第十三周习题课 题目　广义积分

1. 判断（讨论）下列广义积分的敛散性。

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}dx$；　(2) $\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$；　(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$；

(4) $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$；　(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$；　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$；

(7) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$；

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$，并指出当收敛时是绝对收敛还是条件收敛；

(9) $\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$，其中$\beta>0$；　(10) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$；

(11) $\int_1^{+\infty}x\cos(x^3)dx$，指出是条件收敛还是绝对收敛；　(12) $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}\mathrm{d}x$；

(13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\frac{1}{\ln\sin x})\mathrm{d}x$；　(14) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-2)^2(x-4)}}\mathrm{d}x$ ；

(15) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}\cdots|x-a_n|^{p_n}}\mathrm{d}x$；　(16) $\int_1^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-\sin\frac{1}{2x})\mathrm{d}x$；

(17) 设 $p, q>0.$ $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)dx$；

(18) 设 $p>0.$ $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)dx$.

2. 计算下列广义积分的值。

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$，　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$，　(3) $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

(4) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$，　(5) 求 $I=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$，其中$b>a$.　(6) $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$

(7) $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$，其中$a>0$.　(8) $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$

（9）已知$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx$及$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

3. 解答下列各题：

（1）举例说明：$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛未必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$．即使非负函数也是如此.

（2）设$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

（3）设$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，且$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

（4）设$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，且$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$.

（5） 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微，且 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty}f'(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

（6）设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可微，单调，且$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛，证明：$\int_a^{+\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

（7）设$\int_a^{+\infty}f(x)dx$绝对收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明：$\int_a^{+\infty}f^2(x)dx$ 收敛。

（8）设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，且$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

（9）设函数 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=+\infty$．若 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim\limits_{x\to0^+}xf(x)=0$．

以下供学有余力的同学选做。

1. 设$f(x)$单调下降，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明：若$f'(x)$在$[0,+\infty)$上连续，则广义积分$\int_0^{+\infty}f'(x)\sin^2 x\,dx$收敛。

2. 判断下列广义积分的敛散性。

（1）$\int_0^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$；（2）$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$；（3）$\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{1+x}\mathrm{d}x$

3. 计算下列广义积分的值。

（1）$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$；（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$．(Euler 积分)