第十二周习题课

一．不定积分

1. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = -x\cot x + \int \cot x dx = -x\cot x + \ln|\sin x| + C$

2. $\int x\tan^2 x dx = \int x(\sec^2 x - 1)dx = x\tan x - \frac{1}{2}x^2 - \int \tan x dx$

$$= x\tan x - \frac{1}{2}x^2 + \ln|\cos x| + C$$

3. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx = -2\int \arcsin x d\sqrt{1-x} = -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 2\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x + 4\sqrt{1+x} + C$$

4. $\int \cos(\ln x)\, dx = x\cos(\ln x) + \int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$

$$= x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] - \int \cos(\ln x)dx,$$

所以

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}x[\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C$$

解法二：令 $\ln x = t$，则 $\int \cos(\ln x)dx = \int e^t \cos t dt = \cdots$

5. $\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\int \arcsin x d\sqrt{1-x^2}$$

$$= x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$$

6. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx = x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$= x\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$$

7. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

解：记 $\sqrt{1+e^x} = t, x = \ln(t^2-1), dx = \frac{2t}{t^2-1}dt$，

$$\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx = 2\int \ln(t^2-1)dt = 2\left[t\ln(t^2-1) + \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - 2t\right] + C$$

$$= 2x\sqrt{1+e^x} - 4\sqrt{1+e^x} + 2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1} + C$$

8. 求$\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$

解：$\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$

记$\cos x = t$，$\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sin x(1+\cos x)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{(1-t^2)(1+t)}$

$$= -\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{4}\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{1-t}\right]dt$$

$$= -\frac{1}{8}\ln|1+t| + \frac{1}{4}\frac{1}{1+t} + \frac{1}{8}\ln|1-t| + C$$

$$= \frac{1}{4(1+\cos x)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C$$

9. $\int |x-1|\,dx \qquad x \in R$

解: 当$x \geq 1$时, $\int |x-1|\,dx = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1$

当$x < 1$时, $\int |x-1|\,dx = -\int (x-1)dx = -\frac{x^2}{2} + x + C_2$

$\int |x-1|\,dx$在$x=1$连续，$C_1 = 1 + C_2$，故

$$\int |x-1|\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C + 1, & x \geq 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + C, & x < 1 \end{cases}$$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(1-\cos 2x)dx$。由

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = e^x \cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin 2x dx = -e^{\frac{\pi}{2}} - 1 + 2e^x \sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx$，

得到$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos 2x dx = -\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) + \frac{e^{\frac{\pi}{2}}+1}{10} = \frac{3e^{\frac{\pi}{2}} - 2}{5}$$。

11. $\int_1^{e}\sin(\ln x)dx = x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e\cos(\ln x)dx$

$$= e(\sin 1-\cos 1)+1-\int_1^{e}\sin(\ln x)dx,$$

所以 $\int_1^{e}\sin(\ln x)dx = \frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)+\frac{1}{2}$。

12. 求$\int_0^1 e^{2\sqrt{x+1}}dx$

解: 令$t=\sqrt{x+1}$,则$x=t^2-1$，于是

$\int_0^1 e^{2\sqrt{x+1}}dx = 2\int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}tdt = te^{2t}\Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}}e^{2t}dt = e^{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}e^2$。

13. $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int_0^1\frac{de^{-x}}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = -\ln(e^{-x}+\sqrt{1+e^{-2x}})\Big|_0^1 = \ln\frac{e(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{1+e^2}}$

$=\ln(\sqrt{1+e^2}-1)+\ln(\sqrt{2}+1)-1$。

14. $\int_0^1 x^n\ln^m x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^m x\Big|_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{m-1}x dx$

$$= -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{m-1}x dx = \cdots = (-1)^m\frac{m!}{(n+1)^m}\int_0^1 x^n dx = (-1)^m\frac{m!}{(n+1)^{m+1}}。$$

15. 设$(0,+\infty)$上的连续函数$f(x)$满足$f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)dx$，求$\int_1^e f(x)dx$。

解 记$\int_1^e f(x)dx = a$，则 $f(x)=\ln x - a$，于是

$$a=\int_1^e f(x)dx = \int_1^e \ln x dx - a(e-1),$$

所以

$$a=\frac{1}{e}\int_1^e\ln x dx = \frac{1}{e}\left(x\ln x - x\right)\Big|_1^e = \frac{1}{e}。$$

16. 设$f(x)+\sin^4 x = \int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)dx$，求$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(2x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx = \frac{1}{2}I$，则 $f(x)+\sin^4 x = \frac{1}{2}I$，积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[f(x)+\sin^4 x\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}Idx = \frac{\pi}{4}I$$

$$I+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{\pi}{4}I$$

而 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 xdx=\frac{3\pi}{16}$，故 $I=\frac{3\pi}{4(\pi-4)}$。

17. 求 $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt$

解：$\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=\frac{d}{dx}\int_0^x \sin u^2 du=\sin x^2$。

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，若 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x)dt=x^2\ln(1+x)$，求 $f(x)$。

解：记 $u=t-x$，$\int_x^{x+f(x)} g(t-x)dt=\int_0^{f(x)} g(u)du=x^2\ln(1+x)$，对 x 求导，

$$g(f(x))f'(x)=xf'(x)=2x\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x}$$

且 $f(0)=0$。$f'(x)=2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}$，

$$f(x)=\int_0^x\left(2\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right)dx=2x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)。$$

19. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt=-\frac{x^2}{2}+e^{-x}$，求 $f(x)$ 的极值与渐近线。

解：记 $t-x=u$，$\int_0^x f(t-x)dt=\int_{-x}^0 f(u)du=-\frac{x^2}{2}+e^{-x}$，$f(-x)=-x-e^{-x}$，

$f(x)=x-e^x$，极大值为 $f(0)=1$，渐近线为 $y=x$。

20. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x\ge 0$ 时有 $F(x)f(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1, F(x)>0$，求 $f(x)$

解: $F'(x)=f(x)$，

$$2F(x)F'(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

$$2\int F(x)F'(x)dx=\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int xe^x d\left(\frac{-1}{1+x}\right)=-\frac{xe^x}{1+x}+\int\frac{e^x(1+x)}{1+x}dx$$

$$=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C$$

故

$$F^2(x)=\frac{e^x}{1+x}+C$$

$F(0)=1, F(x)>0$，$C=0$，

$$F(x)=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$$

$$f(x)=F'(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

21. 设函数 $f\in C[a,b]$， $0<m\le f(x)\le M$ ，证明

$$(b-a)^2\le\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

证明：用 Schward 不等式

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b\left(\sqrt{f(x)}\right)^2dx\cdot\int_a^b\left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2dx\ge\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2$$

$$=(b-a)^2$$

$$\frac{[f(x)-m][f(x)-M]}{f(x)}\le 0$$

故 $f(x)+\dfrac{mM}{f(x)}\le m+M$

积分：$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b\frac{mM}{f(x)}dx\le(m+M)(b-a)$。

AG 不等式：$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b\frac{mM}{f(x)}dx\ge 2\sqrt{mM\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx}$。

$$2\sqrt{mM\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx}\le(m+M)(b-a),$$

$$\int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

22. 设函数 $f \in C^{(1)}[a,b], f(0)=0$。证明：$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2 dx$。

证明：$f \in C^{(1)}[a,b], f(a)=0$，$f(x)=\int_a^x f'(t)dt, \quad x\in[a,b]$

由 Schward 不等式，

$$f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2 \le \int_a^x \left[f'(t)\right]^2 dt \cdot \int_a^x dt \le (x-a)\int_a^b \left[f'(t)\right]^2 dt$$

积分，$\int_a^b f^2(x)dx \le \int_a^b (x-a)dx \int_a^b \left[f'(t)\right]^2 dt = \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b \left[f'(t)\right]^2 dt$。

注 1：上述不等式可以改进为 $\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)(x-a)]^2 dx$。

证明：记 $F(x)=\frac{1}{2}(x-a)^2\int_a^x [f'(t)]^2 dt - \frac{1}{2}\int_a^x [f'(t)(t-a)]^2 dt - \int_a^x f^2(t)dt$，

$F(a)=0$，$F'(x)=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2 dt - f^2(x)$，

$F'(a)=0$，$F''(x)=\int_a^x [f'(t)]^2 dt + (x-a)\left[f'(x)\right]^2 - 2f(x)f'(x)$

$$=\int_a^x [f'(t)]^2 dt + \int_a^x [f'(x)]^2 dt - 2\int_a^x f'(t)f'(x)dt = \int_a^x [f'(x)-f'(t)]dt \ge 0$$

故 $F(x)\ge 0$，即 $F(b)=\frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(t)]^2 dt - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(t)(t-a)]^2 dt - \int_a^b f^2(t)dt \ge 0$。

注 2：若本题的条件改为 $f(a)=f(b)=0$，则有 $\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2 dx$。

证明：$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f^2(x)dx \le \frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^{\frac{a+b}{2}} [f'(x)]^2 dx$。在区间 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上，用类似的方法可得：

$\int_{\frac{a+b}{2}}^b f^2(x)dx \le \frac{1}{8}(b-a)^2\int_{\frac{a+b}{2}}^b [f'(x)]^2 dx$，故

$\int_a^b f^2(x)dx \le \frac{1}{8}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2 dx$。

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

证明：令 $t=\dfrac{\pi}{2}-x$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx。$$

24. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(1)=5$，

$\int_0^1 g(t)dt = 2$，证明 $f'(x) = x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt$，并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$。

证明：

$$f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)dt = \frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)dt - x\int_0^x tg(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)dt，$$

等式两边求导，得到

$$f'(x) = x\int_0^x g(t)dt + \frac{1}{2}x^2 g(x) - (\int_0^x tg(t)dt + x^2 g(x)) + \frac{1}{2}x^2 g(x)$$

$$= x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt。$$

再求导，得到 $f''(x)=\int_0^x g(t)dt,\ f'''(x) = g(x)$，所以

$f''(1)=2$， $f'''(1)=5$。

25. （积分中值定理的应用）设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明

$$\max_{a\le x\le b} |\,f(x)\,| \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |\,f'(x)\,|\,dx。$$

证　由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，可设

$$|f(\xi)| = \max_{a\le x\le b}|f(x)|, \xi\in[a,b]，\ |f(\eta)| = \min_{a\le x\le b}|f(x)|，\ \eta\in[a,b]。$$

于是

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)| - \min_{a\le x\le b}|f(x)| = |f(\xi)| - |f(\eta)| \le |f(\xi)-f(\eta)| = \left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right| \le \int_a^b |f'(x)|dx。$$

另一方面，由积分中值定理，$\exists\varsigma\in[a,b]$，使 $f(\varsigma)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，于是

$$\min_{a\le x\le b}|f(x)| \le |f(\varsigma)| = \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|。$$

所以

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)| = \min_{a\le x\le b}|f(x)| + (\max_{a\le x\le b}|f(x)| - \min_{a\le x\le b}|f(x)|) \le \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right| + \int_a^b |\,f'(x)\,|\,dx。$$

26. 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx=1$

证明：$\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx=\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}(n^2+n-n^2)=\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}n$，$\xi_n\in[n^2,n^2+n]$

当 $x>2$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}$ 为单调减函数，故 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-\frac{1}{n^2+n}}\le\frac{1}{\sqrt{1+\xi_n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}n\le\frac{n}{\sqrt{n^2}}e^{-\frac{1}{n^2}}$，

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx=1$

27. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，证明

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du。$$

证 利用分部积分法，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du=\left(u\int_0^u f(x)dx\right)\Big|_0^x-\int_0^x uf(u)du=\int_0^x f(u)(x-u)\,du。$$

注：本题也可令 $F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)du-\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du$，证明 $F'(x)\equiv 0$。

$\int_0^u f(x)dx$ 为变上限积分，其导数简单，用分部积分法正好。