第八周习题课解答 导数计算及应用

—微分中值、洛必达、泰勒展开

1. 在$[0,1]$上，$0<f(x)<1$，$f(x)$可微，且$f'(x)\neq 1$，证明在$(0,1)$中存在唯一的ξ使$f(\xi)=\xi$.

证明：（1）存在性：令$F(x)=f(x)-x$，则$F(0)=f(0)>0,\ F(1)=f(1)-1<0$，由连续函数的介值定理，在$(0,1)$内至少存在一点$\xi$使得$F(\xi)=0$，即$f(\xi)=\xi$.

（2）唯一性：若存在两点$\xi_1,\ \xi_2\in(0,1)$满足$\xi_1<\xi_2$使得$f(\xi_1)=\xi_1$且$f(\xi_2)=\xi_2$，由拉格朗日微分中值定理，存在$\eta\in(\xi_1,\xi_2)$使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi_1)-f(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}=1,$$

与条件$f'(x)\neq 1,\ \forall x\in(0,1)$矛盾。故在$(0,1)$中存在唯一的$\xi$使$f(\xi)=\xi$.

2. 设$f\in C[0,+\infty)$，在$(0,+\infty)$内可导，$f(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证：存在$\xi\in(0,+\infty)$使$f'(\xi)=0$.

证明：（1）若$f(x)\equiv 0$，结论显然成立。

（2）假设$f(x)$不恒为零，则一定存在$\eta\in(0,+\infty)$使$f(\eta)\neq 0$. 不失一般性，假设$f(\eta)>0$，由连续函数的介值定理，在$(0,\eta)$中存在一点ξ_1使$f(\xi_1)=\dfrac{f(\eta)}{2}$. 同样，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，存在$\zeta\in(\eta,+\infty)$，使得$f(\zeta)<\dfrac{f(\eta)}{2}$. 再一次由连续函数的介值定理知，在$(\eta,\zeta)$中，存在一点$\xi_2$使$f(\xi_2)=\dfrac{f(\eta)}{2}$. 由洛尔定理知，存在$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,+\infty)$使得$f'(\xi)=0$.

3. 设函数$f(x),\ g(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a),\ \ f(b)=g(b)$，证明：存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)=g''(\xi)$.

证明：令$F(x)=f(x)-g(x)$， 则

$$F(a)=0，F(b)=0，$$

设 $f(x),\ g(x)$ 在 (a,b) 内的最大值 M 分别在 $\alpha\in(a,b),\ \beta\in(a,b)$ 取得。

当 $\alpha=\beta$ 时，取 $\eta=\alpha=\beta\in(a,b)$，则有 $f(\eta)=g(\eta)$.

当 $\alpha\neq\beta$ 时，则

$$F(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=M-g(\alpha)\geq 0,$$

$$F(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=g(\beta)-M\leq 0.$$

由连续函数的介值定理，存在 $\eta\in(a,b)$ 使得 $F(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$.

由洛尔定理，$\exists\xi_1\in(a,\eta)$ 使得 $F'(\xi_1)=0$ 且 $\exists\xi_2\in(\eta,b)$ 使得 $F'(\xi_2)=0$，

再一次由洛尔定理，$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$ 使得 $F^{"}(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

4. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0,\ f(1)=1$. 证明：

（I）存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（II）存在两个不同的点 $\eta,\ \zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1.$

证明：（I） 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-1,\ F(1)=1$，于是由连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

（II）在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，则存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi),\ \zeta\in(\xi,1)$，使得 $f'(\eta)=\dfrac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0}$， $f'(\zeta)=\dfrac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}$.

于是 $f'(\eta)f'(\zeta)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{\xi}{1-\xi}=1.$

5. 证明下列各题：

（1） 设 $f(x)\in C[0,1]$，且在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$, 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)\neq 0$. 证明：对一切正整数 n，$\exists\xi\in(0,1)$ 使得 $\dfrac{nf^{'}(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f^{'}(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

证明：对一切正整数 n，令 $F(x)=f^{n}(x)f(1-x)$．则 $F(0)=0,\ F(1)=0$，

且 $F(x)\in C[0,1]$，且在 $(0,1)$ 内可导，故由洛尔定理，$\exists\xi\in(0,1)$ 使得

$0=F^{'}(\xi)=nf^{n-1}(\xi)f^{'}(\xi)f(1-\xi)-f^{n}(\xi)f^{'}(1-\xi)$，即 $\dfrac{nf^{'}(\xi)}{f(\xi)}=\dfrac{f^{'}(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

（2） 设 $f(x)$ 在 $\left[0,1\right]$ 连续，在 $\left(0,1\right)$ 可微，且 $f(1)=0$，则 $\exists\xi\in\left(0,1\right)$ 使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

证明：作辅助函数 $F(x)=xf(x)$，则 $F(0)=F(1)=0$，由洛尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$F'\left(\xi\right)=f\left(\xi\right)+\xi f'\left(\xi\right)=0,$$

故结论成立。

6. 设函数 $f(x),\ g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(x),\ g(x)$ 在区间的两个端点处单侧导数存在，$g''(x)\neq 0\ (\forall x\in(a,b))$．已知 $f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$．求证:

（1） $g(x)\neq 0$，$\forall \mathrm{x}\in(a,b)$；

（2） $\exists c\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(c)}{g(c)}=\dfrac{f''(c)}{g''(c)}$. 若忽略条件 $f(x),\ g(x)$ 在区间的两个端点处单侧导数存在，此结论是否成立？

证明：（1）用反证法，假设在 (a,b) 内存在 $c\in(a,b)$ 使得 $g(c)=0$，

则由罗尔定理，$\exists c_1\in(a,c)$ 及 $\exists c_2\in(c,b)$，使得 $g'(c_1)=g'(c_2)=0$。

再由罗尔定理可知，$\exists c_0\in(c_1,c_2)$，使得 $g''(c_0)=0$。此与题设矛盾。故结论成立。

（2）记 $F(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，

且 $F(a)=F(b)=0$，由洛尔定理，$\exists c\in(a,b)$，使得 $F'(c)=0$，也即

$F'(c)=f(c)g''(c)-f''(c)g(c)=0$，由此导出结论（2）。

若忽略条件 $f(x),\ g(x)$ 在区间的两个端点处单侧导数存在，则结论（2）不一定成立。例如:

对任意的 $x\in(-1,1)$， $g(x)=-\sqrt{1-x^2}$，$f(x)=-\sqrt{1-x^2}\ln\sqrt{1-x^2}$，

则 $g^{'}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$g^{''}(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}>0,$

$f^{'}(x)=(1+\ln\sqrt{1-x^2})\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$，$f^{''}(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{\ln\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 且

$F(x)=f^{'}(x)g(x)-f(x)g^{'}(x)=-x$，但

$F^{'}(x)=f^{''}(x)g(x)-f(x)g^{''}(x)=-1\neq 0.$ 证毕。

7. 证明下列各题

（1）对任意正整数 $n>1$，证明方程 $e^x-x^n=0$ 至多有三个不同的实根。

证明：因为方程 $e^x-x^n=0$ 和方程 $e^{-x}x^n-1=0$ 有相同的实根。考虑函数 $f(x)=e^{-x}x^n-1$． 设方程 $e^{-x}x^n-1=0$ 有四个不同的实根，则由洛尔定理知，$f'(x)=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$ 至少有三个不同的零点，而易见 $f'(x)=e^{-x}x^{n-1}(n-x)$ 有且仅有两个不同的零点，矛盾。故方程 $e^x-x^n=0$ 至多有三个不同的实根。结论得证。

（2）证明方程 $2^x+2x^2+x-1=0$ 至多有两个不同实根。

证明：假设方程 $2^x+2x^2+x-1=0$ 有三个不同实根，根据洛尔定理可知，方程

$$(2^x+2x^2+x-1)'=0\text{，即}\quad 2^x\ln 2+4x+1=0$$

至少有两个不同实根，方程

$$(2^x\ln 2+4x+1)'=0\text{，即}\quad 2^x(\ln 2)^2+4=0$$

至少有一个实根。

但 $2^x(\ln 2)^2+4>4$，所以矛盾．

故方程 $2^x+2x^2+x-1=0$ 至多有两个不同实根。

8. 解答下列问题：

（1） $k>0$ 为常数，求 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内的零点个数。

解： $f'(x)=\dfrac{e-x}{ex},\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\ f(e)=k>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,e),(e,+\infty)$ 各有且仅有一个零点， $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点。

（2） 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上处处可导且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=e$． 求常数 C，使得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-C}{x+C}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right].\quad (*)$$

解：根据假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=e$，由拉格朗日中值定理可知，等式（*）右边的极限为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-f(x-1)\right]=\lim\limits_{\xi\to+\infty}f'(\xi)=e$. 考虑等式（*）左边的极限。

若 $C=0$，则等式（*）左边的极限为 1，右边的极限为 e. 等式（*）不可能成立。因此 $C\neq 0$.

我们将函数 $\left(\frac{x-C}{x+C}\right)^x$ 写作标准极限模式：

$$\left(\frac{x-C}{x+C}\right)^x=\left(1+\frac{-2C}{x+C}\right)^x=\left(1+\frac{-2C}{x+C}\right)^{\frac{x+C}{-2C}\cdot\frac{-2Cx}{x+C}}\to e^{-2C},\quad x\to+\infty.$$

由等式（*）得 $e^{-2c}=e$. 因此 $C=-1/2$. 解答完毕。

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，求证存在 $\xi,\ \eta\in(a,b)$，使得 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

解：令 $F(x)=e^x f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是

$$\frac{e^b f(b)-e^a f(a)}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]，其中\ \eta\in(a,b).$$

由 $f(a)=f(b)=1$，则有 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]$. 另一方面，对函数 e^x 在区间 $[a,b]$ 上应用拉格朗日中值定理，我们又得到 $\frac{e^b-e^a}{b-a}=e^{\xi}$，其中 $\xi\in(a,b)$， 综合上述两个等式即有 $e^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$. 证毕。

10. 设 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 可导，$0<x_1<x_2$，证明 $\exists\xi\in(x_1,x_2)$，使

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明：记 $F(x)=\frac{f(x)}{x},\ G(x)=\frac{1}{x}$，在 $[x_1,x_2]$ 上应用柯西中值定理得

$$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{G(x_2)-G(x_1)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)},$$

代入即可。

11. 求下列极限

（1） 假设极限 $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x + xf(x)}{x^3}\right)=0$，求极限 $\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

解：由熟知极限 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x - x}{x^3}=-\frac{1}{6}$ 可知 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{(6x)^3}=-\frac{1}{6}$. 于是我们有 $\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x-6x}{x^3}=-\frac{1}{6}\times6^3=-36$. 由已知条件，

$$0=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}\right)=-36+\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}.$$

因此 $\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$. 解答完毕。

（2） 求极限 $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

解： $\lim_{x\to0}\frac{1}{x^3}\left[\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}-1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left(\frac{2+\cos x}{3}\right)}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(2+\cos x)-\ln 3}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2+\cos x}\cdot(-\sin x)}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1}{2+\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6.}$$

（3） 求极限 $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$.

解：（方法 1） $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+\frac{x-1}{x}}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}\text{。}$$

（方法 2） $\lim_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln(1+x-1)}$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{\ln x}{2(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{2(x-1)}=\frac{1}{2}.$$

(4) 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内可导，且 $f(0)=1, f'(0)=2$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$$

解：考虑极限 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)^{\frac{1}{x(1-f(x))}}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\sin x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\sin x-x}\cdot\frac{\sin x-x}{x^2(1-f(x))}}$,

由幂指函数的极限，只需求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2(1-f(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^2(1-f(x))}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-x+o(x)}{1-f(x)}=\frac{1}{6f'(0)}=\frac{1}{12}.$$

故 $\lim_{n\to\infty}\left(n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{n}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}=e^{\frac{1}{12}}$.

(5) 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1+x^2}{(2^x-1)\tan x}$.

解：注意到 $2^x-1=e^{x\ln 2}-1\sim x\ln 2$，$\tan x\sim x$，$(x\to 0)$. 利用 $\cos x$ 的二阶泰勒公式可

得到 $\sqrt[3]{\cos x}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}$，将 $-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ 视为中间变量 u，

由于 $(1+u)^{1/3}=1+\frac{1}{3}u+o(u)$，故

$$\sqrt[3]{\cos x}=1+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]+o\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)$$

$$=1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2),$$

从而原极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}-1+x^2}{(2^x-1)\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)-1+x^2}{(x\ln 2)x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x^2+o(x^2)}{x^2\ln 2}=\frac{5}{6\ln 2}.$$

(6) 求极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}$.

解：这是 $0/0$ 型不定式极限。我们先将极限式中函数表为

$\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=x\cdot\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1-x}$。显然原极限等于极限 $\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)-1}{1-x}$. 相比而言，后者求导时稍微容易些。对后一极限使用洛必达法则：

$$\frac{[x^x(\ln x+1)-1)]'}{(1-x)'}=\frac{x^{x-1}+e^{x\ln x}(\ln x+1)^2}{-1}\to\frac{1+1}{-1}=-2,\quad x\to 1.$$

于是 $\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=\lim_{x\to 1}x\lim_{x\to 1}\frac{x^x(\ln x+1)}{1-x}=1\cdot(-2)=-2$.

(7) 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}$.

解：考虑分子函数的泰勒展式：

$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$；$e^{-x^2/2}=1+\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)+\dfrac{1}{2!}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)^2+o(x^4)$.

于是$\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\dfrac{1}{x^4}\left(\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{x^4}{2!2^2}+o(x^4)\right)\to\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{-1}{12}$， $x\to 0$。

故$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos x-e^{-x^2/2}}{x^4}=\dfrac{-1}{12}$. 解答完毕。

12. 解答下列各题

(1) 求a, b, c的值，使得$e^x-(ax^2+bx+c)$是比x^2高阶的无穷小量$(x\to 0)$.

解：$e^x-(ax^2+bx+c)=1+x+\dfrac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)-(ax^2+bx+c)$,

要使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-(ax^2+bx+c)}{x^2}=\dfrac{1-c+(1-b)x+(\frac{1}{2}-a)x^2+o\left(x^2\right)}{x^2}=0$，则

$a=\dfrac{1}{2}$, $b=1$, $c=1$.

(2) 若$f(x)$可导且导函数连续，$f'(1)=1$，求当$x\to 0$时，无穷小量$f(\cos x)-f(\dfrac{2}{2+x^2})$的阶。

解：因为$f(x)$可导且导函数连续，因此由微分中值定理，存在ξ_x介于$\cos x$与$\dfrac{x^2}{2+x^2}$之间，

使得$f(\cos x)-f(\dfrac{2}{2+x^2})=f'(\xi_x)\left(\cos x-\dfrac{2}{2+x^2}\right)$. 由于$\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{2+x^2}=1$，

故$\lim\limits_{x\to 0}\xi_x=1$，从而$\lim\limits_{x\to 0}f'(\xi_x)=f'(1)=1$. 又$\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)$，

$\dfrac{2}{2+x^2}=1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)$，因此$\cos x-\dfrac{2}{2+x^2}=-\dfrac{5x^4}{24}+o(x^4)$,

从而$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(\dfrac{2}{2+x^2})}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}f'(\xi_x)\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-\dfrac{2}{2+x^2})=-\dfrac{5}{24}$.

故当 $x\to 0$ 时，$f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})$ 是 4 阶无穷小量。

若将题目中函数的条件减弱为：设 $f(x)$ 在 1 点可导且 $f'(1)=1$，求当 $x\to 0$ 时，无穷小量

$f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})$ 的阶。则该题目求解如下：

解：分别将 $f(\cos x)$，$f(\frac{2}{2+x^2})$ 在 1 点展开为带有皮亚诺余项的 1 阶的泰勒展式：

$f(\cos x)=f(1)+f'(1)(\cos x-1)+o(\cos x-1)$，（$x\to 0$）

$f(\frac{2}{2+x^2})=f(1)-f'(1)(\frac{x^2}{2+x^2})+o(\frac{x^2}{2+x^2})$，（$x\to 0$）

则 $f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})=\left(\cos x-1\right)+\frac{x^2}{2+x^2}+o(\cos x-1)$

$=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^2}{2+x^2}+o(x^4)=\frac{(x^2-10)x^4}{24(2+x^2)}+o(x^4)$，

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{(x^2-10)x^4}{24(2+x^2)}+o(x^4)}{x^4}=-\frac{5}{24}$.

所以当 $x\to 0$ 时，$f(\cos x)-f(\frac{2}{2+x^2})$ 是 4 阶无穷小量。

(3) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$，函数

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$$

（I）确定 a 的值使 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续；

（II）对（I）中确定的 a 值，证明 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上的一阶导数连续。

证明（I）$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$.

故当 $a=f'(0)$ 时，$g(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 上连续；

（II） $x\neq 0$时， $g'(x)=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$，

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-xf'(0)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{f''(0)}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+xf''(x)-f'(x)}{2x}=\frac{f''(0)}{2},$$

故$g(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的一阶导数连续。

(4) 写出 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x}$ 在 $x_0=1$处带 Peano 余项的 Taylor 展开式。

解： $f(x)=-\dfrac{1}{1-(x-1)^2}=-1-(x-1)^2-(x-1)^4-\cdots-(x-1)^{2n}+o\left((x-1)^{2n}\right),$

$x\to 1$.

(5) 确定a,b的值，使当$x\to 0$时， $f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$与x^5为同阶无穷小。

解： $f(x)=x-a\sin x-\dfrac{1}{2}b\sin 2x$

$$=x-a[x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\circ(x^5)]-\frac{1}{2}b[2x-\frac{1}{6}(2x)^3+\frac{1}{120}(2x)^5+\circ(x^5)]$$

$$=(1-a-b)x+\frac{1}{6}(a+4b)x^3-\frac{1}{120}(a+16b)x^5+\circ(x^5),$$

要使极限存在且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(a+b\cos x)\sin x}{x^5}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-a-b)x+\frac{1}{6}(a+4b)x^3-\frac{1}{120}(a+16b)x^5+o(x^5)}{x^5}\neq 0,$$

则当$1-a-b=0,\ a+4b=0$，即$a=4/3,\ b=-1/3$，此时

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^5}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{30}x^5+o(x^5)}{x^5}=\frac{1}{30}.$$ 故当$a=4/3,\ b=-1/3$时，

$f(x)=x-(a+b\cos x)\sin x$ 与 x^5 为同阶无穷小。

13. 求下列高阶导数

(1) 求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0)\ (n\geq 3)$.

解：由麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

$$x^2\ln(1+x)=x^2\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots\right]$$

$$=x^3-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-2}}{n-2}+\cdots$$

比较 x^n 的系数得 $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{(-1)^{(n-1)}}{n-2}$. 所以 $f^{(n)}(0)=\dfrac{(-1)^{(n-1)}n!}{n-2}$.

(2) 设 n 是正整数， $f_n(x)=x^n\ln x$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}$.

解： $f_n'(x)=nx^{n-1}\ln x+x^{n-1}=nf_{n-1}(x)+x^{n-1}$，对上式两边求 $n-1$ 阶导，得

$f_n^{(n)}(x)=nf_{n-1}^{(n-1)}(x)+(n-1)!$，从而得到递推式 $\dfrac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\dfrac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\dfrac{1}{n}$，

故 $\dfrac{f_n^{(n)}(x)}{n!}=\dfrac{f_{n-1}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+\dfrac{1}{n}=\cdots=f_1'(x)+\sum\limits_{k=2}^{n}\dfrac{1}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}+\ln x$，

这样 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f_n^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n)=\gamma$ （欧拉常数，$\gamma\approx 0.577$）.

=======

以下供学有余力的同学选做。

1. 广义 Rolle 定理

(1) 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，且满足 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$. 求证：存在 $\xi\in(a,b)$，使

得 $f'(\xi)=0$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，且满足 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$．求证：存在 $\xi\in(0,+\infty)$

使 $f'(\xi)=0$．

(3) 问在结论（2）中，若将区间 $(a,+\infty)$ 改作 $(-\infty,a)$ 或 $(-\infty,+\infty)$，结论是否仍然成立？

证（1）： 若函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上恒为常数，则结论显然成立。

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上不是常数函数，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得

$f(x_0)\neq\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$。

根据连续函数的介值性，以及函数极限保序性可知，存在点 $x_1\in(a,x_0)$ 和 $x_2\in(x_0,b)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，其值介于 $f(x_0)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ 之间。 再利用罗尔定理可知存在 $\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$， 使得 $f'(\xi)=0.$

（2）的证明基本同上。略。

（3）所问问题的答案是肯定的。证明基本同（1）。略。证毕。

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内可导，且 $0\le f(x)\le\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$， $\forall x\in[0,+\infty)$．

证明：$\exists\xi\in(0,+\infty)\quad s.t.\quad f'(\xi)=\dfrac{2}{2\xi+1}-\dfrac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}$．

证明：因为 $0\le f(x)\le\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$， $\forall x\in[0,+\infty)$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}=0,\quad \ln\frac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}\bigg|_{x=0}=0,$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0,\quad f(0)=0$．记 $F(x)=f(x)-\ln\dfrac{2x+1}{x+\sqrt{1+x^2}}$，则

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=0,\quad F(0)=0$，由广义罗尔定理，$\exists\xi\in(0,+\infty),\quad F'(\xi)=0$，即

$$f'(\xi)=\frac{2}{2\xi+1}-\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}.$$