一．实数理论（单调有界，夹逼定理，柯西收敛准则） 续

1. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$。

解：记 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$，则

$$a_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2+k}-n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\sqrt{n^2+k}}。$$

由此可知

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n(n+\sqrt{n^2+n})}\le a_n\le\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n(n+\sqrt{n^2+1})}。$$

求出分子的和就得到

$$\frac{n(n+1)/2}{n(n+\sqrt{n^2+n})}\le a_n\le\frac{n(n+1)/2}{n(n+\sqrt{n^2+1})}。$$

根据两边夹法则知 $a_n\to\frac{1}{4}$。

2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}$ （$a>0$）。

解：（I）当 $0<a\le 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}=1$；

（II）当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+a^n}=a$。

注：当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{a^n}=0$。

考虑： $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n}=?$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^n+b^n+c^n}=?$

3. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$。

解：解法一 $1\le(n!)^{\frac{1}{n^2}}\le(n^n)^{\frac{1}{n^2}}=n^{\frac{1}{n}}\to 1, n\to\infty$，所以由夹逼定理，$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$。

解法二：令 $x_n=(n!)^{\frac{1}{n^2}}$，则 $\ln x_n=\frac{1}{n^2}(\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n)$，

由 Stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2-(n-1)^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{2n-1}=0$，所以

$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$。

判断 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$ 是否存在？考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{1}\cdot\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\dfrac{1}{n}}=0$（平均收敛定理）。

4. 证明：下列数列收敛

（1）$x_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})$；

（2）$x_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})$；

类似的（3）$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，$|a|<1$；

（4）$x_n=(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)$，$|a|<1$。

$|a|<1$ 的条件是否必须加？若 $|a|\geq 1$，会发生什么情况？

证明：（1）$x_n=\dfrac{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^{2^n}})}{1-\frac{1}{2}}=2(1-\dfrac{1}{2^{2^{n+1}}})\to 2$。

（2）$(1+\frac{1}{n})^n<e$，$1+\frac{1}{n}<e^{\frac{1}{n}}$，所以 $1+\frac{1}{2^n}<e^{\frac{1}{2^n}}$。显然，数列 $\{x_n\}=\left\{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})\right\}$ 单调增，且

$$x_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{2^n})<e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2^2}}\cdots e^{\frac{1}{2^n}}=e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}<e$$，有界，所以数列 $\{x_n\}$ 收敛。

数列 $x_n=(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\cdots(1+\frac{1}{n})$ 的收敛性如何？

$\{a_n\}$ 是柯西列 $\Leftrightarrow$
$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N^*$, $\forall n>N$,
$\forall p\in N^*$ 有 $|a_{n+p}-a_n|<\varepsilon$

5. 下列哪些命题与柯西准则等价，证明你的结论或举出反例。

（1）对于任意的 $p\in\mathrm{N}^+$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$。

此处 p 一经选定则不可改

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathrm{N}^+$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-a_N|<\varepsilon$

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in\mathrm{N}^+$ 以及 $A_\varepsilon\in\mathrm{R}$，只要 $n>N_\varepsilon$，就有 $|a_n-A_\varepsilon|<\varepsilon$

解：（1）不等价，反例 $a_n=\ln n$。事实上，（1）等价于

$$\forall p\in\mathrm{N}^+,\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathrm{N}^+,\text{只要 } n>N,\text{就有 } |a_{n+p}-a_n|<\varepsilon。$$

（2）等价。（2）推出柯西准则：由（2）$\forall\varepsilon>0$，对 $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$ $\exists N\in \mathrm{N}^{+}$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-a_N|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 因此 $n,m>N$ 时 $|a_n-a_m|\le|a_n-a_N|+|a_m-a_N|<\dfrac{\varepsilon}{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。

柯西准则推出（2）：由柯西准则，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^{+}$，只要 $n,m>N$，就有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$。

取 $\exists N_1=N+1$，$n>N_1$ 时，$|a_n-a_{N_1}|<\varepsilon$.

(3)等价。（3）推出柯西准则的方法类似于（2）

柯西准则推出（3）：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in \mathrm{N}^{+}$，只要 $n,m>N$，就有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$。

令 $A_\varepsilon=a_{N+1}$ 即可。

6. P.23，第 7 题

证明：若数列 $\{a_n\}$ 无界，但不趋于无穷，则 $\{a_n\}$ 存在两个分别趋于无穷和收敛的子列。

证明：因为数列 $\{a_n\}$ 无界，所以 $\forall M>0,\exists n\in \mathrm{N}^{+},a_n>M$。（实际上这样的正整数 n 有无穷多个）。取 $M=1,\exists n_1\in \mathrm{N}^{+},a_{n_1}>1$，

$M=2,\exists n_2\in \mathrm{N}^{+}(n_2>n_1),a_{n_2}>2$，

……

$M=k,\exists n_k\in \mathrm{N}^{+}(n_k>n_{k-1}),a_{n_k}>k$，

……

如此选出的子列 $\{a_{n_k}\}$ 满足 $a_{n_k}>k$，$\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\infty$。

又因为数列 $\{a_n\}$ 不趋于无穷，所以 $\exists M>0,\forall N\in \mathrm{N}^{+},\exists n>N,|a_n|\le M$。（实际上这样的正整数 n 也有无穷多个）。

取 $N=1,\exists n_1\in \mathrm{N}^{+},|a_n|\le M$，

$N=2,\exists n_2\in \mathrm{N}^{+}(n_2>n_1),|a_n|\le M$，

……

$N=k,\exists n_k\in \mathrm{N}^{+}(n_k>n_{k-1}),|a_n|\le M$，

……

如此选出的子列 $\{a_{n_i}\}$ 是有界数列，而有界数列 $\{a_{n_i}\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_{i_j}}\}$。

7. 设$b_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$，其中$|q|<1$且数列$\{a_k\}$有界，试证数列$\{b_n\}$收敛.

证明：Cauchy 收敛准则．设$|a_k| \le M$，则

$$|b_{n+m} - b_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_{n+m}q^{n+m}| \le M\,|q^{n+1}|\frac{1-|q^m|}{1-|q|} < \frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1}.$$

由此易证数列$\{b_n\}$是一 Cauchy 列，所以收敛．

8. 已知 Kepler 方程为

$$x = y_0 + \varepsilon \sin x \ (0<\varepsilon<1),$$

设$x_0 = y_0$，$x_n = y_0 + \varepsilon \sin x_{n-1} (n \in \mathrm{N}^+)$。证明$\{x_n\}$收敛。

证明：因为$|\sin x| \le |x|$，所以$|x_{n+1} - x_n| \le \varepsilon |x_n - x_{n-1}| \le \cdots \le \varepsilon^n |x_1 - x_0|$

$$\begin{aligned}|x_{n+p} - x_n| &\le |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \\ &\le \left(\varepsilon^{n+p-1} + \varepsilon^{n+p-2} + \varepsilon^n\right)|x_1 - x_0| \le \frac{|x_1 - x_0|}{1-\varepsilon}\varepsilon^n\end{aligned}$$

因为$0<\varepsilon<1$，$\{x_n\}$满足 Cauchy 准则，收敛。

9. 设$x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \dfrac{\sin n}{2^n}$，判断数列$\{x_n\}$是否收敛。

解：$|x_{n+p} - x_n| = \left|\dfrac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dfrac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \le \dfrac{1}{2^{n+1}} + \dfrac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n+p}} \le \dfrac{1}{2^n}$。

$\forall \varepsilon > 0$，取$N = \left[\log_2 \dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$，$\forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}^+$，$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$，所以数列$\{x_n\}$收敛。

10. 设数列$\{x_n\}$满足条件$|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_2 - x_1| \le M \quad (n = 2, 3, \cdots)$，则称数列$\{x_n\}$为有界变差数列。证明有界变差数列一定收敛。

证明：令$y_1 = 0, y_n = |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_2 - x_1|$，则数列$\{y_n\}$单调增，有界，所以数列$\{y_n\}$收敛。即：$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathrm{N}^+, \forall n, m > N (n > m)$，$|y_n - y_m| < \varepsilon$。

$$|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon$$

而

$$|x_n - x_m| = |(x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{m+1} - x_m) =$$

$$\le |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{m+1} - x_m| < \varepsilon$$

所以数列$\{x_n\}$为 Cauchy 数列，收敛。

可以证明：设数列$\{x_n\}$满足条件$|x_n - x_{n-1}| \le r|x_{n-1} - x_{n-2}| \quad (n = 3, 4, \cdots)$，其中$0 < r < 1$为常数，则称数列$\{x_n\}$为压缩数列。压缩数列一定是柯西收敛，必收敛。

可以用有界变差数列证明：$|x_n - x_{n-1}| \le r|x_{n-1} - x_{n-2}| \le r^2|x_{n-2} - x_{n-3}| \le \cdots \le r^{n-2}|x_2 - x_1|$，所以

$$|x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_2 - x_1| \le (r^{n-2} + r^{n-3} + \cdots + 1)|x_2 - x_1| \le \frac{x_2 - x_1|}{1 - r} = M$$

所以压缩数列一定是有界变差数列，收敛。

11. 设$x_1 = 3, x_n = 3 + \dfrac{4}{x_{n-1}}, n = 2, 3, \cdots$，证明数列$\{x_n\}$收敛。

证明：由已知条件知$x_n \ge 3, n = 1, 2, \cdots$。

$$|x_{n+1} - x_n| = \left|\left(3 + \frac{4}{x_n}\right) - \left(3 + \frac{4}{x_{n-1}}\right)\right| = \frac{4}{x_n x_{n-1}}|x_n - x_{n-1}| \le \frac{4}{9}|x_n - x_{n-1}|$$

所以数列$\{x_n\}$是压缩的，收敛。记$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则在等式$x_n = 3 + \dfrac{4}{x_{n-1}}$两边同时取极限，可得$A = 3 + \dfrac{4}{A} \quad (A \ge 3)$，所以$A = 4$。

注：看看数列$\{x_n\}$是否单调？$\{x_{2n}\}$和$\{x_{2n+1}\}$是否单调？有界？

12. 设$x_0 > 0$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$。证明：$\{x_n\}$收敛，并求极限值。

证明：**数列$\{x_n\}$是否为单调数列？**

显然，$0 < x_n < 1$。

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{1 + x_n} - \frac{1}{1 + x_{n-1}} = \frac{1}{(1 + x_n)(1 + x_{n-1})}(x_{n-1} - x_n) = \frac{x_n}{1 + x_n}(x_{n-1} - x_n)。$$

而$0 < x_n < 1$，$2x_n \le 1 + x_n$，$|x_{n+1} - x_n| = \left|\dfrac{x_n}{1 + x_n}\right| |x_{n-1} - x_n| \le \dfrac{1}{2}|x_n - x_{n-1}|$，所以数列$\{x_n\}$是压缩的，收敛。

设极限值为A，则$A=\frac{1}{1+A}$， $A=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。

二．数列极限的计算

13. 求下列极限

（1）$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$　　　（2）$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

14. 解:（1）$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0$ 。

（2）$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)=1。$$