第 7 周习题课　导数及微分

1. 讨论下列各题：

(1) 设 $g(x)$ 是有界函数且 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}} & x>0,\\ x^2 g(x) & x\le 0.\end{cases}$

讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性及可导性。

解：首先考查 $x=0$ 处的左右极限。

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2\sqrt{x}}=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2 g(x)=0\ (因为\ g(x)\ 有界)$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0=f(0)$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

其次考查 $x=0$ 处的左右导数是否存在。

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-} xg(x)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x\cdot\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{2x^{3/2}}=0,$$

因此 $f_+^{'}(0)$ 与 $f_-^{'}(0)$ 均存在，且相等。故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且对任意的 x，极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n[f(x+\frac{1}{n})-f(x)]$ 都存在，问：这样的函数是否可导？为什么？

答：不一定可导。例如狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q}\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ 就满足题设中的条件，但在任意一点都不可导。

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 可导，且 $f(a)\ne 0$，求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x$.

解：因为 $f(x)$ 在 a 点可导且 $f(a)\ne 0$，所以 $f(x)$ 在 a 点连续，这样当 $|x|$ 充分大时，

有 $f(a+\frac{1}{x})$ 与 $f(a)$ 同号。由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}}$,

而 $\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}=\lim\limits_{x\to\infty}x(\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)-f(a)}{f(a)\frac{1}{x}}=\frac{f^{'}(a)}{f(a)}$,

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}\right]^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\frac{f\left(a+\frac{1}{x}\right)}{f(a)}}=e^{\frac{f^{'}(a)}{f(a)}}$. 解答完毕。

3. 设 $f(0)=1,\ f'(0)=-1,$ ，求下列各值。

（1） $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-f(x)}{x}$ ，（2） $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x f(x)-1}{x}$ ，（3） $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(\ln x)-1}{1-x}$.

解：（1）

$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-f(0)+f(0)-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}-\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-f'(0)=1$.

（2） $\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x f(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2^x[f(x)-f(0)]+f(0)(2^x-1)}{x}=f'(0)+\ln2=-1+\ln2$.

（3） $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(\ln x)-1}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(\ln x)-f(0)}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{1-x}=f'(0)\cdot(-1)=1$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续。

(1) 如果极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，那么函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？为什么？

(2) 如果极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}$ 存在，那么函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点是否可导？为什么？

(1) 解：不一定。例如 $f(x)=|x|$满足条件，但在零点不可导。

(2) 证明：因为极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}$ 存在，令 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(2x)-f(x)}{x}=A.$ 则由极限的定义，

对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta),$ 有 $A-\varepsilon<\frac{f(2x)-f(x)}{x}<A+\varepsilon.$

故对 $\forall x\in(0,\delta),$ 有

$$(A-\varepsilon)x < f(2x)-f(x) < (A+\varepsilon)x,$$
$$(A-\varepsilon)\frac{x}{2} < f(x)-f(\frac{x}{2}) < (A+\varepsilon)\frac{x}{2},$$
$$(A-\varepsilon)\frac{x}{2^2} < f(\frac{x}{2})-f(\frac{x}{2^2}) < (A+\varepsilon)\frac{x}{2^2},$$
$$\vdots$$
$$(A-\varepsilon)\frac{x}{2^n} < f(\frac{x}{2^{n-1}})-f(\frac{x}{2^n}) < (A+\varepsilon)\frac{x}{2^n}.$$

对上面的这些不等式求和，得到

$$(A-\varepsilon)x\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < f(2x)-f(\frac{x}{2^n}) < (A+\varepsilon)x\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}.$$

因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，故 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{x}{2^n}) = f(0)$．对上面的不等式令 $n\to\infty$ 取极限，有 $2(A-\varepsilon)x \le f(2x)-f(0) \le 2(A+\varepsilon)x$, 即 $|\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-A| \le \varepsilon$. 对于 $\forall x\in(-\delta,0)$, 类似可得到 $|\frac{f(2x)-f(0)}{2x}-A| \le \varepsilon$. 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(0)}{2x} = A$. 故函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $f^{'}(0)=A$.

5. 定义函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\ne 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$

（1）计算导函数 $f'(x)$；（2）讨论导函数 $f'(x)$ 的连续性。

解：（1）当 $x\ne 0$ 时，函数 $f(x)$ 为初等函数，因此函数可导，且 $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$.

考虑函数在 $x=0$ 点处的可导性。由于 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h^2\sin(1/h)-0}{h} = 0$，因此函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导，且导数 $f'(0)=0$．综上可知 $f(x)$ 处处可导，且

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\ne 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

注：本例说明，函数在其定义域内可导，但其导函数在其定义域内不一定连续。

（2）由初等函数的连续性知， 当 $x\ne 0$ 时 $f'(x)$ 连续。

在 $x=0$ 点处，极限 $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ 存在且为零，而极限 $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ 不存在（振荡）。因此 $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x})$ 不存在。综上，$f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续，$x=0$ 是 $f'(x)$ 的第二类间断点。

6. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导且 $f(0)=0$，定义

$x_n=f(\frac{1}{n^2})+f(\frac{2}{n^2})+\cdots+f(\frac{n}{n^2})$. 证明序列 $\{x_n\}$ 收敛，并求出极限值。

证明：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 点处可导，因此 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f^{'}(0)$，故

$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f^{'}(0)h}{h}=0$，所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

$$\left|\frac{f(h)-f'(0)h}{h}\right|<\varepsilon,\quad \forall h\in(-\delta,\delta).$$

取 $N=[1/\delta]+1$，则对 $\forall n\geq N$，$i/n^2\in(-\delta,\delta)$，　$i=1,2,\cdots,\mathrm{n}$. 于是

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(i/n^2)-f'(0)\sum_{i=1}^{n} i/n^2\right|<\varepsilon\sum_{i=1}^{n} i/n^2=\frac{\varepsilon(n+1)}{2n}<\varepsilon,\quad \forall n\geq N.$$

此即 $\left|x_n-\frac{n+1}{2n}f'(0)\right|<\varepsilon$，$\forall n\geq N$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-\frac{n+1}{2n}f'(0))=0$，从而

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}f'(0)=\frac{1}{2}f'(0)$，因此序列 $\{x_n\}$ 收敛，且其极限值为 $\frac{1}{2}f'(0)$.

7.　求解下列各题：

（1）设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 确定的可导函数，其中 $x\in(-r,r)$，$r>0$.　求 $y'(0)$.

解：对方程 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 两边求导得

$$\left(e^{xy}+\frac{1}{\cos^2(xy)}\right)(y+xy')=y'. \quad (*)$$

在原方程 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 中，令 $x=0$，得 $y=1$，即 $y(0)=1$. 将 $(x,y)=(0,1)$ 代入等式（*），解得 $y'(0)=2$.

（2）设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，若使 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，求 $f(0)$ 的值.

解：由于 $f(x)$ 可导，令 $\varphi(x)=f(x)|\sin x|$.

若 $F(x)=f(x)+f(x)|\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导，只须使 $\varphi(x)$ 在 $x=0$ 处可导，也即

$\phi_-^{'}(0)=\phi_+^{'}(0)$ 存在。注意到 $\varphi(0)=0$，而

$$\phi_-^{'}(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\phi(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-f(x)\sin x}{x}=-f(0),$$

$$\phi_+^{'}(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\phi(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\sin x}{x}=f(0),$$

因此应有 $f(0)=-f(0)$，故 $f(0)=0$.

（3）设 $f(x)=\begin{cases} x^4\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ 求 $f^{''}(0)$.

解：当 $x\neq 0$ 时，$f^{'}(x)=4x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}$，

又 $f^{'}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4\sin\frac{1}{x}}{x}=0$.

故 $f^{''}(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{'}(x)-f^{'}(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3\sin\frac{1}{x}-x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(4x^2\sin\dfrac{1}{x}-x\cos\dfrac{1}{x})=0$.

（4）设 $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$. 如果函数 $f(x)$ 满足 $f^{'}(x)=\arctan\sqrt{x}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=f^{'}(\dfrac{x+1}{x-1})\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{'}=\arctan\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot\dfrac{-2}{(x-1)^2}$，

故 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=2}=-2\arctan\sqrt{3}=-\dfrac{2\pi}{3}$.

（5）已知参数方程 $\begin{cases} x=t+e^t \\ y=t+\ln(1+t), \end{cases}$ 求二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

解：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{t+2}{(1+t)(1+e^t)}$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d(\frac{dy}{dx})}{dx}=-\frac{(t^2+3t+3)e^t+1}{(1+t)^2(1+e^t)^2}.$$

（6）设 $f(x)=(x-a)^2g(x)$，其中 $g'(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域连续，求 $f''(a)$.

解： $f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)$，

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x)}{x-a}=2g(a).$$

问题：如下做法是否正确？

$$f'(x)=2(x-a)g(x)+(x-a)^2g'(x),$$

$$f''(x)=2g(x)+4(x-a)g'(x)+(x-a)^2g''(x),$$

所以 $f''(a)=2g(a)$.

8. 求一个单位圆的位置，该单位圆的圆心在 y 轴上，并位于抛物线 $y=x^2$ 的上方，且与抛物线 $y=x^2$ 恰好有 2 个切点。

解：依题意可设所求单位圆的方程为 $x^2+(y-b)^2=1$，其中 $b>0$ 为圆心纵坐标。在方程 $x^2+(y-b)^2=1$ 中，视 y 为 x 的可导函数 $y=y(x)$，并于方程两边求导得 $x+(y-b)y'=0$，故圆上 (x,y) 点切线的斜率 $k_1=y'=\dfrac{x}{b-y}$. 当 $y=b$ 时切线垂直于 x 轴。再考虑抛物线在一点的切线斜率，对方程 $y=x^2$ 求导得抛物线在一点的斜率 $k_2=y'=2x$. 于是这两曲线在公共切点 (X,Y) 处，$k_1=k_2$，即 $\dfrac{X}{b-Y}=2X$.

情形一： $X\neq 0$. 此时 $b-Y=\dfrac{1}{2}$.

由单位圆方程 $X^2+(Y-b)^2=1$ 立得 $X^2=1-(Y-b)^2=\dfrac{3}{4}$.

再由抛物线方程 $Y=X^2$ 得到 $Y=\dfrac{3}{4}$.

因此所求单位圆圆心的纵坐标为 $b=\dfrac{1}{2}+Y=\dfrac{5}{4}$.

故此时这个单位圆与抛物线恰好有两个切点（$\pm\sqrt{3}/2, 3/4)$.

情形二： $X=0$. 这时 $Y=X^2=0$，代入单位圆方程得到 $b=1$. 这时下半圆方程为 $y=1-\sqrt{1-x^2}$. 由假设，单位圆位于抛物线之上，即 $1-\sqrt{1-x^2}\ge x^2$，或 $1-x^2\ge\sqrt{1-x^2}$ ， $\forall x\in[-1,1]$. 这显然不可能！故情形二不可能发生。解答完毕。

9. 设函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=g(y)$. 如果函数 $y=f(x)$ 三阶可导，并且 $f'(x)\neq 0$.

试用函数 $y=f(x)$ 的前三阶导数来表示反函数 $x=g(y)$ 的前三阶导数。

解：因为 $y=f(x)$ 的反函数是 $x=\mathrm{g}(y)$，由反函数求导法则，

$$g'(y)=\frac{1}{f'(x)},$$

进一步关于 y 求导，由复合函数求导的链式法则，得

$$g''(y)=\frac{d}{dy}\big(g'(y)\big)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)\frac{dx}{dy}=\frac{-1}{[f'(x)]^2}f''(x)\frac{1}{f'(x)}=\frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}.$$

再次关于 y 求导得

$$g'''(y)=\frac{d}{dy}\big(g''(y)\big)=\frac{d}{dx}\left(\frac{-f''(x)}{f'(x)^3}\right)\frac{dx}{dy}=\left(\frac{-f'''(x)}{f'(x)^3}+\frac{3f''(x)}{[f'(x)]^4}f''(x)\right)\frac{1}{f'(x)}=$$

$$=\frac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}-\frac{f'''(x)}{[f'(x)]^4}.$$

另解：因为 $x=g(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，又由于 $f(x)$ 存在三阶导数且 $f'(x)\neq 0$，因此 $x=g(y)$ 存在三阶导数。因为 $f(g(y))=y$，因此两边求导，由复合函数的求导法则得

$f'(g(y))g'(y)=1$，即 $f'(x)g'(y)=1$. 在 $f'(g(y))g'(y)=1$ 两边再对 y 求导，得

$f''(g(y))(g'(y))^2+f'(g(y))g''(y)=0$，即 $f''(x)(g'(y))^2+f'(x)g''(y)=0$；

再在 $f''(g(y))(g'(y))^2+f'(g(y))g''(y)=0$ 两边对 y 求导并将 $g'(y)$, $g''(y)$ 带入，即得

$g'''(y)=\dfrac{3[f''(x)]^2}{[f'(x)]^5}-\dfrac{f'''(x)}{[f'(x)]^4}$. 解答完毕。

10. 设 $y=\left(\arcsin x\right)^2$.

(1) 求证：$(1-x^2)y''-xy'=2$；

(2) 求 $y^{(n)}(0)$.

解：(1) 因为 $y'=2\arcsin x\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，因此 $(1-x^2)\left(y'\right)^2=4y$，

上式两边对 x 求导，得 $(1-x^2)\cdot 2y''y'-2x\left(y'\right)^2=4y'$，

故 $(1-x^2)y''-xy'=2$.

（2）可求得 $y(0)=0, y'(0)=2, y''(0)=2$,

在 $(1-x^2)y''-xy'=2$ 两边对 x 求 n 阶导，由莱布尼兹公式，得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0,$$

令 $x=0$，则 $y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$,

由 $y'(0)=0 \Rightarrow y^{(2n+1)}(0)=0$，且 $y''(0)=2 \Rightarrow y^{(2n)}(0)=2\left[(2n-2)!!\right]^2$.

11. 求下列极限：

（1）已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导， $f(0)=0,\ f'(0)=2$，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$，求极限

$\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$.

解：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1-2f(x))^{\frac{1}{-2f(x)}}\right]^{\frac{-2f(x)}{\sin x}}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{-2f(x)}}=\mathrm{e}$,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2f(x)}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2(f(x)-f(0))}{x}\cdot\dfrac{x}{\sin x}=-2f'(0)=-4$,

所以 $\lim\limits_{x\to 0}(1-2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-2f(x))^{\frac{1}{-2f(x)}}\right]^{\frac{-2f(x)}{\sin x}}=\mathrm{e}^{-4}$.

（2） 已知 $f'(0)$ 存在， $f(0)=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\cos x)}{\tan(\sin x^2)}$.

解：因为 $f'(0)$ 存在，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)}{\tan(\sin x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{\sin x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\cos x)-f(0)}{1-\cos x}\cdot\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}f'(0).$$

（3） 设曲线 $y=f(x)$ 在原点处与曲线 $y=\sin x$ 相切，求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\dfrac{2}{x}\right)}$.

解：由题设知 $f(0)=\sin 0=0,\quad f'(0)=\cos 0=1$，所以

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}\sqrt{f\left(\frac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2\frac{f\left(\frac{2}{x}\right)-f(0)}{\frac{2}{x}}}=\sqrt{2f'(0)}=\sqrt{2}\,.$$

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=0$． 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导的充要条件是存在一个在 $x=0$ 连续的函数 $g(x)$ 使得 $f(x)=xg(x)$.

证明："$\Rightarrow$" 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导且 $f(0)=0$． 则

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}，\ 令\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x},\ x\neq0,\\ f'(0),\ x=0.\end{cases}$$

则函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 连续且 $f(x)=xg(x)$.

"$\Leftarrow$" 假设存在一个在 $x=0$ 连续的函数 $g(x)$ 使得 $f(x)=xg(x)$. 则

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{xg(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导且

$f'(0)=g(0)$.

充分性的另一种证法：假设存在一个在 $x=0$ 连续的函数 $g(x)$ 使得 $f(x)=xg(x)$. 因为

$\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$，因此 $g(x)=g(0)+\alpha(x)$，其中 $\lim\limits_{x\to0}\alpha(x)=0$． 故

$f(x)-f(0)=xg(x)-f(0)=g(0)x+x\alpha(x)$，显然 $x\alpha(x)=o(x)\ (x\to0)$. 由函数在一点可微的定义，可知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可微，且 $f'(0)=g(0)$.

13. 设函数 $f(x)$ 定义在 (a,b) 上且在 $x_0\in(a,b)$ 处可导，数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}\subset(a,b)$ 满足

$x_n<x_0<y_n$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$． 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}$.

解：因为函数 $f(x)$ 在 $x_0\in(a,b)$ 处可导，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$． 因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_0)}{y_n-x_0}=f'(x_0),\ \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=f'(x_0).$$

这样 $f(y_n)-f(x_0)=f'(x_0)(y_n-x_0)+\alpha(y_n)(y_n-x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(y_n)=0$，

$f(x_n)-f(x_0)=f'(x_0)(x_n-x_0)+\beta(x_n)(x_n-x_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(x_n)=0$.

因为$0<\dfrac{y_n-x_0}{y_n-x_n}<1,\ 0<\dfrac{x_0-x_n}{y_n-x_n}<1$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n}=\lim_{n\to\infty}[f^{'}(x_0)+\frac{y_n-x_0}{y_n-x_n}\alpha(y_n)-\frac{x_n-x_0}{y_n-x_n}\beta(x_n)]=f^{'}(x_0).$$

14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处右连续但右导数不存在，求 α 的取值范围.

解：因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}\cos\dfrac{1}{x}=f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha}=0$，故 $\alpha>0$.

又因为极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\alpha-1}\cos\dfrac{1}{x}$ 不存在，所以 $\alpha-1\leqslant 0$，即 $\alpha\leqslant 1$.

综上可知，α 的取值范围是 $\{\alpha|\,0<\alpha\leqslant 1\}$.

15. 求解下列各题：

(1) 设有一半径为 $1cm$ 的球，为了提高球面的光洁度，需镀上厚度为 $0.01cm$ 的一层铜。试估计需要镀铜多少立方厘米？

解：镀层的体积等于两个球体体积之差。球的体积 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，$\Delta R=0.01cm,\quad R_0=1cm,$

所以镀层体积 $\Delta V\approx V^{'}(R_0)\Delta R=4\pi R_0^2\Delta R=0.13cm^3.$

(2) 设 $y=e^{1-3x}\cos x.$ 求 $dy.$

解：$dy=-e^{1-3x}(3\cos x+\sin x)dx.$

(3) 求 $\tan 31^0$ 的近似值，保留到小数点后四位。

解：令 $f(x)=\tan x$. 则当 $|x-x_0|$ 很小时，$f(x)\approx f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)$.

设 $x_0=30^0,\ x=31^0,$ 则 $x-x_0=1^0=\dfrac{\pi}{180}$.

因为 $f^{'}(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$f^{'}(30^0)=\dfrac{1}{\cos^2 30^0}$，

所以 $\tan 31^0\approx\tan 30^0+\dfrac{1}{\cos^2 30^0}\cdot\dfrac{\pi}{180}\approx 0.57735+0.02327\approx 0.6009$.