

第九周习题课题目---单调性、极值、凸性、渐近线

1. 设  $f(x), g(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有定义,  $f'(x), f''(x)$  存在, 且满足

$$f''(x) + f'(x)g(x) - f(x) = 0.$$

若  $f(a) = f(b) = 0$  ( $a < b$ ), 证明在  $[a, b]$  上,  $f(x) \equiv 0$ .

2. 求曲线  $y = (x-2)^{5/3} - \frac{5}{9}x^2$  的上、下凸区间与拐点。

3. 求函数  $f(x) = \frac{(3x^2+1)(e^x-1)}{x-1}$  的渐近线。

4. (课堂思考题) 设  $f(x)$  是  $(a, b)$  上的下凸函数。则下列成立:

(1) 对任意的  $\forall x_0 \in (a, b)$ ,  $f(x)$  在  $x_0$  的左、右导数都存在。

(2)  $f(x) \in C(a, b)$ .

5. 设  $a_k > 0, b_k > 0$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ). 又设  $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . 证明下述赫尔德不等

$$\text{式: } \sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n b_k^q \right)^{\frac{1}{q}}, \text{ 且等号成立当且仅当存在 } c > 0 \text{ 使得 } a_k^p = c b_k^q,$$

$$k=1, 2, \dots, n.$$

6. 学有余力的同学自学: 求方程近似解的牛顿迭代法, 并在习题课上讲。