第十二周习题课 一致连续、定积分讨论题解答

一、一致连续性

1. 证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：对于区间 I 上的任意两个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$. 由此证明：$f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

证明：先证必要性"$\Rightarrow$"（反证法）：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。则对 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$，使得 $\forall x_1,\ x_2\in I$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. 任取区间 I 中的两个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，则对上述正数 δ，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|x_n-y_n|<\delta$，从而由条件，有 $|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon$. 所以由数列极限的定义知，$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$.

下证充分性"$\Leftarrow$"（反证法）：设对于区间 I 上的任意两个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=0$. 现在假设函数 $f(x)$ 在区间 I 上非一致连续，即 $\exists\varepsilon_0>0,\ \forall\delta>0$，$\exists x,\ y\in I$ 满足 $|x-y|<\delta$，但 $|f(x)-f(y)|\ge\varepsilon_0$. 对任意的正整数 $n\ge1$，取 $\delta=\dfrac{1}{n}$，则存在 $x_n,\ y_n\in I$ 满足 $|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$，但 $|f(x_n)-f(y_n)|\ge\varepsilon_0$. 这样，我们得到区间 I 上的两个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但

$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))\ne0$，与条件矛盾，故函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续。

注：由上述一致连续的充要条件，可得到**函数在区间上非一致连续的充要条件**：存在区间 I 上的两个数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))\ne0$.

下证 $f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

证明：对 $n\in\mathbb{N}^+$，取 $x_n=\ln(n+1),\ y_n=\ln n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+\dfrac{1}{n})=0,$ 但

$\lim\limits_{n\to\infty}(f(x_n)-f(y_n))=1\ne0$，故 $f(x)=e^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上非一致连续。

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上有定义，且满足 Lipschitz 条件，即存在正数 L 使得 $\forall x_1,\ x_2 \in I$，有 $|f(x_1)-f(x_2)| \le L|x_1-x_2|$. 证明：

(1) $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界；

(2) $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

证明：(1) 对 $\forall x \in [a,+\infty)$，因为 $|f(x)| \le |f(x)-f(a)|+|f(a)| \le L|x-a|+|f(a)|$，

所以，$\dfrac{|f(x)|}{x} \le L\dfrac{|x-a|}{x}+\dfrac{|f(a)|}{x} \le L+\dfrac{|f(a)|}{a}=M$. 故 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界。

(2) 对 $\forall x,\ y \in [a,+\infty)$，

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right| = \left|\frac{yf(x)-xf(y)}{xy}\right| = \left|\frac{yf(x)-xf(x)+xf(x)-xf(y)}{xy}\right|$$

$$\le \left|\frac{f(x)}{x}\right|\left|\frac{x-y}{y}\right|+\left|\frac{f(x)-f(y)}{y}\right| \le \frac{L+M}{a}|x-y|.$$

所以 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

3. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$，$g(x)\in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$. 证明：函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续当且仅当函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

证法 1： 因为 $f(x)-g(x)\in C[a,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ 存在，所以函数 $f(x)-g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续. 当 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续时，因为 $f(x)=[f(x)-g(x)]+g(x)$，且 $f(x)-g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，所以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

当 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续时，因为 $g(x)=f(x)-[f(x)-g(x)]$，且 $f(x)-g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，所以 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续.

证法 2： 设 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 一致连续。

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，则对任给的 $\varepsilon>0$，存在正数 $M\ge a$，当 $x>M$ 时，有 $\left|g(x)-f(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. 又因为 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则对上述 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$，只要

$|x'-x''|<\delta_1$，就有 $|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{3}$，因此对任何 $x',x''\in[a,+\infty)$，$x',x''>M$，

$|x'-x''|<\delta$，有 $|f(x')-f(x'')|\le|f(x')-g(x')|+|g(x')-g(x'')|+|g(x'')-f(x'')|<\varepsilon$，

而 $f(x)$ 在闭区间 $[a,M+1]$ 上一致连续. 即对上述 $\delta_2>0$，只要 $x',x''\in[a,M+1]$，

$|x'-x''|<\delta_2$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，取 $\delta=\max\{1,\delta_1,\delta_2\}$，则当 $x',x''\in[a,+\infty)$，

$|x'-x''|<\delta$ 时，有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，所以 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续.

类似可证：若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续，则 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

二、利用定积分计算某些数列极限

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\dfrac{n}{n}\right)^2}$.

解：将极限式写作积分和的形式

$$\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n}\right)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

其中 $x_i=1+\dfrac{i}{n},\Delta x_i=\dfrac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$， $f(x)=2\ln x$.

于是根据定积分定义 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=\int_1^2 f(x)dx$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}=\int_1^2 2\ln x dx=2(2\ln 2-1).$$

2. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$，这里 $p>0$.

解：我们将 $\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ 写作如下形式

$$\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p.$$

上式右边可看作是函数 x^p 在区间 $[0,1]$ 上的一个积分和。因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}.$$

三、积分估值

1. 记 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)dx$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin x)dx$，确定 I_1 与 I_2 的大小关系。

解：当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时 $\sin x<x$，且 $\sin x$ 严格单调增加。

所以 $\sin(\sin x)<\sin x$，$I_1<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1$.

而 $\cos x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 严格单调减，所以 $\cos(\sin x)>\cos x$，$I_2>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=1$.

因此 $I_1<I_2$.

2. 估计积分 $\int_0^2 e^{x^2-2x}dx$ 的范围。

解：经过简单计算可知 $\max\limits_{x\in[0,2]}\left(x^2-2x\right)=0,\quad \min\limits_{x\in[0,2]}\left(x^2-2x\right)=-1$. 另一方面，由于函数 e^x 单调增加，故有 $\frac{2}{e}=\int_0^2 e^{-1}dx\le\int_0^2 e^{x^2-2x}dx\le\int_0^2 e^0dx=2$.

【这是一个比较粗糙的估计】

3. 记 $I_1=\int_{-1}^1 x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$，$I_2=\int_{-1}^1\frac{x^3+|x|}{\sqrt{1+x^2}}dx$，$I_3=\int_{-1}^1\frac{\sqrt[3]{x}-1}{(1+x^2)^2}dx$，试比较这三个积分的大小。

解：注意 $(x+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x^2}-x)=1$，故 $\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})=\ln^2(-x+\sqrt{1+x^2})$. 由此可见积分 I_1 中的被积函数为奇函数，所以 $I_1=0$.

注意到，积分 I_2 和 I_3 的被积函数均为一个偶函数和一个奇函数之和。由于奇函数在对称区间上的积分为零。因此有

$$I_2=\int_{-1}^1\frac{|x|\,dx}{\sqrt{1+x^2}}=2\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}=2\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1=2(\sqrt{2}-1)>0,$$

$$I_3=-2\int_0^1\frac{1}{(1+x^2)^2}dx<0\text{（定积分的性质）}.$$

于是 $I_3<I_1<I_2$.

四、积分不等式与零点问题

1. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加。证明：$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

方法一、

证明：记 $c=(a+b)/2$. 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加，故有 $(x-c)(f(x)-f(c))\ge 0$，$\forall x\in[a,b]$. 对这个不等式在区间 $[a,b]$ 上积分得 $\int_a^b(x-c)f(x)dx\ge f(c)\int_a^b(x-c)dx=0$. 从而 $\int_a^b xf(x)dx\ge c\int_a^b f(x)dx=\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$.

方法二、令 $F(y)=\int_a^y xf(x)dx-\frac{a+y}{2}\int_a^y f(x)dx$，$\forall y\in[a,b]$．因为 $f(y)\in C[a,b]$，因此 $F(y)$ 可导，且 $F'(y)=\frac{1}{2}\int_a^y[f(y)-f(x)]dx\ge 0$．故函数 $F(y)$ 在区间 $[a,b]$ 上单调增加。从而 $F(b)\ge F(a)=0$．此即 $\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$．

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$。证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1，ξ_2，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$．

证明：证法一、 设 $g(x)=\int_0^x f(t)dt,\ h(x)=\int_0^x g(x)\sin xdx$，则

$g(0)=g(\pi)=0$，$h(0)=0$，$h(\pi)=\int_0^\pi g(x)\sin xdx=-\int_0^\pi g(x)d\cos x$

$=-g(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$．

对 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上应用洛尔定理, 存在 $\eta\in(0,\pi)$ 使得 $h'(\eta)=g(\eta)\sin\eta=0$， 即 $g(\eta)=0$，再在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,\pi]$ 上对 $g(x)$ 分别运用洛尔定理，可知 $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$，使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$．

证法二、用反证法。假设只有一个点 $\xi\in(0,\pi)$ 使得 $f(\xi)=0$，由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,π) 上异号，不妨设在 $(0,\xi)$ 中 $f(x)<0$，在 (ξ,π) 中 $f(x)>0$．设 $g(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $g(0)=g(\pi)=0,\ g'(x)=f(x)$，可知 $g(x)$ 在 $(0,\xi)$ 中单调减少，而在 (ξ,π) 中单调增加，从而 $g(x)\le 0, x\in[0,\pi]$. 另一方面，$g(x)$ 在上不恒等于零（否则 $f(x)$ 恒为零与假设矛盾），于是

$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi\cos xdg(x)=g(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi g(x)\sin xdx=\int_0^\pi g(x)\sin xdx<0$，

与题设矛盾。证毕

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续可微。证明

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx。$$

证明： 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可取得最大值和最小值。

设 $|f(\xi)|=\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|,\xi\in[a,b]$，$|f(\eta)|=\min\limits_{a\le x\le b}|f(x)|$，$\eta\in[a,b]$.

于是

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|-\min_{a\le x\le b}|f(x)|=|f(\xi)|-|f(\eta)|\le|f(\xi)-f(\eta)|=\left|\int_\eta^\xi f'(x)dx\right|\le\int_a^b|f'(x)|dx.$$

另一方面，由积分中值定理，$\exists\varsigma\in[a,b]$，使 $f(\varsigma)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$，于是

$$\min_{a\le x\le b}|f(x)|\le|f(\varsigma)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|.$$

所以$\max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)\right|\le\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b|f'(x)|dx$. 证毕。

4. （Hadamard 不等式）设函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导且下凸。证明

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) \quad (*)$$

证明：根据假设我们有

$$f(x)=f(tb+(1-t)a)\le tf(b)+(1-t)f(a)，\ \forall t\in[0,1]$$

于是对积分$\int_a^b f(x)dx$作变量替换$x=ta+(1-t)b$得

$$\int_a^b f(x)dx=\int_0^1 f(tb+(1-t)a)(b-a)dt\le(b-a)\int_0^1\left[tf(b)+(1-t)f(a)\right]dt$$

$$=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a).$$

即式（*）右边的不等式成立。
回忆下凸函数的一个性质：下凸函数的图像位于其任意点切线的上方。因此图像位于区间中点处切线的上方，即

$$f(x)\ge f(\tfrac{a+b}{2})+f'(\tfrac{a+b}{2})(x-\tfrac{a+b}{2})，\ \forall x\in[a,b].$$

对上述不等式积分，并注意到函数$x-\frac{a+b}{2}$在区间$[a,b]$上的积分为零，我们得到式（*）中的第一个不等式 $\int_a^b f(x)dx\ge f(\frac{a+b}{2})(b-a)$. 故不等式（*）得证。

注：(i) 对于上凸函数，我们有相应不等式，即将不等式(*)的不等号反向即可。

5. 设函数 $f\in C[a,b]$，$0<m\le f(x)\le M$，证明

$$(b-a)^2\le\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx\le\frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2.$$

证明：由 Cauchy-Schward 不等式

$$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b\frac{1}{f(x)}dx=\int_a^b\left(\sqrt{f(x)}\right)^2dx\cdot\int_a^b\left(\sqrt{\frac{1}{f(x)}}\right)^2dx\ge\left(\int_a^b\sqrt{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{f(x)}}dx\right)^2$$

$$=(b-a)^2.$$

因为$\frac{[f(x)-m][f(x)-M]}{f(x)}\le 0$，故 $f(x)+\frac{mM}{f(x)}\le m+M$，

从而$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b \frac{mM}{f(x)}dx \le (m+M)(b-a)$.

而$\int_a^b f(x)dx+\int_a^b \frac{mM}{f(x)}dx \ge 2\sqrt{mM\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx}$,

所以$2\sqrt{mM\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx} \le (m+M)(b-a)$,

这样$\int_a^b f(x)dx\cdot\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$. 证毕

6. 设$f(x)$在$[0,a]$上二阶可导（$a>0$），且$f''(x)\ge 0$，证明：

$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)$.

证 将$f(x)$在$x=\frac{a}{2}$展开成带有拉格朗日余项的1阶的Taylor展式，有

$$f(x)=f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-\frac{a}{2})^2,\ (0<\xi<a)。$$

由$f''(x)\ge 0$，得到$f(x)\ge f(\frac{a}{2})+f'(\frac{a}{2})(x-\frac{a}{2})$。

对上述不等式两边从0到a积分，由于$\int_0^a (x-\frac{a}{2})dx=0$，就得到

$\int_0^a f(x)dx \ge af\left(\frac{a}{2}\right)$.

五、变限积分与极限

1. 求a,b,c的值使得极限$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ne 0$.

解：要使$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c\ne 0$，则$b=0$，这样

$0\ne c=\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}$表明$a=1$，从而

$0\ne c=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. 故$a=1,b=0,c=\frac{1}{2}$.

2. 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\int_0^x \cos t^2 dt\right)^{\frac{1}{x}}$.

解：因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x^2=1$，故

$$\lim_{x\to0}\left(1+\int_0^x \cos t^2 dt\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\int_0^x \cos t^2 dt\right)^{\frac{1}{\int_0^x \cos t^2 dt}\cdot\frac{\int_0^x \cos t^2 dt}{x}}=e.$$

3. 设$f(x)$有连续导数，且$f(0)=0, f'(0)\neq0$，则当$x\to0$时，求无穷小量

$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$的阶？

解：$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt=x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt$.

当$x\to0$时，设$F(x)$是k阶无穷小。由于$f'(0)\neq0$，故要使得

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\int_0^x f(t)dt-\int_0^x t^2 f(t)dt}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{2x\int_0^x f(t)dt+x^2f(x)-x^2f(x)}{kx^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\int_0^x f(t)dt}{kx^{k-2}}=\lim_{x\to0}\frac{2f(x)}{k(k-2)x^{k-3}}=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)}{k(k-2)(k-3)x^{k-4}}$$

存在且不等于零，则$k=4$．所以当$x\to0$时，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)dt$是 4 阶无穷小量。

4. 求函数$f(x)=\int_0^{x^2}(t-1)e^{-t}dt$的极大值点。

解：令$f'(x)=2x(x^2-1)e^{-x^2}=0$，则$x=0,\ x=\pm1$，又$f''(x)=(2x^2+4x^4-2)e^{-x^2}$，且

$f''(0)=-2<0$，所以函数$f(x)$在$x=0$处取得极大值。

5. 设函数$f(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$，其中函数$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$g(1)=5$，

$\int_0^1 g(t)dt=2$，证明$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt-\int_0^x tg(t)dt$，并计算$f''(1)$和$f'''(1)$.

证明：$f(x)=\dfrac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)dt=\dfrac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)dt-x\int_0^x tg(t)dt+\dfrac{1}{2}\int_0^x t^2g(t)dt$，

等式两边求导，得到

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)dt+\frac{1}{2}x^2g(x)-(\int_0^x tg(t)dt+x^2g(x))+\frac{1}{2}x^2g(x)$$

$$= x\int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt.$$

再求导，得到 $f''(x) = \int_0^x g(t)dt,\ f'''(x) = g(x)$，所以 $f''(1) = 2$， $f'''(1) = 5$.

六、定积分计算及证明

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导， $f(0) = 0$，其反函数为 $g(x)$，若

$\int_x^{x+f(x)} g(t-x)dt = x^2\ln(1+x)$，求 $f(x)$.

解：记 $u = t - x$，则 $\int_x^{x+f(x)} g(t-x)dt = \int_0^{f(x)} g(u)du$，故 $\int_0^{f(x)} g(u)du = x^2\ln(1+x)$，两边对 x 求导，得 $g(f(x))f'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}$，从而 $xf'(x) = 2x\ln(1+x) + \frac{x^2}{1+x}$，

所以 $f'(x) = 2\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}$，由于 $f(0) = 0$，故

$$f(x) = \int_0^x \left(2\ln(1+t) + \frac{t}{1+t}\right)dt = 2x\ln(1+x) - x + \ln(1+x).$$

2. 求证： $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx = 1.$

证明：$\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}(n^2+n-n^2) = \frac{1}{\sqrt{\xi_n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}n$， $\xi_n \in (n^2, n^2+n)$

当 $x > 2$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}$ 为单调减函数，故 $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}e^{-\frac{1}{n^2+n}} \le \frac{1}{\sqrt{\xi_n}}e^{-\frac{1}{\xi_n}}n \le \frac{n}{\sqrt{n^2}}e^{-\frac{1}{n^2}}$，由夹逼定理知， $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{n^2}^{n^2+n}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-\frac{1}{x}}dx = 1.$

3. 设 $f \in C^{(2)}[-a,a]$， $f(0) = 0$，求证在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$a^3 f''(\xi) = 3\int_{-a}^{a} f(x)dx.$$

证明： $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(\eta)}{2}x^2$，其中 η 在 0 与 x 之间。

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a} x^2 f''(\eta)dx$$

$f \in C^{(2)}[-a,a]$，故 $f''(x)$ 在区间上存在最大值 M 和最小值 m，故

$$m\int_0^a x^2dx \le \int_{-a}^a f(x)dx \le M\int_0^a x^2dx$$

$$m \le \frac{\int_{-a}^a f(x)dx}{\frac{1}{3}a^3} \le M$$

故在$[-a,a]$上至少存在一点ξ，使得$a^3 f''(\xi) = 3\int_{-a}^a f(x)dx$.

4. 设$f(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上连续，在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内可导，且满足$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx = 0$，证明：至少存在一点$\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(\xi) = 2f(\xi)\tan\xi$.

证明：因为$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos^2 xdx = 0$，所以$\exists x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得$f(x_0)\cos^2 x_0 = 0$，故$f(x_0) = 0$。作辅助函数$F(x) = f(x)\cos^2 x,\ F(x_0) = F(\frac{\pi}{2}) = 0$，由洛尔定理，至少存在一点$\xi \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，使得$f'(\xi) = 2f(\xi)\tan\xi$.

5. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且满足$f(1) = k\int_0^{\frac{1}{k}} xe^{1-x} f(x)dx,\quad (k>1)$，证明至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

证明：$k>1,(0,k^{-1}) \subset (0,1)$，积分中值定理可得$f(1) = \eta e^{1-\eta} f(\eta),\quad \eta \in (0,k^{-1})$。作辅助函数$F(x) = xe^{1-x} f(x)$，则$F(\eta) = f(1) = F(1)$，由洛尔定理，至少存在一点$\xi \in (0,1)$，使得$f'(\xi) = (1-\xi^{-1})f(\xi)$.

6. 设$f(x) \in C[0,1], g(x) \in C^{(1)}[0,1], g'(x) \ne 0$，且满足$\int_0^1 f(x)dx = 0,\ \int_0^1 f(x)g(x)dx = 0$，证明：（1）$f(x)$在$(0,1)$内有零点；

（2）若$f(x)$在$(0,1)$内可导，则$f'(x)$在$(0,1)$内有零点。

证明：（1）因为$\int_0^1 f(x)dx = 0$，由积分中值定理，结论成立。

（2）设$f(\xi) = 0, \xi \in (0,1)$。如果函数$f(x)$在$(0,1)$除$\xi$外没有其它零点，则$f(x)$在$\xi$两侧

异号。因为 $g'(x)\neq 0$，不妨假设 $g'(x)>0$，$[g(x)-g(\xi)]f(x)$ 在 $(0,\xi),(\xi,1)$ 同号，即 $[g(x)-g(\xi)]f(x)$ 在 $(0,1)$ 不变号。$\int_0^1[g(x)-g(\xi)]f(x)dx>0$（或 <0）。而实际上，由已知条件，$\int_0^1[g(x)-g(\xi)]f(x)dx=\int_0^1 f(x)g(x)dx-g(\xi)\int_0^1 f(x)dx=0$，矛盾。故函数 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内除 ξ 外还有其他零点，设为 η。由微分中值定理，$f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有零点。

7. 计算 $\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}dx$

解：我们将被积函数 $\sqrt{1-\sin x}$ 作如下变形。

由 $1-\sin x=\sin^2(x/2)+\cos^2(x/2)-2\sin(x/2)\cos(x/2)=(\sin(x/2)-\cos(x/2))^2$，

可知 $\sqrt{1-\sin x}=|\sin(x/2)-\cos(x/2)|$。由此得

$$\int_0^\pi \sqrt{1-\sin x}dx.=\int_0^\pi\left|\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right|dx。$$

将积分区间分解成两个部分 $[0,\pi/2]$ 和 $[\pi/2,\pi]$，则可以去掉被积函数的绝对值。于是

原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)dx=4\sqrt{2}-4$。解答完毕。

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上连续。 根据定积分的定义证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx.$$

证明：记 $I_n:=\int_0^\pi f(x)|\sin nx|dx$。根据定积分关于积分区间的可加性，我们可以将区间 $[0,\pi]$ 上积分等分成 n 段子区间上的积分之和：

$$I_n=\sum_{k=1}^n\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n} f(x)|\sin nx|dx.$$

对每个子区间应用积分中值定理可知存在 $\xi_k\in[(k-1)\pi/n,k\pi/n]$，并注意到

$\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}|\sin nx|dx=\frac{1}{\mathrm{n}}\int_0^\pi \sin xdx=\frac{2}{n}$，我们就得到

$$I_n=\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\int_{(k-1)\pi/n}^{k\pi/n}|\sin nx|dx=2\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\tfrac{1}{n}=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\tfrac{\pi}{n}.$$

我们注意 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\frac{\pi}{n}$ 可以看作函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上均匀分割 n 等分的积分和。

由于 $f(x)$ 的可积性（因为它连续）可知 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\frac{\pi}{n}\to\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)dx$ （$n\to\infty$）. 结论得证。

9. 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，证明：当 $x>0$ 时，$\left|f(x)\right|\le\frac{1}{x}$。

证明：令 $u=t^2$， $f(x)=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\sin u\mathrm{d}u=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{\sqrt{u}}\mathrm{d}\cos u$

$$=\frac{1}{2x}\cos x^2-\frac{1}{2(x+1)}\cos(x+1)^2-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos u}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u\text{。}$$

当 $x>0$ 时，$\left|f(x)\right|\le\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u=\frac{1}{x}$。

==

以下供学有余力的同学选做

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续。证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$.

证明：注意我们可以将 $f(1)$ 表示为 $f(1)=(n+1)\int_0^1 x^n f(1)dx$. 于是只需证

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx=0.$$

根据闭区间上函数 $f(x)$ 的连续性可知， $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有界，即存在正数 $M>0$，使得 $|f(x)|\le M$， $\forall x\in[0,1]$.

再根据函数 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处的左连续性可知，对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得

$$|f(x)-f(1)|<\varepsilon,\quad \forall x\in(1-\delta,1]\text{。}$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\ (n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx\ \right| &\le (n+1)\int_0^1 x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx\\ &\le (n+1)\int_0^{1-\delta} x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx+(n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx\\ &\le 2M(n+1)\int_0^{1-\delta} x^n dx+(n+1)\int_{1-\delta}^1 x^n\left|f(x)-f(1)\right|dx\\ &\le 2M(1-\delta)^{n+1}+\varepsilon\left[1-(1-\delta)^{n+1}\right]\le 2M(1-\delta)^{n+1}+\varepsilon\end{aligned}$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-\delta)^{n+1}=0$ 可知，对于上述 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，

$2M(1-\delta)^{n+1}<\varepsilon$.

于是我们就证明了对于 $\forall\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n\ge N$ 时，

$$\left|\ (n+1)\int_0^1 x^n\left[f(x)-f(1)\right]dx\ \right|<\varepsilon.$$

此即 $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)\int_0^1 x^n f(x)dx = f(1)$.

注：类似可证，若 f 连续，则 $\lim\limits_{h\to0}\int_0^1 \frac{h}{h^2+x^2} f(x)dx = \frac{\pi f(0)}{2}$.

2. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减少函数，证明：对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx \ge 0\text{。}$$

证 $\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx\right)$，

在 $\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx$ 与 $\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx$ 中，分别令 $x=\frac{2k\pi+t}{n}$ 与 $x=\frac{(2k+1)\pi+t}{n}$，得到

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{2k\pi+t}{n})\sin tdt,$$

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nxdx = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f(\frac{(2k+1)\pi+t}{n})\sin tdt\text{。}$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调减少，$\sin t$ 在 $[0,\pi]$ 上非负，所以

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)-f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin tdt \ge 0.$$

3. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}dx.$

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(n+1)x}{\sin x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 nx}{\sin x}dx}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2nx-\cos 2(n+1)x}{2\sin x}dx}{\ln(1+\frac{1}{n})}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin(2n+1)x\sin x}{2\sin x}dx}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(2n+1)xdx}{\ln(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{-1}{2n+1}(\cos\frac{2n+1}{2}\pi-1)}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

4. 设 $f(x)\in C[a,b]$，对于满足 $\int_a^b g(x)dx = 0$ 的一切 $g(x)$ 均有 $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$，证明

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为常数函数。

证明：由积分中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a)$，记 $f(\xi)=c$，故

$$\int_a^b[f(x)-c]dx=0.$$

由条件，$\int_a^b f(x)[f(x)-c]dx=0$，故

$$\int_a^b f(x)[f(x)-c]dx-c\int_a^b[f(x)-c]dx=0,$$

$$\int_a^b[f(x)-c]^2dx=0,$$

因为 $f(x)-c\in C[a,b]$，故 $f(x)\equiv c,x\in[a,b]$.

================================

课堂练习题：

1. 利用可积的充要条件证明：若 $f(x)\in R[a,b]$，且对 $\forall x\in[a,b],\ x\neq x_0$，有 $g(x)=f(x)$，

   则 $g(x)\in R[a,b]$, 且 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx.$

证明：因为 $f(x)\in R[a,b]$，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，从而 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。设 $\omega(f),\ \omega(g)$ 分别为 $f(x),\ g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的振幅，从而存在 $M>0$，使得 $\omega(f)\le M,\ \omega(g)\le M$.任给 $[a,b]$ 的划分 T，设 $\omega_k(f),\ \omega_k(g)$ 分别表示 $f(x),\ g(x)$ 在第 k 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅。不妨设 $x_0\in[x_{k-1},x_k)$，则包含 x_0 的小区间至多有两个（当 $x_0=x_{k-1},\ x_{k-1}\neq a$ 时，有两个小区间 $[x_{k-2},x_{k-1}]$，$[x_{k-1},x_k]$；当 $x_0\in(x_{k-1},x_k)$ 或 $x_0=a$ 或 $x_0=b$ 时，只有一个小区间），有

$$\sum_{k=1}^n\omega_k(g)\Delta x_k=\sum_{k=1}^n(\omega_k(g)-\omega_k(f))\Delta x_k+\sum_{k=1}^n\omega_k(f)\Delta x_k=\sum_{k=1}^n\omega_k(f)\Delta x_k+(\omega_{k-1}(g)-\omega_{k-1}(f))\Delta x_{k-1}$$

$+(\omega_k(g)-\omega_k(f))\Delta x_k$，其中 $(\omega_{k-1}(g)-\omega_{k-1}(f))\Delta x_{k-1}+(\omega_k(g)-\omega_k(f))\Delta x_k\le|(\omega_{k-1}(g)$
$-\omega_{k-1}(f))\Delta x_{k-1}+(\omega_k(g)-\omega_k(f))\Delta x_k|\le 2M(\Delta x_{k-1}+\Delta x_k)\le 4M\lambda(T)$. 故

$$0\le\sum_{k=1}^n\omega_k(g)\Delta x_k\le\sum_{k=1}^n\omega_k(f)\Delta x_k+4M\lambda(T),$$

因为 $f(x)\in R[a,b]$，所以 $\lim_{\lambda(T)\to0}\sum_{k=1}^n\omega_k(f)\Delta x_k=0$，

从而夹逼定理表明 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k(g)\Delta x_k=0$，所以 $g(x)\in R[a,b]$.

因为 $f(x),\ g(x)\in R[a,b]$，对 $[a,b]$ 的任意划分 T，取 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ 使得 $\xi_k\neq x_0$（$k=1,2,\cdots,n$），有 $\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\sum\limits_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k$，从而

$\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n}g(\xi_k)\Delta x_k$，即 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$.

2. 证明：$f(x)^2\in R[a,b]\Leftrightarrow|f(x)|\in R[a,b]$.

证明：$|f(x)|\in R[a,b]\Rightarrow f(x)^2\in R[a,b]$ 是显然的。

下证明 $f(x)^2\in R[a,b]\Rightarrow|f(x)|\in R[a,b]$.

任给 $[a,b]$ 一个划分 $T(x_1,\cdots,x_{n-1})$，将 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_{k-1},x_k]$（$k=1,2,\cdots,n$）.

设 $\omega_k(f^2),\ \omega_k(|f|)$ 分别表示 $f(x)^2,\ |f(x)|$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅。

对 $\forall x,\ y\in[x_{k-1},x_k]$，因为

$$(|f(x)|-|f(y)|)^2\le\big||f(x)|-|f(y)|\big|\cdot\big||f(x)|+|f(y)|\big|=\left||f(x)|^2-|f(y)|^2\right|,$$

因此 $\omega_k(|f|)\le\sqrt{\omega_k(f^2)}$，从而

$$0\le\sum_{k=1}^{n}\omega_k(|f|)\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\omega_k(f^2)}\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\omega_k(f^2)\Delta x_k}\sqrt{\Delta x_k}\le\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f^2)\Delta x_k\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}\Delta x_k\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{b-a}\left(\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f^2)\Delta x_k\right)^{\frac{1}{2}}\to 0\ (|T|\to 0),$$

故 $|f(x)|\in R[a,b]$.