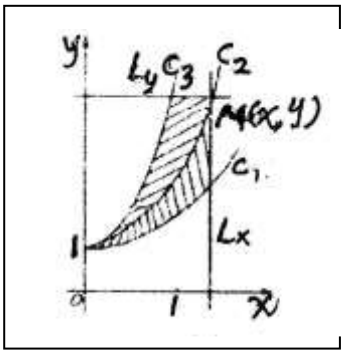
第十一次习题课 题目 常微分方程

1．图C_1,C_2分别是$y=\frac{1}{2}(1+e^x)$和$y=e^x$的图象，过点(0，1)的曲线C_3是一单调增函数的图象，过C_2上任一点$M(x,y)$分别做垂直于x轴和y轴的直线和的直线L_x和L_y，记C_1,C_2和L_x所围图形的面积为$S_1(x)$，C_2,C_3和L_y所围图形的面积为$S_2(y)$，如果总有$S_1(x)=S_2(y)$，求曲线C_3的方程$x=\varphi(y)$。



2．求方程$y'=\sqrt{|y|}$的通解。

3． 解方程：$\left(y^2-3x^2\right)y'+3xy=0$.

4．求初值问题的解：$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}, & (x_0y_0\neq 0)\\ y(x_0)=y_0, \end{cases}$

5．求$xy'=y(\ln y-\ln x)$的解.

6．解方程$x^2y'+xy=y^2$.

7．解方程 $x\,y''=y'\ln y'$.

8．解方程$y''=\dfrac{1+(y')^2}{2y}$.

9． 求解二阶微分方程的定解问题$\begin{cases}\cos y\dfrac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\dfrac{dy}{dx})^2=\dfrac{dy}{dx}\\ y(-1)=\dfrac{\pi}{6},\ y'(-1)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

10． 求一条上凸曲线的方程，使在该曲线上任意点的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长。

11. 求与曲线族 $y = ax^3 \ (a \in \mathbb{R})$ 正交的曲线。

12. 在 XOY 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a > 0$）

（Ⅰ）求 L 的方程:

（Ⅱ）当 L 与直线 $y = ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

13. 求常微分方程的初值问题 $\begin{cases} \sqrt{1+(y')^2} = (1-x)y'', \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0 \end{cases}$ 的解 $(x<1)$.

14. 设函数 $y(x)$ 满足微分方程 $y^{(4)}(x) - y''(x) = 0$，且当 $x \to 0$ 时，$y(x) \sim x^3$，求 $y(x)$.

15. 设 $f \in C(-\infty, +\infty)$，且为有界函数，即 $\exists M > 0$，使得 $|f(x)| \leq M, x \in (-\infty, +\infty)$。

（I）证明：常微分方程 $y' + y = f(x)$ 的每个解 $y = y(x)$ 当 $x \in [0, +\infty)$ 都是有界函数，即 $\exists M_1 > 0$，使得 $|y(x)| \leq M_1, x \in [0, +\infty)$；

（II）当 $x \in (-\infty, 0]$ 时，常微分方程 $y' + y = f(x)$ 是否存在有界解？若存在，有几个？（请证明你的结论）