第十三周习题课　　关于定积分的证明题与定积分的应用

1． 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\ge 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

证 将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 展开成 1 阶的 Taylor 公式，有

$$f(x)=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a}{2})^2，(0<\xi<a)。$$

由 $f''(x)\ge 0$，得到

$$f(x)\ge f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})。$$

对上述不等式两边从 0 到 a 积分，由于 $\int_0^a (x-\frac{a}{2})dx=0$，就得到

$$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

2． 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减少函数，证明：对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \ge 0。$$

证 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx\,dx+\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx\,dx\right)$，

在 $\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx$ 与 $\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx$ 中，分别令 $x=\frac{2k\pi+t}{n}$ 与 $x=\frac{(2k+1)\pi+t}{n}$，得到

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{2k\pi+t}{n})\sin tdt，$$

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx=-\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{(2k+1)\pi+t}{n})\sin tdt。$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调减少，$\sin t$ 在 $[0,\pi]$ 上非负，所以

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)-f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin tdt\geq 0\text{。}$$

3. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$。

证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx=0$，所以 $\exists x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 使得 $f(x_0)\cos^2 x_0=0$，故 $f(x_0)=0$。作辅助函数 $F(x)=f(x)\cos^2 x, F(x_0)=F(\frac{\pi}{2})=0$,由 Rolle 定理 ,至少存在一点 $\xi\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$。

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x} f(x)dx,\quad (k>1)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$。

证明：$k>1,(0,k^{-1})\subset(0,1)$，积分中值定理可得 $f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta),\quad \eta\in(0,k^{-1})$。作辅助函数 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$，则 $F(\eta)=f(1)=F(1)$，有 Rolle 定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$。

积分的应用

5. 求下列曲线所围的图形面积

（1） 叶形线 $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3, \end{cases}\quad 0\leq t\leq 2$

解：$A=\left|\int_0^2 (2t^2-t^3)(2-2t)dt\right|=2\left|\int_0^2 (2t^2-3t^3+t^4)dt\right|=\frac{8}{15}$

（2） 阿基米德螺线 $r=a\theta,\ \theta=0,\ \theta=2\pi$

解：$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2\theta^2 d\theta=\frac{4}{3}\pi^3 a^2$

（3）$x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$

解：将 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 代入 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ 中，得到

$$r^2=\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\ ,$$

于是面积

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^4\theta+1}d\tan\theta\ ,$$

令 $t=\tan\theta$，则

$$A=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}dt=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{d(t-t^{-1})}{(t-t^{-1})^2+2}=\sqrt{2}a^2\arctan\frac{t-t^{-1}}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{2}\pi a^2\text{。}$$

6. 求下列曲线的弧长

（1） 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\le t\le 2\pi$

解：$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos tdx=6a$

（2） 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$，$0\le\theta\le 2\pi$；

解：$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}d\theta=8a$

7. 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求此曲线, 切线及 x 轴为成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积.

解：可以求得切线为 $y=\frac{1}{2}x$，切点为 $(2,1)$．旋转体表面积由两部分组成：

由曲线绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为

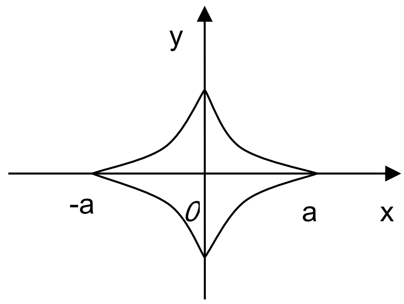
$$A_1=2\pi\int_1^2 y\sqrt{1+y'^2}dx=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}dx=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

由切线绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为

$$A_2 = 2\pi\int_0^2 \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{5}}{2}dx = \sqrt{5}\pi$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{6}\left(11\sqrt{5}-1\right)$$

8. 求由星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a>0)$ 绕 x 轴旋转所成旋转体体积.



解 由方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a>0)$ 解出 $y^2 = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3$，于是所求体积为

$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2 dx = \pi\int_{-a}^{a} (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$.

9. 在第一象限内求曲线 $y = -x^2 + 1$ 上的一点，使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小，并求此最小面积.

提示：设过 (x, y) 点的切线方程为 $Y - y = 2x(X - x)$

切线与 x 轴截距为 $a = \dfrac{x^2+1}{2x}$，与轴截距为 $b = x^2 + 1$

所求面积为：$S(x) = \dfrac{1}{2}ab - \int_0^1 \left(-x^2+1\right)dx = \dfrac{1}{4}x^3 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4x} - \dfrac{2}{3}$

$$S'(x) = \frac{1}{4}\left(3x^2 + 2 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{4}\left(3x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

所求点为 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{3}\right)$，而所求面积为 $S\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{2}{9}\left(2\sqrt{3}-3\right)$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x) = f(x) + \dfrac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x=0, x=1, y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2.

(1)求函数 $f(x)$；(2) a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

解 (1)由已知条件可得

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2} \quad (x \neq 0).$$

对上式求不定积分，由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的连续性得

$$f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + Cx \quad (x \in [0,1]) \ ,$$

又由已知条件有

$$2 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (\frac{3a}{2}x^2 + Cx)dx = \frac{a}{2} + \frac{C}{2} \ ,$$

故 $C = 4-a$ ，所以

$$f(x) = \frac{3a}{2}x^2 + (4-a)x .$$

(2)旋转体的体积

$$V = V(a) = \pi\int_0^1 \left[\frac{3a}{2}x^2 + (4-a)x\right]^2 dx = (\frac{1}{30}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{16}{3})\pi.$$

上式两边对 a 求导 ,并令一阶导数为零 ,求其驻点。由 $V'(a) = (\frac{1}{15}a + \frac{1}{3})\pi = 0$,解得 $a=-5$ 是惟一驻点，又 $V''(-5) = \frac{\pi}{15} > 0$ ，所以 $a=-5$ 为体积 V 的惟一极小值点，故为最小值点，因此 $a=-5$ 时旋转体体积最小。

11. 将半圆形平板闸门垂直放入水中，直径与水平面重合，水的密度为 1，求闸门受的压力.

解：以水平面为 y 轴，垂直向下为 x 轴建立坐标系， $dp = 2x\sqrt{R^2-x^2}dx$，其中 R 为半径.

压力

$$p = \int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}dx = \frac{2}{3}R^3$$

9. 将一半径为 R 的圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服水的浮力作的功（设水的密度为 1）.

解：

取厚度为 Δy 的水平薄片，其受水的浮力微元为 $dF = \pi x^2 dy$， 功的微元为

$$dW = \pi x^2 (2R - y) dy$$

$x^2 + (y-R)^2 = R^2$, $\qquad W = \pi \int_0^{2R} \left[R^2 - (y-R)^2 \right] (2R - y) dy = \dfrac{4}{3} \pi R^4$

12. 一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。

解 $W = \int_{15}^{30} x \cdot 10^3 g \cdot \pi 10^2 dx = 1.04 \times 10^9$（J）。