第 6 周习题课　连续函数

1. 研究下列函数在定义域内的连续性，若有间断点，指出间断点及其类别.

（1） $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$， $x\in(0,2\pi)$；

（2） $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$；

（3） $f(x)=[|\cos x|]$；

（4） $f(x)=\dfrac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}$；

（5） $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{x-1}{t-1})^{\frac{t}{x-t}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

注 （3）（4）中的$[x]$是取整函数.

2. 试举出定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(x)$. 要求：$f(x)$仅在$0,1,2$三点处连续，其余的点都是$f(x)$的第二类间断点.

3. 利用零点存在定理证明下列各题：

（1）设$f\in C(-\infty,+\infty)$且$f(f(x))=x$，证明：存在$\xi\in(-\infty,+\infty)$使得$f(\xi)=\xi$.

（2）设$f(x)$是以2π为周期的连续函数，则在任何一个周期内，存在$\xi\in\mathbb{R}$，使得$f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

（3）设$f\in C[a,b]$，且$f([a,b])\subset[a,b]$. 证明：$\exists\xi\in[a,b]$使得$f(\xi)=\xi$.

4. 设$f\in C[a,b]$，且存在$q\in(0,1)$，使得$\forall x\in[a,b]$，$\exists y\in[a,b]$，满足$|f(y)|\le q|f(x)|$.

证明：$\exists\xi\in[a,b]$使得$f(\xi)=0$.

5. 设$\{f_n(x)\}$是$[a,b]$上的连续函数列，且存在$M>0$使得$\forall n\in\mathbb{N}^+$及$\forall x\in[a,b]$，有$|f_n(x)|\le M$，问$F(x)=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^+}\{f_n(x)\}$是否是连续函数？

6. 设常数$a_1,a_2,\cdots,a_n$满足$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\right).$$

7. 设 $f\in C[a,b]$， $f([a,b])\subset[a,b]$，且对 $\forall x,y\in[a,b],\ |f(x)-f(y)|\le|x-y|$. 任取 $x_1\in[a,b]$，记 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)],\ n=1,2,\ldots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 有极限 x_0，且 $f(x_0)=x_0$.

8. （1）求常数 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{2}$；

（2）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)$ 存在，求常数 c 及极限值。

（3）定义函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{2x}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$ 试确定常数 $a,\ b$ 使得函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续。

9. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$。求证：

（1）存在实数 $a\in\mathbb{R}$，使得 $\forall x\in\mathbb{Q}$， $f(x)=ax$；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则存在实数 $a\in\mathbb{R}$，使得 $\forall x\in\mathbb{R}$， $f(x)=ax$.

10. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点，且满足如下凸性条件：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y\in(a,b) \qquad (*)$$

证明：函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处连续。

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且非负。 若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

12. 设 $f(x)=a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0$，其中系数满足

$$a_n>|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|.$$

证明：函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 内至少有 $2n$ 个根。

13. 通过函数图像可知，方程 $\tan x = x$ 在区间 $(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ 上有唯一个解 a_n，即 $\tan a_n = a_n$， $n = 0,1,2,\cdots$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$ 。

14. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。一个点 $x_0 \in I$ 称作函数 $f(x)$ 的极大值（或极小值）点，如果存在正数 $\delta > 0$，使得对 $\forall x \in I \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x) \le f(x_0)$ (或 $f(x) \ge f(x_0)$)。极大点和极小点都称作极值点。证明命题：设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $I=[a,\ b]$ 上连续。若 $f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 上无极值点，则 $f(x)$ 在 I 上严格单调。

15. 设 $f(x) \in C[a,+\infty)$ 且有界，若 $f(a) < \sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，则当 α 满足 $f(a) < \alpha < \sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$ 时，都存在 $\xi \in [a,+\infty)$，使得 $\alpha = f(\xi)$.

下列题目根据个人情况选做。

16. 设 $f \in C[a,b]$， $m(x) = \inf\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$, $M(x) = \sup\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$，求证 $m(x),\ M(x) \in C[a,b]$.

证明：首先证明 $m(x) \in C[a,b]$. $\forall x_0 \in (a,b)$，下证 $\lim\limits_{x\to x_0^+} m(x) = m(x_0)$.