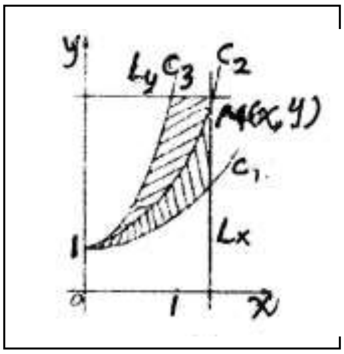
第十一次习题课 常微分方程习题解答

1．图C_1,C_2分别是$y=\frac{1}{2}(1+e^x)$和$y=e^x$的图象，过点(0，1)的曲线C_3是一单调增函数的图象，过C_2上任一点$M(x,y)$分别做垂直于x轴和y轴的直线和的直线L_x和L_y，记C_1,C_2和L_x所围图形的面积为$S_1(x)$，C_2,C_3和L_y所围图形的面积为$S_2(y)$，如果总有$S_1(x)=S_2(y)$，求曲线C_3的方程$x=\varphi(y)$。

解　$S_1(x)=\int_0^x[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)dt$，$S_2(y)=\int_1^y[\ln t-\varphi(t)]dt$

由题意，$\int_0^x[e^t-\frac{1}{2}(1+e^t)dt=\int_1^y[\ln t-\varphi(t)]dt$，



为求曲线C_3的方程$x=\varphi(y)$，

将上式两边对y求导数得到

$[e^x-\frac{1}{2}(1+e^x)]\frac{dx}{dy}=\ln y-\varphi(y)$，

注意到$y=e^x$与$x=\ln y$的反函数关系，

即有$[y-\frac{1}{2}(1+y)]\frac{1}{y}=\ln y-\varphi(y)$，

所以　$\varphi(y)=\ln y-\frac{1}{y}[y-\frac{1}{2}(1+y)]=\ln y+\frac{1}{2y}-\frac{1}{2}$。

2．求方程$y'=\sqrt{|y|}$的通解。

解：$y>0,\quad y=\frac{(x+C)^2}{4}$；

$y<0,\quad y=-\frac{(x+C)^2}{4}$，其中$c$是任意非零的常数。

另有一解$y=0$.

3.　解方程：$\left(y^2-3x^2\right)y'+3xy=0$.

解：令$u=\frac{y}{x}$，　则$y'=u+xu'$，

且$(3-u^2)u'=\frac{u^3}{x}$，这是一个分离变量方程，

当$u\neq 0$时，$\frac{3-u^2}{u^3}du=\frac{1}{x}dx$，故$e^{\frac{3}{2}u^{-2}}u=\frac{c}{x}$，其中$c$是任意非零的常数，

从而 $y e^{\frac{3x^2}{2y^2}} = c$；当 $u=0$ 时，$y=0$ 也是微分方程的解。

4．求初值问题的解：$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}, & (x_0 y_0 \neq 0) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$

解 1：$\begin{cases} ydy = -xdx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \int ydy = \int -xdx \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2}{2} = -\dfrac{x^2}{2} + C \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(x_0^2 + y_0^2\right)$.

5．求 $xy' = y(\ln y - \ln x)$ 的解.

解：原式 $\Rightarrow y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$，令 $y = xu(x)$，则 $u + xu' = u\ln u$，当 $u \neq e$ 时，

$\dfrac{du}{u(\ln u - 1)} = \dfrac{dx}{x}$，从而 $\ln|\ln u - 1| = \ln|cx|$，其中 c 是任意非零的常数，故 $y = xe^{1+cx}$；当 $u=e$ 时，$y = xe$，因此原方程的通解 $y = xe^{1+cx}$，其中 $c \in \mathbb{R}$ 任意。

6．解方程 $x^2 y' + xy = y^2$.

解：伯努利方程：

原式 $\Rightarrow \dfrac{y'}{y^2} + \dfrac{1}{x}y^{-1} = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow -(y^{-1})' + \dfrac{1}{x}y^{-1} = \dfrac{1}{x^2}$

$\xrightarrow{u=y^{-1}} xu' - u = -\dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{x}\right) = -\dfrac{1}{x^3}$

$\Rightarrow \dfrac{u}{x} = \dfrac{1}{2x^2} + C \Rightarrow \dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{2x^2} + C$，其中 C 是任意的常数。

7．解方程 $x y'' = y' \ln y'$.

解：令 $p(x) = y'$，代入方程, 则原方程化为 $x\dfrac{dp}{dx} = p\ln p$

当 $p \neq 1$ 时，由此解出 $p = e^{c_1 x}$, 其中 c_1 是任意的非零常数，于是原方程的通解为

$y = \int pdx = \dfrac{1}{c_1}e^{c_1 x} + c_2$，其中 c_2 是任意的常数。$p=1$ 也是方程 $x\dfrac{dp}{dx} = p\ln p$ 的解，从而

$y' = 1$，故 $y = x + C$ 也是原方程的解，其中 C 是任意的常数。

8．解方程 $y'' = \dfrac{1 + (y')^2}{2y}$.

解：令 $p=p(y)=\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$, 代入方程得到 $p\frac{dp}{dy}=\frac{1+p^2}{2y}$

即 $\frac{2pdp}{1+p^2}=\frac{dy}{y}$, 两端积分得到 $1+p^2=c_1y$，其中 c_1 是任意的非零常数.

即 $1+(\frac{dy}{dx})^2=c_1y$. 分离变量, 将上式改写成 $\frac{dy}{\pm\sqrt{c_1y-1}}=dx$.

解此方程得 $\pm\frac{2}{c_1}\sqrt{c_1y-1}=x+c_2$,

化简得 $\frac{4}{c_1^2}(c_1y-1)=(x+c_2)^2$. 其中 c_2 是任意的常数。

9. 求解二阶微分方程的定解问题 $\begin{cases}\cos y\frac{d^2y}{dx^2}+\sin y(\frac{dy}{dx})^2=\frac{dy}{dx}\\ y(-1)=\frac{\pi}{6},\ y'(-1)=\frac{1}{2}\end{cases}$

解：令 $u=u(y)=\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=u\frac{du}{dy}$，原方程化为

$u\cos y\cdot u'+u^2\sin y=u$，

若 $u=0$，$y=C$ 不符合初值条件，舍去。

当 $u\neq0$ 时，得到 $u'+u\tan y=\frac{1}{\cos y}$. 常数变异法求得解为

$u=y'=\cos y(C_1+\tan y)$，由 $y(-1)=\frac{\pi}{6},\ y'(-1)=\frac{1}{2}$，得 $C_1=0$。

再解方程 $\frac{dy}{dx}=\sin y$ 得到 $\ln\left|\csc y-\cot y\right|=x+C_2$,

由 $y(-1)=\frac{\pi}{6}$ 得出 $C_2=1+\ln(2-\sqrt{3})$,

故定解问题的解为 $\tan\frac{y}{2}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=\sqrt{\frac{1-\cos y}{1+\cos y}}=(2-\sqrt{3})e^{x+1}$。

10. 求一条上凸曲线的方程，使在该曲线上任意点的曲率半径等于夹在该点与横轴之间的法线之长。

解： 法线之长 $\sqrt{(yy')^2+y^2}=|y|\sqrt{1+(y')^2}$,

由题意，$\frac{|y''|}{\left(1+(y')^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{|y|\sqrt{1+(y')^2}}$,

因曲线是上凸的，因此 $\frac{y''}{1+(y')^2}=-\frac{1}{y}$,

令 $p(y)=y'$，$\frac{pdp}{1+(p)^2}=-\frac{dy}{y}$

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+p^2\right)=\ln\left(\frac{c_1}{y}\right), \qquad \frac{ydy}{\sqrt{c_1{}^2-y^2}}=\pm dx,$$

故曲线为 $\left(x+c_2\right)^2+y^2=c_1^2$，其中 c_1，c_2 是任意的常数。

11. 求与曲线族 $y=ax^3$ $(a\in\mathbb{R})$ 正交的曲线。

解：对方程 $y=ax^3$ 两边求导，得 $y'=3ax^2$，所以 $y'=\dfrac{3y}{x}$.

在点 (x,y) 处与曲线族 $y=ax^3$ $(a\in\mathbb{R})$ 正交的曲线满足 $y'=-\dfrac{x}{3y}$，故所求曲线为 $x^2+3y^2=C$。

12. 在 XOY 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)(x\neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax（常数 $a>0$）

（Ⅰ）求 L 的方程:

（Ⅱ）当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\dfrac{8}{3}$ 时,确定 a 的值.

解：（Ⅰ)设 L 的方程为 $y=y(x)$。于是 $y(1)=0$。记 L 在点 $P(x,y)$ 处切线斜率为 $y'(x)$，直线 OP 的斜率 $\dfrac{y}{x}$。由题设知 $y'-\dfrac{y}{x}=ax$，

这表明 $y=y(x)$ 是下列一阶线性微分方程初值问题的解：

$$\begin{cases} y'-\dfrac{y}{x}=ax, \\ y(1)=0 \end{cases}$$

常数变易法求得方程的通解为 $y=ax^2+cx$. 令 $x=1$ 得 $c=-a$。故曲线 L 的方程为二次抛物线 $y=ax(x-1)$.

（Ⅱ）曲线 L 与直线 $y=ax$ 的交点满足 $\begin{cases} y=ax(x-1) \\ y=ax, \end{cases}$

解出两个交点 $(0,0)$ 与 $(2,2a)$。

曲线 L 与直线 $y=ax$ 所围成的平面图形面积为

$$S(a)=\int_0^2[ax-ax(x-1)]dx=a\int_0^2(2x-x^2)dx$$

$$=a(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^2=a(4-\frac{8}{3})=\frac{4}{3}a。$$

故由$S(a)=\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$得到常数$a=2$.

13. 求常微分方程的初值问题$\begin{cases}\sqrt{1+(y')^2}=(1-x)y'',\\ y(0)=0,\\ y'(0)=0\end{cases}$的解$(x<1)$。

解：令$p=y'$，则

$$\begin{cases}\sqrt{1+p^2}=(1-x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\\ p(0)=0\end{cases}$$

分离变量得$\frac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{d}x}{1-x}$，所以$\sqrt{1+p^2}+p=\frac{C_1}{1-x}$.

由$p(0)=0$得$C_1=1$，所以$\sqrt{1+p^2}+p=\frac{1}{1-x}$，从而$\sqrt{1+p^2}-p=1-x$，

两式相减得：$y'=p=\frac{1}{2}(\frac{1}{1-x}-1+x)$.

由$y(0)=0$得$y=-\ln\sqrt{1-x}+\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$.

14. 设函数$y(x)$满足微分方程$y^{(4)}(x)-y''(x)=0$，且当$x\to 0$时，$y(x)\sim x^3$，求$y(x)$。

解：方程$y^{(4)}-y''=0$的特征根为$\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=-1$，故方程的通解为

$$y(x)=C_1+C_2x+C_3\mathrm{e}^x+C_4\mathrm{e}^{-x}\quad。$$

当$x\to 0$时，将e^x，e^{-x}泰勒展开，

$\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\circ(x^3)$，$\mathrm{e}^{-x}=1-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+\circ(x^3)$，

于是当$x\to 0$时，

$$y(x)=(C_1+C_3+C_4)+(C_2+C_3-C_4)x+\frac{C_3+C_4}{2}x^2+\frac{C_3-C_4}{6}x^3+\circ(x^3)，$$

由此知，欲使$x\to 0$时，$y(x)\sim x^3$，只需要$\begin{cases}C_1+C_3+C_4=0\\ C_2+C_3-C_4=0\\ C_3+C_4=0\\ C_3-C_4=6\end{cases}$

解之得，$C_1=0;\ C_2=-6;\ C_3=-C_4=3$，即$y(x)=-6x+3\mathrm{e}^x-3\mathrm{e}^{-x}$。

15. 设$f\in C(-\infty,+\infty)$，且为有界函数，即$\exists M>0$，使得$|f(x)|\le M, x\in(-\infty,+\infty)$。

（I）证明：常微分方程 $y'+y=f(x)$ 的每个解 $y=y(x)$ 当 $x\in[0,+\infty)$ 都是有界函数，即 $\exists M_1>0$，使得 $|y(x)|\le M_1, x\in[0,+\infty)$；

（II）当 $x\in(-\infty,0]$ 时，常微分方程 $y'+y=f(x)$ 是否存在有界解？若存在，有几个？（请证明你的结论）

证明： $\forall y_0\in(-\infty,+\infty)$，则常微分方程初值问题 $\begin{cases} y'+y=f(x) \\ y(0)=y_0 \end{cases}$ 的解为

$$y=e^{-x}\left[y_0+\int_0^x e^t f(t)\mathrm{d}t\right]。$$

（I）当 $x\in[0,+\infty)$ 时，

$$|y|=\left|\mathrm{e}^{-x}\left[y_0+\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right]\right|\le \mathrm{e}^{-x}|y_0|+\mathrm{e}^{-x}\int_0^x \mathrm{e}^t|f(t)|\mathrm{d}t$$

$$\le |y_0|+\mathrm{e}^{-x}M\int_0^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=|y_0|+M\ 。$$

所以微分方程 $y'+y=f(x)$ 的每个解 $y=y(x)$ 都是有界函数。

（II）因为 $f(x)$ 为有界函数，所以广义积分 $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{dt}$ 收敛。要使得函数 $y=\mathrm{e}^{-x}\left[y_0+\int_0^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right]$ 当 $x\in(-\infty,0]$ 时有界，则初值 y_0 必须取 $\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$ 。

此时，微分方程初值问题的解为 $y=\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t$，

$$|y|\le\left|\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t f(t)\mathrm{d}t\right|\le M\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^x \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=M\ 。$$

所以微分方程 $y'+y=f(x)$ 当 $x\in(-\infty,0]$ 时只有一个有界解。