微积分A1第十三周习题课: 内容提要, 习题 Dec. 7-13, 2020

本次习题课主要内容是定积分的三方面应用:

一. 几何应用: 用于求平面图形的面积, 曲线的弧长, 旋转体的体积和侧面积

二. 物理应用: 求曲线和平面图形的形心, Guldin 第一定理和第二定理

三. 综合应用: 积分应用于求极限(续), 以及积分估计

第一部分: 内容提要

一. 几何应用提要.

1) 求平面图形的面积

(i) 由非负函数 $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 所确定的曲边梯形 $\{(x,y), 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\}$ 的面积为 $\int_a^b f(x)dx$. 如图所示

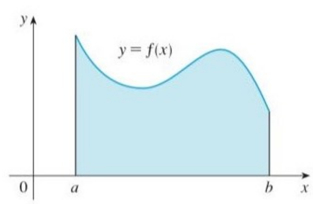


FIGURE 2
If $f(x) \geqslant 0$, the integral $\int_a^b f(x)\,dx$ is the area under the curve $y = f(x)$ from a to b.

(ii) 由两条曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$, 其中 $g(x) \le f(x)$, $a \le x \le b$, 所围成的平面图形 $\{(x,y), g(x) \le y \le f(x), a \le x \le b\}$ 之面积为 $\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$. 如图所示

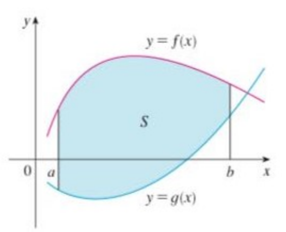
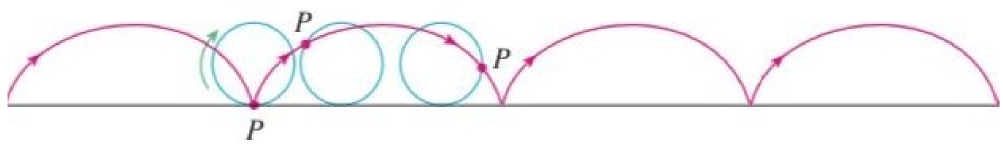


FIGURE 1
$S = \{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

(iii) 参数方程形式下的面积: 设函数 $y=f(x)$, $a\le x\le b$, 由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\le t\le\beta$ 所确定. (典型例子是旋轮线, 如图所示) 这里 $y(t)=f(x(t))$, $x(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上严格单调, 不失一般性, 设 $x(t)$ 为单调增加且连续可微, 并且 $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$. 则对曲边梯形 $S=\{(x,y),0\le y\le f(x),a\le x\le b\}$ 的面积公式 $|S|=\int_a^b f(x)dx$, 作积分变量代换 $x=x(t)$ 得

$$|S|=\int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt.$$



(iv) 极坐标下的面积公式. 由极坐标曲线 $r=f(\theta)$, $a\le\theta\le b$, 以及两条射线 $\theta=a$, $\theta=b$ 所为图形 $\mathcal{R}$ 的面积公式为 $|\mathcal{R}|=\int_a^b\frac{1}{2}[f(\theta)]^2d\theta$.

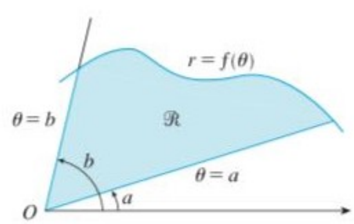


FIGURE 2

2). 曲线弧长公式:

(i) 设平面曲线 Γ 由参数方程 $r=r(t)=(x(t),y(t))$ 给出, $\alpha\le t\le\beta$, 则弧长为 $|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$.

(ii) 设 Γ 由函数曲线 $y=f(x)$ 给出, $a\le x\le b$, 则弧长为 $|\Gamma|=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$.

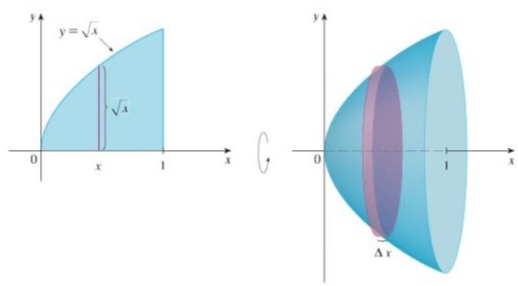
(iii) 设 Γ 由极坐标方程 $r=r(\theta)$ 给出, $\alpha\le\theta\le\beta$, 其弧长为 $|\Gamma|=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$.

(iv) 设空间曲线 Γ 由参数方程 $r = r(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\alpha \le t \le \beta$ 给出, 其弧长为

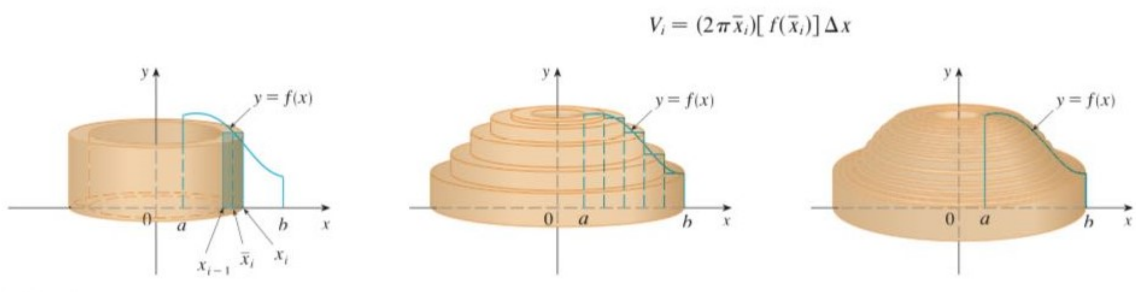
$$|\Gamma| = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

3). 旋转体的体积: 设函数 $f(x)$ 非负, 记曲线 $y = y(x)$, $a \le x \le b$ 所围成的曲边梯形为 $S = \{(x, y), 0 \le y \le f(x), a \le x \le b\}$,

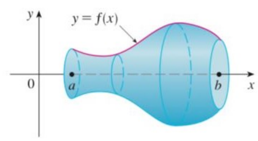
(i) 则图形 S 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体 V 的体积公式为 $|V| = \int_a^b \pi [y(x)]^2 dx$. 如图为情形 $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.



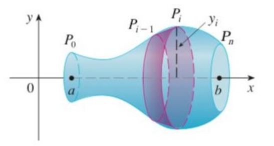
(ii) 假设 $0 \le a < b$, 由图形 S 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $|V| = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$.



4). 旋转体的侧面积: 非负函数曲线 $y = f(x)$, $a \le x \le b$ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面 S 的面积公式为 $|S| = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$.



(a) Surface of revolution



(b) Approximating band

二. 物理应用提要(求曲线和平面图形的形心, Guldin 第一第二定理)

1). 设平面曲线 Γ 由参数方程 $\vec{r}=\vec{r}(t)=(x(t),y(t))$, $\alpha\leq t\leq\beta$ 给出, 则其形心 (x_c,y_c) 坐标为

$$x_c=\frac{1}{|\Gamma|}\int_\alpha^\beta x(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt,\quad y_c=\frac{1}{|\Gamma|}\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt,$$

2). 曲边梯形 $D=\{(x,y),0\leq y\leq f(x),a\leq x\leq b\}$ 的形心坐标 (x_c,y_c) 为

$$x_c=\frac{1}{|D|}\int_a^b xf(x)dx,\quad y_c=\frac{1}{2|D|}\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

3). Guldin 第一定理: 设平面曲线 Γ 位于上半平面, 则曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转面 S 的面积 $|S|$, 等于曲线 Γ 的形心绕 x 旋转一周的周长, 乘以曲线 Γ 的弧长 $|\Gamma|$, 即 $|S|=2\pi y_c|\Gamma|$, 其中 y_c 为平面曲线 Γ 的形心的纵坐标.

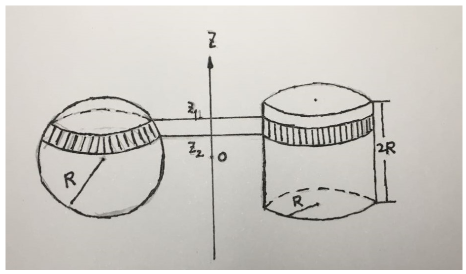
4). Guldin 第二定理: 设平面图形 D 位于上半平面, 则图形 D 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体 V 的体积, 等于 D 的形心绕 x 旋转一周的周长, 乘以图形 D 的面积 $|D|$, 即 $|V|=2\pi y_c|D|$, 其中 y_c 为平面图形的形心的纵坐标.

三. 综合应用提要: (i) 积分用于求极限(续), (ii) 积分估计.

第二部分: 习题

一. 几何应用习题

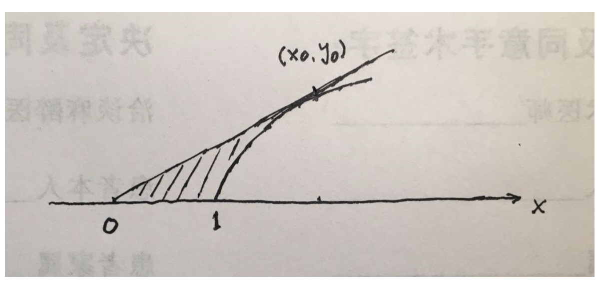
题 1. (球带面积与柱面带面积的关系) 将一个半径为 R 的球体, 和一个高为 $2R$, 半径为 R 圆柱并排放置在同一个水平面上. 对任意 $z_1, z_2 \in [-R, R]$, $z_1 > z_2$, 球面和柱面位于两个水平面 $z = z_1$, $z = z_2$ 之间的部分分别记作 $S_{z_1z_2}$ 和 $C_{z_1z_2}$, 即如图所示的阴影部分.



猜猜两部分面积 $|S_{z_1z_2}|$ 和 $|C_{z_1z_2}|$ 有何关系? 并证明你的结论.

题 2. 求封闭曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 所围图形的面积.

题 3. 在曲线 $y = \sqrt{x-1}$ 上某点 (x_0, y_0) 处作切线, 使得该切线过原点. 求切点 (x_0, y_0) 的坐标和切线方程. 进一步求由切线, x 轴, 以及曲线本身所围的平面有界区域, 即图中阴影部分, 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积.



题 4. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 在 $(0, 1)$ 内可导且大于零, 且满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$, 其中 a 为参数. 再设曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 0$ 和 $x = 1$ 所围的图形 S 的面积为 2. (1) 求函数 $f(x)$; (2) 当 a 为何值时, 图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小.

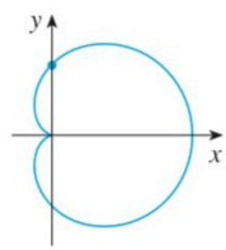
分析: 由假设 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ 得 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{3a}{2}$, 此即 $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{3a}{2}$. 然后两边取不定积分, 可确定 $f(x)$ 的含有任意常数的表达式, 再由已给的面积关系确定, 从而可以讨论旋转体的体积.

题 5. 用微元法推导出极坐标下的区域 $D: 0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi$, $0\le r\le r(\theta)$, 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积公式为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta,$$

这里 $r(\theta)$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的连续函数. (注: 直观推导, 可不必追求严格性)

题 6. 求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积, 如图所示.



二．物理应用习题

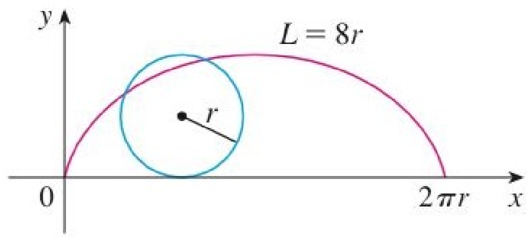
题 1. 考虑旋轮线 Γ: $x=r(\theta-\sin\theta)$, $y=r(1-\cos\theta)$, $0\le\theta\le2\pi$, $r>0$.

(i) 求曲线 Γ 的弧长 $|\Gamma|$ (课本第175页已经计算过. 为完整计, 这里再计算一遍);

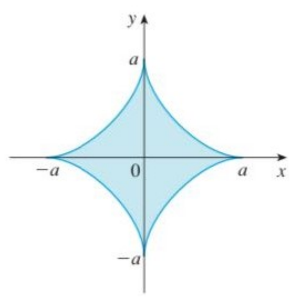
(ii) 求曲线 Γ 的形心坐标 (x_c,y_c);

(iii) 用旋转面面积公式 $|S|=\int_0^{2\pi}2\pi y d\ell$ 求曲线 Γ 绕 x 轴旋转一周所得旋转面 S 的面积, 其中 $d\ell$ 为弧长微分;

(vi) 利用 Guldin 第一定理计算(iii)中的旋转面 S 的面积.



题 2. 考虑星形线 Γ: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$, $a > 0$. 记 Γ 位于上半平面的部分为 Γ^+, 再记 Γ 所围平面图形为 D, 图形 D 位于上半平面的部分记为 D^+. (注: 星型线的直角坐标方程为 $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$)



(i) 求 Γ 的弧长;

(ii) 求 Γ 所围图形 D 的面积;

(iii) 求 Γ^+ 的形心坐标 (x_c, y_c);

(iv) 求平面图形 D^+ 的形心坐标 (x_c, y_c);

(v) 求 Γ^+ 绕 x 轴旋转所得旋转体的侧面积;

(vi) 求 D^+ 绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

三. 综合应用习题

积分综合应用共九道题. 前三道题涉及积分用于求极限. 后六道习题涉及积分估计.

题 1: 计算极限 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$. (提示取对数)

题 2. 求极限 $\lim_{n\to+\infty} a_n$, 其中

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}.$$

题 3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续. 证明

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx.$$

题 4. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导, $a>0$ 且 $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,a]$. 证明

$$\int_0^a f(x)dx \geq af(a/2).$$

题 5. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导且 $f''(x)\leq 0$, $\forall x\in[0,1]$. 证明 $\int_0^1 f(x^2)dx \leq f(1/3)$.

推广: 在题 5 的假设下, 我们可以类似证明 $\int_0^1 f(x^n)dx \leq f(\frac{1}{n+1})$, n 为任意正整数.

题 6: 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可积, 且存在两个正常数 $M>m>0$, 使得 $m\leq f(x)\leq M$, $\forall x\in[0,1]$. 证明

$$1 \leq \int_0^1 f(x)dx \cdot \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

题 7. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二次连续可微, 证明存在 $\xi\in[a,b]$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a) + \frac{f''(\xi)}{24}(b-a)^3.$$

(注: 这是课本第146页习题11. 入选这道题是因为恐怕有些同学误用积分中值定理. 详见题解)

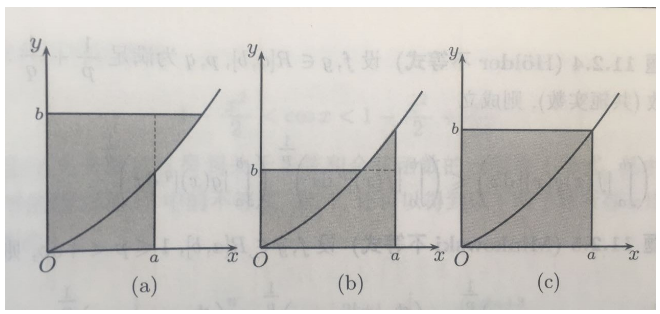
题 8. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减函数, 证明对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \geq 0.$$

题 9. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微, 严格单调上升, 且 $f(0)=0$, 则对任意 $a>0$, $b>0$, $b\in Range(f)$, 成立

$$ab \le \int_0^a f(x)dx + \int_0^b f^{-1}(y)dy, \qquad (\text{称为 Young 不等式})$$

其中 $x=f^{-1}(y)$ 记 $y=f(x)$ 的反函数, 并且不等式等号成立的充要条件是 $b=f(a)$. 几何意义如图所示.



<u>几何意义</u>: 在如下三个不同情形下 (a) $f(a)<b$; (b) $f(a)>b$; (c) $f(a)=b$, 积分 $\int_0^a f(x)dx$ 与 $\int_0^b f^{-1}(y)dy$ 之和为如图影印部分的面积. 由图可知 Young 不等式显然成立.