第十二周习题课

一．不定积分

1. $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx =$

2. $\int x \tan^2 x dx =$

3. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx =$

4. $\int \cos(\ln x)\, dx =$

5. $\int (\arcsin x)^2 dx =$

6. $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) dx =$

7. 求 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

8. 求 $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$

9. $\int |x-1|\, dx \qquad x \in R$

10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x (1-\cos 2x) dx$ 。

11. $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x) dx = x\sin(\ln x)\Big|_1^e - \int_1^e \cos(\ln x) dx$

12. 求 $\int_0^1 \mathrm{e}^{2\sqrt{x+1}}\, dx$

13. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$

14. $\int_0^1 x^n \ln^m x dx$

15. 设 $(0,+\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = \ln x - \int_1^e f(x) dx$，求 $\int_1^e f(x) dx$ 。

16. 设 $f(x) + \sin^4 x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(2x) dx$，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

17. 求 $\frac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2 dt$

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，若 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x) dt = x^2 \ln(1+x)$，求 $f(x)$ 。

19. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt = -\frac{x^2}{2}+e^{-x}$，求 $f(x)$ 的极值与渐近线。

20. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x\geq 0$ 时有 $F(x)f(x)=\frac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1, F(x)>0$，求 $f(x)$

21. 设函数 $f\in C[a,b]$，$0<m\leq f(x)\leq M$，证明

$$(b-a)^2\leq \int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\leq \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

22. 设函数 $f\in C^{(1)}[a,b], f(0)=0$。证明：$\int_a^b f^2(x)dx\leq \frac{1}{2}(b-a)^2\int_a^b [f'(x)]^2 dx$。

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$

24. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(1)=5$，$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明 $f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$。

25. （积分中值定理的应用）设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。证明

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)|\leq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b |f'(x)|\,dx。$$

26. 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx=1$

27. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，证明 $\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)dx\right\}du$。