习题课 广义积分

1. 判断下列广义积分的敛散性.

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ (2) $\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ (3) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$

(4) $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$ (5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ (6) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$

(7) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ (8) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$ (9) $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$

解：(1) 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=0$，存在 $X>0$，使得当 $x>X>0$ 时，$\ln x<\sqrt[3]{x}$，

$\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}<\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+1}}, p=\frac{7}{6}>1$，直接比较法，收敛.

(2) $\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，

第一个积分显然收敛，对第二个积分令 $x-\pi=t, dx=dt$，

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{\sin t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，收敛.

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$

对第一个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$ 与 $\frac{1}{x^{p-1}}$ 等价（$x\to 0$），

$p-1<1, \quad \Rightarrow p<2$ 收敛.

对第二个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$ 与 $\frac{1}{x^q}$ 进行比阶，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^{p-q}}=\begin{cases}0 & p>q\\ \frac{\pi}{2} & p=q\end{cases}$$

因此，当 $p\ge q>1$ 时第二个积分收敛。

综合上述分析，$1<p<2$ 时积分收敛。

(4) $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx=\int_0^{1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx+\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$

$x\to 0^+$，$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\backsim -\ln x$，$\int_0^{1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛；

$x\to +\infty,$ $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\backsim\frac{1}{2x^2}$，$+\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛。

故 $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛。

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$

$x\to 0$，$\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\backsim\frac{1}{x^p}$，当 $p<1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；

$x\to\frac{\pi}{2}$，$\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}\backsim\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q}$，当 $q<1$ 时，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛。

故当 $p<1$，$q<1$ 时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛。

(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$

$x\to 0$，$\frac{\ln(1+x)}{x^p}\backsim\frac{1}{x^{p-1}}$，当 $p<2$ 时，$\int_0^{1}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛；

$x\to +\infty,$ $\frac{\ln(1+x)}{x^p}\backsim\frac{\ln x}{x^p}$，当 $p>1$ 时，$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛。

故当 $1<p<2$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛。

（7）$\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$

$x\to 1^-$，$\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}\sim -\frac{1}{1-x}$，$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 发散，故 $\int_0^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 发散。

（8） $x^2=t$， $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt=\int_0^1\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$，

$t\to 0^+$， $\frac{\sin t}{t^{(p+1)/2}}\sim\frac{1}{t^{(p-1)/2}}$，故 $\frac{p-1}{2}<1$ 时 $\int_0^1\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$ 收敛；

$\frac{p+1}{2}>1$ 时， $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$ 绝对收敛，

$0<\frac{p+1}{2}\le 1$ 时， $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$ 条件收敛。

总之， $-1<p\le 1$ 时， $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$ 条件收敛； $1<p\le 3$ 时， $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$ 绝对收敛。

（9） 令 $x^2=t$， $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^{[t]}}{2\sqrt{t}}dt$，Dirichlet 判别法，条件收敛。

2. 证明：如果 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上非负且一致连续，$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

如果将非负条件去掉，是否仍然有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$？如果是，请证明；如果不是，请举反例。

证明：反证：若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 不成立，则存在某个正数 b，以及一个趋向于正无穷的点列 $\{x_n\}$，使得 $f(x_n)\ge 2b$． 不失一般性，可以假设 $x_1>a+1$， $x_{n+1}>x_n+2$．

由于 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续，所以存在正数 δ（不妨设 $\delta<1$），使得在区间 $[x_n-\delta,x_n+\delta]$ 恒有 $f(x)>b$． 于是

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\ge\int_a^{x_n+\delta}f(x)\mathrm{d}x\ge\sum_{k=1}^{n}\int_{x_k-\delta}^{x_k+\delta}f(x)\mathrm{d}x\ge\sum_{k=1}^{n}2\delta\cdot b=2nb\delta\to+\infty(\text{当}n\to\infty).$$

因此 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

3. 证明以下命题：

（1） $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛， $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，证明： $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证明：不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b>0$，若极限小于零，则考虑 $-f(x)$．则存在 $X>a$，当 $x>X$ 时，

$f(x) > \frac{b}{2}$，因此有 $\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^X f(x)\mathrm{d}x + \int_X^x f(x)\mathrm{d}x > \int_a^X f(x)\mathrm{d}x + \frac{b}{2}(x-X)$，令 $x \to +\infty$，得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，矛盾.

（2）$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x) \le 0$.

（否则，存在 $x_0 \in [a,+\infty), f(x_0) > 0$，则当 $x > x_0$ 时，$f(x) > f(x_0) > 0$，

$$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{x_0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{x_0}^x f(x)\mathrm{d}x \ge \int_a^X f(x)\mathrm{d}x + f(x_0)(x-X)$$

令 $x \to +\infty$，得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，矛盾.）

所以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，有上界，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，由（1），得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

（3）$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x) \ge 0$. 又由于

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists X > a$，当 $x > 2X$ 时，$|\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t| < \varepsilon$，即 $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t < \varepsilon$

又 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减，有 $\frac{x}{2} f(x) < \int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t < \varepsilon$，$0 \le xf(x) < 2\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$.

（4）$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$，$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明：由 $\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x = f(x) - f(a)$，以及 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，可以得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，又由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

（5）$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可微，单调，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证明：$\int_a^x f(x)\mathrm{d}x = xf(x) - af(a) - \int_a^x xf'(x)\mathrm{d}x$，

由 $f(x)$ 单调，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=0$，将上式两端令 $x \to +\infty$ 即可.

（6）$f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to0+} f(x)=+\infty$，且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，证明：$\lim\limits_{x\to0+} xf(x)=0$.

证明：类似 5 的证明，将广义积分的结论推广到瑕积分.

（7）设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛。

证明：首先由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知$\exists A>a$，$\forall x>A$，有$|f(x)|<1$，即当$x>A$时，成立$f^2(x)\le|f(x)|$。因为积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，于是由比较判别法，积分$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛。

（8）设$f(x)$单调下降，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：若$f'(x)$在$[0,+\infty)$上连续，则反常积分$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,dx$收敛。

证明：首先由分部积分法，$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx=\int_0^{+\infty}\sin^2 xdf(x)=-\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$。由于$F(A)=\int_0^A \sin 2xdx$有界，$f(x)$单调下降，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，由Dirichlet判别法，可知积分$\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$收敛，从而积分$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,dx$收敛。

4. 讨论p为何值时，广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$绝对收敛、条件收敛、发散。

解： 当$p>1$时，对充分大的x，有$\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|\le\frac{2}{x^p}$，由于积分$\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^p}dx$收敛，可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$绝对收敛。

当$0<p\le1$时，利用等式

$$\frac{\sin x}{x^p+\sin x}=\frac{\sin x}{x^p}-\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}。$$

这时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$收敛；积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)}dx$当$\frac{1}{2}<p\le1$时收敛，当$0<p\le\frac{1}{2}$发散。

当$\frac{1}{2}<p\le1$时，由于$\int_{n\pi+\frac{\pi}{4}}^{n\pi+\frac{3\pi}{4}}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx\ge\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$，因为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p\pi^p+1}$发散，所以积分$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{x^p+\sin x}\right|dx$发散。

综上所述，当$\frac{1}{2}<p\le1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p+\sin x}dx$条件收敛；当$0<p\le\frac{1}{2}$时，积分

$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ 发散。

当 $p \le 0$ 时，因为有 $\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx > \int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2} dx > \frac{\sqrt{2}}{16}\pi$，由

Cauchy 收敛原理，可知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ 发散。

5. 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 收敛性，其中 $\beta > 0$。

解：当 $\alpha \ge 0$ 被积函数没有奇点，当 $\alpha < 0$ 时，$x = 0$ 为奇点，

这时 $\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \sim \frac{1}{x^{-\alpha}}$（$x \to 0^+$），可见当且仅当 $\alpha > -1$ 时，积分 $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 收敛；

为考察无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$，注意无论 α 的符号如何，都有

$$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta} \sim \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \quad （x \to +\infty）。$$

由此可见仅当 $\beta > 1+\alpha$ 时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 收敛。

综上，当且仅当 $\alpha > -1$，且 $\beta > 1+\alpha$ 时， 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 收敛。解答完毕。

6. 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx$ 收敛性（第六章复习题题 2（1），p.206）

解：先考积分在奇点 $x = 0$ 处的收敛性。我们将被积函数写作

$$\frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2。$$

由此可见，积分在点 $x = 0$ 处的收敛，当且仅当 $p - 2 < 1$，即 $p < 3$。

我们再来考虑积分在无穷远处的收敛性。我们将被积函数写作

$$\frac{\sin^2 x}{x^p} = \frac{1}{2x^p} - \frac{\cos 2x}{2x^p}。$$

显然积分 $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^p} dx$ 收敛，当且仅当 $p > 1$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x^p} dx$ 收敛，当且仅当 $p > 0$。

由此可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$收敛，当且仅当$p>1$。

综上所述，积分$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$收敛，当且仅当$1<p<3$。解答完毕。

7.　判断$\int\limits_1^{+\infty} x\cos(x^3)dx$收敛性。（习题 6.2 题 9（2），p. 206）

解：对积分作变量替换$y=x^3$，我们得到$\int\limits_1^{A} x\cos(x^3)dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^{A^3}\frac{\cos y}{y^{1/3}}dy$。

由此可见，积分为条件收敛。解答完毕。

注：对于无穷区间型的广义积分而言，积分收敛，并不意味着被积函数有界，当然更遑论被积函数有趋向于零的极限。

8.　判断$\int\limits_0^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$收敛性（第六章复习题题 3，p. 206）

解：注意被积函数没有有限奇点，而在$x\to+\infty$时 $\sin\frac{1}{x}$单调减趋于 0。根据 Dirichlet 判别法可知积分收敛。我们进一步积分的绝对收敛性。

注意当$x\to+\infty$时，$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$。从而存在$A>1$，使得$x\ge A$时$\sin\frac{1}{x}\ge\frac{1}{2x}$。于是

$$\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|\ge\frac{\sin^2 x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}。$$

由此可知积分$\int\limits_0^{+\infty}|\sin x\sin\frac{1}{x}|dx$发散。综上可知原广义积分条件收敛。解答完毕。

9.　计算下列广义积分

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$。

解：取变换$x=\tan t, dx=\frac{dt}{1+t^2}$，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{1+5\tan^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+4\sin^2 t}=\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\arctan 2.$$

（2） $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x d(\frac{1}{x})$

$$=-\frac{1}{x}arctanx\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2]=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$。

解： $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}xd(\frac{-1}{1+e^x})$

$$=\frac{-x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx$$

$$=0+\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}dt=\ln\frac{t}{1+t}\Big|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

（4）$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

解： 取变换$e^x=\sec t$，则$x=\ln(\sec t)$, $e^x dx=\sec t\tan t dt$，

$$I=\int_{\arccos e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{\tan t}dt=\frac{\pi}{2}-\arccos e^{-1}=\arcsin e^{-1}.$$

说明：以下广义积分的收敛性不难证明，故略去。但同学们自己作为练习应该考虑。

10. 求$I=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$，其中$b>a$。

解：对于$x\in[a,b]$，我们又等式$\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}=1$，且$\frac{x-a}{b-a}\geq 0$，$\frac{b-x}{b-a}\geq 0$。受此启发，

我们作变换$\frac{x-a}{b-a}=\sin^2 t$，于是$\frac{b-x}{b-a}=\cos^2 t$，且$dx=2\sin t\cos t$。因此

$I=\int_0^{\pi/2}2dt=\pi$ 。解答完毕。

注：值得注意的是，这个积分的值与上下限 a 和 b 无关。

11. $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

解：注意 $x\ge1$ 时 $0\le\frac{1}{1+x^3}\le\frac{1}{1+x^2}$，由此可以判断所求无穷积分收敛。为计算积分，可以利用有理函数积分法：$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$，……（较繁琐）。

另解：原式 $=\int_0^1 +\int_1^{+\infty}$ ，在其中无穷积分中引入积分变量代换 $x=1/t$：

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\int_1^0\frac{1}{1+t^{-3}}(-\frac{dt}{t^2})=\int_0^1\frac{t}{t^3+1}dt=\int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx,$$

原式化为两个普通积分的和，且都在 $[0,1]$ 区间上：

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int_0^1\frac{dx}{1-x+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}))=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\text{ 。}$$

解答完毕。

12. 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$，其中 $a>0$ 。

解：将积分分成两个部分 $I_1:=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ 和 $I_2:=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$

对积分 I_1 作变换 $x=1/y$ 得 $I_1=\int_{+\infty}^1\frac{-y^a dy}{(y^2+1)(1+x^a)}=\int_1^{+\infty}\frac{x^a dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ 。

于是 $I=I_1+I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$ 。

解答完毕。（注：积分值与参数值 a 无关）

13. 求 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$ （有理函数积分或者变量代换）

解法一：$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2})dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\text{。}$$

解法二：令$t=x-\frac{1}{x}$（评：这变换有点怪异，很难想到。这样的特别技巧并不是很多，我们最好都能记住），则$dt=(1+\frac{1}{x^2})dx$，

且 $x\to 0^+$时$t\to -\infty$，$x\to +\infty$时$t\to +\infty$，

此外 $t^2=(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$，$\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}=\frac{dt/dx}{t^2+2}$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$
。解答完毕。

14. 已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx$，及$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d(2x)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{4}$。

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

15. （补充内容，了解即可）三个重要的广义积分

（1）计算 Euler 积分$I=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\ dx$。

（2）计算 Froullani 广义积分$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$

（1）. (课本第六章总复习题 9，p.207) 计算 Euler 积分$I=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\ dx$。

提示：用配对法求积分值。考虑另一个积分$J=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\ dx$。

解：易见$x=\pi/2$是 Euler 积分的瑕点。这里我们略去证明收敛性的证明（不难），只专注如何求出积分I的值。我们尝试用配对法来求积分值。考虑相关积分$J=\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\ dx$。不难证明这两个积分相等，即$I=\mathrm{J}$。于是我们有

$$2I=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\,dx+\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx=\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\sin x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x dx\text{。}$$

对于积分 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\ dx$，作变量替换得 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\ dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin y\,dy$。

显然 $\int_0^{\pi}\ln\sin x\,dx=2\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,dx$。由此得 $2I=-\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi/2}\ln\sin 2x\,dx=-\frac{\pi}{2}\ln 2+I$。

于是 $I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$。解答完毕。

注：可利用上述 Euler 积分计算以下积分的值

i) $\int_0^{\pi/2}x\tan x\,dx$

ii) $\int_0^{\pi/2}x\ln\sin x\ dx$

iii) $\int_0^{\pi/2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 dx$

iv) $\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\ln\sin x\,dx$

（2） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在，记作 $f(+\infty)$。证明 Froullani 广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\left(f(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}$，其中 a，b 为两个正数。

提示：将积分分成两部分之和 $I=I_1+I_2$，这两个部分分别为从 0 到 1 和 1 到 $+\infty$ 的积分。
对于积分 I_1，考虑从 ε 到 1 的积分，将被积函数拆开，并作适当的变量替换。对于积分 I_2 可作类似处理。

证明：我们将积分 I 分为两个部分 $I=I_1+I_2$，

$I_1=\int_0^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$，$I_2=\int_1^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$。

考虑 I_1。对于任意 $\varepsilon\in(0,1)$，我们有

$$\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)}{x}dx-\int_\varepsilon^1\frac{f(bx)}{x}dx=\int_{a\varepsilon}^{a}\frac{f(u)}{u}du-\int_{b\varepsilon}^{b}\frac{f(u)}{u}du=$$

$$=\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}du-\int_a^b\frac{f(u)}{u}du。$$

而 $\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon}\frac{f(u)}{u}du=f(\xi_\varepsilon)\int_a^b\frac{1}{u}du=f(\xi_\varepsilon)\ln\frac{b}{a}\to f(0)\ln\frac{b}{a}$，$\varepsilon\to 0^+$。

因此

$$I_1=\int_0^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_\varepsilon^1\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=f(0)\ln\frac{b}{a}-\int_a^b\frac{f(u)}{u}du\text{。}$$

考虑I_2。对于任意$\mathrm{A}>1$，我们类似有

$$\int_1^{\mathrm{A}}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_{\mathrm{a}}^{b}\frac{f(u)}{u}dx-\int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}du\text{。}$$

而$\int_{aA}^{bA}\frac{f(u)}{u}du=f(\eta_A)\int_{aA}^{bA}\frac{du}{u}=f(\eta_A)\ln\frac{b}{a}\to f(+\infty)\ln\frac{b}{a}$，$A\to+\infty$。故

$$I_2=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx=\int_a^b\frac{f(u)}{u}du-f(+\infty)\ln\frac{b}{a}\text{。}$$

因此原积分为

$I=\mathrm{I}_1+I_2=\left(\mathrm{f}(0)-f(+\infty)\right)\ln\frac{b}{a}$。证毕。

注 1：我们可以直接对积分$\int_{\mathrm{r}}^{R}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}dx$作分拆，然后分别做变量替换。然后令$R\to+\infty$和$r\to0^+$，得到相同的结论。这样处理更简洁。

注 2：利用上述 Froullani 积分，同学们可以计算如下积分，其中a，b为两个正数。

i）$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}dx$

ii）$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}dx$