微积分（1）第 5 周习题课 函数极限解答

1. 讨论下列极限是否存在？

（1） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}$；　（2） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$

解：（1） 因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{1-x}}}=0$，因此左右极限存在但不等，故该极限不存在。

（2）由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=0+1=1$,

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=2-1=1$,

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

2. 用函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$. (2) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1})=0$.

(1) 证明：$\forall\varepsilon>0\ (\varepsilon<\dfrac{\pi}{2})$，要使不等式

$$\left|\arctan\frac{1}{1-x}-\frac{\pi}{2}\right|=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{1-x}<\varepsilon\qquad(x<1)$$

成立，解得 $1-x<\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}$. 取 $\delta=\dfrac{1}{\tan(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)}>0$，于是

$\forall x\in(1-\delta,1)$, 有 $\left|\arctan\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{\pi}{2}\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{x\to 1^-}\arctan\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 证明：$\left|\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right|=\left|2\cos\dfrac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\right|$

$$< \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}<\frac{1}{|x|}.$$

$\forall \varepsilon>0$，取 $N=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $\forall |x|>N$ 时，有 $\left|\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right|<\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$ 成立，所以

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

3. 求下列极限:

（1） $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ ；

解：$\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}$.

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2})$.

解：令 $y=1/x$，则 $y\to 0^+\ (x\to+\infty)$。于是

$$\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=\frac{(1+2y)^{1/2}-(1-y)^{1/3}}{y}$$

因为 $\dfrac{(1+y)^a-1}{y}\to a$， $y\to 0$，（a 为任意非零实数），我们得到

$$\frac{(1+2y)^{1/2}-(1-y)^{1/3}}{y}=\frac{(1+2y)^{1/2}-1}{y}-\frac{(1-y)^{1/3}-1}{y}\to\frac{1}{2}\cdot 2-\frac{1}{3}\cdot(-1)=\frac{4}{3},\quad y\to 0。$$

因此 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3-x^2})=4/3$。

（3） $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x-1}-1}\right)$

解：令 $y=\dfrac{1}{x-1}$，则 $y\to+\infty\ (x\to 1^+)$。

$$\left(\sqrt{\frac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\frac{1}{x-1}-1}\right)=\sqrt{y+1}-\sqrt{y-1}=\frac{2}{\sqrt{y+1}+\sqrt{y-1}}\to 0，(x\to 1^+)$$

故 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x-1}+1}-\sqrt{\dfrac{1}{x-1}-1}\right)=0$ 。

（4） 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}$.

解：

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)+\cos x(1-\cos 2x)+\cdots+\cos x\cdots(1-\cos nx)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\cdots+\lim_{x\to 0}\cos x\cdots\lim_{x\to 0}\cos(n-1)x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos nx}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}+\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{4x^2}{2}}{x^2}+\cdots+\lim_{x\to 0}\cos x\cdots\lim_{x\to 0}\cos(n-1)x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{n^2x^2}{2}}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{4}{2}+\frac{9}{2}+\cdots+\frac{n^2}{2}=\frac{1+2^2+\cdots+n^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

另解：利用等价代换$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cos 2x\cdots\cos nx}{x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x\cos 2x\cdots\cos nx)}{x^2}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos kx}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{x^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}.$$

（5） $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}$.

解：当$x=0$时，原式$=1$．当$x\neq 0$时，有

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$.

综上可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$

Remark：注意到对于每一个 x, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$，所以当 n 充分大时，有 $|\dfrac{x}{2^n}|<\pi$．因此当 $x\neq 0$ 时，$\sin\dfrac{x}{2^n}\neq 0$，表达式同乘同除 $\sin\dfrac{x}{2^n}$ 没有问题.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

解：$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln[x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})]}{\ln[x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})]}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|x|+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\ln|x|+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln|x|}}{10+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})}{\ln|x|}}=\frac{1}{5}.$$

（7）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}\ (a,b,c>0)$；

解：设 $A=\max\{a,b,c\}$.

由 $\dfrac{A}{3^{\frac{1}{x}}}\leqslant(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}\leqslant A$，及 $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\frac{1}{x}}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=A$.

（8）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$ ；

解：$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{arc}\cot x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1$.

（9）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)$

解：$$\lim_{x\to+\infty}x^2\left(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}}\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\left(3^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x(x+1)}\ln 3}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot 3^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x(x+1)}\ln 3=\ln 3.$$

(10) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{x^2+1}$.

解：先化简 $\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4}$.

由于 $\tan(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\frac{x+1}{x}-1}{1+\frac{x+1}{x}}=\dfrac{1}{2x+1}$，并且

$$\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{4}),$$

所以 $\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4}=\arctan\dfrac{1}{2x+1}$.

从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\arctan\dfrac{1}{2x+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2x+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\dfrac{1}{2}$.

4. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是周期函数。

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 都存在且相等，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有什么关系？证明你的结论。

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$，且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期之比是有理数，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 又有什么关系？

答：(1) $f(x)\equiv g(x)=C$ (常数).

证明：设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=C$，且设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期分别为 $a,\ b$. 则对任意的 x，

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x+na)=C$, $\quad g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x)=\lim\limits_{n\to\infty}g(x+nb)=C$,

所以 $f(x)\equiv g(x)=C$.

(2) $f(x)\equiv g(x)$，但不一定是常数。

证明：由于 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期之比是有理数，因此函数 $f(x)-g(x)$ 仍然是周期函数，由(1)知，$f(x)-g(x)\equiv 0$，故 $f(x)\equiv g(x)$.

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上满足 $f(x^2)=f(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(1)$，

求证：$f(x)=f(1),\ \forall x\in(0,+\infty)$。

证明：若 $x\in(0,1)$，由于 $f(x)=f(x^2)=f(x^4)=\cdots=f(x^{2^n}),\quad n\in\mathbb{N}$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty}x^{2^n}=0$，故

$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f(x^{2^n})=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(1)$；

若 $x\in(1,+\infty)$，由于 $f(x)=f(x^2)=f(x^4)=\cdots=f(x^{2^n}),\quad n\in\mathbb{N}$，而 $\lim\limits_{n\to+\infty}x^{2^n}=+\infty$，

故 $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f(x^{2^n})=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=f(1)$。

所以 $f(x)=f(1),\ \forall x\in(0,+\infty)$。

6. 设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2x)}{f(x)}=1$，求证：$\forall a>0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

证明：（1）$1\le a\le 2$ 时，由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

$$1=\frac{f(x)}{f(x)}\le\frac{f(ax)}{f(x)}\le\frac{f(2x)}{f(x)}\to 1(x\to+\infty)。$$

由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

假设对任意的 $k\ge 1$，当 $2^{k-1}<a\le 2^k$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$. 则对于 $2^k<a\le 2^{k+1}$，有

$\dfrac{f(2^k x)}{f(x)}\le\dfrac{f(ax)}{f(x)}=\dfrac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)}\cdot\dfrac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)}$，由假设知，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^k x)}{f(x)}=1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)}=1$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)}=1$，故由夹逼定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$. 从而对 $\forall a>1$，存在 $n>1$ 使得

$2^{n-1}<a\le 2^n$，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

（2） 当 $0<a<1$ 时，存在 $n\in\mathbb{N}$，使 $1<2^n a\le 2$，而

$$\frac{f(ax)}{f(x)}=\frac{f(ax)}{f(2ax)}\cdot\frac{f(2ax)}{f(2^2ax)}\cdots\frac{f(2^n ax)}{f(x)},$$

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(2ax)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2ax)}{f(2^2ax)}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^{n-1}ax)}{f(2^n ax)}=1$，

由（1），$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(2^n ax)}{f(x)}=1$，故 $0<a<1$ 时 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(ax)}{f(x)}=1$。

7. Riemann 函数 $R(x)=\begin{cases}1, & x=0,\ 1,\\ \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}（\dfrac{p}{q}\text{为既约真分数}, q>0),\\ 0, & x\in[0,1],\ x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$ 证明：对任意的 $x_0\in[0,1]$，有 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$。（——这是一个处处有极限的函数）

证明：令 $x_0\in[0,1]$ 任意。对 $\forall\varepsilon>0$，取充分大的正整数 q_0 使得 $\dfrac{1}{q_0}<\varepsilon$。在 $[0,1]$ 中使得 $0<q\le q_0$ 的真分数 $\dfrac{p}{q}$ 只有有限多，因此总能取到充分小的 $\delta>0$ 使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中有理数的分母 $q>q_0$。故当无理数 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $R(x)=0<\varepsilon$；当 $x=\dfrac{p}{q}$ 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，必有 $q>q_0$，从而 $0\le R(x)=\dfrac{1}{q}<\dfrac{1}{q_0}<\varepsilon$。故 $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$。

8. 设 $f_1(x)=\begin{cases}x, & 1\le x\le 2,\\ \dfrac{1}{x}, & x>2,\end{cases}$ $f_n(x)=\begin{cases}1, & 1\le x\le n,\\ x^n, & n<x\le n+1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>n+1,\end{cases}$

（1）对任意固定的 n，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$；

（2）求 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式；

（3）讨论当 $x\to+\infty$ 时，函数 $F(x)$ 的趋向。

解：（1）对任意固定的 n，$\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$；

（2）对任意的 $x\in[1,+\infty)$，

当 $x\in[1,2]$ 时，$f_1(x)=x,\ f_2(x)=1,\ f_3(x)=1,\cdots$，这时

$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x$；

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，总存在正整数 n_0 使得 $n_0+1<x\le n_0+2$，这时

$f_1(x)=\dfrac{1}{x}, f_2(x)=\dfrac{1}{x},\cdots, f_{n_0}(x)=\dfrac{1}{x}$，$f_{n_0+1}(x)=x^{n_0+1}, f_{n_0+2}(x)=f_{n_0+3}(x)=\cdots=1$，

所以 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x$。

综上便知$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$在$[1,+\infty)$上的表达式为$F(x)=x$。

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$。

9．已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=a\neq 0$，求$k$与$a$的值.

解: 因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^k\pi}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^k\pi}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2x^{k-2}\pi}=a\neq 0$，

所以$k=2$，$a=\dfrac{1}{2\pi}$.

10．证明：若$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且$|f(x)|\leqslant|\sin x|$，则

$$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\leqslant 1.$$

证明：当$\sin x\neq 0$时，有$\dfrac{|f(x)|}{|\sin x|}\leqslant 1$，即

$$\left|\frac{a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx}{\sin x}\right|\leqslant 1.$$

在不等式两端令$x\to 0$，得

$$\left|a_1+2a_2+...+na_n\right|\leqslant 1.$$