第十三周习题课　　关于定积分的证明题与定积分的应用

1．设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\geq 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx \geq af\left(\frac{a}{2}\right)。$$

2．设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减少函数，证明：对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \geq 0。$$

3. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx = 0$，证明：至少存在一点 $\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$。

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx,\quad (k>1)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$。

积分的应用

5．求下列曲线所围的图形面积

（1） 叶形线 $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=2t^2-t^3, \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2$

（2） 阿基米德螺线 $r=a\theta,\ \theta=0,\ \theta=2\pi$

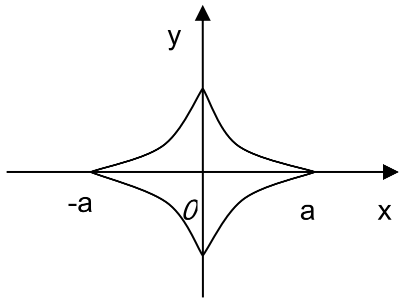
（3）$x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$

6．求下列曲线的弧长

（1） 星形线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases} \quad 0\leq t\leq 2\pi$

（2） 心脏线$r=a(1-\cos\theta)$，$0\le\theta\le 2\pi$；

7. 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求此曲线，切线及 x 轴为成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积.



8. 求由星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 绕 x 轴旋转所成旋转体体积. .

9. 在第一象限内求曲线 $y=-x^2+1$ 上的一点，使该点处的切线与所给曲线及两坐标轴所围成的图形面积为最小，并求此最小面积.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0,x=1,y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2.

⑴求函数 $f(x)$；⑵ a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

11. 将半圆形平板闸门垂直放入水中，直径与水平面重合，水的密度为 1，求闸门受的压力.

9. 将一半径为 R 的圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服水的浮力作的功（设水的密度为 1）.

12. 一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。