第十二周习题课 一致连续、定积分讨论题

一、一致连续性

1. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：对于区间 I 上的任意两个数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$．由此证明：$f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上有定义，且满足 Lipschitz 条件，即存在正数 L 使得 $\forall x_1,\ x_2\in I$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\le L|x_1-x_2|$．证明：

(1) $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界；

(2) $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

3. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，$g(x)\in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$．证明：函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续当且仅当函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

二、利用定积分计算某些数列极限

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$．

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，这里 $p>0$.

三、积分估值

1. 记 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，确定 I_1 与 I_2 的大小关系。

2. 估计积分 $\int_0^2 e^{x^2-2x}dx$ 的范围。

3. 记 $I_1=\int_{-1}^1 x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$，$I_2=\int_{-1}^1\dfrac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx$，$I_3=\int_{-1}^1\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx$，试比较这三个积分的大小。

四、积分不等式与零点问题

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加。证明：$\int_a^b xf(x)dx\ge\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$。证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx。$$

4. (Hadamard 不等式) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且下凸。证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

5. 设函数 $f\in C[a,b]$，$0<m\le f(x)\le M$，证明

$$(b-a)^2\le\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

6. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导（$a>0$），且 $f''(x)\ge0$，证明：

$$\int_0^a f(x)dx\ge af\left(\frac{a}{2}\right).$$

五、变限积分与极限

1. 求 a,b,c 的值使得极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ne0$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\int_0^x\cos t^2dt\right)^{\frac{1}{x}}$.

3. 设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0)=0, f'(0)\ne0$，则当 $x\to0$ 时，求无穷小量

$F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)dt$ 的阶？

4. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$ 的极大值点。

5. 设函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^x(x-t)^2g(t)dt$，其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，且 $g(1)=5$，

$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明 $f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$.

六、定积分计算及证明

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，其反函数为 $g(x)$，若

$\int_x^{x+f(x)}g(t-x)dt=x^2\ln(1+x)$，求 $f(x)$.

2. 求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx=1$.

3. 设 $f\in C^{(2)}[-a,a]$，$f(0)=0$，求证在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$a^3 f''(\xi)=3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

4. 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上连续，在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内可导，且满足 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 x dx=0$，证明：至少存在一点 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f'(\xi)=2f(\xi)\tan\xi$.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x}f(x)dx,\quad (k>1)$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

6. 设 $f(x)\in C[0,1], g(x)\in C^{(1)}[0,1], g'(x)\neq 0$，且满足 $\int_0^1 f(x)dx=0,\ \int_0^1 f(x)g(x)dx=0$，证明：（1） $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点；

（2）若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点。

7. 计算 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续。 根据定积分的定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx.$$

9. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，证明：当 $x>0$ 时，$|f(x)|\le\dfrac{1}{x}$。

==

以下供学有余力的同学选做

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$.

2. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减少函数，证明：对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx\ge 0.$$

3. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin^2 nx}{\sin x}dx.$

4. 设 $f(x)\in C[a,b]$，对于满足 $\int_a^b g(x)dx=0$ 的一切 $g(x)$ 均有 $\int_a^b f(x)g(x)dx=0$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数函数。