第 16 周习题课参考内容

线性常微分方程

一、线性方程解集合的性质

1． 设 $p(x), q(x) \in C(-\infty, +\infty)$，考虑一阶方程

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

1）如果两条积分曲线相交说明什么？

2）由此可以得到什么结论？

解：1）设积分曲线 $y = y_1(x), y = y_2(x)$ 相交于 (x_0, y_0)，则这两个函数都满足

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad -\infty < x < +\infty \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

由存在唯一性定理，$y_1(x) \equiv y_2(x)$，也即两条积分曲线是重合的。

2）根据存在唯一性定理，该方程任意两条不同的积分曲线不可能相交。

2． 如果已知 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), y_{n+1}(x)$ 为 n 阶线性方程

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x), \quad x \in I$$

的 n+1 个线性无关解（参见书上习题 7.4)，求这个方程的通解 $y(x)$=?

解：类似上题，$z_i = y_i - y_{n+1}$，$i = 1, 2, \cdots, n$，都是齐次方程的解，

它们必线性无关，否则存在不全为零的 $c_1, c_2, \cdots, c_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} c_i z_i = \sum_{i=1}^{n} c_i (y_i - y_{n+1}) = 0，也即 \sum_{i=1}^{n} c_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} c_i) y_{n+1} = 0,$$

这与题设 $y_1, y_2, \cdots, y_{n+1}$ 线性无关矛盾。

因此原方程通解为

$$y = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_n z_n + y_{n+1},$$

也即

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n - 1) y_{n+1}$$

3． 已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x - e^{-x}, y_3 = xe^x - e^{-x} + e^{2x}$ 是一个 2 阶线性非齐次方程的 3 个解，求出这个方程。

解：首先同上论证，可以写出齐次方程的通解

$$y = c_1(y_1 - y_3) + c_2(y_3 - y_2) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x},$$

相应的特征方程为

$$(\lambda - 2)(\lambda + 1) = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0,$$

因此相应的齐次方程为

$$y'' - y' - 2y = 0;$$

再将 y_1（或 y_2, y_3）代入方程左端得到方程的非齐次项：

$$y_1' = (x+1)e^x + 2e^{2x}, \quad y_1'' = (x+2)e^x + 4e^{2x}$$

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = (x+2)e^x + 4e^{2x} - (x+1)e^x - 2e^{2x} - 2(xe^x + e^{2x})$$

$$= (1-2x)e^x,$$

所求方程为

$$y'' - y' - 2y = (1-2x)e^x。$$

二、线性方程的求解

1．求方程 $y'' + \dfrac{x}{1-x} y' - \dfrac{1}{1-x} y = 0$ 的通解。

解：这是二阶线性齐次方程，只需找到 2 个线性无关解，再线性组合即可。

首先容易观察得到 $y_1 = x$ 是一个特解；

使用常数变异法，令 $y_2 = u(x) y_1$，代入方程得

$$(xu'' + 2u') + \frac{x}{1-x}(xu' + u) - \frac{1}{1-x}(xu) = 0,$$

整理得 $xu'' + (2 + \dfrac{x^2}{1-x})u' = 0$（可降阶二阶方程），

解得 $u = \dfrac{e^x}{x}$，故 $y_2 = e^x$，

所以原方程通解为 $y = C_1 x + C_2 e^x$。

2．求 $x = x(t)$ 满足下列常系数线性齐次方程：

（1） $x''' - 5x'' + 8x' - 4x = 0$

解：特征方程为 $\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=(\lambda-1)(\lambda-2)^2=0$，

其根为 $\lambda=1$ 和 $\lambda=2$（二重）；
根据常系数方程解的结构，得到基本解组

$$x_1=e^t, x_2=e^{2t}, x_3=te^{2t},$$

通解 $x=C_1e^t+(C_2+C_3t)e^{2t}$。

（2）$x^{(7)}-2x^{(5)}+x^{(3)}=0$

解：特征方程 $\lambda^7-2\lambda^5+\lambda^3=\lambda^3(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2=0$，

解得 $\lambda=0$（三重根），$\lambda=1$（二重根），$\lambda=-1$（二重根）
基本解组为

$$x_1=1, x_2=t, x_3=t^2, x_4=e^t, x_5=te^t, x_6=e^{-t}, x_7=te^{-t},$$

通解 $x=C_1+C_2t+C_3t^2+C_4e^t+C_5te^t+C_6e^{-t}+C_7te^{-t}$。

（3）$x'''+x''-2x=0$

解：特征方程 $\lambda^3+\lambda^2-2=(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+2)=0$

解得 $\lambda=1$ 以及 $\lambda=-1\pm i$，
基本解组为

$$x_1=e^t,\ x_{2,3}=e^{(-1\pm i)t}=e^{-t}(\cos t\pm i\sin t),$$

或组合为实数值基本解组

$$x_1=e^t,\ \bar{x}_2=e^{-t}\cos t,\ \bar{x}_3=e^{-t}\sin t,$$

通解 $x=C_1e^t+(C_2\cos t+C_3\sin t)e^{-t}$。

3．求解下列常系数线性非齐次方程：

（1）$y''-4y'+4y=3e^{2x}$

解：特征方程 $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$，

可见齐次方程的基本解组是

$$y_1=e^{2x},\ y_2=xe^{2x},$$

以下可以用常数变异法求非齐次方程的一个特解：令

$$\bar{y}=uy_1+vy_2=(u+xv)e^{2x},$$

其中 u,v 满足 $y_1u'+y_2v'=(u'+xv')e^{2x}=0$，也即

（a）　$u' + xv' = 0$，

再将 $\bar{y}$ 代入方程整理得到　$y_1'u' + y_2'v' = 3e^{2x}$，也即

（b）　$2u' + (2x+1)v' = 3$，

由（a--b）解得　$u = -\dfrac{3}{2}x^2, v = 3x$，

所以 $\bar{y} = (u + xv)e^{2x} = \dfrac{3}{2}x^2 e^{2x}$；

综上得到原方程通解

$$y = (C_1 + C_2 x + \frac{3}{2}x^2)e^{2x}。$$

注：也可用待定系数法求非齐次方程特解：$\lambda = 2$ 是特征方程的二重根，

故令 $\bar{y} = ax^2 e^{2x}$ 代入方程后确定 $a = 3/2$。

（2）$y'' + 3y' + 2y = 3\sin x$

解：特征方程 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$，

可见齐次方程的基本解组是

$$y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^{-2x}；$$

下面用待定系数法求非齐次方程的一个特解：

注意 $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$，而 i 不是特征方程的根，

考虑相关的复值函数方程

$$y'' + 3y' + 2y = 3e^{ix}\ （= 3\cos x + 3i\sin x）$$

寻求一个复值特解 $\tilde{y} = Ae^{ix}$，A 是待定复数，

$$\tilde{y}' = iAe^{ix},\quad \tilde{y}'' = i^2 Ae^{ix} = -Ae^{ix},$$

代入方程得

$$\tilde{y}'' + 3\tilde{y}' + 2\tilde{y} = (-1 + 3i + 2)Ae^{ix} = 3e^{ix},$$

所以　$A = \dfrac{3}{1+3i} = \dfrac{3(1-3i)}{10}$，

$$\tilde{y} = \frac{3(1-3i)}{10}(\cos x + i\sin x) = \frac{3(\cos x + 3\sin x)}{10} + i\frac{3(\sin x - 3\cos x)}{10},$$

注意 $\tilde{y} = u(x) + iv(x)$，其中 $v = \dfrac{3(\sin x - 3\cos x)}{10}$ 就是原方程的一个特解。

综上得到原方程通解　$y = \dfrac{3\sin x - 9\cos x}{10} + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$。

法二：令 $\bar{y} = a\cos x + b\sin x$ 是原方程一个特解，a, b 待定，则

$$\bar{y}' = -a\sin x + b\cos x\text{，}\quad \bar{y}'' = -a\cos x - b\sin x\text{，}$$

代入方程得

$$(-a\cos x - b\sin x) + 3(-a\sin x + b\cos x) + 2(a\cos x + b\sin x) = 3\sin x\text{，}$$

整理得 $(a+3b)\cos x + (b-3a)\sin x = 3\sin x$，

也即 $a+3b=0, b-3a=3$，

解得 $a=-\dfrac{9}{10}, b=\dfrac{3}{10}$，所以 $\bar{y}=\dfrac{-9\cos x+3\sin x}{10}$。

（3）$x''-4x'+4x=1+e^t+e^{2t}$

解：特征方程 $\lambda^2-4\lambda+4=(\lambda-2)^2=0$，$\lambda_{1,2}=2$

因此齐次方程基本解组是

$$x_1=e^{2t},\ x_2=te^{2t}\text{；}$$

以下将原方程分解为 3 个方程分别求特解：

对于 $x''-4x'+4x=1$，观察即得到 $x=\dfrac{1}{4}$，

对于 $x''-4x'+4x=e^t$，考虑 $x=ae^t$，解得$a=1$，$x=e^t$，

对于 $x''-4x'+4x=e^{2t}$，考虑 $x=bt^2e^{2t}$，解得$b=\dfrac{1}{2}$，$x=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t}$，

利用线性方程叠加原理，上面 3 个方程的解叠加得到原非齐次方程一个特解

$$\bar{x}=\frac{1}{4}+e^t+\frac{1}{2}t^2e^{2t}\text{；}$$

综上得原方程通解

$$x=(C_1+C_2t+\frac{1}{2}t^2)e^{2t}+e^t+\frac{1}{4}\text{。}$$