习题课（第 4 周）数列，实数

1. 设 A,B 均是由**非负实数**构成的有界数集，定义 $AB=\{xy\mid x\in A,y\in B\}$。证明：

（1）$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$；　　（2）$\inf AB=\inf A\cdot\inf B$

证明：(1) 设 $a=\sup A,b=\sup B$，若 $a=0$ 或 $b=0$，则由条件：A,B 均是由**非负实数**构成的有界数集，可知 $A=\{0\}$ 或 $B=\{0\}$，结论显然成立.

下面设 $a,\ b>0$。

由确界的定义，$\forall x\in A,y\in B$ 均有 $0\le x\le a,0\le y\le b$，因此 $0\le xy\le ab$，即 ab 是集合 AB 的一个上界。

另一方面 $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in A,y_\varepsilon\in B$，使得 $x_\varepsilon>a-\dfrac{\varepsilon}{a+b},y_\varepsilon>b-\dfrac{\varepsilon}{a+b}$，因此

$$x_\varepsilon y_\varepsilon>(a-\frac{\varepsilon}{a+b})(b-\frac{\varepsilon}{a+b})=ab-\frac{\varepsilon}{a+b}(a+b)+(\frac{\varepsilon}{a+b})^2>ab-\varepsilon$$

即 $\sup AB=ab=\sup A\cdot\sup B$。

注：(I) $\varepsilon>0$，所以实数 $\dfrac{\varepsilon}{a+b}>0$，由确界的定义，$\exists x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon>a-\dfrac{\varepsilon}{a+b}$。

(II)（2）的证明中，也要用到

$$\forall\varepsilon>0，对于\frac{\varepsilon}{a+b},\ \exists x_\varepsilon\in A,y_\varepsilon\in B 使得 x_\varepsilon<a+\frac{\varepsilon}{a+b},y_\varepsilon<b+\frac{\varepsilon}{a+b}$$

的技巧。

（2）略

(III) 本题若没有条件“A,B 均是由非负实数构成的有界数集”，会发生什么情况？

2. 设 A,B 均是非空有界数集，定义 $A+B=\{x+y\mid x\in A,y\in B\}$。证明：

（1）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；　　（2）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

证明：仅证（1）；（2）的证法类似于（1）。

设 $a=\inf A,b=\inf B$，由确界的定义，$\forall x\in A,y\in B$ 均有 $x\ge a,\ y\ge l$，因此 $x+y\ge a+l$，即 $a+b$ 是集合 $A+B$ 的一个下界；

另一方面由确界的定义，$\forall\varepsilon>0,\exists x_\varepsilon\in A,y_\varepsilon\in B$，使得 $x_\varepsilon<a+\dfrac{\varepsilon}{2},y_\varepsilon<b+\dfrac{\varepsilon}{2}$，因此

$x_\varepsilon + y_\varepsilon < a+b+\varepsilon$，即 $\inf(A+B) = a+b = \inf A + \inf B$。

3. 设 $k>0, a>1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

证明：（1）设 $k=1$，记 $\delta = a-1>0$，则

$$\frac{n^k}{a^n}=\frac{n}{(1+\delta)^n}=\frac{n}{1+n\delta+\frac{1}{2}n(n-1)\delta^2+\cdots+\delta^n}\le\frac{n}{\frac{1}{2}n(n-1)\delta^2}=\frac{2}{(n-1)\delta^2}$$

……

（2）$k>0$，$\dfrac{n^k}{a^n}=\left(\dfrac{n}{(a^{-k})^n}\right)^k$，而 $k>0, a>1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{(a^{-k})^n}\right)^k=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{(a^{-k})^n}\right)^k=0$。

4. （1）证明：数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减；

（2）证明：数列 $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛；

（3）求数列 $\left\{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right\}$ 的极限。

解：（1）$\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n^2-1}\right)^n>1+\dfrac{n}{n^2-1}>1+\dfrac{1}{n}$，

所以 $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n>\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}$，数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减；

（2）$a_{n+1}-a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\frac{n+1}{n}=\frac{1}{n+1}\left(1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[1-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$$

由（1），数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}=e$，所以 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}>e$，

$a_{n+1}-a_n<0$，数列 $\{a_n\}$ 单调减。下面证明数列 $\{a_n\}$ 有界。

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\left(\sum_{k=2}^{n}\left[\ln k-\ln(k-1)\right]\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)。$$

因为数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增，趋于$e$，所以$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1$，$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。故

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k-1}\right)>\frac{1}{n}>0,$$

数列$\{a_n\}$有界。因此数列$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$收敛；

（3）因为数列$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$收敛，所以记

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C,$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=C+o(1),n\to\infty。$$

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left(\ln(2n)+C+o(1)\right)-\left(\ln n+C+o(1)\right),\quad n\to\infty$$

$$=\ln 2。$$

5. （P18, 4）证明极限$\lim_{n\to\infty}a_n$存在：

（1）$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$

解：单调增，$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}\le 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$收敛，所以$\{a_n\}$有界。

（2）$a_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$

解：$a_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{n^n}$单调增。

因为$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增，趋于$e$，所以$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$，$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

$\ln a_n=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$收敛。所以所以$\{a_n\}$有上界。

（3）$a_n=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

解：单调增。

因为$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增，趋于$e$，所以$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$，$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1$，$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$。

$\ln a_n=\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$收敛。所以所以$\{a_n\}$有上界。

类似的：P. 19, 第 16，17 题

设$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$（易知数列$\{u_n\}$收敛于 e）.

（1）研究数列$\{u_n\}$的单调性；

（2）利用（1）的结果证明$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$对于任意正整数$n$都成立.

（3）证明：数列$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$收敛.

解：（1）

$$u_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$\geq\left(1+\frac{n}{n^2-1}\right)\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1}>1$$

所以数列$\{u_n\}$单调减.

（2）因为$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$单调减，$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$单调增，且都趋于$e$，所以

$$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e，\ (1+\frac{1}{n})^n<e.$$

两边取对数，得

$$(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})>1\Rightarrow\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}$$
$$n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})<e\Rightarrow\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

所以$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$；

（3）$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\dfrac{1}{n+1}-\ln(1+\dfrac{1}{n})$，由第 16 题（2）知 $a_{n+1}-a_n<0$，$\{a_n\}$ 单调减。又

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$$
$$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln\frac{n+1}{n}>0$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

类似的： $a_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}$，可以证明 $\{a_n\}$ 单调减，且 $2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\le\dfrac{1}{\sqrt{k}}$，所以

$$a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\left(\sum_{k=1}^{n}\left[\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right]\right)$$

$$\ge 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k}}+2\right)\ge -2$$

有界。

6. P.24，第 10 题

假设序列 $\{x_n\}$ 由如下递推关系生成，证明它们收敛，并求它们的极限。

（1）$x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$，$\forall n\ge 2$，$x_1$，$x_2$ 给定实数；

（2）$x_{n+1}=\sqrt{x_n x_{n-1}}$，$\forall n\ge 2$，$x_1$，$x_2$ 为给定正数。

证明：（1）由递推关系式 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$ 我们得到

$$x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}\left(x_n-x_{n-1}\right)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_2-x_1)\text{。}$$

进一步我们有

$$x_{n+1}-x_1=\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}(x_2-x_1)$$

$$=\frac{1-(-1/2)^n}{1+1/2}(x_2-x_1)\to\frac{2}{3}(x_2-x_1)\text{，}$$

因此 $x_n\to\dfrac{2}{3}(x_2-x_1)+x_1=\dfrac{2x_2+x_1}{3}$。

（2）记 $y_n=\ln x_n$，则 $y_{n+1}=\dfrac{y_n+y_{n-1}}{2}$ 。

根据（1）的结论，我们得到 $y_n\to\dfrac{2y_2+y_1}{3}$ 。于是　　$x_n\to\left(x_1x_2^2\right)^{2/3}$ 。

注：上述证明思想可用于研究由如下递推关系

$$x_{n+1}=\lambda x_n+(1-\lambda)x_{n-1}，\quad \lambda\in(0,\ 1)$$

所生成的序列 $\{x_n\}$，其中 x_1， x_2 给定。类似可以证明

$$x_n\to\frac{x_2+(1-\lambda)\ x_1}{2-\lambda}。$$

7.　设 $a_1=a>1$，a 为常数，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a_1}{a_n}\right)$，$(n=1\,,2\,,\cdots)$，证明极限

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限。

证明：思路是运用**单调有界准则**。
由平均值不等式得到：

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a_1}{a_n})\geq\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{a_n\cdot\frac{a_1}{a_n}}=\sqrt{a}>1，$$

a_n 有下界，只须再证单调减。注意上述结果对一切 n 成立，于是

$$a_{n+1}\leq\frac{1}{2}(a_n+\frac{a_n^2}{a_n})=a_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

即 a_n 单调减有下界，必有极限。记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 。

由极限的唯一性，等式 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a_1}{a_n}\right)$ 等号两边取极限，可得方程

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$$

解此方程得到 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A=\sqrt{a}$ （舍弃了负根）。

8.　P.24，第 5 题

设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n\in(0,1)$，且 $(1-x_n)x_{n+1}>\dfrac{1}{4}$， $\forall n\geq1$。求证 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\dfrac{1}{2}$ 。

证明：利用算术平均与几何平均不等式得 $\dfrac{1}{2}<\sqrt{(1-x_n)x_{n+1}}\leq\dfrac{1-x_n+x_{n+1}}{2}$ 可得 $x_{n+1}-x_n>0$，

即序列 $\{x_n\}$ 严格单调上升且有上界。

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在，记作 x^*。由于 $x_n \in (0,\ 1)$，故有 $x^* \in [0,\ 1]$（为什么要用闭区间？）。

在不等式 $(1-x_n)x_{n+1} > \dfrac{1}{4}$ 中，令 $n \to +\infty$ 得 $(1-x^*)x^* \ge \dfrac{1}{4}$。

另一方面，二次函数 $(1-x)x$ 在区间 $[0,\ 1]$ 上的最大值为 $\dfrac{1}{4}$，且仅在点 $x=\dfrac{1}{2}$ 处达到。因此 $x^*=\dfrac{1}{2}$。这就证明了 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$。

9. Stolz 定理是否能反用，即数列 $\{b_n\}$ 严格单调增，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$，是否能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$？

解：Stolz 定理：数列 $\{b_n\}$ 严格单调增，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$。

Stolz 定理是不能反用，即数列 $\{b_n\}$ 严格单调增，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = A$ 不一定能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$。

反例：

设 $a_n = (-1)^n$，$b_n = n$，则数列 $\{b_n\}$ 严格单调增，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$。

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$，但是

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1}-(-1)^n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} 2(-1)^{n+1} \text{不存在。}$$

10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = AB$。

证明：记 $\alpha_n = a_n - A, \beta_n = b_n - B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$，故 $\exists M>0, |\alpha_n| \le M, |\beta_n| \le M$。

$$\begin{aligned}\frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} &= \frac{(A+\alpha_1)(B+\beta_n) + (A+\alpha_2)(B+\beta_{n-1}) + \cdots + (A+\alpha_n)(B+\beta_1)}{n} \\ &= AB + \frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k + \frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}\end{aligned}$$

由平均收敛定理，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{A}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k = 0$，

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}\right| \le \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|,\quad \lim_{n\to\infty} \frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k| = 0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = AB$。

11. P.19，第 13 题（P.24，第 6 题）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$。

解：解法一（Stolz 定理）

记 $x_n = a_1+2a_2+\cdots+na_n$， $y_n = n^2$，则

$$x_{n+1}-x_n = (n+1)a_{n+1},\quad y_{n+1}-y_n = (n+1)^2-n^2 = 2n+1.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)a_{n+1}}{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \dfrac{a}{2}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{2}$$

解法二（用定义）

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，所以 $\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathrm{N}^+,\forall n>N_1$， $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$.（为简单起见，下面只证明一边的不等式）

$$\begin{aligned}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} &= \frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}}{n^2}+\frac{(N_1+1)a_{N_1+1}+(N_1+2)a_{N_1+2}+\cdots+na_n}{n^2}\\ &< \frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}}{n^2}+\frac{(N_1+1)(a+\varepsilon)+(N_1+2)(a+\varepsilon)+\cdots+n(a+\varepsilon)}{n^2}\\ &= \left[\frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}}{n^2}-\frac{(a+\varepsilon)+2(a+\varepsilon)+\cdots+N_1(a+\varepsilon)}{n^2}\right]\\ &\quad+\frac{(a+\varepsilon)+2(a+\varepsilon)+\cdots+n(a+\varepsilon)}{n^2}\\ &= \left[\frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}}{n^2}-\frac{(a+\varepsilon)+2(a+\varepsilon)+\cdots+N_1(a+\varepsilon)}{n^2}\right]\\ &\quad+\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}(a+\varepsilon)\end{aligned}$$

所以

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2} < \frac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}}{n^2}-\frac{(a+\varepsilon)+2(a+\varepsilon)+\cdots+N_1(a+\varepsilon)}{n^2}+\frac{a+\varepsilon}{2n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

显然,对于上述 N_1，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}}{n^2}-\dfrac{(a+\varepsilon)+2(a+\varepsilon)+\cdots+N_1(a+\varepsilon)}{n^2}+\dfrac{a+\varepsilon}{2n}\right]=0$，

所以 $\exists N_2\in\mathrm{N}^+,\forall n>N_2$， $\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+N_1a_{N_1}}{n^2}-\dfrac{(a+\varepsilon)+2(a+\varepsilon)+\cdots+N_1(a+\varepsilon)}{n^2}+\dfrac{a+\varepsilon}{2n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$， $\forall n>N$， $\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\dfrac{a}{2}<\varepsilon$。

另一个不等号也同样可证。具体略。

12. （教材 24 页 10,11 题）

（1）利用 Cauchy 收敛准则证明单调有界数列收敛；

（2）利用区间套定理证明单调有界数列收敛。

证明：（1）反证法：假设 $\{a_n\}$ 为单调递增有上界的数列，但发散。

由 Cauchy 收敛准则，$\exists \varepsilon_0 > 0$，$\forall N \in \mathbb{N}^*$，都存在 m, n: $m > n > N$，但是 $|a_m - a_n| \geq \varepsilon_0$。

对于 $N = 1$, 存在 $m_1 > n_1 > 1$, 使得 $|a_{m_1} - a_{n_1}| \geq \varepsilon_0$.

对于 $N = m_1$，存在 $m_2 > n_2 > m_1$, 使得 $|a_{m_2} - a_{n_2}| \geq \varepsilon_0$.

…………

对于 $N = m_k$，存在 $m_{k+1} > n_{k+1} > m_k$, 使得 $|a_{m_k} - a_{n_k}| \geq \varepsilon_0$.

………….

因为 $\{a_n\}$ 为单调递增的数列，所以

$$a_{m_k} > a_{n_k} + \varepsilon_0 \geq a_{m_{k-1}} + \varepsilon_0 > (a_{n_{k-1}} + \varepsilon_0) + \varepsilon_0 = a_{n_{k-1}} + 2\varepsilon_0 \geq a_{m_{k-2}} + 2\varepsilon_0 \geq \cdots \geq a_{m_1} + (k-1)\varepsilon_0$$

从而子列 $\{a_{m_k}\}$ 无界. 矛盾！

（2）假设 $\{x_n\}$ 为单调递增有上界的数列。

任取 a_1, b_1 使得 a_1 不是 $\{x_n\}$ 的上界，b_1 是上界。

将区间 $[a_1, b_1]$ 分为 $[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$, $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ 两个子区间。

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 是 $\{x_n\}$ 的上界，则记 $a_2 = a_1, b_2 = \frac{a_1+b_1}{2}$;

若 $\frac{a_1+b_1}{2}$ 不是 $\{x_n\}$ 的上界，则记 $a_2 = \frac{a_1+b_1}{2}, b_2 = b_1$.

………….

由此取得区间套 $\{[a_n, b_n]\}$.

根据区间套定理，存在 $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

下面证明 c 是数列 $\{x_n\}$ 的极限。

对于任意的正数 ε，因为 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，所以 $\exists N_1$，$\forall n > N_1, |b_n - a_n| < \varepsilon$.

因为a_{N_1}不是上界，所以存在N使得$x_N > a_{N_1}$. 从而$\forall n > N$，$x_n \ge x_N > a_{N_1}$.

因为b_{N_1}是$\{x_n\}$的上界，所以$\forall n > N$： $|x_n - c| \le b_{N_1} - a_{N_1} < \varepsilon.$

所以$\lim_{n\to\infty} x_n = c$。