函数、数列极限

1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f(\dfrac{1}{f(x)})$, $\quad f(f(f(x)))$, 且用 $f(x)$ 表示 $f(3x)$.

2. 设 $a^2 \neq b^2$, $\quad f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且满足下列条件：

$$f(0)=0, \quad af(x)+bf(\frac{1}{x})=\frac{c}{x} \quad (x\neq 0).$$

证明：$f(x)$ 是奇函数。

3. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(i) $\quad f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) \quad (-\infty<x,y<+\infty);$

(ii) 存在 $T_0>0$ 使得 $f(T_0)=0,$

证明：$f(x)$ 有周期 $4T_0$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$，$\{a_n\}$ 单调，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

6. 假设序列 $\{a_n\}$ 满足极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在。证明

（1）$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$；

（2）$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!a_1a_2\cdots a_n}=0$， 这里假设 $a_n>0$，$\forall n\geq 1$.

7. 设 $u_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$（易知数列 $\{u_n\}$ 收敛于 e）.

（1）研究数列 $\{u_n\}$ 的单调性;

（2）利用（1）的结果证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 对于任意正整数 n 都成立.

（3）证明：数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

8. 设 $a_1=a>1$，a 为常数，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a_1}{a_n}\right)$，$(n=1,2,\cdots)$，证明极限

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限。

9. 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足：$a_1=a>0,\ b_1=b>0,\ a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$，求证：$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 极限存在，并且极限值相等。

10. 设序列$\{x_n\}$满足$x_n \in (0, 1)$，且$(1-x_n)x_{n+1} > \frac{1}{4}$， $\forall n \ge 1$。求证$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

11. 假设序列$\{x_n\}$由如下递推关系生成，证明它们收敛，并求它们的极限。

（1） $x_{n+1} = \frac{x_n + x_{n-1}}{2}$， $\forall n \ge 2$， x_1， x_2 给定实数；

（2） $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$， $\forall n \ge 2$， x_1， x_2为给定正数。

12. 求下列极限

（1） $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ （2） $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

13. 证明$\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1\right) = \frac{1}{4}$。

14. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n^2}}$。判断$\lim\limits_{n\to\infty} (n!)^{\frac{1}{n}}$是否存在？

15. 证明$\lim\limits_{n\to+\infty} \sin n$不存在。

16. 设$b_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$，其中$|q| < 1$且数列$\{a_k\}$有界，试证数列$\{b_n\}$收敛。

17. 若数列$\{a_n\}$无界，但不趋于无穷，证明:$\{a_n\}$存在两个分别趋于无穷和收敛的子列。

18. 证明：存在收敛子列的单调数列一定收敛。

以下部分供学有余力的同学参考，不在习题课上讨论。

1. 与自然对数的底e有关的极限问题。

题 1：回忆自然对数的底e的定义，$e := \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。证明 $e = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$，这里约定$0! = 1$。

注：在级数理论里，我们通常用记号$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k$（这个记号称作级数）来表示部分和$\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$的极限（当然假设极限存在），即$\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k := \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$。我们将在后续学习级数理论。本题的意思是，数$e$可以用级数来表示，即$e = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$。

题 2：记$\varepsilon_n := e - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$。证明$\lim\limits_{n\to+\infty} \varepsilon_n (n+1)! = 1$。

注：这道题的意思是，数e和$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$的误差大约是$\frac{1}{(n+1)!}$。更具体的误差估计见下题。

题 3：证明 $\frac{1}{(n+1)!}<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}<\frac{1}{n!n}$， $\forall n\ge 1$。

注：上述结论告诉我们，用和式$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$来逼近数$e$非常有效，且估计误差很容易。

题 4：证明自然对数的底e是无理数。

2. 关于上、下极限的一些问题

以下列出一些关于上下极限的性质。其证明均可在吉米多维奇习题解答书中找到。

设序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均有界，则下列结论成立。

(i) 若$x_n\le y_n$，$\forall n\ge n_0$，则$\underline{\lim}x_n\le\underline{\lim}y_n$，$\overline{\lim}x_n\le\overline{\lim}y_n$。（保序性）

(ii) $\underline{\lim}x_n+\underline{\lim}y_n\le\underline{\lim}(x_n+y_n)\le\overline{\lim}(x_n+y_n)\le\overline{\lim}x_n+\overline{\lim}y_n$。

(iii) $\underline{\lim}(-x_n)=-\overline{\lim}x_n$，$\overline{\lim}(-x_n)=-\underline{\lim}x_n$。

(iv) 若$x_n,y_n\ge 0$，则$\left(\underline{\lim}x_n\right)\left(\underline{\lim}y_n\right)\le\underline{\lim}(x_ny_n)\le\overline{\lim}(x_ny_n)\le(\overline{\lim}x_n)(\overline{\lim}y_n)$

(v) 若极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$存在，则

$$\underline{\lim}(x_n+y_n)=\lim x_n+\underline{\lim}y_n，\quad \overline{\lim}(x_n+y_n)=\lim x_n+\overline{\lim}y_n$$

(iv) 若$x_n\ge a>0$，则$\underline{\lim}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\overline{\lim}x_n}$， $\overline{\lim}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\underline{\lim}x_n}$

(iiv) 若$x_n\ge 0$，且极限$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$存在，则

$$\underline{\lim}(x_ny_n)=(\lim x_n)(\underline{\lim}y_n)，\quad \overline{\lim}(x_ny_n)=(\lim x_n)(\overline{\lim}y_n)。$$

以下四道题均涉及到利用上、下极限讨论数列极限的存在性。

题 1. 设数列$\{x_n\}$满足$0\le x_{n+m}\le x_n+x_m$，$\forall n,m\ge 1$。证明极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_n}{n}$存在。

题 2：设数列$\{a_n\}$由递推关系式$a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$，$\forall n\ge 1$，$a_1=1$确定。讨论数列$\{a_n\}$的收敛性。

题 3: 利用上下极限技术，证明 Stolz 定理（∞/∞ 型）：假设 $b_n\uparrow+\infty$ 严格，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=l$（这里允许 $l=+\infty$ 和 $l=-\infty$），则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=l$。

题 4： 设两个数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 由关系式 $b_n=a_n+2a_{n+1}$ 相联系。证明，若数列 $\{b_n\}$ 收敛，则数列 $\{a_n\}$ 也收敛。