

微积分A期中讲座

经73班 罗承扬

目录

contents

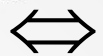
- 01 / 数列的极限
- 02 / 函数极限与连续函数
- 03 / 导数
- 04 / 微分中值定理

01 / 数列极限



1、定义

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$



$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, s.t. |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > N$$

01 / 数列极限



• $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 的 ε - N 语言描述

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - A| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } |a_n - A| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n > N \text{ 时, 有 } |a_n - A| < \varepsilon / 2$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon \in (0, 1), \exists N \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } |a_n - A| \leq 2\varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \exists N = N(k) \in \mathbb{N}, \text{s.t. 当 } n \geq N \text{ 时, 有 } |a_n - A| \leq \frac{1}{2^k}.$$

01 / 数列极限



1-2、定义法证明数列极限

- ε -N语言中N的选取.

(1) 放缩法求解不等式 $|a_n - A| < \varepsilon$

$$|a_n - A| < \dots < \boxed{n \text{ 的简单表达式}} < \varepsilon$$

(2) 分段法确定N

$$N = \max \{N_1, N_2, \dots, N_k\}$$



2、性质

Prop1. 收敛列的极限唯一.

Prop2. 在数列中添加、删除有限项, 或者改变有限项的值, 不改变数列的敛散性与极限值.

Prop3. (收敛列的任意子列具有相同的极限)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$



2、性质

Prop3. (收敛列的任意子列具有相同的极限)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a.$$

Corollary. (具有不同极限子列的数列发散.)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a \neq b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{m_k} \Rightarrow \{a_n\} \text{ 发散.}$$

Ex. $\{(-1)^n\}$ 发散.



2、性质

Prop4. 收敛列一定有界.

Question. 有界列是否必为收敛列?

Ex. $\{(-1)^n\}$ 发散.

Prop5. (极限的保序性) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$

(1) 若 $a < b$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时有 $a_n < b_n$.

(2) 若 $\exists N$, 当 $n > N$ 时有 $a_n \leq b_n$, 则 $a \leq b$.



2、性质

Prop6. (极限的四则运算) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b.$

$$(1) \forall c \in \mathbb{R}, \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ca;$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b;$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = ab;$$

$$(4) b \neq 0 \text{ 时}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$



3、求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

Thm.(单调收敛原理)

- (1) 单调递增且有上界的数列必收敛;
- (2) 单调递减且有下界的数列必收敛.



3、求数列极限的工具：单调收敛原理、夹挤原理、四则运算

Prop7. (夹挤原理) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, 且 $\exists n_0, s.t.$

$$a_n \leq x_n \leq b_n, \quad \forall n > n_0.$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

4、数列极限例题选讲

1. (夹逼原理) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} = 1$$



4、数列极限例题选讲

2. (夹逼原理) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$

$$3 = \sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq 3 \sqrt[n]{2}$$

Review. (重要极限) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \forall a > 0$

3. (夹逼原理) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+2}$

$$\left| \frac{\sqrt{n} \cos n}{n+2} \right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n+2}$$

Review. $\sin x, \cos x$ 的有界性

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \quad [\text{填空1}]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \quad [\text{填空2}]$$

正常使用填空题需3.0以上版本雨课堂

作答



4、数列极限例题选讲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$$

$$\frac{1}{4n} = \frac{n}{(2n)^2} \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2}$$



4、数列极限例题选讲

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2}$$

$$n\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{n}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{n}{(2n+1)2n} \leq$$

$$\frac{n}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \leq \frac{n}{n(n+1)} + \dots + \frac{n}{(2n-1)2n} = \frac{1}{2}$$

01 / 数列极限-单调收敛原理



Ex. (P31, 问题1.5-1)

$c > 0, a_1 = c/2, a_{n+1} = c/2 + a_n^2/2$, 证明 (1) $c > 1$ 时 $a_n \rightarrow +\infty$; (2) $0 < c \leq 1$ 时收敛

Proof. (1) 解法1 $a_n \geq 0, c > 1, a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{c}{2} \frac{a_n^2}{2}} = \sqrt{c} a_n \Rightarrow a_{n+1} \geq c^{n/2} a_1$

(1) 解法2

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{2} - \frac{a_{n-1}^2}{2} = \frac{1}{2}(a_n^2 - a_{n-1}^2) = \frac{1}{2}(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}), \therefore a_{n+1} - a_n \text{ 和 } a_n - a_{n-1} \text{ 同号}$$

$$\because a_2 - a_1 = \frac{a_1^2}{2} \geq 0, \therefore a_n \uparrow \quad \text{若 } a_n \rightarrow A, \text{ 则在 } a_{n+1} = c/2 + a_n^2/2 \text{ 取极限, } A = c/2 + A^2/2$$

$\therefore A^2 - 2A + c = 0, c > 1$ 时无实根.

(2) $0 < c \leq 1$ 时

01 / 数列极限-单调收敛原理



Ex. (P31, 问题1.5-1)

$c > 0, a_1 = c/2, a_{n+1} = c/2 + a_n^2/2$, 证明 (1) $c > 1$ 时 $a_n \rightarrow +\infty$; (2) $0 < c \leq 1$ 时收敛

(2) $0 < c \leq 1$ 时

归纳证. $a_n \leq 1$, 单调递增有上界

归纳基础. $a_1 = c/2 \leq 1/2$

归纳递推. $a_n \leq 1, a_{n+1} = c/2 + a_n^2/2 \leq c/2 + 1/2 = (c+1)/2 \leq 1$

01 / 数列极限-Stolz定理



Thm. (Stolz定理)

$$(1) \left. \begin{array}{l} \{b_n\} \text{严格} \uparrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A;$$

$$(2) \left. \begin{array}{l} \{b_n\} \text{严格} \downarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = A \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = A.$$



序列极限的存在性判定 (Stolz定理,

问题1.11-1变形.

$a_0 = 1, a_n = \sin(a_{n-1})$, 求证

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} a_n = 1$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{3}} a_n = 1 \Leftrightarrow (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} a_n^2 = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3/a_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{3}{a_n^2} - \frac{3}{a_{n-1}^2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 a_{n-1}^2}{3a_{n-1}^2 - 3a_n^2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 a_{n-1} a_{n-1}^2}{3a_{n-1}^2 - 3\sin^2 a_{n-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{3x^2 - 3\sin^2 x}$$

02/ 等价无穷小



$$(1) \sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x;$$

$$(2) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2; \quad (3) \ln(1+x) \sim x;$$

$$(4) e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0);$$

$$(5) (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$$

$$\sin x \sim x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \ln(x+1) \sim x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$e^x - 1 \sim x \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} = 1$$

$$(1+x)^a - 1 \sim ax \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{ax} = 1$$

02/ 等价无穷小



Ex. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\frac{1}{m}(x-1)} \cdot \frac{\frac{1}{m}(x-1)}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sqrt[n]{x} - 1} \\ &= \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\sqrt[n]{x} - 1} \cdot \frac{\frac{1}{n}(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)} = \frac{1}{m} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)} = \frac{n}{m} \end{aligned}$$

(4) $e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0);$

(5) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x.$

02/ 等价无穷小



$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{m}(x-1)}{\frac{1}{n}(x-1)} = \frac{n}{m}$$

Note. 等价无穷小替换本质？



$$(1) \sin x \sim x, \tan x \sim x,$$

$$(2) 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$$

$$\text{Ex. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)}$$

解法一: $x \rightarrow 0$ 时, $\tan x \sim x, \sin x \sim x, \ln(1+x) \sim x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x}{x^2 \cdot x} = 0. \quad \text{是否正确? } \times$$

$$\text{解法二: } \frac{\tan x - \sin x}{x^2 \ln(1+x)} = \frac{\sin x(1 - \cos x)}{x^2 \cos x \ln(1+x)}$$

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\frac{1}{2}x^2} \cdot \frac{x}{\ln(1+x)} \cdot \frac{1}{2 \cos x} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow 0) \square$$

02/ 等价无穷小



1.1[∞] 型

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 1, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)^{h(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) x^2}$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right) x^2} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{x^2 - 1} \right)}{\frac{2}{x^2 - 1}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^2 - 1} x^2} = e^2$$

02/ 等价无穷小



1.1[∞]型

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\cos x}{\cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\cos x - \cos 2x}{\cos 2x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + 1 - \cos 2x}{x^2} = \frac{3}{2}$$

02/ 等价无穷小



1.1[∞] 型

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^{1/n} + b^{1/n}}{2} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}.$$

- A \sqrt{ab}
- B $\frac{a+b}{2}$
- C $\max(a, b)$
- D $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$

提交

02/ 等价无穷小



2.0/0型 (直接等价无穷小)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 0, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)/h(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - 2 \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (\cos x - 1)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(\cos x - 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x - 1)}{x^2} = -1$$

01/ 等价无穷小



2.0/0型 (直接等价无穷小)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\sqrt[3]{1+\frac{3}{8}x-\frac{1}{8}x^2} - 1}{x+x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}x^2}{3(x+x^2)} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{8}x - \frac{1}{8}x^2}{x+x^2} = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{8} - \frac{1}{8}x}{1+x} = \frac{2}{3} \frac{3}{8} = \frac{1}{4}$$

01/ 等价无穷小



3. $\frac{\infty}{\infty}$ 型 增长速度观.

(1) 多项式相比: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+4)^{50}}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-3)^{20} (3x+2)^{30}}{(2x+4)^{50}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{3}{x}\right)^{20} \left(3 + \frac{2}{x}\right)^{30}}{\left(2 + \frac{4}{x}\right)^{50}} = 1.5^{30}$$

01/ 等价无穷小



3. $\frac{\infty}{\infty}$ 型 增长速度观.

$$(2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1 + \frac{1}{x}}}$$

$$\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1 + \frac{1}{x}}} \approx \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1 + \frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{x}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = 1$$

01/ 等价无穷小



3. $\frac{\infty}{\infty}$ 型

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + x^2)}{\ln(e^{3x} + x^3)}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + x^2)}{\ln(e^{3x} + x^3)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x^2}{e^{2x}}) + \ln(e^{2x})}{\ln(1 + \frac{x^3}{e^{3x}}) + \ln(e^{3x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{x^2}{e^{2x}}) + 2x}{\ln(1 + \frac{x^3}{e^{3x}}) + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{x^2}{e^{2x}}) + 2}{\frac{1}{x} \ln(1 + \frac{x^3}{e^{3x}}) + 3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{\ln(e^{2x} + x^2)}{\ln(e^{3x} + x^3)} \approx \frac{\ln(e^{2x})}{\ln(e^{3x})} = \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}$$

01/ 等价无穷小



4. $\infty - \infty$ 型 方法: 设法转化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \dots$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

$$\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} = \frac{x + \sqrt{x + \sqrt{x}} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

01/ 等价无穷小



4. $\infty - \infty$ 型

方法: 设法转化为 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty} \dots$

$$(x^3 + x^2)^c \approx (x^3)^c = x^{3c}$$

(3) 求常数 c , s. t. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2)^c - x$ 极限存在, 并求值.

直观猜测 $c = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + x^2)^{1/3} - x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{(x^3 + x^2)^{2/3} + x(x^3 + x^2)^{1/3} + x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x^3 + x^2)^{2/3} + x(x^3 + x^2)^{1/3} + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{x})^{2/3} + (1 + \frac{1}{x})^{1/3} + 1} = 1/3 \end{aligned}$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$$



5. 夹挤原理

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\quad 1 \quad};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = \underline{\quad 0 \quad};$$



5. 夹挤原理

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 \leq \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x}$$

$$x \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = 1 - x \leq x \left[\frac{1}{x} \right] \leq x \frac{1}{x} = 1$$

02/ 连续性



Def.(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处连续;

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处右连续;

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 f 在点 x_0 处左连续;

Note.(1) 连续的几何意义? 图像不“断”;

(2) 左连续的几何意义?

(3) 右连续的几何意义?

Note. 连续性是一个局部性质

02 / 连续性



Def. f 在点 x_0 处不连续, 则称 f 在点 x_0 处间断.

(1) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 但 f 在点 x_0 处无定义或 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

则称 x_0 为 f 的可去间断点.

(2) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 存在, 但 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$,

则称 x_0 为 f 的跳跃间断点. 可去间断点与跳跃间断点统称为第一类间断点.

(3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 至少有一个不存在, 则称 x_0 为

f 的第二类间断点.

02 / 连续性



Ex. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ 在0处是 B ; $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$ 在0处是 C ;

(A) 连续点

(B) 可去间断点

(C) 跳跃间断点

(D) 第二类间断点

02/ 连续性



Ex. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ 连续, 求 a 的取值范围

\Leftrightarrow 求 a 的取值范围, s. t. $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \sin \frac{1}{x} = 0$

Question. 如何说明 $\lim_{x \rightarrow 0} x^a \sin \frac{1}{x} = 0$ 不成立, $a < 0$

Answer. 数列极限和函数极限的关系

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Def. 若 f 在 (a,b) 上任一点处连续, 则称 f 在 (a,b) 上连续, 记作 $f \in C(a,b)$. 若 $f \in C(a,b)$, 且 f 在点 a 右连续, 在点 b 左连续, 则称 f 在 $[a,b]$ 上连续, 记作 $f \in C[a,b]$.

Thm. $f \in C[a,b]$, $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$, s.t. $f(\xi) = 0$.

Thm.(介值定理) $f \in C[a,b]$, $f(a) < f(b)$, 则 $\forall c \in (f(a), f(b))$,
 $\exists \xi \in (a,b)$, s.t. $f(\xi) = c$.

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Thm.(最大最小值定理) $f \in C[a,b]$, 则 f 在 $[a,b]$ 上可以取到最大、最小值, 即 $\exists \xi, \eta \in [a,b], s.t.$

$$f(\xi) = \max_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}, \quad f(\eta) = \min_{a \leq x \leq b} \{f(x)\}.$$

Note. 闭区间的意义

$f(x) = x, x \in (1, 2)$, 有没有最大值和最小值?

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Ex.(运用零点定理解决问题) $f \in C[0, 2]$, $f(0) = f(2)$, 求证 $\exists \xi > 0$, s.t. $f(\xi) = f(\xi + 1)$

分析.

等价于说 $f(x) = f(x+1)$ 至少有一个解, 也就是 $f(x) - f(x+1)$ 至少有一个零点

$$\text{令 } g(x) = f(x) - f(x+1)$$

$$g(0) = f(0) - f(1), \quad g(1) = f(1) - f(2) = f(1) - f(0)$$

$$g(0)g(1) \leq 0$$

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Ex.(运用介值定理解决问题)

$$f \in C[0,1]$$

(1) 若 $\exists n, f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) = 0$, 则 f 必有零点;

(2) $f(0) = f(1)$, 则 $\forall n \in \mathbf{N}, \exists \xi, s.t. f(\frac{1}{n} + \xi) = f(\xi)$

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Ex.(运用介值定理解决问题)

$$f \in C[0,1]$$

(1) 若 $\exists n, f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) = 0$, 则 f 必有零点;

(2) $f(0) = f(1)$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \xi, s.t. f(\frac{1}{n} + \xi) = f(\xi)$

Proof.

(1)(运用介值定理) 若 $\exists n$,

1° 若 $\exists i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, f(i/n) = 0$. 则结论成立

2° 若全部非零, 必存在 $i \neq j, s.t. f(\frac{j}{n})f(\frac{i}{n}) < 0$

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Ex.(运用介值定理解决问题)

$$f \in C[0,1]$$

(1) 若 $\exists n, f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) = 0$, 则 f 必有零点;

(2) $f(0) = f(1)$, 则 $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \xi, s.t. f(\frac{1}{n} + \xi) = f(\xi)$

Proof.

(2)(构造函数) $g(x) = f(x + 1/n) - f(x)$.

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(i/n) = f(1) - f(0) = 0 \Rightarrow g \text{ 存在零点}$$

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Ex.(运用最值定理解决问题)

$f \in C(-\infty, \infty)$, 以 T 为周期

(1) f 存在最大值和最小值;

(2) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \xi, s.t. f(a + \xi) = f(\xi)$ 成立.

Proof.

$$(1) \max_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \max_{x \in [0, T]} f(x) \quad \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min_{x \in [0, T]} f(x)$$

$$\exists x' \in [0, T], f(x') = \max_{x \in [0, T]} f(x), \exists x'' \in [0, T], f(x'') = \min_{x \in [0, T]} f(x)$$

$$\forall x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) = f(x_1 - T[\frac{x_1}{T}]), 0 \leq x_1 - T[\frac{x_1}{T}] \leq T,$$

$$\therefore f(x_1) = f(x_1 - T[\frac{x_1}{T}]) \leq \max_{x \in [0, T]} f(x) = f(x')$$

02/ 连续性 (闭区间上的连续函数)



Ex.(运用最值定理解决问题)

$f \in C(-\infty, \infty)$, 以 T 为周期

(1) f 存在最大值和最小值;

(2) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \xi, s.t. f(a + \xi) = f(\xi)$ 成立.

Proof.

$$(2) g(x) = f(x + a) - f(x);$$

$$g(x') = f(x' + a) - f(x') \leq 0$$

$$g(x'') = f(x'' + a) - f(x'') \geq 0$$

02/ 连续性 (一致连续)



Def. 称 f 在区间 I 上一致连续, 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, s.t.$

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall x, y \in I, |x - y| < \delta.$$

Question. f 在区间 I 上非一致连续, $\varepsilon - \delta$ 语言描述?

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in I, |x - y| < \delta, s.t.$$

$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon_0.$$

Remark. f 在 I 上非一致连续 \Leftrightarrow

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_n, y_n \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0, s.t. |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

02/ 连续性 (一致连续)



Question. 证明一个函数一致连续 ?

一般方法. 验证 f 满足如下条件:

$$\exists M, \forall x, y, s.t. |f(y) - f(x)| \leq M |y - x|$$

Ex. $f = \ln(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上一致连续

Ex. $f = \sin x$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续

一般方法. 验证 f 满足如下条件:

$$\exists M, \forall x, y, s.t. |f(y) - f(x)| \leq M |y - x|^p, p > 0$$

Ex. $f = x^{1/2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续

02/ 连续性 (一致连续)



Remark. f 在 I 上非一致连续 \Leftrightarrow

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \exists x_n, y_n \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0, \text{ s.t. } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Ex. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上不一致连续.

Proof. 令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{1}{2}\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi}$,

Ex. $f(x) = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致连续.

$$\text{令 } x_n = \frac{1}{2n}, y_n = \frac{1}{n},$$

04 / 函数的导数



$$c' = 0,$$

$$(\sin x)' = \cos x,$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x,$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x,$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\cot x)' = -\csc^2 x,$$

$$(\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$\arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{arc cot} x = \frac{-1}{1+x^2}$$

04 / 函数的导数



Def. (导数, 左、右导数)

$$(1) f'(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$(2) f'_-(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$(3) f'_+(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

04 / 函数的导数



左导数与导函数的左极限

$$\text{左导数 } f'_-(x_0) \triangleq \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$\text{导函数的左极限 } \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} f'(x_0 + \Delta x)$$

例：已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ ，求0处的左导数和导函数在0处的左极限。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x) = 0$$

$f'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$ ，在0处没有左极限

04 / 函数的导数



• (链式法则) $\varphi(x)$ 在 x_0 可导, $f(u)$ 在 $u_0 = \varphi(x_0)$ 可导, 则

$h(x) = f(\varphi(x))$ 在 x_0 可导, 且

$$h'(x_0) = f'(\varphi(x_0)) \cdot \varphi'(x_0), \text{ 即 } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

• $\varphi(x) = \ln(e^{3x} + 1)$ 的导数是?

04 / 函数的导数



导数考点提要

- 填空：求某个函数的导数（注意对数求导法）
- 大题：1. 隐函数求导；2. 参数函数求导
- 3. 计算高阶导数

04 / 函数的导数



- 对数求导法
- 适合连乘的情况!

Ex. 求下列函数的导数.



$$(1) y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}; (2) y = e^{e^x}; (3) y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$$

解: $\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \right) = \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)}$$



Ex. $f(x) = f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$, 求 $f'(x)$.

解: $\ln|f(x)| = \ln|f_1(x)| + \ln|f_2(x)| + \cdots + \ln|f_n(x)|$,

两边对 x 求导, 得

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}.$$

$$f'(x) = f(x) \left(\frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} + \cdots + \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} \right). \square$$

Remark. 多个因子连乘的函数求导时先取对数再两端求导可简化计算.

04 / 函数的导数



• 隐函数求导

Def.(隐函数) $F(x, y) = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$ 称为隐函数.

Ex. $xy - e^x + e^y = 0$ 确定隐函数 $y = y(x)$, 求 $y'(x)$.

解: 视方程 $xy - e^x + e^y = 0$ 中 $y = y(x)$, 两边对 x 求导, 得

$$y + xy'(x) - e^x + e^y y'(x) = 0.$$

解得 $y'(x) = \frac{e^x - y}{x + e^y}$. □



Ex. $x^2 + xy + y^2 = 1$ 确定了隐函数 $y = y(x)$, 求 $y'(x)$.

解: 视 $x^2 + xy + y^2 = 1$ 中 $y = y(x)$, 两边对 x 求导, 得

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0, \quad y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

于是

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{(2x + y)'(x + 2y) - (2x + y)(x + 2y)'}{(x + 2y)^2} \\ &= -\frac{(2 + y')(x + 2y) - (2x + y)(1 + 2y')}{(x + 2y)^2} \\ &= \frac{3(xy' - y)}{(x + 2y)^2} = \frac{-6}{(x + 2y)^3}. \quad \square \end{aligned}$$

04 / 函数的导数



- 参数函数求导

- 形式上认可 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$



Ex. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$, 求 $y'(x)$, $y''(x)$.

解: $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$.

$$y''(x) = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\cos t(1 - \cos t) - \sin^2 t}{(1 - \cos t)^2}}{a(1 - \cos t)}$$
$$= \frac{-1}{a(1 - \cos t)^2} \cdot \square$$

高阶导数计算方法总结



看到这里了

1、直接法：（考点、重点）

2、莱布尼茨公式：（考点、重点）

$$(fg)^{(n)} = \sum C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$$

3、递推法（较难，不一定考）

等价变换原式



Ex. $y = \frac{1}{x^2 - x - 2}$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y = \frac{1}{(x+1)(x-2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1} \right)$.

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{(n)} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x+1} \right)^{(n)} \\ &= \frac{1}{3} (-1)^n n! (x-2)^{-(n+1)} - \frac{1}{3} (-1)^n n! (x+1)^{-(n+1)}. \quad \square \end{aligned}$$



Thm. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x 处有 n 阶导数, $c \in \mathbb{R}$,则

$$(1)(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x);$$

$$(2)(cf)^{(n)}(x) = c \cdot f^{(n)}(x);$$

$$(3)(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x). \text{(Leibniz公式)}$$

Leibniz公式使用场景: f 求过几次导之后就是0

Leibniz公式



Ex. $y = x^2 e^{-x}$, 求 $y^{(n)}$.

解: $y = x^2 e^{-x}$.

$$y^{(n)} = x^2 e^{-x} (-1)^n + C_n^1 2x e^{-x} (-1)^{n-1} + C_n^2 x e^{-x} (-1)^{n-2} + 0 + \dots + 0$$

05 / 中值定理



Thm.(Rolle) $f \in C[a, b]$, f 在 (a, b) 可导. 若 $f(a) = f(b)$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, *s.t.* $f'(\xi) = 0$.

Thm.(Lagrange) $f \in C[a, b]$, f 在 (a, b) 可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, *s.t.*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Thm.(Cauchy) $f, g \in C[a, b]$, f, g 在 (a, b) 可导, 且 $\forall t \in (a, b)$,

有 $g'(t) \neq 0$. 则存在 $\xi \in (a, b)$, *s.t.* $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$.

05 / 中值定理



中值定理的应用:

- 证明不等式
- 分析某些函数的零点存在性
- 含有 ξ 的证明题

05 / 中值定理证明不等式



Ex. 证明: 若 $p > 0$

$$(1) px^{p-1} \leq (x+1)^p - x^p \leq p(x+1)^{p-1};$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + \dots + n^p}{(n+1)^{p+1}} = ?$$

证. (1) $(x+1)^p - x^p = \frac{(x+1)^p - x^p}{1} = p(x+\xi)^{p-1}, 0 < \xi < 1$

$$px^{p-1} \leq p(x+\xi)^{p-1} \leq p(x+1)^{p-1}$$

$$(2) \quad pk^{p-1} \leq (k+1)^p - k^p \leq p(k+1)^{p-1}; \quad p \sum_{k=1}^n k^{p-1} \leq (n+1)^p - 1 \leq p \sum_{k=1}^n (k+1)^{p-1};$$
$$\frac{\sum_{k=1}^n k^{p-1}}{(n+1)^p} \leq \frac{(n+1)^p - 1}{p(n+1)^p} \quad \frac{(n+1)^p - 1}{p(n+1)^p} \leq \frac{\sum_{k=1}^n (k+1)^{p-1}}{p(n+1)^p} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p(n+1)} \leq \frac{\sum_{k=1}^n k^{p-1}}{p(n+1)^p}$$



Ex. $x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 4x - 5 = 0$ 恰有两个不同的实根.

Proof. 令 $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 - 4x - 5$, 则

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

于是 $\exists a < 0 < b$, s.t. $f(a) > 0$, $f(b) > 0$. 而 $f(0) = -5 < 0$,

由介值定理, $f(x) = 0$ 至少有两个相异实根.

假设 $f(x) = 0$ 至少有3个相异实根. 由Rolle定理, $f'(x)$ 至少有2个相异实根, $f''(x)$ 至少有1个实根. 但

$$f''(x) = 12x^2 + 12x + 12 > 0,$$

矛盾. 故 $f(x) = 0$ 恰有两个相异实根. \square

05 / 中值定理含有 ξ 的证明



Ex. f 在 $[a, c]$ 上连续, 在 $(a, b) \cup (b, c)$ 上可导,

求证 $\exists \xi \in [a, c], s.t. \left| \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \right| \leq |f'(\xi)|$

证明:

在 $[a, b]$ 上用一次微分中值定理: $f(b) - f(a) = (b - a)f'(\xi_1)$

在 $[b, c]$ 上用一次微分中值定理: $f(c) - f(b) = (c - b)f'(\xi_2)$

$$\begin{aligned} \frac{f(c) - f(a)}{c - a} &= \left| \frac{f(c) - f(b)}{c - b} \frac{c - b}{c - a} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \frac{b - a}{c - a} \right| \leq \frac{c - b}{c - a} |f'(\xi_1)| + \frac{b - a}{c - a} |f'(\xi_2)| \\ &\leq \left(\frac{c - b}{c - a} + \frac{b - a}{c - a} \right) \max(|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|) = \max(|f'(\xi_1)|, |f'(\xi_2)|) \end{aligned}$$

05 / 中值定理含有 ξ 的证明



Ex. $f(x) \in C^1[a, b], ab > 0$, 证明: 存在 ξ , s.t. $\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$

$f(\xi) - \xi f'(\xi)$ 会由谁求导产生?

$$\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

$$\frac{af(b) - bf(a)}{a - b} = \frac{\frac{f(b)}{b} - \frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}} = f(\xi) - \xi f'(\xi)$$

05 / 中值定理含有 ξ 的证明



Ex. (构造函数法)

$$f(x) \in C^1[0, +\infty), 0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2} \Rightarrow \exists \xi > 0, s.t. f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$$

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{令 } g(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$$

$$g(0) = f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

$$\text{令 } y = \arctan x!$$



$$f(x) \in C^1[0, +\infty), 0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow g(y) = f(\tan y), g \in C^1[0, \frac{\pi}{2}), 0 \leq g(y) \leq \frac{\tan y}{1+\tan^2 y} = \frac{\sin y / \cos y}{1/\cos^2 y} = \sin y \cos y$$

$$\because 0 \leq g(y) \leq \sin y \cos y, \therefore \text{定义 } g(\frac{\pi}{2}) = 0!$$

$$\therefore q(y) = g(y) - \sin y \cos y \text{ 在 } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ 上连续, 在 } (0, \frac{\pi}{2}) \text{ 上可导}$$

$$\because q(\frac{\pi}{2}) = q(0), \therefore \exists \zeta, q'(\zeta) = g'(\zeta) - \cos 2\zeta = 0$$

$$q'(\zeta) = f'(\tan \zeta) \sec^2 \zeta - \cos 2\zeta = f'(\tan \zeta)(1 + \tan^2 \zeta) - \cos 2\zeta = 0 \quad \cos 2\zeta = \frac{1 - \tan^2 \zeta}{1 + \tan^2 \zeta}$$

$$f'(\tan \zeta) = \frac{1 - \tan^2 \zeta}{(1 + \tan^2 \zeta)^2} \square$$

版权属于：晏平老师、罗承扬所有

PPT下载：<http://www.learningthu.com:8888/tutor/web/index.php/files/index>

