第十二周习题课

二．利用 Riemann 积分计算某些数列极限。

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$.

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，这里 $p>0$ 。

三．积分估值

3. 记 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$， $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，确定 I_1 与 I_2 的大小关系。

4. 估计积分 $\int_0^2 e^{x^2-2x}dx$ 的范围。

5. 记 $I_1:=\int_{-1}^1 x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$， $I_2:=\int_{-1}^1\frac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx$， $I_3:=\int_{-1}^1\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx$，试比较这三个积分的大小。

四．积分不等式与零点问题

6. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且恒正即 $f(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$。 证明函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x[f(t)]^{-1}dt$$

在 $[a,b]$ 上有且仅有一个零点。.

7. （课本第五章总复习题第 17 题，p.188）已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调上升。证明： $\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$ 。

8. （课本第五章总复习题第 18 题，p.188）设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续且 $\int_0^\pi f(x)\sin xdx=0$ 和 $\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$ 。证明函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上至少有两个零点。

9. （Hadamard 不等式）设函数 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 可导且下凸。证明

$$f(\tfrac{a+b}{2})(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)\qquad(*)$$

注：本题可看作是习题 5.2 第 10 题（p.141）的一般化。

五．积分与极限。

说明：我们常常需要考虑闭区间$[a,b]$上函数列 $f_n(x)$ 积分后的极限问题，即求

$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ 。

当极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$ 对每个 $x\in[a,b]$ 都存在，且函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可积，我们自然期待 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\left[\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right]dx$ 。

实事上这个等式在许多情形下是正确的。 等式成立的一个充分条件涉及函数的一致收敛性。但的确存在等式不成立的情形。也就是说，存在闭区间$[a,b]$上连续函数列 $f_n(x)$，使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx\neq\int_a^b\left[\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right]dx$ 。这表明对于函数列 $f_n(x)$ 作积分运算和极限运算的先后次序不同，所得的结果可能不同。

下个学期我们将仔细研究这个问题。以下我们考虑极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)dx$ 的两个例子。

10. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$ 。

11. （课本习题 5.2 第 7 题，p.141）证明

(i). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}=0$.

(ii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1\frac{dx}{1+x^n}=1$.

(iii). $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=0$.

六．变限积分

12. 设 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin t^2 dt$，$g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的[ ].

(A).低阶无穷小量; (B).高阶无穷小量;

(C).等价无穷小量; (D).同阶但非等价无穷小量.

答案：(B).

13. 设 $f(x),g(x)\in C[0,+\infty)$， $f(x)>0$， $g(x)$ 单调增加，则 $\varphi(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x f(t)dt}$

[ ].

(A).在$[0,+\infty)$上单调增加； (B). 在$[0,+\infty)$上单调减少；

(C). 在$[0,+1)$上单调增加，在$[1,+\infty)$上单调减少；

(D). 在$[0,+1)$上单调减少，在$[1,+\infty)$上单调增加。

14. 当常数$a,b,c=$[ ]时，极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\neq 0$$

A．$a=0,b=0,c=\frac{1}{2}$； B。$a=1,b=0,c=\frac{1}{2}$；

C．$a=0,b=1,c=\frac{1}{2}$； D。$a=\frac{1}{2},b=0,c=\frac{1}{2}$。

15. $\lim_{x\to 0}\left(1+\int_0^x \cos t^2 dt\right)^{\frac{1}{x}}=$ ____________________.

(A) e； (B) 1； (C) $e^{\frac{1}{2}}$； (D) $e^{-\frac{1}{2}}$.

16. 设$F(x)=\int_0^x \ln\left(1+t^8\right)dt$，则$F^{(17)}(0)=$________________.

(A) $\frac{-17!}{2}$； (B) $\frac{17!}{2}$； (C) $\frac{-16!}{2}$； (D) $\frac{16!}{2}$；

17. 设$F(x)=\int_0^{x^4}(t-1)e^{t^2}dt$，则$F(x)$的单调上升区间为：

(A) $(-\infty,\ -1)$ 和 $(1,\ \infty)$； (B) $(-1,\ 0)$ 和 $(1,\ \infty)$；

(C) $(-\infty,\ 0)$ 和 $(0,\ \infty)$； (D) $(-\infty,\ 0)$ 和 $(1,\ \infty)$；

18. $\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x (\ln t)^2 dt}{\left(\sin x^2-\sin 1\right)^3}=$ ____________________.

(A) $\dfrac{1}{24\cos^3 1}$; (B) $\dfrac{1}{24}$; (C) $\dfrac{1}{8\cos^3 1}$; (D) $\dfrac{1}{8}$.

19. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)\neq 0$，则当 $x\to 0$ 时，

$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$ 是[ ]阶无穷小量.

(A).1; (B).2; (C).3; (D).4.

20. 函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值点为______________.

(A) $x=-1;$ (B) $x=1;$ (C) $x=0;$ (D) $x=e.$

21. 设曲线 $y=f(x)$ 由

$$x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du \quad 及 \quad y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t} e^{t-u}\cos 2u du$$

确定, 则该曲线当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时的法线方程为______________.