第八周习题课解答 导数计算及应用
—微分中值、洛必达、泰勒展开

1. 在$[0,1]$上，$0<f(x)<1$，$f(x)$可微，且$f'(x)\neq 1$，证明在$(0,1)$中存在唯一的ξ使$f(\xi)=\xi$.

2. 设$f\in C[0,+\infty)$，在$(0,+\infty)$内可导，$f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证：存在$\xi\in(0,+\infty)$使$f'(\xi)=0$.

3. 设函数$f(x),\ g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),\ \ f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)=g''(\xi)$.

4. 已知函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：

（I）存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点$\eta,\ \zeta\in(0,1)$，使得$f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

5. 证明下列各题：

（1） 设$f(x)\in C[0,1]$，且在$(0,1)$内可导，$f(0)=0$，当$x\in(0,1)$时，$f(x)\neq 0$. 证明：对一切正整数n，$\exists\xi\in(0,1)$使得$\dfrac{nf^{'}(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f^{'}(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

（2） 设$f(x)$在$[0,1]$连续，在$(0,1)$可微，且$f(1)=0$，则$\exists\xi\in(0,1)$使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

6. 设函数$f(x),\ g(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)内二阶可导，且$f(x),\ g(x)$在区间的两个端点处单侧导数存在，$g''(x)\neq 0\ (\forall x\in(a,b))$. 已知$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 求证：

（1） $g(x)\neq 0$，$\forall \mathrm{x}\in(a,b)$；

（2） $\exists c\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{f''(c)}{g''(c)}$. 若忽略条件$f(x),\ g(x)$在区间的两个端点处单侧导数存在，此结论是否成立？

7. 证明下列各题

（1） 对任意正整数$n>1$，证明方程$e^x-x^n=0$至多有三个不同的实根。

（2） 证明方程$2^x+2x^2+x-1=0$至多有两个不同实根。

8. 解答下列问题：

（1） $k>0$ 为常数，求 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数。

（2） 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上处处可导且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=e$. 求常数 C，使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-C}{x+C}\right)^{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right].$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，求证存在 $\xi,\ \eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

10. 设 $f(x)$ 在 $\left[x_1,x_2\right]$ 可导，$0<x_1<x_2$，证明 $\exists\xi\in\left(x_1,x_2\right)$，使

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f\left(x_1\right) & f\left(x_2\right)\end{vmatrix}=f\left(\xi\right)-\xi f'\left(\xi\right).$$

11. 求下列极限

(1) 设极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$.

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^3}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^{x}-1\right]$.

(3) 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

(4) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

(5) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{\cos x}-1+x^2}{(2^x-1)\tan x}$.

(6) 求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}$.

(7) 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$.

12. 解答下列各题

(1) 求 $a,\ b,\ c$ 的值，使得 $e^x-(ax^2+bx+c)$ 是比 x^2 高阶的无穷小量 $\left(x\to0\right)$.

(2) 若 $f(x)$ 可导且导函数连续，$f'(1)=1$，求当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})$ 的阶。若将题目中函数的条件减弱为：设 $f(x)$ 在 1 点可导且 $f'(1)=1$，求当 $x\to 0$ 时，无穷小量 $f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})$ 的阶。

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，函数

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

（I）确定 a 的值使 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续；

（II）对（I）中确定的 a 值，证明 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一阶导数连续。

(4) 写出 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$ 在 $x_0=1$ 处带 Peano 余项的 Taylor 展开式。

(5) 确定 a,b 的值，使当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 与 x^5 为同阶无穷小。

13. 求下列高阶导数

(1) 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.

(2) 设 n 是正整数，$f_n(x)=x^n\ln x$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}$.

=======

以下供学有余力的同学选做。

1. 广义 Rolle 定理

(1) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，且满足 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$. 求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且满足 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$. 求证：存在 $\xi\in(0,+\infty)$ 使 $f'(\xi)=0$.

(3) 问在结论（2）中，若将区间 $(a,+\infty)$ 改作 $(-\infty,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$，结论是否仍然成立？

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导，且 $0 \le f(x) \le \ln \dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$， $\forall x \in [0,+\infty)$.

证明：$\exists \xi \in (0,+\infty)\quad s.t.\quad f'(\xi) = \dfrac{2}{2\xi+1} - \dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$.