第十二周习题课

二．利用 Riemann 积分计算某些数列极限。

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$.

解：将极限式写作 Riemann 和的形式

$$\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

其中 $x_i=1+\frac{i}{n},\Delta x_i=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$， $f(x)=2\ln x$ 。

于是根据积分定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_1^2 f(x)dx$。因此

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=\int_1^2 2\ln xdx=2(2\ln 2-1)\text{。}$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，这里 $p>0$ 。

解：我们将 $\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ 写作如下形式

$$\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p .$$

上式右边可看作是函数 x^p 在区间 $[0,1]$ 上的一个 Riemann 和。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}\text{。}$$

三．积分估值

3. 记 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$， $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，确定 I_1 与 I_2 的大小关系。

解：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时 $\sin x<x$，且 $\sin x$ 严格单调增。

所以 $\sin(\sin x)<\sin x$， $I_1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1$。

而 $\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 严格单调减，所以 $\cos(\sin x)>\cos x$， $I_2>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1$ 。

因此 $I_1<I_2$。

4. 估计积分 $\int_0^2 e^{x^2-2x}dx$ 的范围。

解：一方面，经过简单计算可知 $\max\limits_{x\in[0,2]}\left(x^2-2x\right)=0,\quad \min\limits_{x\in[0,2]}\left(x^2-2x\right)=-1$。 另一方面由于

函数 e^x 单调上升，故有 $\frac{2}{e}=\int_0^2 e^{-1}dx\le\int_0^2 e^{x^2-2x}dx\le\int_0^2 e^0dx=2$。

这当然是一个比较粗糙的估计。

5. 记 $I_1:=\int_{-1}^1 x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$，$I_2:=\int_{-1}^1\frac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx$，$I_3:=\int_{-1}^1\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx$，试比较这三个积分的大小。

解：注意 $(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)=1$，故 $\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})=\ln^2(-x+\sqrt{1+x^2})$。由此可见积分 I_1 中的被积函数为奇函数。所以 $I_1=0$。

我们注意，积分 I_2 和 I_3 的被积函数均为一个偶函数和一个奇函数之和。由于其函数在对称区间上的积分为零。因此我们有

$$I_2=\int_{-1}^1\frac{|x|dx}{\sqrt{1+x^2}}=2\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=2\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1)>0,$$

$$I_3=-2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx\le-2\int_0^1\frac{1}{(1+1^2)^2}dx=-\frac{1}{2}<0。$$

于是 $I_3<I_1<I_2$。解答完毕。

四．积分不等式与零点问题

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒正即 $f(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$。证明函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x[f(t)]^{-1}dt$$

在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点。.

证明：由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且恒大于零，我们得到 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且可导且

$$F'(x)=f(x)+\frac{1}{f(x)}>0。$$

这表明 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增. 又由于

$$F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt<0,\quad F(b)=\int_a^b f(t)dt>0,$$

并且函数 $F(x)$ 是严格单调增加的，根据连续函数的介值定理可知，函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点. 解答完毕。

7.　（课本第五章总复习题第 17 题，p.188）已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调上升。证

明：$\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$。

证明：方法一

记 $c=(a+b)/2$。由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调上升，故有 $(x-c)(f(x)-f(c)) \ge 0$，$\forall x \in [a,b]$。

对这个不等式在区间 $[a,b]$ 上积分得

$$\int_a^b (x-c)f(x)dx \ge f(c)\int_a^b (x-c)dx = 0。$$

由此立刻得到

$$\int_a^b xf(x)dx \ge c\int_a^b f(x)dx = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx。$$

方法二：令 $F(y) := \int_a^y xf(x)dx - \frac{a+y}{2}\int_a^y f(x)dx$，$\forall y \in [a,b]$。经简单计算可得 $F(y)$ 的导数为 $F'(y) = \frac{1}{2}\int_a^y [f(y)-f(x)]dx \ge 0$。

因此函数 $F(y)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调上升。

于是 $F(b) \ge F(a) = 0$。此即 $\int_a^b xf(x)dx \ge \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$。

8. （课本第五章总复习题第 18 题，p.188）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx = 0$ 和 $\int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0$。证明函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上至少有两个零点。

证明：反证。假设所证命题不成立，则可能是下列三种情况之一：

(i) $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 无零点，或

(ii) $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 有且仅有一个零点，且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 不变号；或

(iii) $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有一个零点，且 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 变号。

对于情形(i)和(ii)，由于 $f(x)$ 和 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 不变号，并且它们的乘积不恒为零。因此不可能有 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx = 0$。这就导出了一个矛盾。以下考虑情形(iii).

假设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上有且仅有一个零点 $x_0 \in (0,\pi)$，且 $f(x)$ 在 x_0 的两侧反号。不妨设 $f(x) < 0$，$\forall x \in (0,x_0)$；$f(x) > 0$，$\forall x \in (x_0,\pi)$。于是乘积 $f(x)\sin(x-x_0)$ 在 $[0,\pi]$ 非负，并且不恒为零。

因此其积分 $\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx > 0$。

另一方面，由假设我们有

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x-x_0)dx = \cos x_0\int_0^\pi f(x)\sin xdx - \sin x_0\int_0^\pi f(x)\cos xdx = 0。$$

矛盾。

9. （Hadamard 不等式）设函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可导且下凸。证明

$$f(\tfrac{a+b}{2})(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \qquad (*)$$

注：本题可看作是习题 5.2 第 10 题（p.141）的一般化。

证明：根据假设我们有

$$f(x)=f(tb+(1-t)a)\le tf(b)+(1-t)f(a)\text{，}\quad \forall t\in[0,1]$$

于是对积分$\int_a^b f(x)dx$作变量替换$x=ta+(1-t)b$得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 f(tb+(1-t)a)(b-a)dt\le(b-a)\int_0^1[tf(b)+(1-t)f(a)]dt=$$
$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

即式（*）的第二个不等式成立。

回忆下凸函数的一个性质：下凸函数的图像位于其任意点切线的上方。(见第七次习题课的讨论题)。因此图像位于区间中点处切线的上方，即

$$f(x)\ge f(\tfrac{a+b}{2})+f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})\text{，}\quad \forall x\in[a,b]\text{。}$$

对上述不等式积分，并注意到函数$x-\frac{a+b}{2}$在区间$[a,b]$上的积分为零，我们得到式（*）中的第一个不等式 $\int_a^b f(x)dx\ge f(\frac{a+b}{2})(b-a)$。至此不等式（*）得证。

注：(i) 对于上凸函数，我们有相应不得式，即将不等式(*)的不等号反向即可。(ii)假设中的条件：函数$f(x)$于$[a,b]$可导性，可以去掉。实际上下凸函数（不必可导）有如下性质：

若函数$f(x)$于$[a,b]$下凸，则对任意点$x_0\in[a,b]$，存在数$k(x_0)$，使得

$$f(x)\ge f(x_0)+k(x_0)(x-x_0)\text{，}\quad \forall x\in[a,b]\text{。}$$

直线$y=f(x_0)+k(x_0)(x-x_0)$称作下凸函数$f(x)$在点$x_0\in[a,b]$的支撑线。

五．积分与极限。

说明：我们常常需要考虑闭区间$[a,b]$上函数列$f_n(x)$积分后的极限问题，即求

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$。

当极限$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$对每个$x\in[a,b]$都存在，且函数$f(x)$在$[a,b]$上可积，我们自然期待$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\left[\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right]dx$。

实事上这个等式在许多情形下是正确的。 等式成立的一个充分条件涉及函数的一致收敛性。但的确存在等式不成立的情形。也就是说，存在闭区间$[a,b]$上连续函数列$f_n(x)$，使得$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx\ne\int_a^b\left[\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)\right]dx$。这表明对于函数列$f_n(x)$作积分运算和极限运算的先后次序不同，所得的结果可能不同。

下个学期我们将仔细研究这个问题。以下我们考虑极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$的两个例子。

10. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$ 。

证明：注意我们可以将 $f(1)$ 表示为 $f(1)=(n+1)\int_0^1 x^n f(1)dx$ 。于是我们要证

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx = 0 。$$

根据函数 $f(x)$ 的连续性可知， $f(x)$ 有界，及存在正数 $M>0$ ，使得 $|f(x)|\le M$ ， $\forall x\in[0,1]$ 。

再根据函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左连续性可知，对于 $\forall\varepsilon>0$ ， $\exists\delta>0$ ，使得

$$|f(x)-f(1)|<\varepsilon ，\quad \forall x\in(1-\delta,1] 。$$

于是

$$\begin{aligned}
\left|(n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx\right| &\le (n+1)\int_0^1 x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx \\
&\le (n+1)\int_0^{1-\delta} x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx + (n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx \\
&\le 2M(n+1)\int_0^{1-\delta} x^n dx + (n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx \\
&\le 2M(1-\delta)^{n+1} + \varepsilon\left[1-(1-\delta)^{n+1}\right] \le 2M(1-\delta)^{n+1} + \varepsilon
\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\delta)^{n+1}=0$ 可知，对于上述 $\varepsilon>0$ ，存在 $N>0$ ，使得当 $n\ge N$ 时， $2M(1-\delta)^{n+1}<\varepsilon$ 。

于是我们就证明了对于 $\forall\varepsilon>0$ ，存在 $N>0$ ，使得当 $n\ge N$ 时，

$$\left|(n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx\right| < \varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$ 。

注：类似可证，若 f 连续，则 $\lim\limits_{h\to0}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)dx = \frac{\pi f(0)}{2}$ 。

11. （课本习题 5.2 第 7 题，p.141）证明

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1$.

(iii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0$.

证明：（i）对积分$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}$，利用积分中值定理得

$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = \frac{1}{1+\xi_n}\int_0^1 x^n dx \le \frac{1}{n+1} \to 0$，这里$\xi_n \in [0,1]$。

由此立刻可知极限(i)成立。

注意 1：直接用积分中值定理是错的，$\exists \xi_n \in (0,1)$，使得$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = \frac{\xi_n^n}{1+\xi_n} \to 0, n \to +\infty$

注意 2：由于函数x^n和$\frac{1}{1+x}$于区间$[0,1]$都是非负的。因此还有另一种可能性， 关于积分

$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x}$利用积分中值定理。这就是 $\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = \eta_n^n \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \eta_n^n \ln 2$，这里$\eta_n \in (0,1)$。

由于$\eta_n \in (0,1)$的位置不确定，因此极限$\lim\limits_{n\to+\infty} \eta_n^n$的存在性和极限值的确定有困难。

(ii) 极限$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} = 1$，当且仅当$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} = 0$。

由于$\int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^n} < \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \to 0$，当$n \to +\infty$时。由此可见积分(ii)成立。

(iii). 要证极限（iii），即要证对于$\forall \varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得

$$(0<)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx < \varepsilon，\quad \forall n \ge N。$$

由于$\sin^n(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \to 0$，当$n \to +\infty$时。因此对$\forall \varepsilon > 0$，存在$N > 0$，使得

$\sin^n(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) < \varepsilon$，$\forall n \ge N$。于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx <$$

$< \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} 1 dx < \varepsilon \frac{\pi}{2} + \varepsilon < 3\varepsilon$，$\forall n \ge N$。这就证明了极限（iii）。 证毕。

六．变限积分

12. 设$f(x) = \int_0^{1-\cos x} \sin t^2 dt$，$g(x) = \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6}$，则当$x \to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的[ ].

(A).低阶无穷小量； (B).高阶无穷小量；

(C).等价无穷小量； (D).同阶但非等价无穷小量.

答案：(B).

13. 设 $f(x),g(x)\in C[0,+\infty)$， $f(x)>0$， $g(x)$ 单调增加，则 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$

[　　　　].

(A).在 $[0,+\infty)$ 上单调增加;　　　　　　　　(B). 在 $[0,+\infty)$ 上单调减少;

(C). 在 $[0,+1)$ 上单调增加，在 $[1,+\infty)$ 上单调减少;

(D). 在 $[0,+1)$ 上单调减少，在 $[1,+\infty)$ 上单调增加。

解：由于

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)g(x)\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x f(t)g(t)dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}=\frac{f(x)\int_0^x f(t)[g(x)-g(t)]dt}{\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2}>0,$$

所以 $\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，答案：(A).

14. 当常数 $a,b,c=$ [　　　　]时，极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$$

A． $a=0,b=0,c=\dfrac{1}{2}$；　　　　　　B。 $a=1,b=0,c=\dfrac{1}{2}$；

C． $a=0,b=1,c=\dfrac{1}{2}$；　　　　　　D。 $a=\dfrac{1}{2},b=0,c=\dfrac{1}{2}$。

答案：B

15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\int_0^x \cos t^2 dt\right)^{\frac{1}{x}}=$ ____________________.

(A) e;　　　　(B) 1;　　　　(C) $e^{\frac{1}{2}}$;　　　　(D) $e^{-\frac{1}{2}}$.

答案：(A)

16. 设 $F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，则 $F^{(17)}(0)=$ ________________.

(A) $\dfrac{-17!}{2}$;　　　　(B) $\dfrac{17!}{2}$;　　　　(C) $\dfrac{-16!}{2}$;　　　　(D) $\dfrac{16!}{2}$;

答案：(C)

17. 设 $F(x)=\int_0^{x^4}(t-1)e^{t^2}dt$，则 $F(x)$ 的单调上升区间为：

(A) $(-\infty,\ -1)$ 和 $(1,\ \infty)$；　　(B) $(-1,\ 0)$ 和 $(1,\ \infty)$；

(C) $(-\infty,\ 0)$ 和 $(0,\ \infty)$；　　(D) $(-\infty,\ 0)$ 和 $(1,\ \infty)$；

答案：(B)

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\int_1^x(\ln t)^2dt}{(\sin x^2-\sin 1)^3}=$ ____________________.

(A) $\dfrac{1}{24\cos^3 1}$；　(B) $\dfrac{1}{24}$；　(C) $\dfrac{1}{8\cos^3 1}$；　(D) $\dfrac{1}{8}$.

答案：(A)

19. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，则当 $x\to 0$ 时，$F(x)=\int_0^x\ (x^2-t^2)f(t)dt$ 是[　　]阶无穷小量.

(A).1;　(B).2;　(C).3;　(D).4.

答案：(D).

解：$F(x)=\int_0^x\ (x^2-t^2)f(t)dt=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt$

设 $F(x)$ 是 k 阶无穷小量,

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2f(t)dt}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)}{kx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{kx^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{k(k-2)x^{k-3}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{k(k-2)(k-3)x^{k-4}}$$

$k=4$ 时级极限存在且非零.

20. 函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值点为______________.

(A) $x=-1$;　(B) $x=1$;　(C) $x=0$;　(D) $x=e$.

答案：C

21. 设曲线 $y=f(x)$ 由

$$x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du \quad 及 \quad y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^t e^{t-u}\cos 2udu$$

确定，则该曲线当 $t=\frac{\pi}{2}$ 时的法线方程为______________.

解：$x'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\sin\frac{u}{3}du\right)=e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\sin\frac{u}{3}du+\sin\frac{t}{3}.$

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\cos 2udu\right)=e^t\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\cos 2udu+\cos 2t.$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-2,$$

法线为 $y=\frac{x}{2}.$