\mathrm{N}^+$ 以及 $A_\varepsilon\in\mathrm{R}$，只要 $n>N_\varepsilon$，就有 $|a_n-A_\varepsilon|<\varepsilon$

6. P.23，第 7 题

证明：若数列 $\{a_n\}$ 无界，但不趋于无穷，则 $\{a_n\}$ 存在两个分别趋于无穷和收敛的子列。

7. 设 $b_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n$，其中 $|q|<1$ 且数列 $\{a_k\}$ 有界，试证数列 $\{b_n\}$ 收敛.

8. 已知 Kepler 方程为

$$x=y_0+\varepsilon\sin x\,(0<\varepsilon<1),$$

设 $x_0=y_0$， $x_n=y_0+\varepsilon\sin x_{n-1}(n\in\mathrm{N}^+)$ 。证明 $\{x_n\}$ 收敛。

9. 设 $x_n=\dfrac{\sin 1}{2}+\dfrac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\dfrac{\sin n}{2^n}$，判断数列 $\{x_n\}$ 是否收敛。

10. 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $|x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\cdots+|x_2-x_1|\le M \quad (n=2,3,\cdots)$，则称数列 $\{x_n\}$ 为有界变差数列。证明有界变差数列一定收敛。

11. 设 $x_1=3, x_n=3+\dfrac{4}{x_{n-1}}, n=2,3,\cdots$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛。

12. 设 $x_0>0$， $x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$ 。证明：$\{x_n\}$ 收敛，并求极限值。

二．数列极限的计算

13. 求下列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$