微积分（1）第 5 周习题课 函数极限

1. 讨论下列极限是否存在：

（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$ 是否存在； （2） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

2. 用函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$. (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1})=0$.

3. 求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ ； （2） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x-1}-1}\right)$ ；（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$ ；

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}$ ；（6） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

（7） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}\ (a,b,c>0)$ ；（8） $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$ ；

（9） $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)$ ；(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{x^2+1}$.

4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是周期函数。

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 都存在且相等，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有什么关系？证明你的结论。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期之比是有理数，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 又有什么关系？

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(x^2)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$，

求证： $f(x)=f(1),\ \forall x\in(0,+\infty)$ 。

6. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$，求证： $\forall a>0$， $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$ 。

7. Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0,1,\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}, q>0),\\ 0, & x\in[0,1],\ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$ 证明：对任意的 $x_0\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$。（——这是一个处处有极限的函数）

8. 设 $f_1(x)=\begin{cases}x, & 1\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}, & x>2,\end{cases}$ $f_n(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le n,\\ x^n, & n<x\le n+1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>n+1,\end{cases}$

（1）对任意固定的 n，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$；

（2）求 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式；

（3）讨论当 $x\to+\infty$ 时，函数 $F(x)$ 的趋向。

9．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=a\ne 0$，求 k 与 a 的值．

10．证明：若 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，则

$$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\leqslant 1.$$