

第十周习题课题目 不定积分

1. 设  $\int xf(x)dx = \arctan x + C$ , 求  $\int \frac{1}{f(x)} dx$ ,  $\int f(x)dx$ .

2. (1) 设  $f'(e^x) = \sin x + 2 \cos x$ , 求函数  $f(x)$  的表达式.

(2) 已知  $f'(2 + \cos x) = \tan^2 x + \sin^2 x$ , 求  $f(x)$  的表达式.

3. 设  $f(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 0. \end{cases}$  判断函数  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上是否有原函数? 若有求出, 若没有,

说明理由.

4. 计算下列积分:

(1)  $\int x \ln(x-1) dx$ ;

(2)  $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$ ;

(3)  $\int x \tan^2 x dx$ ;

(4)  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx$ ;

(5)  $\int (\arcsin x)^2 dx$

(6)  $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

(7)  $\int \frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}} dx$

(8)  $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2 \sin x}$

(9)  $\int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx$ .

(10)  $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{4 \sin^2 x + \cos^2 x}} dx$

(11)  $\int \frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}} dx$

(12)  $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$

$$(13) \int \frac{1+x}{x(1+xe^x)} dx$$

$$(14) \int \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} dx.$$

$$(15) \int \frac{7 \cos x - 3 \sin x}{5 \cos x + 2 \sin x} dx$$

$$(16) \int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$$

$$(17) \int \frac{\ln \tan x}{\sin 2x} dx.$$

$$(18) \int \frac{\cos x + \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx.$$

$$(19) \int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + \sin 2x}} dx.$$

$$(20) \int \frac{x-1}{x^2} e^x dx.$$

$$(21) \int \frac{\arcsin e^x}{e^x} dx$$

$$(22) \int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} dx$$

$$(23) \int |x-1| dx.$$

$$(24) \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$(25) \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} f(x) dx, \text{ 其中 } f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x};$$

$$(26) \int xe^x \sin x dx;$$

$$(27) \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4} dx$$

$$(28) \int \frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+x+1)} dx$$

5. 计算  $I = \int \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \quad a < x < b.$

6. 计算  $I = \int \sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}} dx$ .

7. 求不定积分  $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$  的递推公式 ( $n$  为自然数)。

8. 计算  $I = \int \cos(\ln x) dx$ .

9. 已知  $f(x)$  的一个原函数为  $\frac{\sin x}{1+x \sin x}$ , 求  $\int f(x) f'(x) dx$ 。

10. 设  $F(x)$  为  $f(x)$  的一个原函数, 且当  $x \geq 0$  时有  $F(x) f(x) = \frac{x e^x}{2(1+x)^2}$ , 已知

$F(0) = 1, F(x) > 0$ , 求  $f(x)$ .