第 15 周习题课参考内容

微分方程的解与应用

一、求解微分方程（某些特殊方法）

1. 求方程 $(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$ 的通解。

解：观察组合方程中各项，其中

$$(1+y)dx+xdy=d(x+xy)\,,\quad (y^2+y^3)dy=d(\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4})\,,$$

综上

$$(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=d(x+xy+\frac{y^3}{3}+\frac{y^4}{4})=0\,,$$

也即 $\dfrac{d}{dx}(x+xy+\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{y^4}{4})=0$，

所以 $x+xy+\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{y^4}{4}=C$，$C$ 为任意正常数。

2. 求解 $x^2+y'^2=1$。

解：观察方程可知 $|y'|\le 1$，可以令 $y'=\cos t$，从而由方程得 $x=\sin t$，

利用 $dy=y'(x)dx=y'(x)x'(t)dt$ 得：$dy=\cos^2 tdt$，

积分得： $y=\dfrac{1}{2}t+\dfrac{1}{4}\sin 2t+C=\dfrac{1}{2}(t+\sin t\cos t)+C$，

将 $t=\arcsin x$ 代入得原方程的通解：

$$y=\frac{1}{2}(\arcsin x+x\sqrt{1-x^2})+C\text{。}$$

3. 求解 $y'^2-xy'+y=0$。

解：方程再求导一次得 $2y'y''-xy''=0$，整理得 $(2y'-x)y''=0$；

从 $2y'-x=0$ 得 $y'=\dfrac{1}{2}x$，代入原方程

$$y=xy'-y'^2=\frac{1}{4}x^2 \text{ —— 得到一个特解；}$$

从 $y''=0$ 解得 $y=Cx+b$，C,b 为任意常数。

但原方程是一阶方程，通解只能包含一个任意常数，这说明 C,b 是相关的。

事实上将 $y'=C$ 代入原方程便得通解

$$y=xy'-y'^2=Cx-C^2\text{（即 }b=-C^2\text{）。}$$

4. 求解 $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$ 。

解：原方程等价为 $y = xy'(\ln y')^{-1}$，

两边再对 x 求导，整理得

$$(1-\ln y')(xy''-y'\ln y')=0；$$

从 $1-\ln y'=0$ 得 $y'=e$，

代入 $y = xy'(\ln y')^{-1}$，得到一个特解 $y = ex$；

从 $xy''-y'\ln y'=0$ 可解得 $y' = e^{Cx}$，

代入 $y = xy'(\ln y')^{-1}$，得到通解 $y = \frac{1}{C}e^{Cx}$。

二、微分方程解的性质

1. 试研究 $\begin{cases} y' = x^3 + xy^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 之解所确定函数的增减区间，极值点及凸凹区间。

解：由方程可见，$x>0$ 时 $y'>0$，函数严格单调增；$x<0$ 时 $y'<0$，函数严格单调减；

因此函数在 $x=0$ 达到极小值（也是最小值）$y(0)=0$，所以 $y \ge 0$。

将方程再求导一次，得

$$y'' = x^2 + y^2 + x(2x + yy') = 3x^2 + y^2 + x^4y + x^2y^3 \ge 0,$$

可见函数是处处下凸的。

2. 已知 $y = y(x)$ 是定解问题 $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 在区间 $(-a,a)$ 内的唯一解。

试研究该函数的增减性、凹凸性、以及奇偶性。

解：由方程知 $y' \ge 0$，且当 $x \ne 0$ 时 $y'>0$，故 $y = y(x)$ 严格单调增；

又因为 $y(0)=0$，所以 $x>0$ 时 $y>0$，$x<0$ 时 $y<0$；

为研究解的凹凸性，将方程求导一次

$$y'' = 2x + 2yy' = 2x + 2y(x^2 + y^2),$$

可见 $x>0$ 时 $y''>0$，$y = y(x)$ 下凸，$x<0$ 时 $y''<0$，$y = y(x)$ 上凸，$x=0$ 是拐点。

令 $f(x) = -y(-x)$，则

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(-y(-x)\right) = y'(-x) = (-x)^2 + \left(y(-x)\right)^2 = x^2 + \left(f(x)\right)^2,$$

此外 $f(0) = y(0) = 0$，可见 $f(x)$ 也是初值问题 $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解。

由题意该问题解唯一，所以 $y(x)=f(x)=-y(-x)$，即 $y(x)$ 是奇函数。

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，求证：对于方程 $\dfrac{dy}{dx}+y=f(x)$ 的一切解 $y(x)$，均有 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$。

证：设 $y=y(x)$ 是方程任一解，记 $y(x_0)=y_0$，则该解可表达为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-x+x_0}[y_0+\int_{x_0}^{x} f(s)\mathrm{e}^{(s-x_0)}\mathrm{d}s],$$

取极限（推导中应用 L'Hospital 法则）

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{y_0}{\mathrm{e}^{x-x_0}}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_{x_0}^{x} f(s)\mathrm{e}^{(s-x_0)}\mathrm{d}s}{\mathrm{e}^{x-x_0}}$$

$$=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)\mathrm{e}^{x-x_0}}{\mathrm{e}^{x-x_0}}=\lim_{x\to+\infty} f(x)=0。$$ □

4. 设 $f(x)$ 是周期为 T 的连续函数，$a\in\mathbf{R}$，$y=y(x)$ 满足

$$\frac{dy}{dx}+ay=f(x)，\quad y(0)=y(T)。$$

求证 $y(x)$ 是以 T 为周期的函数。

证：考虑函数 $u(x)=y(x)-y(x+T)$ 满足的方程

$$\frac{du}{dx}+au=f(x)-f(x+T)=0,$$

解得 $u(x)=Ce^{-ax}$；

此外由已知条件 $u(0)=y(0)-y(T)=0$，代入上式得 $C=0$；

综上 $u(x)\equiv 0$，可见 $y(x)\equiv y(x+T)$，即 $y(x)$ 是以 T 为周期的函数。 □

推广：考虑将 $a\in\mathbf{R}$ 推广为周期为 T 的连续函数 $a(x)$。

三、微分方程的应用

1. 设 $f(x)=\sin x+\int_0^x e^t f(x-t)dt$，其中 $f(x)$ 为连续函数，求 $f(x)$。

解：显然 $f(x)$ 为可导函数，可以将积分等式求导化为微分方程。

为了对变上限积分求导，需要消除被积函数中的变量 x，

为此，引入积分变量代换 $u=x-t$，则 $dt=-du$，因此

$$f(x)=\sin x+e^x\int_0^x e^{-u} f(u)du，\quad f(0)=0,$$

上式两端乘以e^{-x}（以便求导去掉积分号），之后对x求导：

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}f(x)-e^{-x}\sin x\right)=\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-u}f(u)du\,,$$

$$-e^{-x}f(x)+e^{-x}f'(x)+e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x=e^{-x}f(x)\,,$$

整理得到

$$\begin{cases} f'-2f=\cos x-\sin x \\ f(0)=0 \end{cases}$$

解出 $f(x)=e^{2x}\int\limits_0^x(\cos t-\sin t)e^{-2t}dt=\frac{1}{5}(e^{2x}+3\sin x-\cos x)$。

2．在 XOY 坐标平面上，连续曲线 L 过点$M(1,0)$，其上任意点$P(x,y)(x\neq 0)$处的切线的斜率与直线 OP 的斜率之差等于ax（常数$a>0$），求 L 的方程。

解：设 L 的方程为$y=y(x)$，于是$y(1)=0$；

L 在点$P(x,y)$处切线斜率为$k=y'(x)$，直线 OP 的斜率$k_1=\frac{y}{x}$。

由题设知$k-k_1=ax$，即 $y'-\frac{y}{x}=ax$。

所以 $y=y(x)$ 满足以下定解问题：$\begin{cases} y'-\frac{y}{x}=ax \\ y(1)=0 \end{cases}$

解出该一阶线性方程的通解 $y=x(C+a\int dx)=Cx+ax^2$，

令$x=1$ 得 $C+a=0$，$C=-a$，

故曲线 L 的方程为二次抛物线 $y=ax(x-1)$。

3．考虑三次曲线族$y=ax^3$（$a\in\mathbf{R}$），求与该曲线族正交的曲线族。

解：依题意，所求曲线都与曲线族$y=ax^3$（$a\in\mathbf{R}$）正交（不是仅仅与其中一条曲线正交），

也即所求曲线在其上的每一点都与过该点的某一条$y=ax^3$曲线正交。

设所求曲线为$y=y(x)$，则该曲线在(x,y)点与过该点的三次曲线族中的一条曲线正交，而过(x,y)点三次曲线族的曲线斜率为

$$y'=3ax^2=3y/x\,,$$

所求曲线与其正交，其斜率必须且只须满足

$$y'=-x/(3y)\,,$$

简单分离变量积分即得

$2x^2+3y^2=C$（椭圆曲线族）。

4. 设曲线L位于 XOY 平面第一象限内，L上任意一点M的切线与y轴交于点A，则A到M的距离与A到原点O的距离总是相等，已知L经过点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$，求$L$的方程。

解：设L的方程为$y=y(x)$，取L上任意一点M (x,y)，该点的切线方程为

$$Y-y=y'(x)(X-x)$$

在切线与y轴的交点A处，

$$X=0, Y=y-xy'(x),$$

于是，A到原点O的距离 $|AO|=|y-xy'|$，

而A到M的距离

$$|AM|=\sqrt{(x-0)^2+(y-(y-xy'))^2}=\sqrt{x^2[1+(y')^2]},$$

由题意 $|y-xy'|=\sqrt{x^2[1+(y')^2]}$，化简得到

$$2xyy'-y^2=-x^2,$$

观察可见，令$z=y^2$ 可将方程化为一阶线性方程

$$z'-\frac{z}{x}=-x,$$

求解得到通解 $z=Cx-x^2$，从而 $y=\sqrt{Cx-x^2}$（曲线在第一象限），

代入已知条件$y(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}$，得到$C=3$，所以曲线$L$的方程

$$y=\sqrt{3x-x^2}, \quad 0<x<3。$$

5*. 某湖泊总水量为V，每年中流入含污染物的污水量为$V/6$，不含污染物的水量为$V/6$，流出水量为$V/3$。在污染治理之前湖中有污染物总量$5M$，超过国家标准。开始治理污染后，限定排入湖中污水浓度不超过M/V。求多少年后湖中污染物的总量降至M。

解：令$m(t)$为第t年湖内污染物的总量，则

排入污染物浓度M/V，排出污染物浓度m/V，

每年污染物的减少量 = 排出量 - 排入量，由题意得：

$$-\frac{dm}{dt}=\frac{m}{V}\cdot\frac{V}{3}-\frac{M}{V}\cdot\frac{V}{6},$$

整理得到一阶线性方程

$$\frac{dm}{dt}+\frac{m}{3}=\frac{M}{6},$$

解出通解 $m(t)=Ce^{-\frac{t}{3}}+\frac{M}{2}$，

代入初值 $m(0)=5M$，得到 $C=\frac{9M}{2}$，也即 $m(t)=\frac{M(9e^{-\frac{t}{3}}+1)}{2}$；

令 $m(t)=M$，解得 $t=6\ln 3\approx 6.6$（年）。

6*. 设空气阻力与速度的平方成正比，且$t \to +\infty$时速度的极限是v_0，求初速为零的自由落体运动规律。

解：令$v(t)$表示t时刻物体向下的垂直速度，设空气阻力$f = -kv^2$，

由 Newton 第二定律 $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv^2$，

将阻力系数写成 $k = mp^2$，方程化为 $\dfrac{dv}{dt} = g - p^2v^2$，

以下求解定解问题 $\dfrac{dv}{dt} = g - p^2v^2$， $v(0) = 0$，得到

$$\int_{v(0)}^{v}\frac{dv}{g - p^2v^2} = \int_0^t dt, \qquad \frac{1}{2p\sqrt{g}}\ln\frac{\sqrt{g} + pv}{\sqrt{g} - pv} = t;$$

已知$t \to +\infty$时速度的极限是v_0，这说明加速度极限为 0，

即 $\dfrac{dv}{dt} = g - p^2v^2 \to g - p^2v_0^2 = 0$，从而得到 $p = \dfrac{\sqrt{g}}{v_0}$，

带入上式化简得 $\dfrac{v_0}{2g}\ln\dfrac{v_0 + v}{v_0 - v} = t$， $\qquad v = v_0\left(\dfrac{2}{1 + e^{-\frac{2g}{v_0}t}} - 1\right)$；

最终由$v = \dfrac{ds}{dt}$， $s(0) = 0$，得

$$s = \int_0^t v_0\left(\frac{2}{1 + e^{-\frac{2g}{v_0}t}} - 1\right)dt = \frac{v_0^2}{g}\ln\frac{e^{\frac{2g}{v_0}t} + 1}{2} - v_0t = \frac{v_0^2}{g}\ln\frac{e^{\frac{g}{v_0}t} + e^{-\frac{g}{v_0}t}}{2}。$$