第 6 周习题课　连续函数

1.　研究下列函数在定义域内的连续性，若有间断点，指出间断点及其类别.

（1） $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$， $x\in(0,2\pi)$；　（2） $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$；

（3） $f(x)=[|\cos x|]$；　（4） $f(x)=\dfrac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}$；

（5） $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{x-1}{t-1})^{\frac{t}{x-t}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

注　（3）（4）中的$[x]$是取整函数.

解：（1）对初等函数，找间断点就是找没定义的孤立点.

在$(0,2\pi)$内， $\tan(x-\dfrac{\pi}{4})$没定义的点为$\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$， $\tan(x-\dfrac{\pi}{4})$等于零的点为$\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$，所以函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$在$(0,2\pi)$内的间断点有 4 个．其中， $x=\dfrac{3\pi}{4},\ x=\dfrac{7\pi}{4}$是第一类间断点（可去型）， $x=\dfrac{\pi}{4},\ x=\dfrac{5\pi}{4}$为第二类间断点．说明如下：

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=(1+\dfrac{3\pi}{4})^0=1$， 所以 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 的可去间断点． $x=\dfrac{7\pi}{4}$是第一类间断点的理由类似.

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=+\infty$，所以$x=\dfrac{\pi}{4}$是函数$f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$的第二类间断点． $x=\dfrac{5\pi}{4}$是第二类间断点的理由类似.

（2）函数$f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$的间断点为$x=0,\ x=\pm1$.

因为$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，所以$x=0$是$f(x)$的第一类间断点（跳跃间断点）.

因为$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\dfrac{1}{2}$， $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{1}{2}$，所以$x=1$是$f(x)$的第一类间断点（可去间断点）.

因为$\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$， $\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$，所以$x=-1$是$f(x)$的第二类间断点.

（3） $f(x)=[|\cos x|]$

当$x=k\pi$时， $|\cos x|=1$， $f(x)=[|\cos x|]=1$；

当 $x \neq k\pi$ 时，$|\cos x|<1$，$f(x)=[|\cos x|]=0$.

因此 $x=k\pi$ 是间断点.

因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}[|\cos x|]=\lim\limits_{x\to k\pi}0=0\neq 1=f(k\pi)$，所以 $x=k\pi$ 均为第一类间断点（可去间断点）.

（4）$f(x)=\dfrac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}$ 的定义域是 $\{x \mid x\geqslant 0, x\neq 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}, k\in \mathbf{Z}^+\}$，$x_0=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的间断点.

由于 $\lim\limits_{x\to 2k\pi-\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim\limits_{x\to 2k\pi-\frac{\pi}{2}}\dfrac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}=\infty$，所以 $x_0=2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

当 $x=n^2, n\in\mathbf{Z}^+$ 时，$\lim\limits_{x\to n^2+} f(x)=\lim\limits_{x\to n^2+}\dfrac{n\ln(1+x)}{1+\sin x}=\dfrac{n\ln(1+n^2)}{1+\sin n^2}=f(n^2)$，

$\lim\limits_{x\to n^2-} f(x)=\lim\limits_{x\to n^2-}\dfrac{(n-1)\ln(1+x)}{1+\sin x}=\dfrac{(n-1)\ln(1+n^2)}{1+\sin n^2}\neq f(n^2)$，

所以 $x=n^2, n\in\mathbf{Z}^+$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃间断点）.

（5）当 $x\neq 1$ 时，$\lim\limits_{t\to x}(\dfrac{x-1}{t-1})^{\frac{t}{x-t}}=\lim\limits_{t\to x}\left[(1+\dfrac{x-t}{t-1})^{\frac{t-1}{x-t}}\right]^{\frac{x-t}{t-1}\cdot\frac{t}{x-t}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$，

所以 $f(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}, & x\neq 1.\end{cases}$

由于 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，且 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

2. 试举出定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$. 要求：$f(x)$ 仅在 $0,1,2$ 三点处连续，其余的点都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

解：（答案不唯一）令 $f(x)=x(x-1)(x-2)D(x)$，其中 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$

在点 $x=0$ 附近，易见 $(x-1)(x-2)D(x)$ 有界，故有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续. 类似可证 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 点连续.

另一方面，$\forall x_0\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,2\}$，取有理点列 $\{x_n\}$ 使得 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=x_0(x_0-1)(x_0-2)\quad(\neq 0);$$

取无理点列$\{x_n'\}$， $x_n' \to x_0\ (n \to \infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n') = 0 .$$

所以 $f(x)$ 在点 x_0 不存在右极限，故 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

注：函数 $f(x)=\begin{cases} x(x-1)(x-2), & x\in\mathbf{Q}, \\ -x(x-1)(x-2), & x\notin\mathbf{Q} \end{cases}$ 也满足要求。

3. 利用零点存在定理证明下列各题：

（1）设 $f \in C(-\infty,+\infty)$ 且 $f(f(x)) = x$，证明：存在 $\xi \in (-\infty,+\infty)$ 使得 $f(\xi)=\xi$.

（2）设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则在任何一个周期内，存在 $\xi\in\mathbb{R}$，使得 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

（3）设 $f \in C[a,b]$，且 $f([a,b])\subset[a,b]$． 证明：$\exists\xi\in[a,b]$使得 $f(\xi)=\xi$.

证明：（1） 记 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，且

$$F(f(x)) = f(f(x)) - f(x) = x - f(x)$$

$$F(x)\cdot F(f(x)) \le 0$$

在以 $x,\ f(x)$ 为端点的闭区间上，应用连续函数的零点存在定理，可得存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=\xi$.

（2） 令 $F(x)=f(x+\pi)-f(x)$，则 $F(x)$ 为连续函数，且 $F(a)=f(a+\pi)-f(a)$，$F(a+\pi)=f(a+2\pi)-f(a+\pi)=f(a)-f(a+\pi)$，

故 $F(a)\cdot F(a+\pi)\le 0$． 若 $F(a)\cdot F(\pi+a)=0$，取 $\xi=a$；现在设 $F(a)\cdot F(\pi+a)<0$，由闭区间上连续函数的零点存在定理可得，存在 $\xi\in(a,a+\pi)\subset\mathbb{R}$ 使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi+\pi)=f(\xi)$。

（3）记 $F(x)=f(x)-x$，则 $F\in C[a,b]$.

若 $F(a)\cdot F(b)=0$，则 $F(a)=0$ 或 $F(b)=0$，取 $\xi=a$ 或 b，则有 $f(\xi)=\xi$；

若 $F(a)\cdot F(b)\neq 0$，因为 $f([a,b])\subset[a,b]$，则 $F(a)>0,\ F(b)<0$，所以由闭区间上连续函数的零点存在定理，$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $F(\xi)=0,$ 即 $f(\xi)=\xi$. 故 $\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=\xi$. 证毕。

4. 设 $f\in C[a,b]$，且存在 $q\in(0,1)$，使得 $\forall x\in[a,b]$，$\exists y\in[a,b]$，满足 $|f(y)|\le q|f(x)|$.

证明：$\exists\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)=0$.

证明：因为 $f\in C[a,b]$，所以 $|f|\in C[a,b]$. 因此 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上能够取到最小值，故存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $|f(\xi)|=\min\{|f(x)|\ |\ \forall x\in[a,b]\}$. 若 $f(\xi)\neq 0$，由已知条件知，$\exists y_0\in[a,b]$，满足 $|f(y_0)|\le q|f(\xi)|<|f(\xi)|$，这与 $|f(\xi)|=\min\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|$ 矛盾。所以 $f(\xi)=0$. 证毕。

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列，且存在 $M>0$ 使得 $\forall n\in\mathbb{N}^+$ 及 $\forall x\in[a,b]$, 有 $|f_n(x)|\le M$，问 $F(x)=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^+}\{f_n(x)\}$ 是否是连续函数？

解：不一定。例如，令 $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$，$x\in[0,1]$，则对 $\forall x\in[0,1]$ 及任意的正整数 $n\ge 1$，有 $|f_n(x)|=|\dfrac{x^n}{1+x^n}|\le\dfrac{1}{2}$, 且 $F(x)=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}^+}\{f_n(x)\}=\begin{cases}0, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$，显然 $x=1$ 是 $F(x)$ 的第一类间断点。解答完毕。

6. 设常数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，计算

$$\lim_{x\to+\infty}\left(a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\right).$$

解：因为 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，所以

$$\begin{aligned}&a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\\&=a_1(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})+a_2(\sin\sqrt{x+2}-\sin\sqrt{x})+\cdots+a_n(\sin\sqrt{x+n}-\sin\sqrt{x})\\&=2\left(a_1\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}+a_2\sin\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2}\right.\\&\qquad\left.+\cdots+a_n\sin\frac{\sqrt{x+n}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+n}+\sqrt{x}}{2}\right)\end{aligned}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{\sqrt{x+k}-\sqrt{x}}{2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\dfrac{k}{2(\sqrt{x+k}+\sqrt{x})}=0,\quad |\cos\dfrac{\sqrt{x+k}+\sqrt{x}}{2}|\le 1,\ k=1,2,\cdots,n$，所以

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(a_1\sin\sqrt{x+1}+a_2\sin\sqrt{x+2}+\cdots+a_n\sin\sqrt{x+n}\right)=0$. 解答完毕。

7. 设 $f\in C[a,b]$， $f([a,b])\subset[a,b]$，且对 $\forall x,y\in[a,b],\ |f(x)-f(y)|\le|x-y|$. 任取 $x_1\in[a,b]$，

记 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)],\ n=1,2,\ldots$。证明：数列 $\{x_n\}$ 有极限 x_0，且 $f(x_0)=x_0$.

证明：因为 $f([a,b])\subset[a,b]$，所以 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]\in[a,b],\ n=1,2,\ldots$。下面证明数列 $\{x_n\}$ 单调。

（I）若 $x_1\ge f(x_1)$，则 $x_2-x_1=\dfrac{1}{2}[f(x_1)-x_1]\le 0$。由数学归纳法证明此时数列 $\{x_n\}$ 单调减：

设 $x_{k+1}\le x_k$，由条件 $|f(x)-f(y)|\le|x-y|,\ \forall x,y\in[a,b]$ 可得

$$\begin{aligned}x_{k+2}-x_{k+1}&=\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)+\frac{1}{2}[f(x_{k+1})-f(x_k)]\\&\le\frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)+\frac{1}{2}|x_{k+1}-x_k|=0.\end{aligned}$$

（II）若 $x_1<f(x_1)$，类似可证数列 $\{x_n\}$ 单调增加。

由单调有界定理知，数列 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则在等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}[x_n+f(x_n)]$ 两边取极限，

可得 $f(x_0)=x_0$. 证毕。

8. （1）求常数 a,b，使得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{2}$；

（2）已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)$ 存在，求常数 c 及极限值。

（3）定义函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{2x}, & x<0,\\ a, & x=0,\\ (1+bx)^{\frac{1}{x}}, & x>0\end{cases}$ 试确定常数 $a,\ b$ 使得函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

连续。

解：（1）因为 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(2-x^2)}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+(1-x^2))}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{x^2+ax+b}=-\dfrac{1}{2}$，

所以当 $x\to 1$ 时，分母 $x^2+ax+b\to 0$，即 $1+a+b=0$。此时 $x^2+ax+b=(x-1)(x+a+1)$，故

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{x^2+ax+b}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-1-x}{x+a+1}=-\dfrac{2}{a+2}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $a=2$。

（2）$(x^3+x^2)^c-x=x^{3c}(1+\dfrac{1}{x})^c-x$。要使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)$ 存在，则 $3c=1,$ 即 $c=\dfrac{1}{3}$。此时

$\lim\limits_{x\to+\infty}((x^3+x^2)^c-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x(1+\dfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left((1+\dfrac{1}{x})^{\frac{1}{3}}-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\cdot\dfrac{1}{3x}\right)=\dfrac{1}{3}.$

（3） 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，当且仅当 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$。简单计算得

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$； $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+bx\right)^{1/x}=e^b$。于是函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，当且仅当 $\dfrac{1}{2}=a=e^b$，当且仅当 $a=\dfrac{1}{2}$， $b=-\ln 2$。解答完毕。

9. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足： $f(x+y)=f(x)+f(y),\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$。求证：

（1）存在实数 $a\in\mathbb{R}$，使得 $\forall x\in\mathbb{Q}$， $f(x)=ax$；

（2）若 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，则存在实数 $a\in\mathbb{R}$，使得 $\forall x\in\mathbb{R}$， $f(x)=ax$.

证明：（1）令 $x=y=0$，则 $f(0)=2f(0)$ 蕴涵 $f(0)=0$。令 $y=-x$，则 $0=f(0)=f(x)+f(-x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$，即 f 是奇函数。对正整数 p,q，反复运用可加性条件，我们有 $f(p)=pf(1), f(\dfrac{1}{q})=\dfrac{1}{q}f(1)$。从而 $f(\dfrac{p}{q})=\dfrac{p}{q}f(1)$ 对所有的正整数 p,q 成立。结合 f 是奇函数，上式对一切整数 p,q 成立 $(q\neq 0)$，从而 $\forall r=\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}$，有 $f(r)=rf(1)$，其中 $a=f(1)\in\mathbb{R}$。

（2） $\forall x_0\in\mathbb{R}$，因为 $f(x)=f(x-x_0)+f(x_0)$ 且 $f(x)$ 在 0 点连续，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，故 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。对 $\forall x\in\mathbb{R}$，存在点列 $\{r_n\}\subset\mathbb{Q}$ 使得 $r_n\to x\ (n\to\infty)$，则 $f(x)$ 的连续性表明 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(r_n)=f(1)\lim\limits_{n\to\infty}r_n=f(1)x$。证毕。

10. 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内至多只有第一类间断点，且满足如下凸性条件：

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2},\quad \forall x,y\in(a,b) \qquad (*)$$

证明：函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上处处连续。

证明：对 $\forall x_0\in(a,b)$，下证 $f(x)$ 在 x_0 处连续。由假设知，$f(x)$ 在 x_0 处的左、右极限均存在。记 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=B$。只需证 $A=B=f(x_0)$。

在（*）式中，取 $y=x_0$，则 $f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(x_0)}{2}$。关于 x 取右极限得

$$\lim_{x\to x_0^+}f\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\le\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)+f(x_0)}{2}。$$

由此得 $B\le[B+f(x_0)]/2$。此即 $B\le f(x_0)$。同理可证 $A\le f(x_0)$。

另外，在（*）式中，取 $x=x_0-h,\ y=x_0+h$，则

$$f(x_0)=f\left(\frac{x_0-h+x_0+h}{2}\right)\le\frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2},$$

故 $f(x_0)\le\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0-h)+f(x_0+h)}{2}=\frac{A+B}{2}$，从而 $A=B=f(x_0)$。证毕。

11. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且非负。若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

证明(反证法)：假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 不成立，则存在一个序列 $x_n\to+\infty$ 和正数 $M_1>0$，使得 $0\le f(x_n)\le M_1$。一方面，函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,M_1]$ 上连续，从而有界，即存在正数 $M_2>0$，使得 $0\le f(x)\le M_2$，$\forall x\in[0,M_1]$。于是 $0\le f(f(x_n))\le M_2$，$\forall n\ge 1$。另一方面，由假设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x))=+\infty$，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(f(x_n))=+\infty$，矛盾。故结论成立。证毕。

12. 设 $f(x)=a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0$，其中系数满足

$$a_n>|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|.$$

证明：函数 $f(x)$ 在区间 $[0,2\pi]$ 内至少有 $2n$ 个根。

证明：已知 $f(0)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0\ge a_n-(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_0|)>0$，

$$f(\frac{\pi}{n}) = a_n \cos\pi + a_{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + \cdots + a_1\cos\frac{\pi}{n} + a_0$$

$$\le -a_n + (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|) < 0,$$

$$f(\frac{2\pi}{n}) = a_n \cos 2\pi + a_{n-1}\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \cdots + a_1\cos\frac{2\pi}{n} + a_0$$

$$\ge a_n - (|a_{n-1}| + |a_{n-2}| + \cdots + |a_0|) > 0,$$

$$\cdots$$

$$f(\frac{(2n-1)\pi}{n}) < 0,$$

$$f(2\pi) > 0。$$

由闭区间上连续函数的零点存在定理可知，在这 $2n$ 个闭区间 $[0,\frac{\pi}{n}]$，$[\frac{\pi}{n},\frac{2\pi}{n}]$，$\cdots$，$[\frac{(2n-1)\pi}{n},2\pi]$ 的每一个之内， 函数 $f(x)$ 至少有一个零点。因此 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 内至少有 $2n$ 个根。证毕。

13. 通过函数图像可知，方程 $\tan x = x$ 在区间 $(n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ 上有唯一个解 a_n，即 $\tan a_n = a_n$，$n = 0,1,2,\cdots$。证明 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n) = \pi$。

证明：由 $a_n \in (n\pi, n\pi+\frac{\pi}{2})$ 知 $a_n \to +\infty$（$n\to+\infty$）。记 $A_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - a_n$。则 $A_n \in (0,\frac{\pi}{2})$ 且 $\tan A_n = \tan(\frac{\pi}{2}-a_n) = 1/\tan a_n = 1/a_n \to 0$，$n\to+\infty$。故 $A_n = \arctan(1/a_n) \to 0$，$n\to+\infty$。于是 $a_{n+1}-a_n = \pi + A_n - A_{n+1} \to \pi$，$n\to+\infty$。证毕。

14. 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义。一个点 $x_0 \in I$ 称作函数 $f(x)$ 的极大值（或极小值）点，如果存在正数 $\delta > 0$，使得对 $\forall x \in I \cap (x_0-\delta, x_0+\delta)$, $f(x) \le f(x_0)$（或 $f(x) \ge f(x_0)$）。极大点和极小点都称作极值点。证明命题：设函数 $f(x)$ 在有界闭区间 $I = [a,\ b]$ 上连续。若 $f(x)$ 在开区间 $(a,\ b)$ 上无极值点，则 $f(x)$ 在 I 上严格单调。

证明：由于闭区间上的连续函数能够取到最值，因此函数 $f(x)$ 在 I 上可取得最大值 M 和最小值 m. 显然最大值点和最小值点都是极值点。 根据假设， $f(x)$ 在开区间 (a,b) 上无极值点。因此 $f(x)$ 在 I 上的最大值点和最小值点只能是区间端点 a 和 b 。若 $f(a)=f(b)$，此时必有 $M=m$，即 $f(x)$ 是常数函数。于是开区间 (a,b) 上的每个点都是 $f(x)$ 的极值点，与假设相矛盾。故 $f(a)\neq f(b)$ 。不妨设 $f(a)<f(b)$。 此时有 $m=f(a)$， $M=f(b)$。

下证 $f(x)$ 在 I 上严格单调上升。采用反证法。假设 $f(x)$ 在 I 上不是严格单调上升。则存在两点 $x_1,x_2\in[a,\ b]$满足 $x_1<x_2$，使得 $f(x_1)\geq f(x_2)$。在 $[x_1,x_2]$ 上，类似于前面的讨论可知 $f(x_1)\neq f(x_2)$，故 $f(x_1)>f(x_2)$.

现在考虑 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,b]$ 上的最小值。由于 $M=f(b)\geq f(x_1)>f(x_2)$，故 $x_2<b$ 。因此 $x_2\in(x_1,b)$。由此可断言， $f(x)$ 在闭区间 $[x_1,b]$ 上的最小值必在开区间 (x_1,b) 内的某个点处取得。而这个点同时也是 $f(x)$ 在 $(a,b)\supset(x_1,b)$ 上的极值点。矛盾。证毕。

15. 设 $f(x)\in C[a,+\infty)$ 且有界，若 $f(a)<\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，则当 α 满足

$f(a)<\alpha<\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$ 时，都存在 $\xi\in[a,+\infty)$，使得 $\alpha=f(\xi)$.

证明： 当 α 满足 $f(a)<\alpha<\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$ 时，取 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}\left\{\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}-\alpha\right\}$，则 $\exists b\in(a,+\infty)$，使得 $f(b)>\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}-\varepsilon=\dfrac{1}{2}\left(\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}+\alpha\right)>\alpha>f(a)$.

由于 $f(x)\in C[a,b]$，根据闭区间上连续函数的介值定理知， $\exists\xi\in(a,b)\subset(a,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\alpha$.

下列题目根据个人情况选做。

16. 设 $f\in C[a,b]$， $m(x)=\inf\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$, $M(x)=\sup\limits_{t\in[a,x]}\{f(t)\}$，求证 $m(x),\ M(x)\in C[a,b]$.

证明：首先证明 $m(x)\in C[a,b]$. $\forall x_0\in(a,b)$，下证 $\lim\limits_{x\to x_0^+}m(x)=m(x_0)$.

因为 $f\in C[a,b]$，由闭区间上连续函数的最值定理知，$\exists x_0\in[a,x_0]$，使得 $m(x_0)=f(x_0)$. 因为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，故 $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta),\ f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon$. 当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，记

$m(x)=f(x),\ x\in[a,x]$，显然 $m(x)\le m(x_0)$. 下面讨论 x 的不同情况：

（I）若 $x\in[a,x_0]$，则 $m(x)=m(x_0)$；

（II）若 $x\in[x_0,x]$，则 $m(x_0)-\varepsilon\le f(x_0)-\varepsilon<m(x)\le m(x_0)$.

所以当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$m(x_0)-\varepsilon<f(x_0)-\varepsilon<m(x)\le m(x_0)$，故 $\lim\limits_{x\to x_0^+} m(x)=m(x_0)$.

类似可证 $\lim\limits_{x\to x_0^-} m(x)=m(x_0)$. 这样 $m(x)$ 在 x_0 既左连续、又右连续，从而 $m(x)$ 在 x_0 连续。故 $m(x)$ 在 (a,b) 内连续。类似可证 $m(x)$ 在 $a,\ b$ 两点分别右连续与左连续。这样 $m(x)\in C[a,b]$. 同理可证 $M(x)\in C[a,b]$. 证毕。

课堂练习题参考解答：

1. 设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$. 若对任意的开区间 (a,b)，其值域 $f((a,b))$ 必是开区间。证明：$f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上是单调函数。

证明：（反证）设 $f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上不是单调函数，

则存在 $a<b<c$ 使得 $f(a)<f(b)>f(c)$. 因为 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，因此 $f(x)\in C[a,c]$，这样存在 $x_0\in(a,c)$ 使得 $f(x_0)=\max\{f(x)\,|\,\forall x\in[a,c]\}$. 注意到 $x_0\ne a,\ x_0\ne c$，因此 $f(x)$ 在 (a,c) 上的值域 $f((a,c))$ 不是开区间，与条件矛盾。故 $f(x)$ 在 $(-\infty+\infty)$ 上是单调函数。