第十三周习题课 参考解答 定积分的几何应用

1. 求曲线段 $y=\ln x\ (2\leqslant x\leqslant 6)$ 的一条切线，使此曲线段与该切线及直线 $x=2$， $x=6$ 所围平面图形的面积最小.

**解：** 曲线 $y=\ln x$ 在点 $(t,\ln t)$ 处的切线方程为

$$y=\ln t+\frac{1}{t}(x-t)\ .$$

曲线 $y=\ln x$ 在 $(t,\ln t)$ 处的切线与直线 $x=2$， $x=6$ 及此曲线段所围平面图形的面积为

$$S(t)=\int_2^6[\ln t+\frac{1}{t}(x-t)-\ln x]\mathrm{d}x=4\ln t+\frac{16}{t}-6\ln 6+2\ln 2\ .$$

由 $S'(t)=\dfrac{4}{t}-\dfrac{16}{t^2}$，令 $S'(t)=0$ 解得 $t=4$ .

因为，当 $t<4$ 时， $S'(t)<0$，当 $t>4$ 时， $S'(t)>0$，所以 $S(4)$ 最小.

故所求切线方程为 $y=\ln 4+\dfrac{1}{4}(x-4)$ .

2．已知曲线 $L$: $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ .

（1）求 $L$ 的长度；

（2）求 $L$ 与 $x$ 轴围成的平面图形的面积.

**解：**（1）由 $x'=1-\cos t$， $y'=\sin t$ 得

$$\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}=\sqrt{2(1-\cos t)}=2\left|\sin\frac{t}{2}\right|\ .$$

所以曲线 $L$ 的长度为

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=-4\cos\frac{t}{2}\bigg|_0^{2\pi}=8\ .$$

（2）曲线 $L$ 与 $x$ 轴的交点是 $(0,0)$ 和 $(2\pi,0)$ 且 $y=1-\cos t\geqslant 0$，所以 $L$ 与 $x$ 轴围成的平面图形的面积为

$$A=\int_0^{2\pi}y\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}(1-\cos t)\cdot(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-2\cos t+\frac{1}{2}\cos 2t)\mathrm{d}t=3\pi\ .$$

3．设曲线 $y=f(x)$ 由

$$x(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{t-u}\sin\frac{u}{3}du\quad 及\quad y(t)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{t-u}\cos 2udu$$

确定，求该曲线当$t=\dfrac{\pi}{2}$时的法线方程。

解：$x'(t)=\dfrac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\sin\dfrac{u}{3}du\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\sin\dfrac{u}{3}du+\sin\dfrac{t}{3}.$

$$y'(t)=\frac{d}{dt}\left(e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\cos 2udu\right)=e^{t}\int_{\frac{\pi}{2}}^{t}e^{-u}\cos 2udu+\cos 2t.$$

$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-2$，故法线方程为 $y=\dfrac{x}{2}$.

4. 设$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, y\geqslant x\}$，求$D$绕直线$x=2$旋转而成的旋转体体积$V$.

**解法 1**：记 $x_1=1-\sqrt{1-y^2}$， $x_2=y$.

由$\begin{cases}x^2+y^2=2x,\\ y=x\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$

因为体积微元$\mathrm{d}V=[\pi(2-x_1)^2-\pi(2-x_2)^2]\mathrm{d}y=\pi[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2]\mathrm{d}y$，

所以$V=\pi\int_0^1[(1+\sqrt{1-y^2})^2-(2-y)^2]\mathrm{d}y=\dfrac{\pi^2}{2}-\dfrac{2}{3}\pi$.

**解法 2**：记 $y_1=x$， $y_2=\sqrt{2x-x^2}$. 因为体积微元是

$$\mathrm{d}V=2\pi(2-x)(y_2-y_1)\mathrm{d}x=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$V=\int_0^1\mathrm{d}V=\int_0^1 2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2}{3}\pi.$$

5．过点$(1,0)$作曲线$y=\sqrt{x-2}$的切线，该切线与上述曲线及$x$轴围成一平面图形$A$.

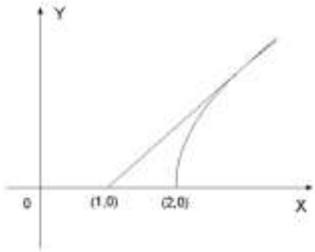
（1）求$A$的面积；

（2）求$A$绕$x$轴旋转所成旋转体体积；

（3）求$A$绕$y$轴旋转所成旋转体体积.

**解**：（1）设切点坐标为 $(x_0, y_0)$，则在此点的切线斜率为

$$y'\big|_{x=x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}},$$




在此点的切线方程为

$$y = \frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0) + \sqrt{x_0-2}.$$

把点 $(1,0)$ 代入上式，得 $x_0 = 3$， $y_0 = 1$．所以切线方程为 $y = \frac{1}{2}(x-1)$．

所求面积为 $A = \int_0^1 [(y^2+2)-(2y+1)]\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$．

（2） $A$ 绕 $x$ 轴旋转所成旋转体体积为

$$V_x = \pi\int_1^3 [\frac{1}{2}(x-1)]^2 \mathrm{d}x - \pi\int_2^3 (\sqrt{x-2})^2 \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi.$$

（3） $A$ 绕 $y$ 轴旋转所成旋转体体积为

$$V_y = \pi\int_0^1 (y^2+2)^2 \mathrm{d}y - \pi\int_0^1 (2y+1)^2 \mathrm{d}y = \frac{6}{5}\pi.$$

6．设 $D$ 是由圆弧 $y = \sqrt{1-x^2}$ 与 $y = 1-\sqrt{2x-x^2}$ 围成的平面区域，求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

**解**：设 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $V$，表面积为 $S$，则

$$\begin{aligned}
V &= \frac{2}{3}\pi - \int_0^1 \pi[1-\sqrt{2x-x^2}]^2 \mathrm{d}x \\
&= \frac{2\pi}{3} - \pi\int_0^1 (1+2x-x^2-2\sqrt{2x-x^2})\mathrm{d}x \\
&= -\pi + \pi\int_0^1 2\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x = -\pi + 2\pi\int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi^2}{2} - \pi.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi + \int_0^1 2\pi(1-\sqrt{2x-x^2})\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi + \int_0^1 2\pi(1-\sqrt{2x-x^2})\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\arcsin(x-1)\big|_0^1 = \pi^2.
\end{aligned}$$

7. 求曲线 $x^4 + y^4 = a^2(x^2+y^2)$ 所围平面图形的面积.

解：将 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ 代入 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 中，得到

$$r^2 = \frac{a^2}{\sin^4\theta + \cos^4\theta},$$

于是面积

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{\sin^4\theta + \cos^4\theta} d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^2\theta + 1}{\tan^4\theta + 1} d\tan\theta,$$

令 $t = \tan\theta$，则

$$S = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2+1}{t^4+1} dt = 2a^2 \int_0^{+\infty} \frac{d(t - t^{-1})}{(t - t^{-1})^2 + 2} = \sqrt{2}a^2 \arctan \frac{t - t^{-1}}{\sqrt{2}} \Big|_0^{+\infty} = \sqrt{2}\pi a^2.$$

8. 设有曲线 $y = \sqrt{x-1}$， 过原点作其切线， 求此曲线, 切线及 $x$ 轴围成的平面区域绕 $x$ 轴旋转一周所得到的旋转体表面积.

解：可以求得切线为 $y = \frac{1}{2}x$，切点为 $(2,1)$. 旋转体表面积由两部分组成：

由曲线绕 $x$ 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为

$$S_1 = 2\pi \int_1^2 y\sqrt{1 + y'^2} dx = \pi \int_1^2 \sqrt{4x - 3} dx = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right),$$

由切线绕 $x$ 轴旋转一周所得到的旋转体表面积为 $A_2 = 2\pi \int_0^2 \frac{1}{2}x \frac{\sqrt{5}}{2} dx = \sqrt{5}\pi$，

故由曲线, 切线及 $x$ 轴围成的平面区域绕 $x$ 轴旋转一周所得到的旋转体表面积是

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\pi}{6}\left(11\sqrt{5} - 1\right).$$

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内函数值大于零，并满足 $xf'(x) = f(x) + \frac{3a}{2}x^2$（$a$ 为常数），又曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 0, x = 1, y = 0$ 所围的图形 $S$ 的面积为 2.

⑴求函数 $f(x)$；⑵ $a$ 为何值时，图形 $S$ 绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体的体积最小。

**解** ⑴由已知条件可得

$$\left[\frac{f(x)}{x}\right]' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{3a}{2} \quad (x \neq 0).$$

对上式求不定积分，由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性得

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+Cx \quad (x\in[0,1]),$$

又由已知条件有

$$2=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(\frac{3a}{2}x^2+Cx)dx=\frac{a}{2}+\frac{C}{2},$$

故$C=4-a$，所以

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x.$$

⑵旋转体的体积

$$V=V(a)=\pi\int_0^1\left[\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x\right]^2dx=(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3})\pi.$$

上式两边对$a$求导，并令一阶导数为零，求其驻点。由$V'(a)=(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3})\pi=0$，解得$a=-5$是惟一驻点，又$V''(-5)=\frac{\pi}{15}>0$，所以$a=-5$为体积$V$的惟一极小值点，故为最小值点，因此$a=-5$时旋转体体积最小。

10. 证明：在极坐标系下，由$0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi,\ 0\le r\le r(\theta)$所表示的区域绕极轴旋转一周所生成的旋转体的体积为$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta$，其中$r(\theta)\in C[\alpha,\beta]$；并求心脏线$r=a(1+\cos\theta)$绕极轴旋转一周所得旋转体的体积。

解：首先，由$0\le\alpha\le\theta\le\beta\le\pi,\ 0\le r\le a$所表示的扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{\pi}{3}a^3\sin^2\beta\cos\beta-\frac{\pi}{3}a^3\sin^2\alpha\cos\alpha+\pi\int_{a\cos\beta}^{a\cos\alpha}(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi}{3}(\cos\alpha-\cos\beta)a^3,$$

由微分中值定理，$\cos\alpha-\cos\beta=\sin\lambda(\beta-\alpha)$，其中$\lambda\in(\alpha,\beta)$. 任取$\theta\in[\alpha,\beta]$, 则小扇形绕极轴旋转生成旋转体的体积，即体积微元$dV=\frac{2\pi}{3}r^3(\theta)\sin\theta d\theta$，从而

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta d\theta.$$

故由此公式可求得心脏线$r=a(1+\cos\theta)$绕极轴旋转一周所得旋转体的体积

$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi r(\theta)^3\sin\theta d\theta=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi a^3(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta=[-\frac{2\pi a^3}{3}\frac{(1+\cos\theta)^4}{4}]_0^\pi=\frac{8\pi}{3}a^3$. 解答完毕。