函数、数列极限参考解答

1. 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f(\dfrac{1}{f(x)})$, $f(f(f(x)))$, 且用 $f(x)$ 表示 $f(3x)$.

解：因为 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}\quad (x\neq 1)$, $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{x-1}{x}\quad (x\neq 0,1)$，

所以 $f(\dfrac{1}{f(x)})=\dfrac{\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}-1}=\dfrac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}-1}=1-x\quad (x\neq 0,1).$

又 $f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x\quad (x\neq 1),$

故 $f(f(f(x)))=f(x)=\dfrac{x}{x-1}\quad (x\neq 1).$

$$f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3x}{2x+x-1}=\frac{3\dfrac{x}{x-1}}{2\dfrac{x}{x-1}+1}=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}.$$

2. 设 $a^2\neq b^2$, $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，且满足下列条件：

$f(0)=0,\quad af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=\dfrac{c}{x}\quad (x\neq 0).$

证明：$f(x)$ 是奇函数。

证明：对任意的 $x\neq 0$，在 $af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=\dfrac{c}{x}$ 中将 x 换为 $\dfrac{1}{x}$，则 $bf(x)+af(\dfrac{1}{x})=cx$，两式联立，可得 $f(x)=\dfrac{c}{a^2-b^2}(\dfrac{a}{x}-bx)$, 容易验证 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数。证毕

3. 设定义在 $\mathbb{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(i) $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)\quad (-\infty<x,y<+\infty);$

(ii) 存在 $T_0>0$ 使得 $f(T_0)=0,$

证明：$f(x)$ 有周期 $4T_0$.

证明：在 $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ 中以 $x+T_0$ 代替 x, T_0 代替 y, 可得

$f(x+2T_0)+f(x)=2f(x+T_0)f(T_0)=0,$

即 $f(x+2T_0)=-f(x)$.

故 $f(x+4T_0)=f(x+2T_0+2T_0)=-f(x+2T_0)=f(x)$,

所以 $4T_0$ 是函数 $f(x)$ 的周期。证毕

令 $F(x)=\dfrac{1}{f(x)}$，则 $F(x_1-x_2)=\dfrac{F(x_2)-F(x_1)}{1+F(x_1)F(x_2)}$.

令 $x_1=x_2$，则 $F(0)=0$; 令 $x_1=0,\ x_2=x$，则 $F(-x)=F(x)$，从而 $f(-x)=f(x)$.

又 $f(2T_0)=f(T_0-(-T_0))=\dfrac{f(T_0)f(-T_0)+1}{f(-T_0)-f(T_0)}=$

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\quad \lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$.

证明：记 $\alpha_n=a_n-A,\quad \beta_n=b_n-B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$，故 $\exists M>0,|\alpha_n|\le M,|\beta_n|\le M$.

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=\frac{(A+\alpha_1)(B+\beta_n)+(A+\alpha_2)(B+\beta_{n-1})+\cdots+(A+\alpha_n)(B+\beta_1)}{n}$$

$$=AB+\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{A}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}$$

由 Stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k=0$，

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1}\right|\le\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$，$\{a_n\}$ 单调，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

证明：不妨假设 $\{a_n\}$ 单调增。下证数列 $\{a_n\}$ 有界。假设数列 $\{a_n\}$ 无界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，故由 Stolz 定理，$A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，矛盾，所以数列 $\{a_n\}$ 有界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，再一次应用 Stolz 定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

证法二、不妨假设 $\{a_n\}$ 单调增加。因为 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le a_n\le\dfrac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{n}$，且

$$\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\to 2A-A=A\ (n\to\infty),$$

$A=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$，由夹逼定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

6. 假设数列$\{a_n\}$满足极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 存在。证明

（1） $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$；

（2） $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!a_1a_2\cdots a_n}=0$， 这里假设 $a_n>0$，$\forall n\geq 1$.

证明：（1）记 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ ，则由假设知 $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$ 极限存在。设 $S_n\to S\ (n\to\infty)$.

注意到 $a_n=S_n-S_{n-1}$，其中 $S_0=0$，

$$\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(S_k-S_{k-1})}{n}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}kS_k-\sum\limits_{k=1}^{n-1}(k+1)S_k}{n}$$

$$=\frac{nS_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k}{n}=S_n-\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k}{n}\to S-S=0\ (n\to\infty).$$

注意：这里已利用了 Stolz 定理得到 $\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}S_k}{n}\to S\ (n\to\infty)$.

（2）根据结论（1）以及几何平均与算术平均不等式得

$$0<\sqrt[n]{n!a_1a_2\cdots a_n}=\sqrt[n]{1a_1 2a_2\cdots na_n}\leq\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}.$$

由夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n!a_1a_2\cdots a_n}=0$.

7. 设 $u_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$（易知数列$\{u_n\}$收敛于 e）.

（1）研究数列$\{u_n\}$的单调性；

（2）利用（1）的结果证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 对于任意正整数 n 都成立.

（3）证明：数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.

解：（1）

$$u_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$$

$$\frac{u_{n-1}}{u_n}=\frac{(1+\frac{1}{n-1})^n}{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}=\left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^n\cdot\frac{n}{n+1}=(1+\frac{1}{n^2-1})^n\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$\geq(1+\frac{n}{n^2-1})\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{n^3+n^2-n}{n^3+n^2-n-1}>1$$

所以数列$\{u_n\}$单调减小。

（2）因为 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 单调减，$\{(1+\frac{1}{n})^{n}\}$ 单调增，且都趋于 e，所以

$(1+\frac{1}{n})^{n+1}>e$，$(1+\frac{1}{n})^{n}<e$.

两边取对数，得

$$(n+1)\ln(1+\frac{1}{n})>1\Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n})>\frac{1}{n+1}$$

$$n\cdot\ln(1+\frac{1}{n})<1\Rightarrow \ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$

所以 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$；

（3）$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})$，由（2）知 $a_{n+1}-a_n<0$， 即 $\{a_n\}$ 单调减。又

$$a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$$
$$=\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>\frac{1}{n+1}>0,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

8. 设 $a_1=a>1$，a 为常数，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_1}{a_n}\right)$，$(n=1,2,\cdots)$，证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求此极限。

证明：由平均值不等式得到：

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{a_1}{a_n})\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a_n\cdot\frac{a_1}{a_n}}=\sqrt{a}>1,$$

所以 $\{a_n\}$ 有下界。注意上述结果对一切 n 成立，于是

$$a_{n+1}\leq\frac{1}{2}(a_n+\frac{a_n^2}{a_n})=a_n\quad(n=1,2,\cdots)$$

故 $\{a_n\}$ 单调减小有下界，所以存在极限。记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

由极限的唯一性，等式 $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a_1}{a_n}\right)$ 两边取极限，可得方程

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right),$$

解此方程得到$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A = \sqrt{a}$（舍弃了负根）。

9. 设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足：$a_1 = a > 0,\ b_1 = b > 0,\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$，求证：$\{a_n\}$，$\{b_n\}$极限存在，并且极限值相等。

证明：由不等式$a^2 + b^2 \ge 2ab$及已知条件知，当$n \ge 2$时$b_n \ge a_n$.

所以$b_{n+1} \ge a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \ge a_n$，$0 \le b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \le b_n$，

数列$\{a_n\}_{n\ge 2}$单调增加有上界b，数列$\{b_n\}_{n\ge 2}$单调减小有下界0。

所以$\{a_n\},\{b_n\}$极限存在。

不妨假设极限分别为A,B，则由等式$b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$两边取极限得$B = \dfrac{A+B}{2}$，故$A = B$.

10. 设序列$\{x_n\}$满足$x_n \in (0,\ 1)$，且$(1 - x_n)x_{n+1} > \dfrac{1}{4}$，$\forall n \ge 1$. 求证$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

证明：利用算术平均与几何平均不等式得 $\dfrac{1}{2} < \sqrt{(1-x_n)x_{n+1}} \le \dfrac{1 - x_n + x_{n+1}}{2}$ 可得 $x_{n+1} - x_n > 0$，

即序列$\{x_n\}$严格单调上升且有上界。

因此$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在，记作$x^*$. 由于$x_n \in (0,\ 1)$，故有$x^* \in [0,\ 1]$.

在不等式$(1 - x_n)x_{n+1} > \dfrac{1}{4}$中，令$n \to +\infty$得$(1 - x^*)x^* \ge \dfrac{1}{4}$.

另一方面，二次函数$(1-x)x$在区间$[0,\ 1]$上的最大值为$\dfrac{1}{4}$，且仅在点$x = \dfrac{1}{2}$处达到。因此

$x^* = \dfrac{1}{2}$. 这就证明了$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

11. 假设序列$\{x_n\}$由如下递推关系生成，证明它们收敛，并求它们的极限。

（1） $x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$， $\forall n \ge 2$， x_1， x_2 给定实数；

（2） $x_{n+1} = \sqrt{x_n x_{n-1}}$， $\forall n \ge 2$， x_1， x_2为给定正数。

证明：（1）由递推关系式$x_{n+1} = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$我们得到

$$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}\left(x_n - x_{n-1}\right) = \cdots = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x_2 - x_1).$$

进一步我们有

$$x_{n+1}-x_1=\sum_{k=1}^{n}\left(x_{k+1}-x_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}(x_2-x_1)$$

$$=\frac{1-(-1/2)^n}{1+1/2}(x_2-x_1)\to\frac{2}{3}(x_2-x_1)\quad(n\to\infty)$$

因此$x_n\to\frac{2}{3}(x_2-x_1)+x_1=\frac{2x_2+x_1}{3}\quad(n\to\infty)$.

（2）记 $y_n=\ln x_n$，则 $y_{n+1}=\frac{y_n+y_{n-1}}{2}$.

根据（1）的结论，我们得到 $y_n\to\frac{2y_2+y_1}{3}\quad(n\to\infty)$. 于是

$$x_n\to\left(x_1x_2^2\right)^{1/3}\qquad(n\to\infty).$$

注：上述证明思想可用于研究由如下递推关系

$$x_{n+1}=\lambda x_n+(1-\lambda)x_{n-1},\quad \lambda\in(0,\ 1)$$

所生成的序列$\{x_n\}$，其中 x_1，x_2 给定。类似可以证明

$$x_n\to\frac{x_2+(1-\lambda)\ x_1}{2-\lambda}\qquad(n\to\infty).$$

12. 求下列极限

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ （2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)=0$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)=1.$$

13. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$.

解：记 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$，则 $a_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\sqrt{n^2+k}-n)=\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n+\sqrt{n^2+k}}$.

由此可知$\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n(n+\sqrt{n^2+n})}\le a_n\le\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k}{n(n+\sqrt{n^2+1})}$.

求出分子的和就得到

$$\frac{n(n+1)/2}{n(n+\sqrt{n^2+n})} \le a_n \le \frac{n(n+1)/2}{n(n+\sqrt{n^2+1})}.$$

根据夹逼定理知 $a_n \to \frac{1}{4}\ (n\to\infty)$.

14. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解：解法一

$$1 \le (n!)^{\frac{1}{n^2}} \le (n^n)^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n}} \to 1,\quad n\to\infty，所以由夹逼定理，\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

解法二：令 $x_n = (n!)^{\frac{1}{n^2}}$，则 $\ln x_n = \frac{1}{n^2}(\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n)$，

由 Stolz 定理，$\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln 2+\cdots+\ln n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^2-(n-1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{2n-1} = 0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

注：判断 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n}}$ 是否存在？

考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(n!)^{\frac{1}{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}} = 0$（平均收敛定理）。

15. 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n$ 不存在。

证明：反证法。假设 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n = A$ 存在，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin(n+2) = A$，

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin(n+2)-\sin n\right) = 0 = 2\lim_{n\to+\infty}\sin 1\cos(n+1),$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n = 0$，故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin 2n = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n\cos n = 2\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n = 0$，

与 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n = A$ 相比较可知 $A=0$，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n = \lim\limits_{n\to+\infty}\cos n = 0$. 另一方面，

$1 = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sin^2 n+\cos^2 n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\sin^2 n + \lim\limits_{n\to+\infty}\cos^2 n = 0$，矛盾。

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin n$ 不存在。

证法二：因为 $|\sin n|\le 1$，故只要证明对任意的 $a\in[-1,1]$，a 不是 $\{\sin n\}$ 的极限。

先设 $a\in[0,1]$，可取 $\varepsilon_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$，对任意的 $N\in\mathbb{N}^*$，令 $n_0 = [((2N+1)\pi+\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{4}]$，则

$n_0 > N$，且 $((2N+1)\pi+\frac{\pi}{2})-\frac{\pi}{4} < n_0 < ((2N+1)\pi+\frac{\pi}{2})+\frac{\pi}{4}$，得 $\sin n_0 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$，而 $a\ge 0$，

所以$|\sin n_0 - a| \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \varepsilon_0$，故$a$不是$\{\sin n\}$的极限。

当$a \in [-1,0]$时类似可证。

16. 设$b_n = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \cdots + a_n q^n$，其中$|q| < 1$且数列$\{a_k\}$有界，试证数列$\{b_n\}$收敛。

证明：因为数列$\{a_k\}$有界，因此存在$M > 0$使得$|a_k| \le M$ （$\forall k \ge 1$）。对任意的$m,\ n \in \mathbb{N}^*$，

$$|b_{n+m} - b_n| = |a_{n+1}q^{n+1} + a_{n+2}q^{n+2} + \cdots + a_{n+m}q^{n+m}| \le M|q^{n+1}|\frac{1-|q^m|}{1-|q|} < \frac{M}{1-|q|}|q|^n .$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}|q|^n = 0$，故对$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$，当$n > N$时，有$|q|^n < \dfrac{1-|q|}{M}\varepsilon$，从而当$n > N$时，对任意的$m \in \mathbb{N}^*$，有$|b_{n+m} - b_n| < \varepsilon$，所以$\{b_n\}$是 Cauchy 列，由 Cauchy 收敛准则知，$\{b_n\}$收敛。

17. 证明：若数列$\{a_n\}$无界，但不趋于无穷，则$\{a_n\}$存在两个分别趋于无穷和收敛的子列。

证明：因为数列$\{a_n\}$无界，所以$\forall M > 0, \exists n \in \mathbb{N}^+, a_n > M$。取 $M = 1, \exists n_1 \in \mathbb{N}^+, a_{n_1} > 1$，

$M = 2, \exists n_2 \in \mathbb{N}^+ (n_2 > n_1), a_{n_2} > 2$，

……

$M = k, \exists n_k \in \mathbb{N}^+ (n_k > n_{k-1}), a_{n_k} > k$，

……

如此选出的子列$\{a_{n_k}\}$满足$a_{n_k} > k$，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$。

又因为数列$\{a_n\}$不趋于无穷，所以$\exists M > 0, \forall N \in \mathbb{N}^+, \exists n > N, |a_n| \le M$。

取 $N = 1, \exists n_1 \in \mathbb{N}^+, |a_n| \le M$，

$N = 2, \exists n_2 \in \mathbb{N}^+ (n_2 > n_1), |a_n| \le M$，

……

$N = k, \exists n_k \in \mathbb{N}^+ (n_k > n_{k-1}), |a_n| \le M$，

……

如此选出的子列$\{a_{n_i}\}$是有界数列，而有界数列$\{a_{n_i}\}$有收敛子列$\{a_{n_{i_j}}\}$。

18. 证明：存在收敛子列的单调数列一定收敛。

证明：不妨设数列$\{a_n\}$单调增加，且存在$\{a_n\}$的子列$\{a_{n_k}\}$收敛。记$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A.$ 则对任意

的 $\varepsilon>0$，存在 $K\in\mathbb{N}^*$ 使得 $\forall k>K$，有 $A-\varepsilon<a_{n_k}<A+\varepsilon$. 取 $N=n_{K+1}$，则当 $n>N$ 时，一定存在 $k>K$ 使得 $n_k>n$，这样由数列 $\{a_n\}$ 的单调增加性知，

$A-\varepsilon<a_{n_{K+1}}\le a_n\le a_{n_k}<A+\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A.$

====

课堂练习：

1. 设 $a_n>0\,(\forall n)$，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty$，且数列 $\{a_n\}$ 单调减，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=1\text{。}$$

证明：由于 $a_n>0\,(\forall n)$，因此数列 $\{a_n\}$ 有下界。

$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=\frac{1}{2}(a_2+a_2+a_4+a_4\cdots+a_{2n}+a_{2n})>\frac{1}{2}(a_2+a_3+a_4+a_5\cdots+a_{2n}+a_{2n+1})$$

$\because\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=+\infty\quad\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})=+\infty$. 因为数列 $\{a_n\}$ 单调减，于是

$$0<\frac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-1=\frac{a_1-(a_2-a_3)-(a_4-a_5)-\cdots-(a_{2n-2}-a_{2n-1})-a_{2n}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}$$

$$\le\frac{a_1}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}\to 0\quad(n\to\infty)$$

由夹逼定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}-1\right)=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_3+\cdots+a_{2n-1}}{a_2+a_4+\cdots+a_{2n}}=1$.

2. 设 $a_1>0,\ \ a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}\,(\forall n\ge 1)$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

证明：显然 $\{a_n\}$ 是单调增加的。设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$（有限数），则对 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边取极限，有 $A=A+\dfrac{1}{A}$，这是不可能的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$. 令 $u_n=a_n{}^2$，$v_n=2n$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n-u_{n-1}}{v_n-v_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n{}^2-a_{n-1}{}^2}{2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2a_{n-1}{}^2}+1\right)=1.$$

因为 $\{v_n\}$ 单调增加且 $v_n\to\infty(n\to\infty)$，Stolz 定理表明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{2n}=1$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

以下部分供学有余力的同学参考，不在习题课上讨论。

1. 与自然对数的底e有关的极限问题。

题 1：回忆自然对数的底e的定义，$e := \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$。证明 $e = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$，这里约定 $0! = 1$。

注：在级数理论里，我们通常用记号$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k$（这个记号称作无穷级数）来表示部分和$\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$的极限（当然假设极限存在），即$\sum\limits_{k=0}^{+\infty}a_k := \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}a_k$。我们将在下个学期学习无穷级数理论。本题的意思是，数e可以用无穷级数来表示，即$e = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}$。

证明：记$b_n := \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}$，则$b_n\uparrow$严格。另一方面，容易看出序列$\{b_n\}$有界。这是因为

$\dfrac{1}{k!}\le\dfrac{1}{k(k-1)}=\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}$，$\forall k \ge 2$。 由此我们得到

$b_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}\le 2+\sum\limits_{k=2}^{m}\left(\dfrac{1}{k-1}-\dfrac{1}{k}\right)=2+1-\dfrac{1}{n}<3$。根据单调有界收敛定理可知序列$\{b_n\}$收敛。设$b_n\uparrow b$。

我们再来考虑数$e := \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$。

记$a_n := \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$。经二项式展开，$a_n$可以表示为

$$a_n = 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)。\quad (*)$$

由此可知$a_n < b_n$，从而有$e\le b$。 以下我们证明相反的不等式$e\ge b$。

根据上述不等式（*），我们不难看出，对于任意正整数$k\ge 2$和$n > k$，我们有

$$a_n > 2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)。$$

于上述不等式中，令 $n \to +\infty$ 立刻得到 $e \geq b_k$，$\forall k \geq 2$。再令 $k \to +\infty$ 就得到 $e \geq b$。于是有 $e = b$。结论得证。证毕。

题 2：记 $\varepsilon_n := e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$。证明 $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n (n+1)! = 1$。

注：这道题的意思是，数 e 和 $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 的误差大约是 $\frac{1}{(n+1)!}$。更具体的误差估计见下题。

证明：我们将利用 Stolz 定理（0/0 型）证明 $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n (n+1)! = 1$。将 $\varepsilon_n (n+1)!$ 写作

$\varepsilon_n (n+1)! = \dfrac{\varepsilon_n}{\frac{1}{(n+1)!}}$。考虑分子与分母相继两项的差，以及所得差的商，我们就得到

$$\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}}{\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+2)!}} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{n+1}{(n+2)!}} = \frac{n+2}{n+1} \to 1, \quad n \to +\infty。$$

因此 $\lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n (n+1)! = 1$。证毕。

题 3：证明 $\frac{1}{(n+1)!} < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}$，　$\forall n \geq 1$。

注：上述结论告诉我们，用和式 $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 来逼近数 e 非常有效，且估计误差很容易。

证明：第一个不等式显然成立，因为

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} > \frac{1}{(n+1)!}。$$

对于任意 $m > n$，我们有

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-n}}\right)$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n!n}。$$

即对于任意 $m > n$，我们有

$$\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{m!} < \frac{n+2}{(n+1)!(n+1)} < \frac{1}{n!\,n}。$$

令 $m \to +\infty$，我们得到

$$e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \le \frac{n+2}{(n+1)!\,(n+1)} < \frac{1}{n!\,n}.$$

所证不等式成立。证毕。

题 4：证明自然对数的底e是无理数。

证明：反证。假设数e是有理数，即e可表为$e = p/q$，其中p, q均为正整数。

根据题 1 知，我们可以将数e表为

$$\frac{p}{q} = e = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \varepsilon_q$$，其中$\varepsilon_q := \frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}$，如题 2 所定义。

于是，一方面根据等式

$$q!\,\varepsilon_q = q!\left(\frac{p}{q} - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!}\right)$$

我们知道数$q!\,\varepsilon_q$是正整数。但另一方面，根据题 3 中的结论，我们得到

$$\frac{1}{(q+1)!} < \varepsilon_q = e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!\,q}。$$

由此得 $\frac{1}{q+1} < q!\,\varepsilon_q < \frac{1}{q}$。 数$q!\,e_q$不是正整数。这就导出了一个矛盾。矛盾表明了自然对数的底e不是有理数。证毕。

注 1：一个实数称作代数数，如果它是某个整数系数多项式方程的根。非代数数的实数称作超越数。显然，代数数包括所有有理数，以及许多无理数，例如$\sqrt{2}$。因为$\sqrt{2}$是方程$x^2 - 2 = 0$的根。与代数数相比较而言，我们对于超越数有较少的理解和掌控。在题 4 里我们已经证明了自然对数的底e是无理数。进一步，我们还可以证明， 数e超越数。这是法国数学家 Charles Hermite 于 1873 年完成的一项了不起的工作。 另注：圆周率π也是超越数（德国数学家 Carl Lindemann 于 1882 年证明）。这里向同学们推荐一本书，作者 William Dunham（美），英文书名：The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue. 中译本译名《微积分的历程》，人民邮电出版社出版，2010。书中有一章专门介绍代数数和超越数。这本书是学习微积分课程不可多得的补充读物。值得拥有。

注 2：在课本中，我们也遇到了另一个由极限式定义的常数γ

$$\gamma := \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) \approx 0.577。$$

数γ通常称作 Euler-Mascheroni 常数。这是另一个重要的数学常数，出现在数学的许多地方。

相比较数e和数π而言，我们对常数γ的了解更少。例如，迄今为止，我们还不知道γ是否为无理数，虽然许多数学家相信，γ是个超越数。一般来说，证明某个数是超越数比证明它是无理数要困难的多。

注 3：关于 Riemann-Zeta 函数在正整数点上的值。

Riemann-Zeta 函数$\varsigma(z)$由无穷级数定义$\varsigma(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^z}$。自变数$z$通常取复数值。当今数学界最重要的猜想，即 Riemann 猜想是关于 Riemann-Zeta 函数$\varsigma(z)$零点的分布问题。关于 Riemann 猜想有不少科普书，如《黎曼猜想漫谈》，《素数的音乐》，《素数之恋》，《黎曼博士的零点》。三百多年以来，人们对于$\varsigma(z)$在正整数点$z = 1, 2, \cdots$上的值特别感兴趣。

Bernoulli 兄弟于 1689 年就证明了 $\varsigma(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k}$发散到正无穷。Euler 于 1734 年以及稍后计算出了函数$\varsigma(z)$在正偶数点上的值：

$$\varsigma(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\varsigma(4) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$\varsigma(6) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

一般地，$\varsigma(2\mathrm{k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{2k}} = r_k \pi^{2k}$，$r_k$为正有理数，可计算的。

由于π是超越数，根据 Gelfond 的著名定理可知，函数$\varsigma(z)$在正偶数点上的值均为超越数。

基于上述 Euler 的工作，关于函数$\varsigma(z)$在正奇数点上的值，人们有理由猜测以下结论成立：

$$\varsigma(2\mathrm{k}+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^{2k+1}} = s_k \pi^{2k+1}，\ s_k \text{为正有理数。}$$

对此 Euler 保持了沉默。 整个数学界也都保持沉默直到 1978 年，法国数学家 Apery 在这个研究方向迈出了真正的一步。他证明了$\varsigma(3) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$是无理数。至于上面所提到关于$\varsigma(2k+1)$值的猜测，今天看来，似乎在可见的将来看不到解决的希望。

2. 关于上下极限的一些问题

利用上下极限我们可以更加完整地刻画和分析序列的性态。正确理解这个概念的精细之处并不容易。同学们可根据自己的情况对这部分内容做出适当的安排。以下列出一些关于上下极限的性质，其证明可在吉米多维奇习题解答书中找到。

性质：设序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$均有界，则下列结论成立：

(i) 若$x_n \le y_n$，$\forall n \ge n_0$，则$\underline{\lim} x_n \le \underline{\lim} y_n$，$\overline{\lim} x_n \le \overline{\lim} y_n$。（保序性）

(ii) $\underline{\lim} x_n + \underline{\lim} y_n \le \underline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim}(x_n + y_n) \le \overline{\lim} x_n + \overline{\lim} y_n$。

(iii) $\underline{\lim}(-x_n) = -\overline{\lim} x_n$，$\overline{\lim}(-x_n) = -\underline{\lim} x_n$。

(iv) 若$x_n, y_n \ge 0$，则$(\underline{\lim} x_n)(\underline{\lim} y_n) \le \underline{\lim}(x_n y_n) \le \overline{\lim}(x_n y_n) \le (\overline{\lim} x_n)(\overline{\lim} y_n)$

(v) 若极限$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在，则

$$\underline{\lim}(x_n + y_n) = \lim x_n + \underline{\lim} y_n，\quad \overline{\lim}(x_n + y_n) = \lim x_n + \overline{\lim} y_n$$

(iv) 若$x_n \ge 0$，则$\underline{\lim} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\overline{\lim} x_n}$，$\quad \overline{\lim} \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{\underline{\lim} x_n}$

(iiv) 若$x_n \ge a > 0$，且极限$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$存在，则

$$\underline{\lim}(x_n y_n) = (\lim x_n)(\underline{\lim} y_n)，\quad \overline{\lim}(x_n y_n) = (\lim x_n)(\overline{\lim} y_n)。$$

以下四道题均涉及到序列极限的存在性。

题 1. 设数列$\{x_n\}$满足$0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$，$\forall n, m \ge 1$。证明极限$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x_n}{n}$存在。

证明：根据关系式 $0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$，我们容易得到

$0 \le x_n \le nx_1$。这表明$0 \le \dfrac{x_n}{n} \le x_1$，$\forall n \ge 1$，即序列$\left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$有界。因此其上下极限满足

$$0 \le \underline{\lim} \frac{x_n}{n} \le \overline{\lim} \frac{x_n}{n} \le x_1。$$

任意固定正整数m。则每个正整数n均可表为$n = km + r$，其中$0 \le r < m$。仍根据$0 \le x_{n+m} \le x_n + x_m$，我们得 $0 \le x_n \le kx_m + x_r$。因此$\dfrac{x_n}{n} \le \dfrac{kx_m}{n} + \dfrac{x_r}{n}$。现在我们取上极

限（关于指标n取） 得$\overline{\lim}\dfrac{x_n}{n} \le \overline{\lim}\dfrac{kx_m}{n} + \overline{\lim}\dfrac{x_r}{n}$。注意正整数$m$固定， 数$r$虽然随着$n$在变化，但 $0 \le r < m$ 。于是 $\overline{\lim}\dfrac{kx_m}{n} = x_m\overline{\lim}\dfrac{k}{n} = x_m\overline{\lim}\dfrac{(n-r)/m}{n} = \dfrac{x_m}{m}$ ，并且 $\overline{\lim}\dfrac{x_r}{n} = 0$ 。

这就得到对于任意固定的正整数m， 我们得到$\overline{\lim}\dfrac{x_n}{n} \le \dfrac{x_m}{m}$。 对这个不等式左边关于$m$取下极限得$\overline{\lim}\dfrac{x_n}{n} \le \underline{\lim}\dfrac{x_m}{m}$。这表明$\overline{\lim}\dfrac{x_n}{n} = \underline{\lim}\dfrac{x_n}{n}$。因此极限$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n}$存在。证毕。

题 2：设数列$\{a_n\}$由递推关系式$a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$，$\forall n \ge 1$，$a_1 = 1$确定。讨论数列$\{a_n\}$的收敛性。

解：不难确定$1 \le a_n \le 2$，$\forall n \ge 1$。利用性质(iiv)，对关系式$a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n}$两边分别取上极限和下极限， 我们可以得到 $\overline{\lim}a_n = 1 + \dfrac{1}{\underline{\lim}a_n}$，$\underline{\lim}a_n = 1 + \dfrac{1}{\overline{\lim}a_n}$。 记$\lambda := \overline{\lim}a_n$，$\mu := \underline{\lim}a_n$， 则有$\lambda = 1 + \dfrac{1}{\mu}$，$\mu = 1 + \dfrac{1}{\lambda}$。由此得到$\lambda\mu = \mu + 1$和$\lambda\mu = \lambda + 1$。从而有$\lambda = \mu$。 此即序列$\{a_n\}$的上下极限相等。因此它的极限存在。进一步可确定其极限值为二次方程$\lambda^2 = \lambda + 1$的正根$\lambda_0 = (1 + \sqrt{5})/2$。解答完毕。

注：当然可以用其他方法证明序列$\{a_n\}$极限的存在性。不难证明$a_{2n-1}\uparrow$有上界λ_0，$a_{2n}\downarrow$有下界λ_0。因此它们均有极限。 不难确定它们的极限值相等。见作业解答。

题 3：利用上下极限技术，证明 Stolz 定理（∞/∞型）：假设$b_n \uparrow +\infty$严格，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l$（这里允许$l = +\infty$和$l = -\infty$），则$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = l$。

证明：以下只证明l为有限的情形。其它情形的证明类似。根据假设$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l$知，

对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得$l-\varepsilon<\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<l+\varepsilon$， $\forall n>N$。于是

$l-\varepsilon<\dfrac{a_{N+1}-a_N}{b_{N+1}-b_N}<l+\varepsilon$，

$l-\varepsilon<\dfrac{a_{N+2}-a_{N+1}}{b_{N+2}-b_{N+1}}<l+\varepsilon$，

…

$l-\varepsilon<\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}<l+\varepsilon$，$\forall n>N$。

故，

$l-\varepsilon<\dfrac{a_n-a_N}{b_n-b_N}<l+\varepsilon$，$\forall n>N$。

将上式写作$l-\varepsilon<\dfrac{\dfrac{a_n}{b_n}-\dfrac{a_N}{b_n}}{1-\dfrac{b_N}{b_n}}<l+\varepsilon$，$\forall n>N$。（*）

由假设$b_n\uparrow+\infty$知，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_N}{b_n}=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b_N}{b_n}=0$。 于不等式（*）分别取上极限和下极限得 $l-\varepsilon\le\overline{\lim}\dfrac{a_n}{b_n}\le l+\varepsilon$，$l-\varepsilon\le\underline{\lim}\dfrac{a_n}{b_n}\le l+\varepsilon$。由于上下极限均为确定的常数，且正数$\varepsilon>0$可以任意小，因此必有$\overline{\lim}\dfrac{a_n}{b_n}=l=\underline{\lim}\dfrac{a_n}{b_n}$。这就证明了定理的结论。证毕

题 4：设两个序列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$由关系式$b_n=a_n+2a_{n+1}$ 相联系。证明，若序列$\{b_n\}$收敛，则序列$\{a_n\}$也收敛。

证明：我们将证明序列$\{a_n\}$的上下极限相等。为此，我们先证明序列$\{a_n\}$有界。由假设序列$\{b_n\}$收敛知，序列$\{b_n\}$有界。由关系式 $b_n=a_n+2a_{n+1}$，有$a_{n+1}=(b_n-a_n)/2$，因为序列$\{b_n\}$收敛，因此存在$M>0$使得$|b_n|\le M$，$\forall n\ge1$. 这样，对任意的正整数$n\ge1$ ，有$|a_{n+1}|\le\dfrac{1}{2}(M+|a_n|)\le\dfrac{1}{2}(M+\dfrac{1}{2}(M+|a_{n-1}|))\le\cdots\le\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{M}{2^k}+\dfrac{|a_1|}{2^n}<M+|a_1|$ 。故序列$\{a_n\}$

有界。记 $\overline{A}:=\overline{\lim}a_n$，$\underline{A}:=\underline{\lim}a_n$，$B:=\lim b_n$。将关系式 $b_n=a_n+2a_{n+1}$ 写作 $2a_{n+1}=b_n-a_n$。（**）

对等式（**）分别取上下极限，并利用上下极限的性质(iii)和(v)，就得到 $2\overline{A}=B-\underline{A}$，$2\underline{A}=B-\overline{A}$。由此立刻得到 $\overline{A}=\underline{A}$。即序列 $\{a_n\}$ 的上下极限相等。从而序列 $\{a_n\}$ 收敛。证毕。