微积分A期中讲座2

经73班　　罗承扬

目 录

contents

05 中值定理

Thm.(Rolle) $f \in C[a,b]$, f在(a,b)可导.若$f(a)=f(b)$,则存在$\xi \in (a,b), s.t.\ f'(\xi)=0.$

Thm.(Lagrange) $f \in C[a,b]$, f在(a,b)可导,则$\exists \xi \in (a,b), s.t.$

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Thm.(Cauchy) $f,g \in C[a,b]$, f,g在(a,b)可导,且$\forall t \in (a,b)$,有$g'(t)\neq 0$. 则存在$\xi \in (a,b), s.t.\ \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$

05 中值定理

中值定理的应用：

- 证明不等式
- 分析某些函数的零点存在性
- 含有ξ的证明题

Ex. 证明: $|\sin x-\sin y|\le|x-y|, \forall x, y$;

证. $\left|\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y}\right|=|\cos\xi|\le 1$

05 中值定理证明不等式

Ex. 证明:若$p>0$

(1) $px^{p-1}\le (x+1)^p-x^p\le p(x+1)^{p-1}$;

(2) $\lim_{n\to\infty}\dfrac{1^p+\ldots+n^p}{(n+1)^{p+1}}=?$

证. (1) $(x+1)^p-x^p=\dfrac{(x+1)^p-x^p}{1}=p(x+\xi)^{p-1},0<\xi<1$

$px^{p-1}\le p(x+\xi)^{p-1}\le p(x+1)^{p-1}$

(2) $pk^{p-1}\le (k+1)^p-k^p\le p(k+1)^{p-1}$; $p\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}\le (n+1)^p-1\le p\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p-1}$;

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}}{(n+1)^p}\le\frac{(n+1)^p-1}{p(n+1)^p}\qquad \frac{(n+1)^p-1}{p(n+1)^p}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}(k+1)^{p-1}}{p(n+1)^p}\Rightarrow\frac{1}{p}-\frac{1}{p(n+1)}\le\frac{\sum_{k=1}^{n}k^{p-1}}{p(n+1)^p}$$

05 中值定理分析零点存在性

Ex. $x^4+2x^3+6x^2-4x-5=0$恰有两个不同的实根.

Proof. 令$f(x)=x^4+2x^3+6x^2-4x-5$,则

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty.$$

于是$\exists a<0<b, s.t. f(a)>0, f(b)>0$. 而$f(0)=-5<0$,

由介值定理, $f(x)=0$至少有两个相异实根.

假设$f(x)=0$至少有3个相异实根. 由Rolle定理, $f'(x)$

至少有2个相异实根, $f''(x)$至少有1个实根. 但

$$f''(x)=12x^2+12x+12>0,$$

矛盾.故$f(x)=0$恰有两个相异实根.□

05 中值定理含有ξ的证明

Ex. f在$[a,c]$上连续, 在$(a,b)\cup(b,c)$上可导,

求证$\exists\xi\in[a,c], s.t. \left|\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|\le|f'(\xi)|$

证明:

在$[a,b]$上用一次微分中值定理: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi_1)$

在$[b,c]$上用一次微分中值定理: $f(c)-f(b)=(c-b)f'(\xi_2)$

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=\left|\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\frac{c-b}{c-a}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b-a}{c-a}\right|\le\frac{c-b}{c-a}|f'(\xi_1)|+\frac{b-a}{c-a}|f'(\xi_2)|$$

$$\le\left(\frac{c-b}{c-a}+\frac{b-a}{c-a}\right)\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)=\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)$$

05/ 中值定理含有 ξ 的证明

Ex. f在$[a,c]$上连续, 在$(a,b)\cup(b,c)$上可导,

求证$\exists\xi\in[a,c],s.t.\left|\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|\le|f'(\xi)|$

证明:

在$[a,b]$上用一次微分中值定理: $f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi_1)$

在$[b,c]$上用一次微分中值定理: $f(c)-f(b)=(c-b)f'(\xi_2)$

$$\left|\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right|=\left|\frac{f(c)-f(b)}{c-b}\frac{c-b}{c-a}+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\frac{b-a}{c-a}\right|\le\frac{c-b}{c-a}|f'(\xi_1)|+\frac{b-a}{c-a}|f'(\xi_2)|$$

$$\le\left(\frac{c-b}{c-a}+\frac{b-a}{c-a}\right)\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)=\max(|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|)$$

05 中值定理含有 ξ 的证明

Ex. f在$[a,b]$上二阶可导,

$f(a)=f(b)=0, \exists c\in[a,b], s.t. f(c)>0$, 求证$\exists \varsigma\in[a,b], s.t. f''(\varsigma)<0$

证明:

在$[a,c]$上用一次微分中值定理: $f(c)-f(a)=(c-a)f'(\xi_1)>0$

在$[c,b]$上用一次微分中值定理: $f(b)-f(c)=(b-c)f'(\xi_2)<0$

$f'(\xi_2)<0, f'(\xi_1)>0$

$\Rightarrow 0>f'(\xi_2)-f'(\xi_1)=(\xi_2-\xi_1)f''(\xi) \quad \therefore f''(\xi)<0$

05 中值定理含有 ξ 的证明

Ex. f在[0,1]上二阶可导,

$f(0)=0, f(1)=1, f(x)\neq x, \exists c\in[0,1], s.t.\ f'(c)>1$

证明: $\because f(x)\neq x, \therefore \exists x_0, s.t.\ f(x_0)\neq x_0$

(1) $f(x_0)>x_0$

几何图像!

(2) $f(x_0)<x_0$

05 中值定理含有 ξ 的证明

Ex. （构造函数法）

(1) f,g在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，$f(a)=f(b)$

$$\exists\xi, s.t.\ f'(\xi)+g'(\xi)f(\xi)=0$$

(2) f,g,h在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，$\exists\xi, s.t.$

$$\begin{vmatrix} f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(a) & g(a) & h(a) \end{vmatrix}=0$$

05 中值定理含有ξ的证明

Ex. （构造函数法）

$f\in C^2[a,b], f(a)=f(b)$, 证明：$\exists\xi\in(a,b), s.t.\ \xi f''(\xi)+2f'(\xi)=0$

$$(x^2 f'(x))'=2xf'(x)+x^2 f''(x)$$

05 中值定理含有 ξ 的证明

Ex. $f(x)\in C^1[a,b], ab>0$, 证明:存在ξ, s.t. $\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$

$f(\xi)-\xi f'(\xi)$会由谁求导产生?

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

$$g(x)=\frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}=\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

05 中值定理含有 ξ 的证明

Ex. （构造函数法）

$$f(x)\in C^1[0,+\infty),0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}\Rightarrow \exists\xi>0,s.t.f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

$$(\frac{x}{1+x^2})'=\frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

令 $g(x)=f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}$

$$g(0)=f(0)=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=0,$$

$$f(x)\in C^1[0,+\infty),0\le f(x)\le \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow g(y)=f(\tan y),g\in C^1[0,\frac{\pi}{2}),0\le g(y)\le \frac{\tan y}{1+\tan^2 y}=\frac{\sin y/\cos y}{1/\cos^2 y}=\sin y\cos y$$

$\because 0\le g(y)\le \sin y\cos y,\therefore$ 定义$g(\frac{\pi}{2})=0!$

$\therefore q(y)=g(y)-\sin y\cos y$在$[0,\frac{\pi}{2}]$上连续,在$(0,\frac{\pi}{2})$上可导

$$\because q(\frac{\pi}{2})=q(0),\therefore \exists\zeta,q'(\zeta)=g'(\zeta)-\cos 2\zeta=0$$

$$q'(\zeta)=f'(\tan\zeta)\sec^2\zeta-\cos 2\zeta=f'(\tan\zeta)(1+\tan^2\zeta)-\cos 2\zeta=0\quad \cos 2\zeta=\frac{1-\tan^2\zeta}{1+\tan^2\zeta}$$

$$f'(\tan\zeta)=\frac{1-\tan^2\zeta}{(1+\tan^2\zeta)^2}\square$$

05 中值定理含有ξ的证明

Ex. （双参数-选学, P124-T8）

$f(x)$在$[a,b]$上可导,$a^2 \neq b^2$,求证存在ξ,η, s.t. $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$

$a^2 \neq b^2$

$$f(a)-f(b)=(a-b)f'(\xi)=(a-b)\frac{a+b}{2\eta}f'(\eta)=\frac{a^2-b^2}{2\eta}f'(\eta)$$

$$\frac{f(a)-f(b)}{a^2-b^2}=\frac{1}{2\eta}f'(\eta)$$

06 洛必达法则

Ex. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=0$

Ex. $\lim_{x\to 0}x\ln x=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$

Ex. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\pi}{2}-\arctan x)x$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1$$

Ex. $\lim_{x\to 1}(x-1)\tan\frac{\pi}{2}x$

$$=\lim_{x\to 1}(x-1)\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}\text{[先分离一下,不要直接洛必达!]}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{2}{\pi}$$

使用洛必达法则的忠告:保证分子/分母是多项式

Ex. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{2x^2-(1-\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{\cos 2x-(1-2x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times 4x^3}{4x-2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times 4\times 3x^2}{4-4\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos 2x}=3$$

使用洛必达法则的忠告:保证分子/分母是多项式

Ex. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin^2 x}{x^2-\sin^2 x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\dfrac{1-\cos 2x}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{2x^2-(1-\cos 2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^4}{\cos 2x-(1-2x^2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\times 4x^3}{4x-2\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times 4\times 3x^2}{4-4\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos 2x}=3$$

07 泰勒公式

Thm.(带Peano余项的Taylor公式)

f在x_0处有n阶导数,则当$x \to x_0$时,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$$

Thm.(带Lagrange余项的Taylor公式) f在$[a,b]$上$n+1$阶可导,$x_0,x\in[a,b]$,则存在介于x_0与x之间的ξ, s.t.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

07/ 泰勒公式

Ex. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \to 0.$

Ex. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$

Ex. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}), \quad x \to 0.$

Ex. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \to 0.$

Ex. $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n), \quad x \to 0.$$

Ex. $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n),\quad x\to 0.$

Ex. $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n),\quad x\to 0.$

07 泰勒公式

泰勒公式的应用：

- 求函数的泰勒展开式
- 求函数的n阶导数
- 利用泰勒公式求极限
- 含有ξ的证明题

07 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.一般而言,我们不建议大家利用计算$f^{(n)}(x_0)$的方式计算$Taylor$展开

Ex.$\sin(x^3)$在$x=0$处展开,到$6n+3$阶

$$\because \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),\quad x \to 0.$$

$$\because\ y \to 0 \Rightarrow y^3 \to 0, \therefore \text{令} x = y^3$$

$$\therefore \sin y^3 = y^3 - \frac{y^9}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{y^{6n-3}}{(2n-1)!} + o(y^{6n-3}),\quad y \to 0.$$

07 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.一般而言,我们不建议大家利用计算$f^{(n)}(x_0)$的方式计算$Taylor$展开

Ex.$\dfrac{1}{1+x^2}$,展开到2n阶麦克劳林公式。

Note.在x_0处展开,得到的应该是关于$(x-x_0)$的多项式.

Ex.$f(x)=\dfrac{1}{2x-x^2}$, $x_0=1$, n阶Peano.

$$f(x)=\frac{1}{1-(x-1)^2}$$

$$=1+(x-1)^2+(x-1)^4+\cdots+(x-1)^{2n}+o((x-1)^{2n}),$$

$$x\to 1.$$

07 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

Ex. $f(x)=e^{\sin^2 x}$, $x_0=0$, 4阶Peano.

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n}) \quad (x\to 0),$$

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+o(t^n) \quad (t\to 0).$$

$$e^{\sin^2 x} = 1+\sin^2 x+\frac{\sin^4 x}{2!}+o(\sin^4 x) \quad (x\to 0).$$

$$=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{2!}\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right)^4+o(x^4)$$

$$=1+x^2-\frac{1}{3}x^4+o(x^4)+\frac{1}{2}x^4+o(x^4) \quad (x\to 0). =1+x^2+\frac{1}{6}x^4+o(x^4) \quad (x\to 0).\square$$

07 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

$$f(x)=e^{2x-x^2},4阶,x=0$$

$$f(x)=e^{2x-x^2}=e^{2x}e^{-x^2}$$

$$e^{2x}=1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)$$

$$e^{-x^2}=1-x^2+\frac{(-x^2)^2}{2!}+o(x^4)\qquad(x\to 0).$$

$$f(x)=e^{2x-x^2}=[1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)][1-x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)]\quad(x\to 0).$$

07 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

$$f(x)=e^{2x-x^2},4阶, x=0$$

$$f(x)=e^{2x-x^2}=[1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4)][1-x^2+\frac{x^4}{2!}+o(x^4)]\quad(x\to 0).$$

$$=(1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^4}{4!}+o(x^4))-(x^2+2x^3+\frac{(2x)^2}{2!}x^2+o(x^4))+(\frac{x^4}{2!}+o(x^4))$$

$$=1+2x+x^2-\frac{2x^3}{3}-\frac{5x^4}{6}+o(x^4)$$

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

$f(x)=\ln\cos x$, 4阶, $x=0$

Ex. $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n),\quad x\to 0.$

$$\ln(\cos x)=\ln(1+\cos x-1)=\cos x-1-\frac{(\cos x-1)^2}{2}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

$$=(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))-1-\frac{((1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))-1)^2}{2}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

$$=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{(-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^4))^2}{2}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

$$=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{x^4(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x^2+o(x^2))^2}{2}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

07/ 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

$f(x)=\ln\cos x$, 4阶, $x=0$

$$=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{x^4\left(-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}x^2+o(x^2)\right)^2}{2}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

$$=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{x^4\left(-\frac{1}{2!}+o(x)\right)^2}{2}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

$$=-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{x^4}{8}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{x^4}{12}+o(x^4),\quad x\to 0.$$

07 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

Ex. $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, $x_0=0$, 4阶Peano.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{4x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x+1}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{12x^2+12x+8}{x^6+3x^5-5x^3+3x-1}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=\frac{48x^3+72x^2+96x+36}{x^8+4x^7+2x^6-8x^5-5x^4+8x^3+2x^2-4x+1}$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}=-\frac{240x^4+480x^3+960x^2+720x+240}{x^{10}+5x^9+5x^8-10x^7-15x^6+11x^5+15x^4-10x^3-5x^2+5x-1}$$

07/ 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

Ex. $f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, $x_0=0$, 4阶Peano.

$$\frac{1}{1-y}=1+y+y^2+\ldots+y^n+o(y^n)\quad (y\to 0).$$

$$\frac{1}{1-(x+x^2)}=1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+\ldots+(x+x^2)^n+o(x^n)\quad (x\to 0).$$

$$f(x)=\frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}=(1+x+x^2)(1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+\ldots+(x+x^2)^n+o(x^n))$$

$$=(1+x+x^2)(1+(x+x^2)+(x+x^2)^2+(x+x^2)^3+(x+x^2)^4+o(x^4))$$

$$=(1+x+x^2)(1+(x+x^2)+x^2(x+1)^2+x^3(x+1)^3+x^4(x+1)^4+o(x^4))$$

07 泰勒公式-考点1：求函数的泰勒展开式

Note.在更多的情况下，只需要展开到前几项

Ex.$f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$, $x_0=0$, 4阶Peano.

$$=(1+x+x^2)(1+(x+x^2)+x^2(x+1)^2+x^3(x+1)^3+x^4(x+1)^4+o(x^4))$$

$$=(1+x+x^2)(1+(x+x^2)+x^2(x^2+2x+1)+x^3(o(x)+3x+1)+x^4(1+o(1))+o(x^4))$$

$$=(1+x+x^2)(1+x+2x^2+3x^3+5x^4+o(x^4))$$

$$=(1+x+x^2)(1+x+2x^2+3x^3+5x^4+o(x^4))$$

$$=1+x+x^2+(x+x^2+x^3)+(2x^2+2x^3+2x^4)+(3x^3+3x^4+o(x^4))+(5x^4+o(x^4))+o(x^4)$$

$$=1+2x+4x^2+6x^3+10x^4+o(x^4)$$

07/ 泰勒公式-考点2：求函数的n阶导数

Note.求函数在0处的n阶导数?

Ex.$f(x)=\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}, f^{(4)}(0)=$______.

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}=-\frac{240\,x^4+480\,x^3+960\,x^2+720\,x+240}{x^{10}+5\,x^9+5\,x^8-10\,x^7-15\,x^6+11\,x^5+15\,x^4-10\,x^3-5\,x^2+5\,x-1}$$

Thm.(带Peano余项的Taylor公式)

人非机器!

f在x_0处有n阶导数,则当$x\to x_0$时,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+o\left((x-x_0)^n\right).$$

$\Rightarrow$ 求$\dfrac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$展开到4阶,取出x^4项的系数，再乘以_____?

$=1+2x+4x^2+6x^3+10x^4+o(x^4)$

07 泰勒公式-考点2：求函数的n阶导数

Note.求函数在0处的n阶导数?

Ex.$f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $f^{(2019)}(0)=$________, $f^{(2020)}(0)=$________.

$\Rightarrow$ 求$\dfrac{1}{1+x^2}$展开到2019阶, 取出x^{2019}项的系数，再乘以______?

Ex.*$f(x)=\arctan x$, $f^{(2019)}(0)=$________, $f^{(2020)}(0)=$________.

$(\arctan x)'=1/(1+x^2)$, $f^{(2019)}(x)=\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)^{(2018)}\Big|_{x=0}$.

07 泰勒公式-考点3：利用泰勒公式求极限

Ex. $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{e^{\sin^2 x}-\cos2\sqrt{x}-2x}{x^2}$　　Question.展开到哪一阶？

解: $\cos2\sqrt{x}=1-\dfrac{4x}{2!}+\dfrac{16x^2}{4!}+o(x^2)\quad(x\to0)$

$$e^{\sin^2 x}=1+\sin^2 x+o(\sin^2 x)\quad(x\to0)$$

$$=1+\left(x+o(x)\right)^2+o(x^2)\quad(x\to0)$$

$$=1+x^2+o(x^2)\quad(x\to0)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to0+}\frac{1+x^2-(1-2x+\frac{2}{3}x^2)-2x+o(x^2)}{x^2}=\frac{1}{3}.\square$$

07 泰勒公式-考点3：利用泰勒公式求极限

Ex. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax^k}-\cos x^2}{x^8}$ 存在,求 a,k 及极限值.

解: $x\to 0$ 时, $\cos x^2=1-\dfrac{x^4}{2!}+\dfrac{x^8}{4!}+o(x^8)$,

$$e^{ax^k}=1+ax^k+\frac{1}{2!}a^2x^{2k}+o(x^{2k}).$$

$$e^{ax^k}-\cos x^2=ax^k+\frac{x^4}{2!}+\frac{1}{2!}a^2x^{2k}-\frac{x^8}{4!}+o(x^8)+o(x^{2k})$$

原极限存在,则 $ax^k+\dfrac{x^4}{2!}=0,\ k=4,a=-\dfrac{1}{2}$,

$$\text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^8-\frac{1}{4!}x^8+o(x^8)}{x^8}=\frac{1}{12}.\square$$

07 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Thm.(带Lagrange余项的Taylor公式) f在$[a,b]$上$n+1$阶可导，$x_0, x\in[a,b]$，则存在介于x_0与x之间的ξ, s.t.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Question. x和x_0如何选择？

07/ 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex. f在$[a,b]$上二阶可导, f'(a)=f'(b)=0,

证明: $\exists c\in(a,b), s.t. |f''(c)|\geq \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Question. x和x_0如何选择？ $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(c_1)$

$x_0=a, x_0=b$

$$f(x)=f(b)+(x-b)f'(b)+\frac{1}{2}(x-b)^2f''(c_2)$$

$$\therefore f(\frac{b+a}{2})=f(a)+\frac{1}{2}(\frac{b-a}{2})^2f''(c_1),\quad f(\frac{b+a}{2})=f(b)+\frac{1}{2}(\frac{b-a}{2})^2f''(c_2)$$

07 / 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex. f在$[a,b]$上二阶可导, f'(a)=f'(b)=0,

证明: $\exists c\in(a,b), s.t. |f''(c)|\ge \dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$

$$\therefore f\left(\frac{b+a}{2}\right)=f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(c_1),\quad f\left(\frac{b+a}{2}\right)=f(b)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(c_2)$$

$$\therefore f(a)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(c_1)=f(b)+\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(c_2)$$

$$\therefore |f(a)-f(b)|=\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2|f''(c_1)-f''(c_2)|\le$$

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\frac{|f''(c_1)|+|f''(c_2)|}{2}\le\left(\frac{b-a}{2}\right)^2\max(|f''(c_1)|,|f''(c_2)|)$$

07 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex. $x>0$, 证明 $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$

$$(\ln(1+x))^{(5)}=4!\left(\frac{1}{1+x}\right)^4$$

方法. 估计余项 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 的上下界

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5!}f^{(5)}(\xi)$$

$$=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^4, 0<\xi<x$$

$$>x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$$

07 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex. $x>0$, 证明 $\ln(1+x) > x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}$

$$(\ln(1+x))^{(5)} = 4!\left(\frac{1}{1+x}\right)^4$$

方法. 估计余项 $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 的上下界

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5!}f^{(5)}(\xi)$$

$$= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}\left(\frac{1}{1+\xi}\right)^4, 0<\xi<x$$

$$> x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$$

07 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex. $x, y > 1$, 证明 $\left|\dfrac{\ln x - \ln y}{x - y} - \dfrac{1}{y}\right| \le \dfrac{|x - y|}{2}$

$$\ln x = \ln y + \frac{1}{y}(x-y) - \frac{1}{2\zeta^2}(x-y)^2 \Rightarrow \left|\ln x - \ln y - \frac{1}{y}(x-y)\right| = \left|\frac{1}{2\zeta^2}(x-y)^2\right| \le \frac{1}{2}(x-y)^2, \because x, y > 1$$

07/ 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex. $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}$

求证：(1)n为偶数，$P_n(x)>0$；(2)n为奇数，只有一个实零点

$$e^x=P_n(x)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)=P_n(x)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi}$$

方法. 估计余项$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$的上下界

证明. (1)n为偶数，$P_n(x)>0$；

$$e^x=P_{2k}(x)+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{\xi}$$ 只需要考虑$x<0$ $$\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{\xi}<0$$

$$P_{2k}(x)=e^x-\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{\xi}>0,\forall x<0$$

07 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex.$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

求证:(1)n为偶数,$P_n(x)>0$;(2)n为奇数,只有一个实零点

证明.(2)n为奇数,$n=2k+1$

$P_{2k+1}'(x)=P_{2k}(x)>0$,从而至多$P_{2k+1}(x)$只有一个实零点,否则,和微分中值定理矛盾

$\lim_{x\to-\infty}P_{2k+1}(x)=-\infty, P_{2k+1}(0)=1$

$\therefore$至少存在零点

07/ 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex. $P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}$

求证：(3) n为奇数，记实零点为x_n，则$\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$

证明. $e^x=P_{2k-1}(x)+\frac{x^{2k}}{(2k)!}e^{\xi}$ 取$x=-\ln(2k)$

$$\frac{1}{2k}=P_{2k-1}(-\ln(2k))+\frac{(\ln(2k))^{2k}}{(2k)!}e^{\xi},-\ln(2k)<\xi<0 \Rightarrow \frac{1}{2k}<e^{\xi}<1$$

$$P_{2k-1}(-\ln(2k))=\frac{1}{2k}-\frac{\ln^{2k}(2k)}{(2k)!}e^{\xi}\geq\frac{1}{2k}-\frac{\ln^{2k}(2k)}{(2k)!}$$

$$2kP_{2k-1}(-\ln(2k))\geq 1-\frac{\ln^{2k}(2k)}{(2k-1)!}$$

$$\because \lim_{k\to\infty}\frac{\ln^{2k}(2k)}{(2k-1)!}=0, \therefore 2kP_{2k-1}(-\ln(2k))>0\Rightarrow x_{2k+1}<-\ln(2k)$$

07/ 泰勒公式-考点4：利用泰勒公式证明不等式

Ex.$P_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}$

求证：(3)n为奇数，记实零点为x_n，则$\lim_{n\to\infty}x_n=-\infty$

$$a_n=\frac{\ln^n(n)}{(n-1)!},\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{\ln^{n+1}(n+1)}{(n)!}}{\frac{\ln^n(n)}{(n-1)!}}=\frac{\ln^{n+1}(n+1)}{\ln^n(n)}\frac{1}{n}=\frac{\ln n}{n}(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)})^{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\exp((n+1)\ln(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}))=\lim_{n\to\infty}\exp((n+1)(\frac{\ln(n+1)-\ln n}{\ln(n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\exp((n+1)(\frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}))=1\qquad\therefore\lim_{n\leftarrow\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0,\therefore\lim_{n\leftarrow\infty}a_n=0$$