第十三周习题课题目 定积分的几何应用

1. 求曲线段 $y=\ln x$ $(2\leqslant x\leqslant 6)$ 的一条切线，使此曲线段与该切线及直线 $x=2$， $x=6$ 所围平面图形的面积最小.

2．已知曲线 L: $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t \end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$.

（1）求 L 的长度；

（2）求 L 与 x 轴围成的平面图形的面积.

3．设曲线 $y=f(x)$ 由

$$x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du \quad 及 \quad y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{t-u}\cos 2udu$$

确定，求该曲线当 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 时的法线方程。

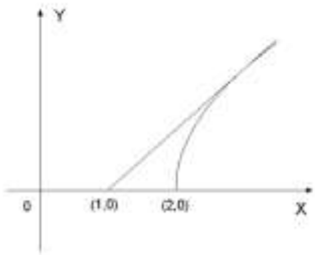
4. 设 $D=\{(x,y)\big|\, x^2+y^2\leqslant 2x, y\geqslant x\}$，求 D 绕直线 $x=2$ 旋转而成的旋转体体积 V .

5．过点 $(1,0)$ 作曲线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述曲线及 x 轴围成一平面图形 A .

（1）求 A 的面积；

（2）求 A 绕 x 轴旋转所成旋转体体积；

（3）求 A 绕 y 轴旋转所成旋转体体积.



6．设 D 是由圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=1-\sqrt{2x-x^2}$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

7. 求曲线 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$ 所围平面图形的面积.

8. 设有曲线 $y=\sqrt{x-1}$， 过原点作其切线， 求此曲线, 切线及 x 轴围成的平面区域绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体表面积.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内大于零，并满足 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$ （a 为常数），又曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=0, x=1, y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2.

⑴求函数 $f(x)$；⑵ a 为何值时，图形 S 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

10. 证明：在极坐标系下，由 $0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi, 0\le r\le r(\theta)$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所生成的旋转体的体积为 $V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta$ ，其中 $r(\theta)\in C[\alpha,\beta]$；并求心脏线 $r=a(1+\cos\theta)$ 绕极轴旋转一周所得旋转体的体积。