# 新生基础大赛（微积分）

## 一． 填空题（每空 4 分，共 12 题）（请将答案直接填写在横线上！）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(2^{\frac{1}{n-1}}-2^{\frac{1}{n}}\right)=$_______________________。

2. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 与 $cx^p$ 为等价无穷小，则 $cp=$___________。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1+x}}{\ln(1+x^3)}=$___________________。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\left(\left(\dfrac{1+\cos x}{2}\right)^{x/3}-1\right)=$_________________。

5. 函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x-x^3}{\sin\left(\pi x\right)}$ 的可去间断点的个数为_________________。

6. 曲线 $y=\dfrac{\left(1+x\right)^{3/2}}{\sqrt{x}}$ 的渐近线方程为________________________。

7. 设 $a,b$ 均为大于零的常数，$f(x)=a^{x^b}$，则 $f'(x)=$_______________________。

8. $f\left(x\right)=x^{\sqrt{x}}$，则 $f'(x)=$_______________________。

9. 已知 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f\left(0\right)=0$，$f'\left(0\right)=2$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2 f\left(x\right)-2f\left(x^3\right)}{x^3}=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_。$$

10. $\begin{cases}x=\arctan t,\\ y=3t+t^3\ ,\end{cases}$ 则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=$_________________________。

11. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ \ln(1+x^2), & x\ge 0\end{cases}$，则 $f'(0)=$_________。

12．使不等式$\ln(1+x)<\alpha+2\sqrt{1+x}$对任意的$x>0$都成立的$\alpha$的最小值

为________________________。

## 二． **计算题**（每题 12 分，共 3 题）**（请写出详细计算过程和必要的根据！）**

1．计算$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{a^x-1}{a-1}\right)^{1/x}$，其中$a>0$且$a\neq1$。

2．求函数$f(x)=\sin(x^2+2\sqrt{\pi}x)$在$x_0=-\sqrt{\pi}$处的带有 Peano 余项的 Taylor 公式（求出一般项），并求$f^{(n)}(-\sqrt{\pi})$。

3．计算 $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(k^2\cdot C_n^k\right)$。

## 三．**证明题（请写出详细的证明过程！）**

1．（8 分）设$0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n\left(1-x_n\right),n=1,2,\cdots$。

求证：$\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=1$。

2．（8 分）设函数$f\left(x\right)$是闭区间$\left[0,2\right]$上的连续函数，且在开区间$\left(0,2\right)$内可导，

且$f\left(0\right)=0$，$f\left(2\right)=2$。

证明：存在$\xi\in\left(0,1\right)$，$\eta\in\left(1,2\right)$，使得$f'\left(\xi\right)+f'\left(\eta\right)=\xi+\eta$。