习题课（第 4 周）数列，实数

1. 设 A, B 均是由**非负实数**构成的有界数集，定义 $AB=\{xy \mid x\in A, y\in B\}$。证明：

（1）$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$；　（2）$\inf AB=\inf A\cdot\inf B$

2. 设 A, B 均是非空有界数集，定义 $A+B=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$。证明：

（1）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；　（2）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$

3. 设 $k>0, a>1$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$.

4. （1）证明：数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$ 单调减；

（2）证明：数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛；

（3）求数列 $\left\{\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right\}$ 的极限。

5. （P18, 4）证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在：

（1）$a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^3}+\cdots+\dfrac{1}{n^n}$

（2）$a_n=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$

（3）$a_n=\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)$

6. P.24，第 10 题

假设序列 $\{x_n\}$ 由如下递推关系生成，证明它们收敛，并求它们的极限。

（1）$x_{n+1}=\dfrac{x_n+x_{n-1}}{2}$，$\forall n\geq 2$，$x_1$，$x_2$ 给定实数；

（2）$x_{n+1}=\sqrt{x_n x_{n-1}}$，$\forall n\geq 2$，$x_1$，$x_2$ 为给定正数。

7. 设 $a_1=a>1$，a 为常数，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a_1}{a_n}\right)$，$(n=1, 2, \cdots)$，证明极限

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求此极限。

8. P.24，第 5 题

设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n \in (0,1)$，且 $(1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}$，$\forall n \ge 1$。求证 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$。

9. Stolz 定理是否能反用，即数列 $\{b_n\}$ 严格单调增，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A$，是否能得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$？

10. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} = AB$。

11. P.19，第 13 题（P.24，第 6 题）

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2}$。

12. （教材 24 页 10,11 题）

（1）利用 Cauchy 收敛准则证明单调有界数列收敛；

（2）利用区间套定理证明单调有界数列收敛。