

习题课 广义积分

1. 判断下列广义积分的敛散性.

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{\sqrt{x^5+1}} dx \quad (2) \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^p} dx$$

$$(4) \int_0^{+\infty} \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+x} \right] dx \quad (5) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} \quad (6) \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$$

$$(7) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x(1-x)^2}} dx \quad (8) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^p} dx \quad (9) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$$

2. 证明: 如果 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上非负且一致连续, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

如果将非负条件去掉, 是否仍然有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$? 如果是, 请证明; 如果不是, 请举反例.

3. 证明以下命题:

(1) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(2) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(3) $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 0$.

(4) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续可微, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 均收敛, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(5) $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上可微, 单调, 且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} xf'(x) dx$ 收敛.

(6) $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, 且 $\int_0^1 f(x) dx$ 收敛, 证明: $\lim_{x \rightarrow 0^+} xf(x) = 0$.

(7) 设 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 证明 $\int_a^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛.

(8) 设 $f(x)$ 单调下降, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, 证明: 若 $f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 则反常积分 $\int_0^{+\infty} f'(x) \sin^2 x dx$ 收敛.

4. 讨论 p 为何值时, 广义积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ 绝对收敛、条件收敛、发散.

5. 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^\beta} dx$ 收敛性, 其中 $\beta > 0$.

6. 判断 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p} dx$ 收敛性 (第六章复习题题 2 (1), p. 206)

7. 判断 $\int_1^{+\infty} x \cos(x^3) dx$ 收敛性。(习题 6.2 题 9 (2), p. 206)

8. 判断 $\int_0^{+\infty} \sin x \sin \frac{1}{x} dx$ 收敛性 (第六章复习题题 3, p. 206)

9. 计算下列广义积分

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} dx.$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

10. 求 $I = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$, 其中 $b > a$ 。

$$11. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

12. 求 $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$, 其中 $a > 0$ 。

13. 求 $\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$ (有理函数积分或者变量代换)

14. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$, 求 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos x}{x} dx$, 及 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

15. (补充内容, 了解即可) 三个重要的广义积分

$$(1) \text{ 计算 Euler 积分 } I = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx.$$

(2) 计算 Froullani 广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$