第十五周习题课　微分方程

求解问题

1.　（变量可分离型方程）$y' = xy^2$

$$\frac{dy}{y^2} = xdx$$

$$y = -\frac{1}{\frac{x^2}{2} + C}$$

还有一解：$y = 0$

2.　（变量可分离型方程）$y' = \sqrt{|y|}$

解：$$y > 0,\quad y = \frac{(x+C)^2}{4};$$

$$y < 0,\quad y = -\frac{(x+C)^2}{4};$$

另有一解　$y = 0$.

3.　（齐次方程）解方程：$(y^2 - 3x^2)y' + 3xy = 0$.

解：令 $u = \frac{y}{x}$，　则 $y' = u + xu'$,

$$u + xu' = \frac{3u}{3u^2 - 1}$$

这是分离变量方程，…….

（答案 $y e^{\frac{3x^2}{2y^2}} = c$）

4.　（齐次方程）$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$ $(x_0 y_0 \neq 0) \Rightarrow \begin{cases} ydy = -xdx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

解 1：$\begin{cases} ydy = -xdx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int ydy = \int -xdx + C \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2)$ 或 $\Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{(x_0^2 + y_0^2) - x^2}, & if\ \ y_0 > 0, \\ y = -\sqrt{(x_0^2 + y_0^2) - x^2}, & if\ \ y_0 < 0, \end{cases}$

解 2：$\begin{cases} ydy = -xdx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \int_{y_0}^{y} ydy = \int_{x_0}^{x} -xdx \Rightarrow x^2 + y^2 = (x_0^2 + y_0^2)$

5.　（齐次方程）$xy' = y(\ln y - \ln x)$.

解 1：原式$\Rightarrow y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} \xrightarrow{y=xu(x)} u + xu = u\ln u$

$$\Rightarrow \frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\ln u - 1\right| = \ln Cx \Rightarrow y = xe^{1+Cx}$$

解 2：原式$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(\ln y - \ln x\right)\frac{dx}{x}$

$$\Rightarrow d(\ln y) = \left(\ln y - \ln x\right) d\ln x \xrightarrow{u=\ln y, v=\ln x} \frac{du}{dt} = u - t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y' = f\left(ax + by\right) \\ or\ y' + p(x)y = q(x) \end{cases}$$型方程

6. （伯努利方程）解方程$x^2 y' + xy = y^2$.

解 1： 原式$\Rightarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow -(y^{-1})' + \frac{1}{x}y^{-1} = \frac{1}{x^2}$

$$\xrightarrow{u=y^{-1}} xu' - u = -\frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{x}\right) = -\frac{1}{x^3}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{x} = \frac{1}{2x^2} + C \Rightarrow \frac{1}{xy} = \frac{1}{2x^2} + C$$

7. 若$(x + 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$ 求一般解． （$x = -y^2 + c\,y^2 e^{-\frac{1}{y}}$）

对 x 为线性方程，$\frac{dx}{dy} + \frac{1+2y}{y^2}x = 1$

或 $y^2 dx + (x + 2xy - y^2)dy = 0$ 微分形式的微分方程

可化为 $$\frac{dx}{dy} + \frac{1+2y}{y^2}x = 1$$

$$x = -y^2 + c\,y^2 e^{-\frac{1}{y}}$$

8. （高阶可降阶方程）解方程$y^{(4)} = \sin x + x$.

解:由公式

$$y = \frac{1}{6}\int_0^x (x-t)^3 \left(\sin t + t\right) dt + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

由分部积分法得到,方程通解

$$y = \sin x + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{6} + x + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

$$y = \sin x + \frac{x^5}{5!} + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4$$

9. （高阶可降阶方程）解方程 $xy''=y'\ln y'$.

解:令 $p(x)=y'$，代入方程,则原方程化为 $x\dfrac{dp}{dx}=p\ln p$

由此解出 $p=e^{c_1x}$,于是原方程的通解为

$$y=\int pdx=\frac{1}{c_1}e^{c_1x}+c_2$$

10. （高阶可降阶方程）解方程 $y''=\dfrac{1+(y')^2}{2y}$.

解：令 $p=p(y)=\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$, 代入方程得到 $p\dfrac{dp}{dy}=\dfrac{1+p^2}{2y}$

即 $\dfrac{2pdp}{1+p^2}=\dfrac{dy}{y}$, 两端积分得到 $\ln(1+p^2)=\ln y+\ln c_1$.

即 $1+(\dfrac{dy}{dx})^2=c_1y$. 分离变量,将上式改写成 $\dfrac{1}{\pm\sqrt{c_1y-1}}=dx$.

解此方程得 $\pm\dfrac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=x+c_2$,

化简得 $\dfrac{4}{c_1^2}(c_1y-1)=(x+c_2)^2$.

11. （高阶可降阶方程）求解二阶微分方程的定解问题 $\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\dfrac{dy}{dx})^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

解：令 $u=\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}=uu'$，原方程化为

$$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u,$$

$u=0$，$y=C$ 不复合初值条件，舍去。

$u\neq 0$ 时，得到 $u'+u\tan y=\dfrac{1}{\cos y}$，

解为 $u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，由 $y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}$，得 $C_1=0$ 。

再解方程 $\dfrac{dy}{dx}=\sin y$ 得到

$$\ln\left|\csc y-\cot y\right|=t+C_2$$

由 $y(-1)=\dfrac{\pi}{6}$ 得出 $C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$，

定解问题之解为

$$\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}$$

12. 求解： $y''-4y'+4y=(x-1)e^{2x}$ 。

13. 求解： $y''+4y'+4y=(x-1)e^{2x}$ 。

14. 求解： $x^2y''-4xy'+4y=x-1$ 。

几何应用

15. 求曲线方程，在该曲线上任意点的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长，如果曲线： （1）向下凸； 2）向上凸.

解： 法线之长 $\sqrt{(yy')^2+y^2}=|y|\sqrt{1+(y')^2}$

- 列方程

（1） 向下凸： $\dfrac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}=\dfrac{1}{|y|\sqrt{1+(y')^2}}$

（2） 向上凸： $\dfrac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}=\dfrac{-1}{|y|\sqrt{1+(y')^2}}$

- 解方程

（1） 向下凸： $\dfrac{y''}{1+(y')^2}=\dfrac{1}{y}$， 令 $p(y)=y'$， $\dfrac{pdp}{1+(p)^2}=\dfrac{dy}{y}$

$\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)=\ln(cy)$， $\dfrac{dy}{\sqrt{(cy)^2-1}}=\pm dx$

$$\begin{cases}\ln\left(cy+\sqrt{(cy)^2-1}\right)=\pm(x-c_1)\\ \ln\left(cy-\sqrt{(cy)^2-1}\right)=\mp(x-c_1)\end{cases},\quad \begin{cases}cy+\sqrt{(cy)^2-1}=e^{\pm(x-c_1)}\\ cy-\sqrt{(cy)^2-1}=e^{\mp(x-c_1)}\end{cases}$$

$$y=\frac{1}{2c}\left(e^{(x-c_1)}+e^{-(x-c_1)}\right)=\frac{1}{c}Sh(x-c_1)$$

向上凸： $\dfrac{y''}{1+(y')^2}=\dfrac{-1}{y}$， 曲线为 $(x+c_2)^2+y^2=c_1^2$

16. 与曲线族 $y=ax^3$， $a\in R$ 正交的曲线是__________________.

解： 曲线族 $y=ax^3$， $a\in R$ 满足的方程是

$$y=ax^3,\quad y'=3ax^2$$

$$y'=\frac{3y}{x}.$$

其正交的曲线为 $y'=-\dfrac{x}{3y}$， 其通解为

$$x^2+3y^2=C$$

17. 在 XOY 坐标平面上,连续曲线 L 过点 $M(0,1)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线低斜

率与直线 OP 的斜率之差等于 ax （常数 $a>0$ ）

（Ⅰ）求 L 的方程:

（Ⅱ）当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

解:（Ⅰ)设 L 的方程为 $y=y(x)$ 。于是 $y(1)=0$ 。记 L 在点 $P(x,y)$ 处切线斜率为 $k=y'(x)$,

直线 OP 的斜率 $k_1=\frac{y}{x}$ 。由题设知 $k-k_1=axx$ 。因此 $y'-\frac{y}{x}=a$

这表明 $y=y(x)$ 是下列一阶线性微分方程初值问题的特解:

$$\begin{cases} y'-\frac{y}{x}=ax, \\ y(1)=0 \end{cases}$$

方程的通解为 $y=e\int\frac{dx}{x}[C+\int axe-\int\frac{dx}{x}dx$

$$=x[C+a\int dx]=Cx+ax^2$$

令 $x=1$ 得 $C+a=0$ ， $C=-a$ 。故曲线 L 的方程为二次抛物线

$$y=ax(x-1)\text{ 。}$$

（Ⅱ）曲线 L 与直线 $y=ax$ 的交点满足

$\begin{cases} y=ax(x-1) \\ y=ax \end{cases}$ ， $ax=ax(x-2)=0$ ， 解出两个交点 $(0,0)$ 与 $(2,2a)$ 。

曲线 L 与直线 $y=ax$ 所围成的平面图形面积为

$$S(a)=\int_0^2[ax-ax(x-1)]dx=a\int_0^2(2x-x^2)dx$$

$$=a(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=a(4-\frac{8}{3})=\frac{4}{3}a\text{ 。}$$

令 $S(a)=\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$ 得到常数 $a=2$ 。