# 第十四周习题课 参考解答 广义积分

1. 判断下列广义积分的敛散性。

解：(1) $\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}dx$

由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}=0$，存在 $X>0$，使得当 $x>X>0$ 时，$\ln x<\sqrt[3]{x}$，故当 $x>X>0$ 时，

$\frac{x\ln x}{\sqrt{x^5+1}}<\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+1}}$，而 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{7}{6}}\frac{x\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x^5+1}}=1,\ p=\frac{7}{6}>1$，所以由比阶判别法及比较判别法知无穷积分收敛。

(2) $\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，

对第二个积分做变量代换，令 $x-\pi=t, dx=dt$，则

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{1}{\sqrt{\sin t}}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，所以 $\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$，而

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}=1,\ p=\frac{1}{2}<1$，故瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin x}}dx$ 收敛，从而原瑕积分收敛。

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx=\int_0^{1}\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$

对第一个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$ 与 $\frac{1}{x^{p-1}}$ 等价（$x\to0^+$），

故当 $p-1<1$，即 $p<2$ 时，瑕积分 $\int_0^{1}\frac{\arctan x}{x^p}dx$ 收敛.

对第二个积分，$\frac{\arctan x}{x^p}$ 与 $\frac{1}{x^q}$ 进行比阶，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan x}{x^{p-q}}=\begin{cases}0 & p>q\\ \frac{\pi}{2} & p=q\end{cases}$$

因此，当 $p\ge q>1$ 时，无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$ 收敛。

综上分析，$1<p<2$ 时广义积分收敛。

(4) $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx=\int_0^{1}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx+\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]dx$

$x\to 0^+$，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sim -\ln x$，而 $-\int_0^1 \ln x dx$ 收敛，故瑕积分 $\int_0^1\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛；

$x\to +\infty$，$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\sim\dfrac{1}{2x^2}$，$\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛。

故 $\int_0^{+\infty}\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]dx$ 收敛。

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$

$x\to 0$，$\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}\sim\dfrac{1}{x^p}$，当 $p<1$时，$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛；

$x\to\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{1}{\sin^p x\cos^q x}\sim\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^q}$，当 $q<1$时，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛。

故当 $p<1$，$q<1$时，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{dx}{\sin^p x\cos^q x}$ 收敛。

(6) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx$

$x\to 0$，$\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^{p-1}}$，故当 $p<2$ 时，$\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛；

$x\to +\infty$，$\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\dfrac{\ln x}{x^p}$，故当 $p>1$时，$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛。

所以当 $1<p<2$ 时 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛。

（7）$\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$

当 $x\in(0,1)$时，$\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}<0$，因此 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 与 $\int_0^1\dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 有相同的敛散性。

对任意的 $0<\delta<\dfrac{1}{2}$，因 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{1-\delta}\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}(1-x)^2}=0$，故 $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 收敛；

由于 $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}(1-x)^2}=1$，故 $\int_{\frac{1}{2}}^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 发散。

所以 $\int_0^1\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2}dx$ 发散。

（8）$x^2=t$，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt=\int_0^1\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$，

$t\to 0^+$，$\frac{\sin t}{t^{(p+1)/2}}\sim\frac{1}{t^{(p-1)/2}}$，故$\frac{p-1}{2}<1$，即 $p<3$ 时$\int_0^1\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$收敛；

当$\frac{p+1}{2}>1$，即 $p>1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$绝对收敛，

$0<\frac{p+1}{2}\le 1$，即$-1<p\le 1$时，$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{2t^{(p+1)/2}}dt$条件收敛。

总之，$-1<p\le 1$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$条件收敛；$1<p<3$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^p}dx$绝对收敛。

（9）$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$，其中$\beta>0$.

解：当$\alpha<0$时，$x=0$为被积函数的瑕点，

这时$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\sim\frac{1}{x^{-\alpha}}$（$x\to 0^+$），故当$\alpha>-1$时，积分$\int_0^1\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$收敛；

为考察无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$，注意无论$\alpha$的符号如何，都有

$\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\sim\frac{1}{x^{\beta-\alpha}}$（$x\to+\infty$）。故仅当$\beta>1+\alpha$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$收敛。

综上，当且仅当$\alpha>-1$，且$\beta>1+\alpha$时，积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^\alpha}{1+x^\beta}dx$收敛。

（10）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$.

因为$\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{x^{p-2}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$，且当$p-2<1$，即$p<3$时，瑕积分$\int_0^1\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$收敛。

由于$\frac{\sin^2 x}{x^p}=\frac{1}{2x^p}-\frac{\cos 2x}{2x^p}$，且

当$p>1$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{2x^p}dx$收敛，

而当$p>0$时，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos 2x}{2x^p}dx$收敛，

由此可知当 $p>1$ 时，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$ 收敛。

综上所述，当 $1<p<3$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^p}dx$ 收敛。

(11) $\int\limits_1^{+\infty} x\cos(x^3)dx$

解: 对积分作变量替换 $y=x^3$，我们得到 $\int\limits_1^{+\infty} x\cos(x^3)dx=\frac{1}{3}\int\limits_1^{+\infty}\frac{\cos y}{y^{1/3}}dy$，该积分条件收敛。

（12）将广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}\mathrm{d}x$ 分为两部分：

$$I_1=\int_0^1\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}\mathrm{d}x.$$

先看 $I_1$，当 $x\to 0^+$ 时，

若 $q\geqslant 0$，则 $\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}$ 与 $x^{p+1}$ 同阶，所以当 $-(p+1)<1$，即 $p>-2$ 时，$I_1$ 收敛；

若 $q<0$，则 $\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}$ 与 $x^{p-q+1}$ 同阶，所以当 $-(p-q+1)<1$，即 $p>q-2$ 时，$I_1$ 收敛.

再看 $I_2$，当 $x\to+\infty$ 时，

若 $q\geqslant 0$，则 $\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}$ 与 $x^{p-q}$ 同阶（$\arctan x\to\frac{\pi}{2}$），所以当 $-(p-q)>1$，即 $p<q-1$ 时，$I_2$ 收敛；

若 $q<0$，则 $\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}$ 与 $x^p$ 同阶，所以当 $-p>1$，即 $p<-1$ 时，$I_2$ 收敛.

综上可知，当 $q\geqslant 0$ 且 $-2<p<q-1$ 或 $q<0$ 且 $q-2<p<-1$ 时，广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^p\arctan x}{2+x^q}\mathrm{d}x$ 收敛，其它情形发散.

（13）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$，$x=0$ 是被积函数的瑕点.

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\frac{1}{2}}\ln\sin x=0$，且 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 收敛；

对于 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\ln\sin x}\mathrm{d}x$，$x=\frac{\pi}{2}$ 是被积函数的瑕点.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\ln\sin x}=-\infty$ 且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x$ 发散，所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\ln\sin x}\mathrm{d}x$ 发散.

综上可知，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\ln\sin x+\frac{1}{\ln\sin x})\mathrm{d}x$ 发散.

（14）$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-2)^2(x-4)}}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}x$，$x=0,\ x=2,\ x=4$ 是被积函数的瑕点，相应的瑕积分均收敛.

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{4}{3}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}(x-2)^{\frac{2}{3}}(x-4)^{\frac{1}{3}}}=1$，所以无穷积分 $\int_5^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-2)^2(x-4)}}\mathrm{d}x$ 收敛.

故 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-2)^2(x-4)}}\mathrm{d}x$ 收敛.

（15）不妨设 $a_1<\cdots<a_n$，令 $a_0=a_1-2$，$a_{n+1}=a_n+2$，记 $f(x)=\frac{1}{|x-a_1|^{p_1}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$，

$$I_0=\int_{-\infty}^{a_1-1}f(x)\mathrm{d}x,\quad I_i=\int_{\frac{a_{i-1}+a_i}{2}}^{\frac{a_i+a_{i+1}}{2}}f(x)\mathrm{d}x\ (i=1,2,\cdots,n),\quad I_{n+1}=\int_{a_n+1}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x,$$

则 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=I_0+I_1+\cdots+I_{n+1}$，且每个 $I_i$ 都是单一型广义积分.

$I_0=\int_{-\infty}^{a_1-1}\frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$ 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i>1$ 时收敛，在 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\leqslant1$ 发散；

对于广义积分 $I_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，被积函数有唯一瑕点 $a_i$，其在 $p_i<1$ 时收敛，在 $p_i\geqslant1$ 时发散；

与 $I_0$ 类似，$I_{n+1}=\int_{a_n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{|x-a_1|^{p_1}\cdots|x-a_n|^{p_n}}$ 在 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i>1$ 时收敛，在 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i\leqslant1$ 发散.

综上可知，当 $p_i<1\,(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}p_i>1$ 时广义积分收敛，其它情形发散.

（16）因为 $1-\cos u-\sin\frac{u^2}{2}=\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{4!}u^4+o(u^4)-\frac{1}{2}u^2+o(u^4)=-\frac{1}{24}u^4+o(u^4)$，
所以 $1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-\sin\frac{1}{2x}=-\frac{1}{24}\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2})$，即 $1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-\sin\frac{1}{2x}$ 与 $\frac{1}{x^2}$ 在 $x\to+\infty$ 时同阶.

根据比阶判别法可知，广义积分 $\int_1^{+\infty}(1-\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-\sin\frac{1}{2x})\mathrm{d}x$ 收敛.

（17）设 $p,\ q>0.$ 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)dx$ 的敛散性。

解：注意到被积函数在 $x\to+\infty$ 时是正的。因为 $\sin t\sim t,\ \ln(1+t)\sim t,\ (t\to0)$，因此

$\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\sim\frac{1}{x^p},\ x\to+\infty$，$\ln(1+\frac{1}{x^q})\sim\frac{1}{x^q},\ x\to+\infty$，进而

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{p+q}\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x^p}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\sin\left(\frac{1}{x^p}\right)\lim\limits_{x\to+\infty} x^q\ln\left(1+\frac{1}{x^q}\right)=1$. 所以由无穷积分的比阶判别法知，当 $p+q>1$ 时无穷积分收敛，当 $p+q\le 1$ 时无穷积分发散。

（18）设 $p>0$. 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)dx$ 的敛散性。

解：当 $x\to+\infty$ 时，被积函数是正的。由泰勒展开，

$\cos\frac{1}{x^p}=1+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)$, $\sin\frac{1}{x^p}=\frac{1}{x^p}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)$ ，因此

$$\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{x^p}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right)\right)=\frac{1}{x^p}+o\left(\frac{1}{x^{2p}}\right),$$

故 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p\ln\left(\cos\frac{1}{x^p}+\sin\frac{1}{x^p}\right)=1$，所以当 $p>1$ 时无穷积分收敛，当 $p\le 1$ 时发散。

2. 计算下列广义积分的值。

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+5x^2)\sqrt{1+x^2}}dx$ 。

解：取变换 $x=\tan t$, $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$ ,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t}{1+5\tan^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin t}{1+4\sin^2 t}=\frac{1}{2}\arctan(2\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\arctan 2.$$

（2） $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx$.

解： $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^2}dx=-\int_1^{+\infty}\arctan x\, d(\frac{1}{x})$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}\int_1^b(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\lim_{b\to+\infty}[\ln b-\frac{1}{2}\ln(1+b^2)+\frac{1}{2}\ln 2]=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2$$

（3） $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

解： $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{x}}{(1+e^{x})^2}dx=-\int_0^{+\infty}xd(\frac{1}{1+e^x})$

$$=\frac{-x}{1+e^x}\bigg|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^x}dx\ \underline{\underline{e^x=t}}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t(1+t)}dt=\ln\frac{t}{1+t}\bigg|_1^{+\infty}=\ln 2.$$

（4） $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$

解： 令 $e^x=\sec t$，则 $x=\ln(\sec t),\quad dx=\tan t dt$，

$$I=\int_{\arccos e^{-1}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan t}{\tan t}dt=\frac{\pi}{2}-\arccos e^{-1}=\arcsin e^{-1}.$$

（5） 求 $I=\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$，其中 $b>a$。

解：对于 $x\in[a,b]$，因为 $\frac{x-a}{b-a}+\frac{b-x}{b-a}=1$，且 $\frac{x-a}{b-a}\ge 0$， $\frac{b-x}{b-a}\ge 0$。作变换 $\frac{x-a}{b-a}=\sin^2 t$，

则 $\frac{b-x}{b-a}=\cos^2 t$，且 $dx=2(b-a)\sin t\cos t dt$。因此

$$I=\int_0^{\pi/2}2dt=\pi.$$

注：值得注意的是，这个积分的值与上下限 $a$ 和 $b$ 无关。

（6） 求 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$ 的值。

解：利用有理函数积分法：$1+x^3=(1+x)(1-x+x^2)$，……（较繁琐）。

另解：原式 $=\int_0^1\frac{dx}{1+x^3}+\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$，

对于无穷积分，做变量代换，令 $x=1/t$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\int_1^0\frac{1}{1+t^{-3}}(-\frac{dt}{t^2})=\int_0^1\frac{t}{t^3+1}dt=\int_0^1\frac{x}{1+x^3}dx,$$

所以原式 $=\int_0^1\frac{1+x}{1+x^3}dx=\int_0^1\frac{dx}{1-x+x^2}=\int_0^1\frac{dx}{(x-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2(x-1/2)}{\sqrt{3}}\bigg|_0^1=\frac{2}{\sqrt{3}}(\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}-\arctan(-\frac{1}{\sqrt{3}}))=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

（7） 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$，其中 $a>0$。

解：将积分分成两个部分 $I_1:=\int_0^1\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ 和 $I_2:=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$ .

对积分 $I_1$ 作变换 $x=1/y$ 得 $I_1=\int_{+\infty}^1\frac{-y^a dy}{(y^2+1)(1+y^a)}=\int_1^{+\infty}\frac{x^a dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$.

于是 $I=I_1+I_2=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$. （注：积分值与参数 $a$ 的取值无关）

（8） 求 $\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx$（有理函数积分或者变量代换）

解法一：$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{(1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2)}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2})dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\arctan\frac{2x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+\arctan\frac{2x-\sqrt{2}}{\sqrt{2}})\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

解法二：令 $t=x-\frac{1}{x}$，则 $dt=(1+\frac{1}{x^2})dx$，

且 $x\to 0^+$ 时 $t\to -\infty$， $x\to+\infty$ 时 $t\to+\infty$，

此外 $t^2=(x-\frac{1}{x})^2=x^2+\frac{1}{x^2}-2$， $\frac{x^2+1}{x^4+1}=\frac{1+1/x^2}{x^2+1/x^2}$，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1+x^2}{1+x^4}dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

（9）已知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，求 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx$ 及 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$.

解：$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x\cos x}{x}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{2x}d\left(2x\right)=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{4}$.

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=-\int_0^{+\infty}\sin^2 x d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx=\frac{\pi}{2}.$$

3. 解答下列各题：

（1）举例说明： $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛未必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ . 即使非负函数也是如此.

**解：**例如函数 $f(x)=\begin{cases}1, & n\leqslant x\leqslant n+\frac{1}{n^2},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$ .

再比如，$\int_1^{+\infty}\sin x^2 dx$ 收敛，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x^2$ 不存在。

（2）设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=0 .

证明: 不妨设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b>0$ , 若极限小于零, 则考虑 $-f(x)$ . 则存在 $X>a$ ，

当 $x>X$ 时， $f(x)>\frac{b}{2}$ ，因此有

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^X f(x)\mathrm{d}x+\int_X^x f(t)\mathrm{d}t>\int_a^X f(x)\mathrm{d}x+\frac{b}{2}(x-X)\text{ ,}$$

令 $x\to+\infty$ ，得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，与条件矛盾。

（3）设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=0 .

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，则 $f(x)\le 0$ .

否则，存在 $x_0\in[a,+\infty), f(x_0)>0$ ，则当 $x>x_0$ 时， $f(x)\ge f(x_0)>0$ ，从而

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^{x_0} f(t)dt+\int_{x_0}^x f(t)dt\ge\int_a^{x_0} f(t)dt+f(x_0)(x-x_0)$$

令 $x\to+\infty$ ，得 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散，与条件矛盾。

所以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递增，有上界，则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，由（1）得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=0 .

（4）设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，且 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$=0 .

证明：不妨设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减，则 $f(x)\ge 0$ . 又由于

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\forall\varepsilon>0$ ，$\exists X>a$ ，当 $x>2X$ 时，$|\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t|<\varepsilon$ ，即 $\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$ .

又 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调递减，有 $\frac{x}{2}f(x)<\int_{\frac{x}{2}}^x f(t)\mathrm{d}t<\varepsilon$ ， $0\le xf(x)<2\varepsilon$ ,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$=0 .

（5） 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续可微，且 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=0 .

证明：由 $\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x=f(x)-f(a)$ ，以及 $\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 收敛，可以得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，又

由于$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$=0.

（6）设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可微，单调，且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，证明：$\int_a^{+\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛.

证明：$\int_a^x f(t)\mathrm{dt} = xf(x) - af(a) - \int_a^x tf'(t)\mathrm{dt}$，

由$f(x)$单调，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)$=0，将上式两端令$x\to+\infty$即可.

（7）设$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛。

证明：首先由$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，可知$\exists A>a$，$\forall x>A$，有$\left|f(x)\right|<1$，即当$x>A$时，

成立$f^2(x)\le\left|f(x)\right|$。因为积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$绝对收敛，于是由比较判别法，

积分$\int_a^{+\infty} f^2(x)dx$收敛。

（8）设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证明：因为$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，因此

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0\ (\delta\le\varepsilon)$, 当$x_1,x_2\in[a,+\infty)$, 且$|x_1-x_2|<\delta$, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 又

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，故对上述$\delta>0,\ \exists G>a$, 当$x^{'},x^{''}>G$时，有$|\int_{x^{'}}^{x^{''}} f(x)dx|<\dfrac{\delta^2}{2}$.

对$\forall x>G,$取$x^{'},x^{''}>G$使得$x^{'}<x<x^{''}$且$|x^{''}-x^{'}|=\delta$，因此

$$|f(x)\delta|=|\int_{x^{'}}^{x^{''}} f(x)dt-\int_{x^{'}}^{x^{''}} f(t)dt+\int_{x^{'}}^{x^{''}} f(t)dt|\le\int_{x^{'}}^{x^{''}}|f(x)-f(t)|dt+|\int_{x^{'}}^{x^{''}} f(t)dt|<\frac{\varepsilon}{2}\delta+\frac{\delta^2}{2}$$

所以$|f(x)|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

（9）设函数$f(x)$在$(0,1]$上单调，且$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$. 若$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\lim\limits_{x\to0^+} xf(x)=0$.

**证:** 由$f(x)$在$(0,1]$上单调及$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$,知$f(x)$在$(0,1]$上单调递减,且不妨设$f(x)>0$.

任给$\varepsilon>0$，因为瑕积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$收敛，所以存在$\delta>0$，当$0<a<\delta$时，有

$$\left|\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon\text{，即}\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

因为$f(x)$在$(0,1]$上单调递减，所以$\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)\mathrm{d}x>\int_{\frac{a}{2}}^a f(a)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}af(a)$.

故当$0<a<\delta$时，有$0<af(a)<2\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to0^+} xf(x)=0$.

以下供学有余力的同学选做。

1. 设 $f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则广义积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,dx$ 收敛。

证明：首先由分部积分法，$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 xdx=\int_0^{+\infty}\sin^2 xdf(x)=-\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$。由于 $F(A)=\int_0^{A}\sin 2xdx$ 在 $[0,+\infty)$ 上有界， $f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2xdx$ 收敛，从而积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\,dx$ 收敛。

2. 判断下列广义积分的敛散性。

（1） $\int\limits_0^{+\infty}\sin x\sin\frac{1}{x}dx$

解：注意被积函数没有有限奇点，而在 $x\to+\infty$ 时 $\sin\frac{1}{x}$ 单调减趋于 0。根据 Dirichlet 判别法可知积分收敛。我们进一步判断积分的绝对收敛性。

注意当 $x\to+\infty$ 时， $\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$ 。从而存在 $A>1$，使得 $x\geq A$ 时 $\sin\frac{1}{x}\geq\frac{1}{2x}$ 。于是

$$\left|\sin x\sin\frac{1}{x}\right|\geq\frac{\sin^2 x}{2x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos 2x}{2x}.$$

由此可知积分 $\int\limits_0^{+\infty}|\sin x\sin\frac{1}{x}|\,dx$ 发散。综上可知原广义积分条件收敛。解答完毕。

(2). 判断广义积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx$ 的敛散性。

解：令 $x^2=t$， $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}dx=\int_0^{+\infty}\frac{(-1)^{[t]}}{2\sqrt{t}}dt$，Dirichlet 判别法，条件收敛。

(3). 判断广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{1+x}\mathrm{d}x$ 的敛散性。

解：令 $\ln x=t$，则 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{1+x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ .

因为 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}=1$，所以当 $n$ 充分大时，有

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t>\frac{1}{2}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{2}}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=1.$$

根据 Cauchy 收敛准则，可知广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t$ 发散.

故 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{1+x}\mathrm{d}x$ 发散.

3. 计算下列广义积分的值。

（1） 解：$\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ .

令 $x=\frac{1}{t}$，则 $\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\int_{+\infty}^1\frac{\frac{1}{t}\ln\frac{1}{t}}{(1+\frac{1}{t^2})^2}(-\frac{1}{t^2})\mathrm{d}t=-\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ .

所以

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\\&=-\int_1^{+\infty}\frac{t\ln t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=0\,.\end{aligned}$$

（2）由 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x$ .

令 $\pi-x=t$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\int_\pi^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\frac{\pi-t}{2}(-\mathrm{d}t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$ .

所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\mathrm{d}t\,,$$

得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$ .