第十周习题课解答 不定积分

1. 设$\int xf(x)dx=\arctan x+C$，求$\int\frac{1}{f(x)}dx,\ \int f(x)dx$.

解：由不定积分的概念，等式$\int xf(x)dx=\arctan x+C$表明$xf(x)=\frac{1}{1+x^2}$，故

$$\int\frac{1}{f(x)}dx=\int x(1+x^2)dx=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^4+C,$$

$$\int f(x)dx=\int\frac{1}{x(1+x^2)}dx=\int(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2})dx=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

2. (1) 设$f^{'}(e^x)=\sin x+2\cos x$，求函数$f(x)$的表达式。

解：因为$f^{'}(e^x)=\sin x+2\cos x$，因此$[f(e^x)]^{'}=f^{'}(e^x)e^x=(\sin x+2\cos x)e^x$，故

$$f(e^x)=\int(\sin x+2\cos x)e^xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)+C$$

$=e^x(\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x)+C$，从而$f(x)=\frac{1}{2}x(3\sin\ln x+\cos\ln x)+C$.

(2) 已知$f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$，求$f(x)$的表达式.

解法 1：（原函数的概念，复合函数的导数，凑微分法）

因为 $f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$，所以

$$(f(2+\cos x))'=f'(2+\cos x)(-\sin x)$$

$$=(\tan^2 x+\sin^2 x)(-\sin x)=(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos^2 x)(-\sin x),$$

因此 $f(2+\cos x)=\int(\frac{1}{\cos^2 x}-\cos^2 x)(-\sin x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$，

故 $f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3}(2-x)^3+C$.

解法 2： 令$t=2+\cos x$，根据$f'(2+\cos x)=\tan^2 x+\sin^2 x$得

$$f'(t)=\frac{1}{(t-2)^2}-(t-2)^2.$$

积分，得

$$f(t)=\frac{1}{2-t}+\frac{1}{3}(2-t)^3+C,$$

故$f(x)=\frac{1}{2-x}+\frac{1}{3}(2-x)^3+C$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0.\end{cases}$ 判断函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是否有原函数？若有求出，若没有，说明理由。

解：假设函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在原函数 $F(x)$，则 $F'(x)=f(x)$，这样 $F'(0)=f(0)=0$；另一方面，从 $F'(x)=f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$ 知 $F(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le 0,\\ \sqrt{x}, & x>0.\end{cases}$ 因此 $F_{-}'(0)=0$，$F_{+}'(0)$ 不存在，与 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导矛盾，因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上不存在原函数。

4. 计算下列积分.

(1) $\int x\ln(x-1)\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}dx=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C$

(2) $\int\frac{x}{\sin^2 x}dx=-x\cot x+\int\cot x dx=-x\cot x+\ln\left|\sin x\right|+C$

(3) $\int x\tan^2 xdx=\int x(\sec^2 x-1)dx=x\tan x-\frac{1}{2}x^2-\int\tan xdx$

$$=x\tan x-\frac{1}{2}x^2+\ln\left|\cos x\right|+C$$

(4) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx=-2\int\arcsin xd\sqrt{1-x}=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int\frac{dx}{\sqrt{1+x}}$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C$$

(5) $\int(\arcsin x)^2dx=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin xdx$

$$=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin xd\sqrt{1-x^2}$$

$$=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

(6) $\int\ln(x+\sqrt{1+x^2})dx=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C$$

(7) 求 $\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$

解：令 $\sqrt{1+e^x}=t,\ x=\ln(t^2-1),\ dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt$，

$$\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=2\int\ln(t^2-1)dt=2\left[t\ln(t^2-1)+\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|-2t\right]+C$$

$$=2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}+C$$

解法二、$\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=2\int xd\sqrt{e^x+1}=2x\sqrt{1+e^x}-2\int\sqrt{1+e^x}dx$，

令 $\sqrt{1+e^x}=t,\ x=\ln(t^2-1),\ dx=\dfrac{2t}{t^2-1}dt$，则

$$\int\sqrt{1+e^x}dx=\int\frac{2t^2}{t^2-1}dt=\int(2+\frac{2}{t^2-1})dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C，$$

所以 $\displaystyle\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx=2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}+1}{\sqrt{1+e^x}-1}+C$.

(8) 求 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}$

解：$\displaystyle\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}$

令 $\cos x=t$，则 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin 2x+2\sin x}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sin x(1+\cos x)}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(1-t^2)(1+t)}$

$$=-\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{4}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{2}\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-t}\right]dt$$

$$=-\frac{1}{8}\ln|1+t|+\frac{1}{4}\frac{1}{1+t}+\frac{1}{8}\ln|1-t|+C$$

$$=\frac{1}{4(1+\cos x)}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|+C$$

(9) $\displaystyle\int\frac{1}{1-x^2}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=\frac{1}{2}\int\ln\frac{1+x}{1-x}d\ln\frac{1+x}{1-x}=\frac{1}{4}(\ln\frac{1+x}{1-x})^2+C.$

(10) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x+\cos^2 x}}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{3\sin^2 x+1}}=\frac{1}{3}\sqrt{3\sin^2 x+1}+C.$

(11) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x(1+x)}}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}dx=\int\sqrt{x(1+x)}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})dx=\int\sqrt{x}(1+x)dx-\int x\sqrt{1+x}dx$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{5}(1+x)^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}+C.$$

(12) $\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx\overset{x=t^4}{=}\int\frac{\sqrt[3]{1+t}}{t^2}4t^3dt=4\int t\sqrt[3]{1+t}dt=4\int(t+1-1)\sqrt[3]{1+t}dt$

$$=4\int(1+t)^{\frac{4}{3}}dt-4\int(1+t)^{\frac{1}{3}}dt=\frac{12}{7}(1+t)^{\frac{7}{3}}-3(1+t)^{\frac{4}{3}}+C$$

$$=\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}+C.$$

(13) $\int\frac{1+x}{x(1+xe^x)}dx=\int\frac{(1+x)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int\frac{d(xe^x)}{xe^x(1+xe^x)}\overset{xe^x=t}{=}\int\frac{dt}{t(1+t)}=\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{1+t}dt$

$$=\ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+C=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C.$$

(14) $\int\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}dx=\int e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}d(-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}})=e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}+C.$

(15)

$$\int\frac{7\cos x-3\sin x}{5\cos x+2\sin x}dx=\int\frac{5\cos x+2\sin x+(-5\sin x+2\cos x)}{5\cos x+2\sin x}dx=x+\int\frac{d(5\cos x+2\sin x)}{5\cos x+2\sin x}$$

$$=x+\ln|5\cos x+2\sin x|+C.$$

(16) $\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx=\int\frac{e^x-1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx-\int\frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}}dx=\int\frac{de^x}{\sqrt{e^{2x}-1}}+\int\frac{de^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$

$$\overset{e^x=\sec\theta}{=}\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta+\arcsin e^{-x}=\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-1})+\arcsin e^{-x}+C.$$

(17)

$$\int\frac{\ln\tan x}{\sin 2x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{2\tan x\cos^2 x}dx=\int\frac{\ln\tan x}{2\tan x}d\tan x=\frac{1}{2}\int\ln\tan x d\ln\tan x=\frac{1}{4}(\ln\tan x)^2+C.$$

(18) $\int\frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{\cos x+\sin x}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x)}dx=\int\frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}dx$

$$=\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)^2}dx=2\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}+C.$$

(19) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx.$

解：因为 $\int \frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sqrt{1+(\sin x+\cos x)^2}}=\ln(\sin x+\cos x+\sqrt{2+\sin 2x})+C$，

$\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt{3-(\sin x-\cos x)^2}}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin x-\cos x)+C$，

所以

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x-\sqrt{2+\sin 2x})+C.$$

进而，也有

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\sin 2x}}dx=\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}\ln(\sin x+\cos x-\sqrt{2+\sin 2x})+C.$$

(20) $\int \frac{x-1}{x^2}e^x dx=\int \frac{1}{x}e^x dx-\int \frac{1}{x^2}e^x dx=\int \frac{1}{x}e^x dx+\int e^x d(\frac{1}{x})=\frac{e^x}{x}+C$.

(21) 求 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$

解: $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-\int \arcsin e^x d(e^{-x})=-e^{-x}\arcsin e^x+\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

令 $e^x=\sin t$，则 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}=\int \csc t dt=\ln|\csc t-\cot t|+C=\ln(1-\sqrt{1-e^{2x}})-x+C$，

故 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx=-e^{-x}\arcsin e^x-x+\ln(1-\sqrt{1-e^{2x}})+C$.

22. 求 $\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx$

解: $$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2},$$

由待定系数法，得 $A=C=-\frac{1}{2}$， $B=\frac{1}{2}$， $D=E=1$，于是

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$

$$\int \frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}dx = \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{x+1}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{x-1}{x^2+1}dx+\int \frac{x+1}{\left(x^2+1\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{4}\ln \frac{1+x^2}{(1+x)^2}+\frac{x-1}{2(x^2+1)}+C$$

23. 求$\int |x-1|\,dx$.

解: 当$x \ge 1$时, $\int |x-1|\,dx = \int (x-1)dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1$

当$x<1$时, $\int |x-1|\,dx = -\int (x-1)dx = -\frac{x^2}{2}+x+C_2$, 因为$\int |x-1|\,dx$在$x=1$连续, 所以$C_1 = 1 + C_2$, 故

$$\int |x-1|\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C + 1, & x \ge 1 \\ -\frac{x^2}{2} + x + C, & x < 1 \end{cases}$$

(24) 求 $\mathrm{I} = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$.

解法一、令$t = \tan x$, 则$x = \arctan t$, $dx = \frac{1}{1+t^2}dt$, 因此

$$I = \int \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{1}{(1+t)(1+t^2)}dt = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1+t} - \frac{t-1}{1+t^2})dt$$

$$= \frac{1}{2}(\ln|1+t| - \ln\sqrt{1+t^2} + \arctan t) + C = \frac{\ln|\cos x + \sin x| + x}{2} + C.$$

解法二、令 $J = \int \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx$, 则 $I + J = \int dx = x + C_1$. 另一方面

$$I - J = \int \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}dx = \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\cos x + \sin x} = \ln|\sin x + \cos x| + C_2.$$

由此解得 $I = \frac{x + \ln|\sin x + \cos x|}{2} + C$, $J = \frac{x - \ln|\sin x + \cos x|}{2} + C$.

【上述配对方法可用来计算积分$\int \frac{\cos x}{a\cos x + b\sin x}dx$, 其中$a$, b为不同时为零的常数。

(25) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x$, 其中 $f(\sin^2 x) = \frac{x}{\sin x}$.

解：令 $u=\sin^2 x$，则 $x=\arcsin\sqrt{u}$， $f(x)=\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$，

于是

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x=-2\int\arcsin\sqrt{x}\mathrm{d}(\sqrt{1-x})$$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C\ .$$

（26） $\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x$

解：$\int x\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x=x\dfrac{\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)}{2}-\dfrac{1}{2}\int\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)\mathrm{d}x$

$$=x\frac{\mathrm{e}^x(\sin x-\cos x)}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x\cos x+C\ .$$

(27) $\int\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$

解： $\int\dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x\overset{x=a\sin t}{=}\dfrac{1}{a^2}\int\cot^2 t\csc^2 t\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{a^2}\int\cot^2 t\mathrm{d}(\cot t)$

$$=-\frac{1}{3a^2}\cot^3 t+C=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{3a^2x}(1-\frac{a^2}{x^2})+C\ .$$

另解：（第二换元积分法，分部积分法）

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x\overset{x=a\sin t}{=}\frac{1}{a^2}\int(\csc^4 t-\csc^2 t)\mathrm{d}t=\frac{\cot t}{a^2}+\frac{1}{a^2}\int\csc^4 t\mathrm{d}t\ ,$$

而由

$$\int\csc^4 t\mathrm{d}t=-\int(1+\cot^2 x)\mathrm{d}(\cot x)=-(\cot x+\frac{1}{3}\cot^3 x)+C\ ,$$

得

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x=\frac{\cot t}{a^2}+\frac{1}{a^2}\int\csc^4 t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\cot t}{a^2}-\frac{\cot t}{3a^2}(2+\csc^2 t)+C$$

$$=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{3a^2x}(1-\frac{a^2}{x^2})+C\ .$$

注：也可如下求得 $\int\csc^4 t\mathrm{d}t$： $\int\csc^4 t\mathrm{d}t=-\cot t\cdot\csc^2 t-2\int\csc^2 t\cdot\cot^2 t\mathrm{d}t$

$$=-\cot t\cdot\csc^2 t-2\int\csc^4 t\mathrm{d}t+2\int\csc^2 t\mathrm{d}t$$

$$=-(2+\csc^2 t)\cot t-2\int\csc^4 t\mathrm{d}t，$$

得 $\int\csc^4 t\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}(2+\csc^2 t)\cot t+C$.

再解：（凑微分法）

$$\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x\overset{x=\frac{1}{t}}{=}-\int t\sqrt{a^2t^2-1}\mathrm{d}t=-\frac{1}{3a^2}(a^2t^2-1)\sqrt{a^2t^2-1}+C=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{3a^2x}(1-\frac{a^2}{x^2})+C .$$

（28）$\int\frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

解：令 $\frac{x^3}{(x+1)^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}$，则

$$A(x+1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x+1)^2=x^3 .$$

令 $x=-1$，得 $B=-1$；令 $x=0$，得

$$A+D=1；$$

比较 x^3 的系数，得 $A+C=1$；比较 x 的系数并注意到 $B=-1$，得

$$2A+C+2D=1 .$$

解得 $A=2,C=D=-1$.

所以

$$\int\frac{x^3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}-\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x .$$

又因为

$$\int\frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\int\frac{\mathrm{d}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C，$$

所以 $\int\frac{x^3}{(x+1)(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=2\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

5. 计算 $I=\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx$，$a<x<b$.

解法一、令$t^2=\dfrac{x-a}{b-x}$. 则$x=\dfrac{a+bt^2}{1+t^2}$且$dx=\dfrac{2t(b-a)}{(1+t^2)^2}$.

于是 $I=\int\dfrac{2t^2(b-a)}{(1+t^2)^2}dt=2(b-a)\int\dfrac{t^2dt}{(1+t^2)^2}=2(b-a)\int\left(\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{(1+t^2)^2}\right)dt$

$=2(b-a)(I_1-I_2)$,

这里$I_n:=\int\dfrac{dt}{(1+t^2)^n}$, $n\geq 0$. 回忆关于积分I_n的递推关系式:

$$I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{t}{(1+t^2)^n}+(2n-1)I_n\right).$$

由此可知 $I_2=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t}{1+t^2}+I_1\right)$. 于是

$$I=2(b-a)(I_1-I_2)=(b-a)\left(I_1-\frac{t}{1+t^2}\right)=(b-a)\left(\arctan t-\frac{t}{1+t^2}\right).$$

由$t^2=\dfrac{x-a}{b-x}$得$\dfrac{t}{1+t^2}=\dfrac{\sqrt{(x-a)(b-x)}}{b-a}$. 于是

$$I=(b-a)\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}-\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

解法二、由等式$\dfrac{x-a}{b-a}+\dfrac{b-x}{b-a}=1$，令$\sin^2 t=\dfrac{x-a}{b-a}$， $0<t<\frac{\pi}{2}$. 得

$dx=2(b-a)\sin t\cdot\cos t dt$ 且$\sqrt{\dfrac{x-a}{b-x}}=\tan t$. 于是

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx=(b-a)\int 2\sin^2 t dt=(b-a)\int(1-\cos 2t)dt$$

$$=(b-a)\left(t-\sin t\cos t\right)+C.$$

将$\sin t=\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$， $\cos t=\sqrt{\dfrac{b-x}{b-a}}$ 及 $t=\arcsin\sqrt{\dfrac{x-a}{b-a}}$ 带入，于是

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}dx=(b-a)\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$ 解答完毕。

6. 计算 $I=\int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}dx$.

解法一、做变量代换，令 $t=\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}$，解得 $x=\frac{2(1-t^2)}{3(1+t^2)}=\frac{2}{3}\left(-1+\frac{2}{1+t^2}\right)$，且

$dx=\frac{-8t}{3(1+t^2)^2}$。于是

$$I=\int\frac{-8t^2dt}{3(1+t^2)^2}=\frac{-8}{3}\left(\int\frac{dt}{1+t^2}-\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}\right)=\frac{8}{3}(I_2-I_1),$$

这里 $I_n:=\int\frac{dt}{(1+t^2)^n}$，$n\ge 0$. 由于

$$I_{n+1}=\frac{1}{2n}\left(\frac{t}{(1+t^2)^n}+(2n-1)I_n\right).$$ 由此可知 $I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+I_1\right)$. 于是

$$I=\frac{8}{3}(I_2-I_1)=\frac{8}{3}\left(\frac{t}{2(1+t^2)}-\frac{1}{2}I_1\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{t}{1+t^2}-I_1\right).$$

$$\frac{t}{1+t^2}=\frac{\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}}{1+\frac{2-3x}{2+3x}}=\frac{1}{4}\sqrt{(2+3x)(2-3x)}=\frac{1}{4}\sqrt{4-9x^2}.$$

于是 $I=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{4}-\arctan\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}\right)+C=\frac{1}{3}\sqrt{4-9x^2}-\frac{4}{3}\arctan\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}+C$.

解答完毕。

解法二、对分子有理化，得

$$I=\int\frac{2-3x}{\sqrt{4-9x^2}}dx=\frac{2}{3}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{4}{9}-x^2}}+\frac{1}{6}\int\frac{d(4-9x^2)}{\sqrt{4-9x^2}}=\frac{2}{3}\arcsin\frac{3x}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{4-9x^2}+C.$$

解答完毕。

7. 求不定积分 $I_n=\int\frac{dx}{\sin^n x}$ 的递推公式（n 为自然数）。

解：利用分部积分。对任意 $n\ge 0$，我们有

$$\begin{aligned}I_n&=\int\frac{\sin x dx}{\sin^{n+1}x}=-\int\frac{d\cos x}{\sin^{n+1}x}=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}+\int\cos x\cdot d\frac{1}{\sin^{n+1}x}\\&=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{\cos^2 x}{\sin^{n+2}x}dx=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^{n+2}x}dx\\&=-\frac{\cos x}{\sin^{n+1}x}-(n+1)(I_{n+2}-I_n).\end{aligned}$$

整理得 $I_{n+2}=-\dfrac{\cos x}{(n+1)\sin^{n+1}x}+\dfrac{n}{n+1}I_n$， $\forall n\geq 0$.

此外 $I_0=\int dx=x+C$， $I_1=\int\dfrac{dx}{\sin x}=\int\dfrac{d\cos x}{1-\cos^2 x}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$.

解答完毕。

8. 计算 $I=\int\cos(\ln x)dx$.

解：分部积分得

$$I=x\cos(\ln x)+\int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx=x\cos(\ln x)+\int\sin(\ln x)dx.$$

对积分 $\int\sin(\ln x)dx$ 再次作分部积分得

$$\int\sin(\ln x)dx=x\sin(\ln x)-\int\cos(\ln x)dx.$$

于是得到 $I=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]-I$. 由此得

$\int\cos(\ln x)\,dx=\dfrac{1}{2}x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C$. 解答完毕。

9. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\dfrac{\sin x}{1+x\sin x}$，求 $\int f(x)f'(x)dx$。

解 由题意

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+x\sin x}\right)'=\frac{\cos x-\sin^2 x}{(1+x\sin x)^2},$$

于是

$$\int f(x)f'(x)dx=\int f(x)df(x)=\frac{1}{2}f^2(x)+C=\frac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C.$$

10. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，且当 $x\geq 0$ 时有 $F(x)f(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，求 $f(x)$.

解：因为 $F'(x)=f(x)$，所以

$$2F(x)F'(x)=\frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

$$2\int F(x)F'(x)dx=\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$$

$$=\int xe^x d\left(\frac{-1}{1+x}\right)=-\frac{xe^x}{1+x}+\int \frac{e^x(1+x)}{1+x}dx$$

$$=-\frac{xe^x}{1+x}+e^x+C$$

故

$$F^2(x)=\frac{e^x}{1+x}+C$$

又$F(0)=1$, $F(x)>0$，因此$C=0$，且

$$F(x)=\sqrt{\frac{e^x}{1+x}}$$

故 $f(x)=F'(x)=\dfrac{x\sqrt{e^x}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$.