第 7 周习题课　导数及微分

1. 讨论下列各题：

(1) 设 $g(x)$ 是有界函数且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0,\\ x^2 g(x) & x\le 0.\end{cases}$

讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性及可导性。

(2) 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且对任意的 x，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ 都存在，问：这样的函数是否可导？为什么？

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$.

3. 设 $f(0)=1,\ f'(0)=-1,$，求下列各值。

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-f(x)}{x}$，（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x f(x)-1}{x}$，（3）$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\ln x)-1}{1-x}$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

(1) 如果极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，那么函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？为什么？

(2) 如果极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}$ 存在，那么函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？为什么？

5. 定义函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$

（1）计算导函数 $f'(x)$；（2）讨论导函数 $f'(x)$ 的连续性。

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导且 $f(0)=0$，定义

$x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})$. 证明序列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值。

7. 求解下列各题：

(1) 设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 确定的可导函数，其中 $x\in(-r,r)$，$r>0$. 求 $y'(0)$.

(2) 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $f(0)$ 的值.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 求 $f''(0)$.

(4) 设 $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$. 如果函数 $f(x)$ 满足 $f'(x)=\arctan\sqrt{x}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$.

(5) 已知参数方程 $\begin{cases} x=t+e^t \\ y=t+\ln(1+t), \end{cases}$ 求二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

(6) 设 $f(x)=(x-a)^2 g(x)$，其中 $g'(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域连续，求 $f''(a)$.

8. 求一个单位圆的位置，该单位圆的圆心在 y 轴上，并位于抛物线 $y=x^2$ 的上方，且与抛物线 $y=x^2$ 恰好有 2 个切点。

9. 设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=g(y)$. 如果函数 $y=f(x)$ 三阶可导，并且 $f'(x)\neq 0$. 试用函数 $y=f(x)$ 的前三阶导数来表示反函数 $x=g(y)$ 的前三阶导数。

10. 设 $y=(\arcsin x)^2$.

(1) 求证：$(1-x^2)y''-xy'=2$；

(2) 求 $y^{(n)}(0)$.

11. 求下列极限：

（1）已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f(0)=0,\ f'(0)=2$，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$.

（2） 已知 $f'(0)$ 存在，$f(0)=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(\sin x^2)}$.

（3） 设曲线 $y=f(x)$ 在原点处与曲线 $y=\sin x$ 相切，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{x}\right)}$.

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$. 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导的充要条件是存在一个在 $x=0$ 连续的函数 $g(x)$ 使得 $f(x)=xg(x)$.

13. 设函数 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset(a,b)$ 满足

$x_n < x_0 < y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$.

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处右连续但右导数不存在，求 α 的取值范围.

15. 求解下列各题：

(1) 设有一半径为 $1cm$ 的球，为了提高球面的光洁度，需镀上厚度为 $0.01cm$ 的一层铜。试估计需要镀铜多少立方厘米？

(2) 设 $y=\ln(1+e^{x^2})$. 求 dy.

(3) 求 $\tan 31^0$ 的近似值，保留到小数点后四位。