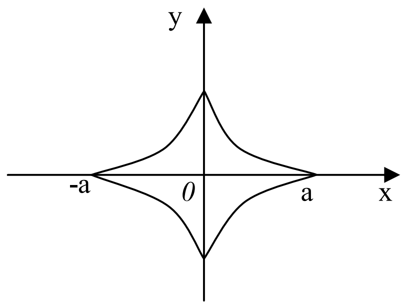
第 14 周习题课参考内容

积分的几何物理应用，微分方程求解初步

一、积分的几何应用

1. 求由星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$（如图，$a>0$）绕$x$轴旋转所成旋转体的体积。



解：由方程解出星形线 $y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3$，

任取$x\in[-a,a]$处厚度dx的微元，

绕 x 轴旋转一周后得到薄圆片的体积微元

$$dV=\pi y^2dx，\ y^2=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3，$$

关于$x\in[-a,a]$求和（积分）便得所求体积

$$V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\mathrm{d}x=2\pi\int_0^a(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^a(a^2-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}-x^2)dx=\frac{32}{105}\pi a^3。$$

2. 求星形线$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$的弧长（$a>0$）。

解：将曲线写成参数形式：

$$x=a\cos^3 t，\ y=a\sin^3 t，\ 0\le t\le 2\pi，$$

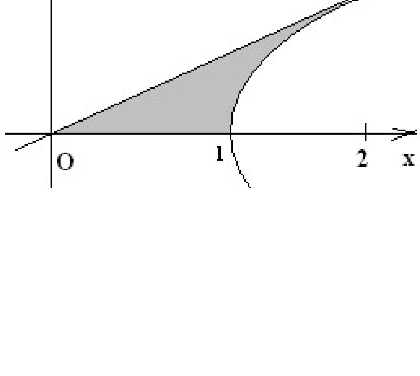
则 $$\frac{dx}{dt}=-3a\cos^2 t\sin t，\ \frac{dy}{dt}=3a\sin^2 t\cos t，$$

$$dl=\sqrt{[\frac{dx}{dt}]^2+[\frac{dy}{dt}]^2}dt=3a\,|\sin t\cos t\,|\,dt，$$

积分并利用函数的周期性和对称性，

$$l=3a\int_{-\pi}^{\pi}|\sin t\cos t\,|\,dt=12a\int_0^{\pi/2}\sin t\cos tdt=6a\int_0^{\pi/2}\sin 2tdt=6a。$$

3．设有曲线$y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求此曲线、切线及x轴围成的平面区域（见下图）绕x轴旋转一周所得到的旋转体的体积V（*和表面积A）。



解：可以求得切线为$y=\frac{1}{2}x$，切点为$(2,1)$，如图.

为计算旋转体体积，使用薄圆筒叠加方法：

任取$y\in[0,1]$处的厚度微元dy，

得到在平面区域内的线段$[2y,1+y^2]$，

绕x轴旋转一周得到薄圆筒，其体积

$$dV = 2\pi y(1 + y^2 - 2y)dy,$$

叠加所有薄圆筒的体积（积分）得到

$$V = 2\pi\int_0^1 y(1 + y^2 - 2y)dy = 2\pi(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}) = \frac{\pi}{6}。$$

* 旋转体表面由两部分组成：由 $y = \sqrt{x-1}$ 绕 x 轴旋转所得到的旋转面面积为

$$A_1 = 2\pi\int_1^2 y\sqrt{1 + y'^2}dx = \pi\int_1^2 \sqrt{4x-3}dx = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right);$$

由切线 $y = \frac{1}{2}x$ 绕 x 轴旋转所得旋转面面积为

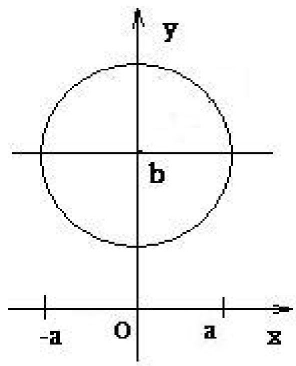
$$A_2 = 2\pi\int_0^2 y\sqrt{1 + y'^2}dx = 2\pi\int_0^2 \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{5}}{2}dx = \sqrt{5}\pi;$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{6}\left(11\sqrt{5} - 1\right)。$$

4. 设 $b > a > 0$，求圆盘 $x^2 + (y-b)^2 \le a^2$ 绕 x 轴旋转一周所得旋转体（“实心救生圈”）的体积。（两种方法均可：薄片叠加法与薄圆筒叠加法）

解：考虑薄圆筒叠加法：将圆盘写成

$$-\sqrt{a^2 - (y-b)^2} \le x \le \sqrt{a^2 - (y-b)^2},$$



任取 $y \in [b-a, b+a]$ 处厚度 dy 的微元，

绕 x 轴一周生成一个薄圆筒，半径 y，厚度 dy，

高度为 $2\sqrt{a^2 - (y-b)^2}$，因此其体积微元

$$dV = 4\pi\, y\sqrt{a^2 - (y-b)^2}dy,$$

关于 $y \in [b-a, b+a]$ 求和（积分）便得

$$V = 4\pi\int_{b-a}^{b+a} y\sqrt{a^2 - (y-b)^2}dy \overset{y-b=u}{=} 4\pi\int_{-a}^{a}(u+b)\sqrt{a^2 - u^2}du$$

$$= 4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - u^2}du = 4\pi b \cdot \frac{\pi a^2}{2} = 2\pi^2 a^2 b。$$

法二（薄片叠加法）：将圆盘写成

$$b - \sqrt{a^2 - x^2} \le y \le b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

任取 $x \in [-a, a]$ 处厚度 dx 的薄片微元，绕 x 轴一周得到一个厚度为 dx 的薄圆环，

圆环的内外圆半径分别为 $b - \sqrt{a^2 - x^2}$ 和 $b + \sqrt{a^2 - x^2}$，所以其体积微元为

$$dV = \pi[(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2]dx = 4b\pi\sqrt{a^2 - x^2}dx,$$

关于 $x \in [-a, a]$ 求和（积分）得

$$V = 4b\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = 2\pi^2 a^2 b \text{。}$$

二、积分的物理应用

1. 设一个弹簧在不受力的情况下的长度为 1m。假设迫使弹簧伸长 2. 5cm 需费力 15N。问要做多少功，才能把弹簧从 1. 1m 拉至 1. 2m。

解：由弹簧 Hooke 定律 $F = kx$，其中 k 为弹性系数，x 为弹簧受力后的形变长度。

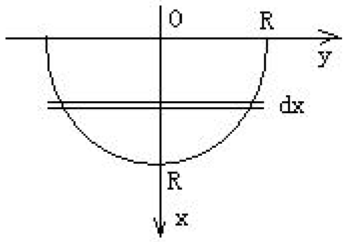
当 $x = 0.025$m 时，$F = 15$N，代入得 $k = 600$N/m。

弹簧从 1. 1m 拉至 1. 2m，其形变从 0.1m 到 0.2m，

于是所做的功为 $W = \int_{0.1}^{0.2}F(x)dx = \int_{0.1}^{0.2}600xdx = 9$（J）。

2. 半圆形平板闸门垂直放入水中，直径与水平面重合，水的密度为 1，求闸门受的压力。

解：垂直向下为 x 轴建立坐标系，记 R 为闸门半径，



则深度 x 处闸门宽度为 $2\sqrt{R^2 - x^2}$，

该深度处高度为 dx 的闸门微元所受压力为

$$dp = 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx$$

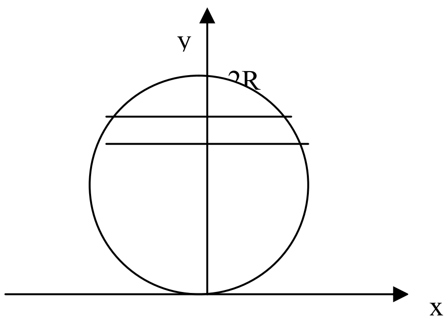
（闸门面积乘以深度乘以水的密度）

关于 $x \in [0, R]$ 求和（积分），便得总压力

$$p = \int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2}dx = \frac{2}{3}R^3 \text{。}$$

3. 将一半径为 R 的圆球压入水中，使球体刚好与水平面相切，求克服水的浮力做的功（设水的密度为 1）。

解：如图建立坐标系，水面为 $y = 2R$。



取 $y \in [0, 2R]$ 处厚度 dy 的水平薄片，

其受水的浮力为 $dF = \pi x^2 dy$，

压入水中深度为 $2R - y$，做功微元为

$$dW = \pi x^2(2R - y)dy \text{，}$$

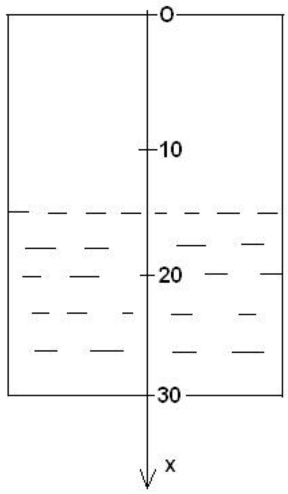
其中 $x^2 + (y - R)^2 = R^2$，所以

$$W = \pi\int_0^{2R}\left[R^2 - (y - R)^2\right](2R - y)dy = \frac{4}{3}\pi R^4 \text{。}$$

注意：做功总量恰好等于总浮力（球的体积）乘以球半径（球心到水面的距离）。

4. 一个圆柱形水池半径 10m，高 30m，内有一半的水，求将水全部抽干所要做的功。

解：如右图，垂直向下建立x轴，水池上沿为原点，



任取$x \in [15,30]$处高度微元dx，

得到水池中相应薄圆饼中水体积为

$$dV = \pi \times 10^2 dx$$（立方米），

水的密度$\rho = 10^3$千克/立方米，所以受到重力

$$dF = \rho g dV = 10^5 \pi g dx$$（N，牛顿），

抽到水池上沿做功

$$dW = x dF = 10^5 \pi x dx$$（J，焦耳），

求和 $W = \int_{15}^{30} 10^5 \pi g x dx = 3.375 \times 10^8 \pi g$（J，焦耳）。

三、微分方程初等求解法

1. 求微分方程$y' = 1 + x + y^2 + xy^2$的通解。

解：方程为可分离变量型 $\dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = (1+x)\mathrm{d}x$，

上式两端积分得 $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{1+y^2} = \arctan y = \int (1+x)\mathrm{d}x = x + \dfrac{x^2}{2} + c$，

即 $\arctan y = x + \dfrac{x^2}{2} + c$，其中$c$为任意常数。

2. 求微分方程 $y' + \dfrac{2xy}{x^2+4} = 0$ 满足 $y(0) = 1$ 的特解。

解：方程可分离变量 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$（当$y \neq 0$时），

两端积分得 $\int \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \ln|y| = -\int \dfrac{2x}{x^2+4}\mathrm{d}x$

$$= -\int \frac{1}{x^2+4}\mathrm{d}(x^2+4) = -\ln(x^2+4) + \ln\tilde{c}$$

即 $y = \dfrac{c}{x^2+4}$，其中$c = \pm e^{\tilde{c}}$为任意常数，

将$y(0) = 1$代入上式，得$c = 4$，满足初始条件的特解为 $y = \dfrac{4}{x^2+4}$。

3. 求出微分方程 $\tan y dx - \cot x dy = 0$ 的所有解曲线。

解：为了将原方程通过分离变量积分求解，先考虑

$$y \neq k\pi, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}，\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \Lambda，$$

这时有 $\dfrac{\cos y}{\sin y}dy-\dfrac{\sin x}{\cos x}dx=0$，

积分可得原方程的通解 $\sin y\cos x=C$；

再代入方程直接计算发现

$y=k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 是原方程的一族解曲线，

$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 也是一族解曲线，

综上便得到原方程所有解曲线。

4．求出方程 $y'=\sqrt{|y|}$ 的所有解。

解：若 $y>0$，则分离变量得 $\dfrac{dy}{\sqrt{y}}=dx$，积分得 $2\sqrt{y}=x-C>0$；

若 $y<0$，类似地计算有 $-2\sqrt{-y}=\int\dfrac{dy}{\sqrt{-y}}=\int dx=x-C<0$；

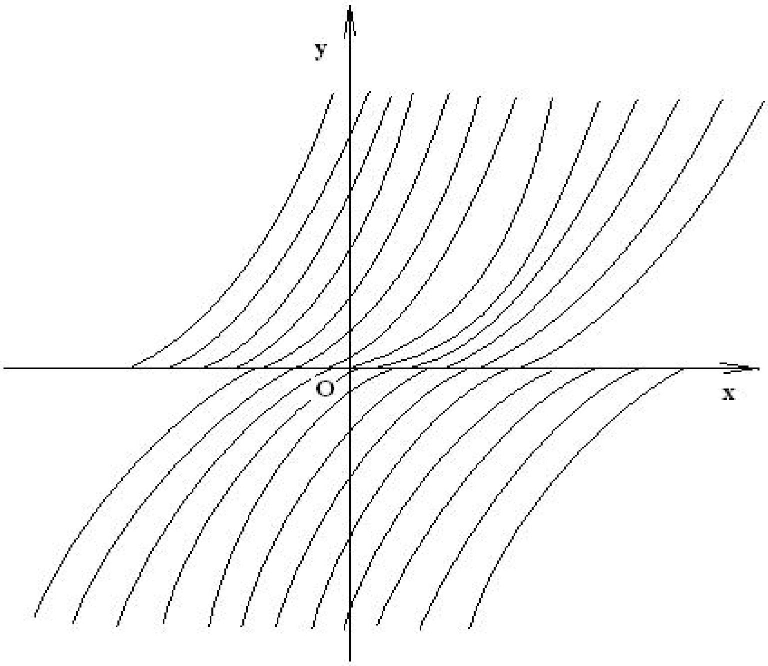
此外 $y\equiv0$ 也是一个特解.

注意：上面 3 类解可以组合得到以下 3 类定义在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 上的解：

（1）$y=\begin{cases}\dfrac{(x-C)^2}{4}, & x>C,\\ 0, & x\le C;\end{cases}$ （2）$y=\begin{cases}-\dfrac{(x-C)^2}{4}, & x<C,\\ 0, & x\ge C;\end{cases}$ （3）$y\equiv0$；

（3）$y=\begin{cases}-\dfrac{(x-C_1)^2}{4}, & x<C_1,\\ 0, & C_1\le x\le C_2,\\ \dfrac{(x-C_2)^2}{4}, & x>C_2,\end{cases}$ 其中 $C_1\le C_2$ 为两个常数。

解曲线族示意图如下：



注*：对于这个方程，右端函数在 y=0 点附近不满足 Lipschitz 条件（请自己检验）；
观察上面解曲线族，任取 x_0，满足初始条件 $y(x_0)=0$ 的解不是唯一的
——这样的解有无穷多个。

5. 解方程 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$。

解：作为一阶线性方程求解

$$y=e^{-\int\frac{1}{x}dx}(C+\int\frac{\sin x}{x}e^{\int\frac{1}{x}dx}\cdot dx)$$

$$=\frac{1}{x}(C+\int\sin x\cdot dx)=\frac{1}{x}(C-\cos x)。$$

法二：用积分因子法，方程两边同乘 x，得 $x\,y'+y=\sin x$，

也即 $(x\,y)'=\sin x$，（左端凑出带有未知函数的导数）

两边积分得 $x\,y=\int\sin x dx+C=-\cos x+C$，

所以 $y=\dfrac{1}{x}(-\cos x+C)$。

6. 解方程 $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$。

解：当 $x>0$ 时，原方程可化为：

$$y'=\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x}$$ （回忆：用初等变换可化为分离变量型方程），

令 $y=ux$ 整理得：

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x},$$

积分得：$\arcsin u=\ln(Cx)$，（C 为任意正常数）

将 $y=ux$ 代入，整理得原方程的通解：$y=x\sin(\ln Cx)$，$x>0$；

当 $x<0$ 时，原方程可化为：

$$y'=-\sqrt{1-\frac{y^2}{x^2}}+\frac{y}{x},$$

同上方法解得 $y=x\cos(\ln|Cx|)$，$x<0$。

注：在 $x=0$ 点，由方程本身可得 $y=0$（但仅有一点的值，已经不构成微分方程）。