微积分A期末讲座-微分方程

经73班　　罗承扬

目 录

contents

0 / ODE简介

- 一般而言，如果不给出初值条件，ODE的解是一组函数（最简单的ODE是不定积分）
- 一阶ODE一般需要一个初值条件，二阶ODE一般需要两个初值条件…

1 / 一阶ODE的初等解法

- 变量分离型
- 齐次方程
- 一阶线性常微分方程（常数变易、积分因子）
- 伯努利方程
- 变量代换

1.变量分离方程 ---------形如$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$

$$\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx,\quad \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx+c$$

例: $\dfrac{dy}{dx}=y^2\cos x, y(0)=1.$

解:分离变量, 得$\dfrac{1}{y^2}dy=\cos x dx.$

两边积分, 得$-\dfrac{1}{y}=\sin x+c.$通解为$y=-\dfrac{1}{\sin x+c}.$

令$x=0, y=1$得$c=-1.$故所求特解为$y=1/(1-\sin x).$

此外,方程还有解$y\equiv 0$,但不满足初值条件.□

2.可化为变量分离方程的类型

1)齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

令$u=\dfrac{y}{x}$,

则$y=ux,\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{du}{dx}=g(u)$

即 $$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x}$$

例: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\tan\dfrac{y}{x}$.

解: 令$u=\dfrac{y}{x}$,则$y=ux$, $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$.代入原方程得

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\tan u,\quad x\frac{du}{dx}=\tan u.$$

分离变量得 $\dfrac{\cos u\,du}{\sin u}=\dfrac{dx}{x}$.

两边积分得 $\ln|\sin u|=\ln|x|+c_1$.

整理得$\sin u=cx$, 其中$c=\pm e^{c_1}\neq 0$.

此外, 方程还有解$\sin u=0$.故通解中允许$c=0$.

原方程的通解为 $\sin\dfrac{y}{x}=cx, c\in\mathbb{R}$.□

例: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$

解:由$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}$得$x=1,y=2.$令$\begin{cases} X=x-1 \\ Y=y-2 \end{cases}$,则$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X-Y}{X+Y}.$

令$u=\dfrac{Y}{X}$,即$Y=uX$,则 $X\dfrac{du}{dX}=\dfrac{1-2u-u^2}{1+u},$

分离变量得 $$\frac{dX}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}du \qquad (*)$$

两边积分得 $$\ln X^2=-\ln\left|u^2+2u-1\right|+c_1,$$

$$X^2(u^2+2u-1)=c, c=\pm e^{c_1}\neq 0.$$

此外, 容易验证$u^2+2u-1-0$,也是$(*)$的解. 故通解中c可取任意常数. 代回原变量得原方程的通解

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c, c\in\mathbb{R}.\square$$

3.一阶线性ODE:常数变易法

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x) \qquad (1)$$

用分离变量法求得 $\frac{dy}{dx} = p(x)y$的解为

$$y(x) = Ce^{\int p(x)dx}.$$

设(1)的解为

$$y(x) = C(x)e^{\int p(x)dx},$$

代入(1)确定$C(x)$得(1)的解

$$y = e^{\int p(x)dx}\left(\int q(x)e^{\int -p(x)dx}dx + C\right).\square$$

例:解$y^2dx+(x-2xy-y^2)dy=0$

解:$\because y^2\dfrac{dx}{dy}+x-2xy-y^2=0 \quad \therefore x'+\dfrac{(1-2y)}{y^2}x-1=0$

$\therefore$先考察齐次方程：$x'+\dfrac{(1-2y)}{y^2}x=0 \qquad \dfrac{dx}{dy}=\dfrac{(2y-1)}{y^2}x$ 　其解为$x=Cy^2e^{\frac{1}{y}}$

设原方程的解为$x=C(y)y^2e^{\frac{1}{y}}$，$x'=C'(y)y^2e^{\frac{1}{y}}+C(y)\dfrac{(2y-1)}{y^2}y^2e^{\frac{1}{y}}$

$\therefore x'+\dfrac{(1-2y)}{y^2}x-1=C'(y)y^2e^{\frac{1}{y}}+C(y)\dfrac{(2y-1)}{y^2}y^2e^{\frac{1}{y}}+\dfrac{(1-2y)}{y^2}C(y)y^2e^{\frac{1}{y}}-1$

$=C'(y)y^2e^{\frac{1}{y}}-1=0$

$\therefore C(y)=e^{-\frac{1}{y}}+C \qquad \therefore x=y^2+Cy^2e^{\frac{1}{y}}$

4.一阶线性ODE:积分因子法

Remark:将 $\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)$ 记为 $y'(x)-p(x)y(x)=q(x)$.

两边乘 $e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}$ 得 $\left(y(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}\right)'=q(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}$

两边从 x_0 到 x 积分, 得

$$y(x)e^{\int_{x_0}^{x}-p(t)dt}=y(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds,$$

于是

$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}\left(y(x_0)+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{-\int_{x_0}^{s}p(t)dt}ds\right)$$

$$=y(x_0)e^{\int_{x_0}^{x}p(t)dt}+\int_{x_0}^{x}q(s)e^{\int_{s}^{x}p(t)dt}ds.\square$$

例:解$y' + y/x = \sin x / x$

解:$\because xy' + y = \sin x$

$\therefore (xy)' = \sin x$

$\therefore xy = -\cos x + C$

$\therefore y = \frac{1}{x}(-\cos x + C)$

积分因子:$\exp(\int 1/x dx) = Cx$,等式两边乘以x

5.Bernoulli方程 $$\frac{dy}{dx}=p(x)y+q(x)y^n, n\neq 0,1$$

以y^{-n}乘方程两边, 得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=p(x)y^{1-n}+q(x),$$

令$z=y^{1-n}$,则

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)p(x)z+(1-n)q(x),$$

这是关于z的一阶线性ODE,求出z,从而得y.

此外, 若$n>0$, Bernoulli方程还有特解$y=0$.

例: $\dfrac{dy}{dx}=6\dfrac{y}{x}-xy^2$

解: 令$z=y^{-1}$,则 $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{d(y^{-1})}{dx}=-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}.$

代入原方程, 得 $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{6}{x}z+x.$

这是线性方程, 其通解为 $z=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8},c\in\mathbb{R}.$

原方程的通解为 $\dfrac{1}{y}=\dfrac{c}{x^6}+\dfrac{x^2}{8},c\in\mathbb{R}.$

此外, $y=0$也是原方程的解.□

6.变量替换法

例: $xy'+y=y\ln(xy)$

分析:LHS= $xy'+y=(xy)'$

解: 令$u=xy$

$$LHS=xy'+y=(xy)'=du/dx$$

$$RHS=y\ln(xy)=\frac{1}{x}xy\ln(xy)=\frac{1}{x}u\ln u$$

$$\therefore\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}u\ln u$$

$$\therefore\frac{du}{u\ln u}=\frac{1}{x}dx,\therefore\ln\ln u=\ln x+C,\quad\therefore\ln u=e^{\ln x+C}=Cx$$

$$\therefore\ln xy=Cx,\therefore y=\frac{1}{x}e^{Cx}$$

6.变量替换法

例: P251-2(2)

$$xyy''+x(y')^2-yy'=0$$

分析:$xyy''+x(y')^2=x(yy''+y'y')$

$$=x(yy')'=\frac{1}{2}x((y^2)')'=\frac{1}{2}x(y^2)''$$

解: 令$u=(y^2)'$　　$LHS=\frac{1}{2}u'x-\frac{1}{2}u$　　$RHS=0$

$\therefore u'x-u=0$　　$\therefore u=Cx$

$\therefore (y^2)'=Cx$

$\therefore y^2=\frac{1}{2}Cx^2+C_1$

练习: P251-1(3)(4)(10)类似

2 可降阶的ODE

- 不显含y：$F(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)}, x) = 0, k > 0$
- 不显含x：$F(y, y^{(1)}, \ldots y^{(n)}) = 0$

$$1.F(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots y^{(n)}, x) = 0, k > 0$$

例: $xy''' - 3y'' = 2x - 3$

解: 令 $y'' = p$ $\therefore xp' - 3p = 2x - 3 \quad \therefore p' - \frac{3}{x}p = 2 - \frac{3}{x}$

$$\therefore (p' - \frac{3}{x}p)x^{-3} = (2 - \frac{3}{x})x^{-3}$$

$$\therefore (px^{-3})' = (2 - \frac{3}{x})x^{-3} = 2x^{-3} - 3x^{-4}$$

$$\therefore px^{-3} = \int 2x^{-3} - 3x^{-4} dx = -x^{-2} + x^{-3} + c$$

$$\therefore p = -x + 1 + cx^3$$

$$\therefore y'' = -x + 1 + cx^3 \therefore y' = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{c}{4}x^4 + c_1$$

$$\therefore y' = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{c}{20}x^5 + c_1 x + c_2$$

1.$F(y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots y^{(n)}, x) = 0, k > 0$

例: $\sqrt{1+(y')^2} = (1-x)y'', y'(0) = 0, 0 \le x < 1$

解: 令$y' = p \quad \sqrt{1+p^2} = (1-x)p'$

$$\therefore \sqrt{1+p^2} = (1-x)\frac{dp}{dx}, \text{即} \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = -\frac{dx}{x-1}$$

$$\because \int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \ln(p+\sqrt{1+p^2})+C, \int -\frac{dx}{x-1} = -\ln|x-1|+C$$

$$\therefore (p+\sqrt{1+p^2})(x-1)=C \quad \therefore C = -1$$

$$\therefore 1+p^2=(-\frac{1}{x-1}-p)^2=\frac{1}{(x-1)^2}+2p\frac{1}{x-1}+p^2$$

$$\therefore 1=\frac{1}{(x-1)^2}+2p\frac{1}{x-1} \quad \therefore \frac{x-1}{2}-\frac{1}{2(x-1)}=y' \quad \therefore y=\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1}{2}\ln(x-1)+C$$

$2.F(y, y^{(1)}, \ldots y^{(n)}) = 0$

方法: $y' = p(y), y'' = \dfrac{dy'}{dx} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}\dfrac{dy}{dx} = p'p$ 思想:把y作为自变量.

例: $(y'')^2 - y' = 0$

$\because y'' = \dfrac{dp}{dy}y \quad \therefore (y'')^2 - y' = (\dfrac{dp}{dy}p)^2 - p = 0$

$\therefore (p'p)^2 - p = 0$, 即 $p' = \dfrac{1}{\sqrt{p}} \quad \therefore \sqrt{p}dp = dy$, 即 $\dfrac{2}{3}p^{\frac{3}{2}} = y + C$

$\therefore y' = [\dfrac{3}{2}(y+C)]^{\frac{2}{3}} \quad \therefore [\dfrac{3}{2}(y+C)]^{-\frac{2}{3}}dy = dx \quad \therefore 2[\dfrac{3}{2}(y+C)]^{\frac{1}{3}} = x + C_1$

$\therefore y = \dfrac{1}{12}(x+C_1)^3 + C_2$

- *n*阶线性ODE解的结构

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=0 \qquad (1)$$

的解集合是一个n维线性空间.

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_n(t)x=f(t) \qquad (2)$$

的通解为 $x(t)=x_0(t)+\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(t),$

其中$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$为(1)的$n$个线性无关的解, $x_0(t)$为(2)的一个特解.

Def. 设$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$是定义在区间$I$上的函数, 如果存在不全为0的常数$c_1,c_2,\cdots,c_m$, 使得$\forall t\in I$,

$$c_1\varphi_1(t)+c_2\varphi_2(t)+\cdots+c_m\varphi_m(t)\equiv 0,$$

则称$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性相关, 否则称$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m$在区间$I$上线性无关.

Thm2. 函数组$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m\in C^m(I)$在区间$I$上线性相关的必要条件是$W(t)=W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_m](t)\equiv 0$.

Thm3. 设函数$a_k(t)\in C(I)(k=1,2,\cdots,n),\varphi_1,\varphi_2,\cdots,$
$\varphi_n\in C^n(I)$为n次齐次线性ODE

$$x^{(n)}+a_1(t)x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(t)x'+a_n(t)x=0 \quad (1)$$

的n个解,则以下命题等价:

(1) $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$在区间$I$上线性相关.

(2) $W(t)=W[\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n](t)\equiv 0,\forall t\in I$.

(3) 存在$t_0\in I$,使得$W(t_0)=0$.

Remark: $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$, 则

1) $1, x, x^2, x^3, \cdots, x^n$ 线性无关;

2) $1, e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, x^2e^{\lambda x}, \cdots, x^ne^{\lambda x}$ 线性无关;

3) $1, \sin\alpha x, \cos\alpha x, \cdots, \sin n\alpha x, \cos n\alpha x$ 线性无关;

4) $1, e^{\alpha x}\sin\beta x, e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,$
$\cdots, x^ne^{\alpha x}\sin\beta x, x^ne^{\alpha x}\cos\beta x$ 线性无关.

下面给出判断函数组 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m$ 在区间 I 上线性相关的法则.

例（解的结构）已知三阶线性非齐次方程有解$x^3+x^2, x+x^2$，对应的齐次方程有解：$1, x$，则原非齐次方程的特解是______________.

解：$x^3+x^2-(x^2+x)=x^3-x$是一个齐次方程的解

$C_1+C_2x+C_3(x^3-x)$是该方程的通解

$\therefore x+x^2+C_1+C_2x+C_3(x^3-x)$是该非齐次方程的通解

3 高阶线性ODE

- 二阶线性*ODE*的常数变易法

Case1.已知齐次线性ODE的两个线性无关解

Case2.已知齐次方程的一个非零解

Case1.已知齐次线性ODE的两个线性无关解

设$x_1(t), x_2(t)$是齐次线性ODE $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ (3)

的两个线性无关解.则非齐次线性ODE

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \qquad (4)$$

的通解具有如下形式： $x(t) = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t).$

$x' = c_1'x_1 + c_2'x_2 + c_1x_1' + c_2x_2'.$

为避免x''中出现c_1''和c_2'', 假设 $c_1'x_1 + c_2'x_2 = 0.$ (5)

于是$x' = c_1x_1' + c_2x_2'.$ $x'' = c_1'x_1' + c_2'x_2' + c_1x_1'' + c_2x_2''.$

将x, x', x''代入方程(4),注意到x_1, x_2为(3)的解,则

$$c_1'x_1' + c_2'x_2' = f(t). \qquad (6)$$

例:已知t和e^t为齐次线性ODE $(t-1)x''-tx'+x=0$的两个线性无关解,求以下非齐次线性ODE的通解

$$(t-1)x''-tx'+x=(t-1)^2.$$

解:设非齐次线性ODE的通解为$x(t)=u(t)t+v(t)e^t$,

且满足 $$u'(t)t+v'(t)e^t=0. \qquad (*)$$

于是 $$x'=u(t)+v(t)e^t, x''=u'(t)+v'(t)e^t+v(t)e^t.$$

将x, x', x''代入非齐次方程,并注意t和e^t为对应的齐次方程的解,有 $$u'(t)+v'(t)e^t=t-1. \qquad (**)$$

联立$(*)(**)$得 $$u'=-1, v'=te^{-t}.$$

积分得 $$u=-t+c_1, v=-e^{-t}-te^{-t}+c_2.$$

因此非齐次方程的通解为

$$x(t)=(-t+c_1)t+(-e^{-t}-te^{-t}+c_2)e^t. \square$$

例:解下面方程$(t-1)x''-tx'+x=(t-1)^2$.

解:原式可化为$(t-1)x''-(t-1)x'-x'+x=(t-1)^2$.

注:本题也可以通过换
降低阶数

即$(t-1)(x''-x')-(x'-x)=(t-1)^2 \Leftrightarrow (t-1)(x'-x)'-(x'-x)=(t-1)^2$

令$y=(x'-x)$ 即$(t-1)y'-y=(t-1)^2 \Leftrightarrow (t-1)^{-1}y'-(t-1)^{-2}y=1$

$\therefore ((t-1)^{-1}y)'=1 \quad \therefore (t-1)^{-1}y=t+C_1$

$\therefore y=C_1(t-1)+t(t-1)=t^2-(1-C_1)t-C_1$

$\therefore x'-x=t^2-(1-C_1)t-C_1 \quad \therefore (e^{-t}x)'=e^{-t}(x'-x)=e^{-t}(t^2-(1-C_1)t-C_1)$

$\therefore e^{-t}x=\int e^{-t}(t^2-(1-C_1)t-C_1)=\int e^{-t}(t^2-2t)dt+\int(1+C_1)e^{-t}(t-1)dt+\int e^{-t}$

$\therefore e^{-t}x=-e^{-t}t^2-(1+C_1)e^{-t}t-e^{-t}+C_2$

$\therefore x=-t^2-(1+C_1)t-1+C_2e^t$

Case2.已知齐次方程的一个非零解

已知齐次线性ODE $$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \quad (3)$$

的一个非零解$x_0(t)$.设非齐次线性ODE

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t) \quad (4)$$

的通解形如 $$x(t) = c(t)x_0(t).$$

将x及$x' = c'x_0 + cx_0'$, $x'' = c''x_0 + 2c'x_0' + cx_0''$代入(4)得

$$x_0c'' + [2x_0' + px_0]c' + [x_0'' + px_0' + qx_0]c = f(t).$$

$$x_0c'' + [2x_0' + p(t)x_0]c' = f(t). \quad (7)$$

方程(7)中不含未知函数c,令$u(t) = c'(t)$,则(7)降阶为

$$x_0u' + [2x_0' + p(t)x_0]u = f(t). \quad (8)$$

求解此方程,得出$u(t)$,再利用$u(t) = c'(t)$求出$c(t)$,

从而得到(4)的通解$x(t) = c(t)x_0(t)$.

例: 已知$x_0(t)=e^t$为方程$x''-2x'+x=0$的解. 求$x''-2x'+x=e^t/t$的通解.

解: 设通解为$x(t)=c(t)e^t$, 则

$$x'=(c+c')e^t,\quad x''=(c''+2c'+c)e^t.$$

将x,x',x''代入非齐次方程得$c''=1/t$. 于是

$$c(t)=t\ln|t|+(\lambda_1-1)t+\lambda_2.$$

通解为 $$x(t)=e^t\left[t\ln|t|+(\lambda_1-1)t+\lambda_2\right].\square$$

Question:要求二阶非齐次线性ODE的通解,是已知对应齐次线性ODE的一个非零解来得简单,还是已知对应齐次线性ODE的两个线性无关解简单?

- 二阶线性*ODE*的常数变易法

Case1.已知齐次线性ODE的两个线性无关解

$$x(t)=c_1(t)x_1(t)+c_2(t)x_2(t)\Rightarrow\begin{cases}c_1'x_1+c_2'x_2=0.\\ c_1'x_1'+c_2'x_2'=f(t).\end{cases}$$

Case2.已知齐次方程的一个非零解

$$x(t)=c(t)x_0(t).\ \Rightarrow x_0c''+[2x_0'+p(t)x_0]c'=f(t).$$

4 高阶常系数线性ODE

$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$的解，猜测具有如下形式$x(t)=e^{\lambda t}$

$e^{\lambda t}$是$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$的解

$\Leftrightarrow \lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

如果n次方程$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$有$n$个不同的实根，记作$\lambda_1,\ldots,\lambda_n$

自然得到原方程通解为$C_1e^{\lambda_1 x}+\ldots+C_ne^{\lambda_n x}$

但是λ可能是复数！ λ可能出现重根

复数：形式上认可$(\exp(\lambda t))'=\lambda\exp(\lambda t)$

可以接受$\exp(\lambda t)$也是原方程的根，但是λ为复数的时候，$\exp(\lambda t)$是复根

(1)λ可能是复数

定理.实系数多项式的复根一定共轭成对出现,

即如果$\lambda = a + ib$是原方程的根,那么$\lambda = a - ib$也是原方程的根

n次方程$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$若有$n$个不同的根,

则是$\lambda_1, \ldots, \lambda_m; a_1 + ib_1, a_1 - ib_1, \ldots, a_{(n-m)/2} + ib_{(n-m)/2}, a_{(n-m)/2} - ib_{(n-m)/2}$

$$e^{(a_1+ib_1)t} = \exp(a_1 t)\frac{\cos(b_1 t) + i\sin(b_1 t)}{2}$$

$$e^{(a_1-ib_1)t} = \exp(a_1 t)\frac{\cos(b_1 t) + i\sin(b_1 t)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exp(a_1 t)\cos(b_1 t) \\ \exp(a_1 t)\sin(b_1 t) \end{cases}$$

$e^{\lambda t}$是$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$的解

$\Leftrightarrow \lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0$

n次方程$x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$若有$n$个不同的实根,

则是$\lambda_1,\ldots,\lambda_m;a_1+ib_1,a_1-ib_1,\ldots,a_{(n-m)/2}+ib_{(n-m)/2},a_{(n-m)/2}-ib_{(n-m)/2}$

那么, 原方程的有以下n个线性无关的特解

$\exp(\lambda_1 t),\ldots,\exp(\lambda_m t),$

$\exp(a_1t)\sin(b_1t),\exp(a_1t)\cos(b_1t),$

$\ldots,$

$\exp(a_{(n-m)/2}t)\sin(b_{(n-m)/2}t),\exp(a_{(n-m)/2}t)\cos(b_{(n-m)/2}t)$

(2)λ有重根

Thm.

(a) 设λ是(2)的$k(1<k\le n)$重实根, 则$e^{\lambda t}, te^{\lambda t},\cdots,$ $t^{k-1}e^{\lambda t}$是方程(1)的k个线性无关的实解.

(b) 设$\alpha \pm i\beta$是(2)的一对$k(1<k\le n/2)$重复根, 则

$$e^{\alpha t}\cos\beta t,\quad te^{\alpha t}\cos\beta t,\quad \cdots\quad t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$e^{\alpha t}\sin\beta t,\quad te^{\alpha t}\sin\beta t,\quad \cdots\quad t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t$$

是方程(1)的$2k$个线性无关的实解.$\square$

4 高阶常系数线性ODE【总结】

$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$的解，猜测具有如下形式$x(t) = e^{\lambda t}$

$e^{\lambda t}$是$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} x' + a_n x = 0$的解

$\Leftrightarrow \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$

(1)不论实复，λ是一重根，$e^{\lambda t}$是原式的一个解

(2)不论实复，λ是k重根，$e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1} e^{\lambda t}$是原式的k个解

(3)把写出来的解里面，复的给换成实的

例$:y^{(4)}+2y''+y=0$

解:对应的方程是$\lambda^4+2\lambda^2+1=0$,得到$i(2重),-i(2重)$

$\exp(it),t\exp(it)\exp(-it),t\exp(-it)$ 是原式的解

$\exp(it)=\cos t+i\sin t$

$t\exp(it)=t\cos t+it\sin t$

将实部和复部分别取出来

答案$:C_1\sin t+C_2\cos t+C_3t\sin t+C_4t\cos t$

例: $x^{(5)}-3x^{(4)}+4x'''-4x''+3x'-x=0.$

解: 方程对应的特征方程为

$$\lambda^5-3\lambda^4+4\lambda^3-4\lambda^2+3\lambda-1=0.$$

即$(\lambda-1)^3(\lambda^2+1)=0.$于是特征根为$\lambda=1$(3重)和$\lambda=\pm i.$方程的通解为

$$x(t)=c_1e^t+c_2te^t+c_3t^2e^t+c_4\cos t+c_5\sin t.\square$$

4 高阶常系数线性ODE(总结)

- 解$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$

  - 写出n次方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$
  - 求出所有根
    - 如果是单重根,$\exp(\lambda t)$即为一个解, $\lambda\in\mathbb{C}$
    - 如果是k重根,$\exp(\lambda t), t\exp(\lambda t), \ldots, t^{k-1}\exp(\lambda t)$即为一个解, $\lambda\in\mathbb{C}$
    - 若λ为复数,$\exp(\lambda t)$应当改成$\exp(at)\cos(bt), \exp(at)\sin(bt)$,

      $\lambda=a+ib$
  - 总之,1重根提供1个解, k重根提供k个解
  - n个根(计算重数)提供n个解, 已经占满了解空间.□

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0. \qquad (1)$$

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t) \qquad (2)$$

$f(t)=p(t)e^{\lambda t}$,其中$\lambda\in\mathbb{C}$, $p(t)$为m次实多项式.

$case1.\lambda$不是 $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根

猜测:(2)的解形如$q(t)\exp(\lambda t)$ $q(t)$为m次实多项式.

升 次 方.

$case2.\lambda$是 $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的k重根

猜测:(2)的解形如$q(t)t^k\exp(\lambda t)$ $q(t)$为m次实多项式.

例. $y''-2y'+y=6(x+1)e^x$

第一步. 求$y''-2y'+y=0$的通解

其特征方程为$\lambda^2-2\lambda+1=0$,有二重根1

自然写出其通解:$c_1\exp(x)+c_2x\exp(x)$

第二步. 求$y''-2y'+y=6(x+1)e^x$的通解

$6(x+1)e^x$形如$P(x)\exp(\lambda x)$, $\lambda=1$是二重根

升2次方, 猜测特解是

$\exp(x)(ax+b)x^2$

$$y=\exp(x)(ax+b)x^2=\exp(x)(ax^3+bx^2)$$

$$y'=\exp(x)(ax^3+(b+3a)x^2+2bx)$$

$$y''=\exp(x)(ax^3+(b+6a)x^2+(4b+6a)x+2b)$$

$$6(x+1)=y''-2y'+y=(6ax+2b)\exp(x) \qquad \therefore a=1, b=3$$

$\therefore \exp(x)(x+3)x^2$是特解 $y=c_1\exp(x)+c_2x\exp(x)+\exp(x)(x+3)x^2$即通解

例. $y''+4y=\cos 2x, y(0)=0, y'(0)=2$

第一步. 求$y''+4y=0$的通解

其特征方程为$\lambda^2+4=0$,有一重根2i,一重根$-2i$

自然写出其通解:$c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

考查方程:

第二步. 求$y''+4y=\cos 2x$的通解

$y''+4y=\exp(2ix)=\cos 2x+i\sin 2x$

$\exp(2ix)$形如$1\times\exp(2ix)$, $\lambda=2i$是1重根　升1次方, 猜测特解是

$y=kx\exp(2ix)$　　$y'=k(1+2ix)\exp(2ix)$　　$\exp(2ix)kx$

$y''=k(4i-4x)\exp(2ix)$

$\therefore\ y''+4y=4ik\exp(2ix)=\exp(2ix)\Rightarrow k=-i/4$

$y=-ix\exp(2ix)/4=-ix(\cos 2x+i\sin 2x)/4=x\sin 2x/4-ix\cos 2x/4$

取出解的实部, $y=x\sin 2x/4$

$y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+x\sin 2x/4$即为通解

例. $y''-2y'+y=6(x+1)e^{x}+x^{2}\sin x+1$

方程的右侧没法归结到特例$P(x)\exp(\lambda x)$!

分别解以下三个方程

$$y''-2y'+y=6(x+1)e^{x}$$

$$y''-2y'+y=x^{2}\sin x$$

$$y''-2y'+y=1$$

把他们的特解叠加起来即可!

4 高阶常系数线性ODE(总结)

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$$

- 先解$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=0$
  - 写出n次方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$
  - 求出所有根
    - 如果是单重根, $\exp(\lambda t)$即为一个解, $\lambda\in\mathbb{C}$
    - 如果是k重根, $\exp(\lambda t), t\exp(\lambda t),\ldots,t^{k-1}\exp(\lambda t)$即为一个解, $\lambda\in\mathbb{C}$
    - 若λ为复数, $\exp(\lambda t)$应当改成$\exp(at)\cos(bt),\exp(at)\sin(bt)$,

      $\lambda=a+ib$
  - 总之,1重根提供1个解, k重根提供k个解
  - n个根(计算重数)提供n个解, 已经占满了解空间.□

4 高阶常系数线性ODE(总结)

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$$

- 再找$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$的一个特解
- 假设$f(t)$形如$\exp(\lambda t)P(t)$, $P(t)$为多项式, $\lambda\in\mathbb{C}$
- λ不是特征方程的根
  - 设特解为$Q(t)\exp(\lambda t)$, $\deg Q=\deg P$
  - 待定系数解$Q(t)$
- λ是特征方程的k重根
  - 设特解为$Q(t)t^k\exp(\lambda t)$, $\deg Q=\deg P$(根据阶数升次方!)
  - 待定系数解$Q(t)$

4 / 高阶常系数线性ODE

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$$

- 再找$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}x'+a_nx=f(t)$的一个特解
- 假设$f(t)$形如$\exp(\lambda t)P(t)$, $P(t)$为多项式, $\lambda\in\mathbb{C}$
- λ不是特征方程的根
  - 设特解为$Q(t)\exp(\lambda t)$, $\deg Q=\deg P$
  - 待定系数解$Q(t)$
- λ是特征方程的k重根
  - 设特解为$Q(t)t^k\exp(\lambda t)$, $\deg Q=\deg P$(根据阶数升次方!)
  - 待定系数解$Q(t)$

4 高阶常系数线性ODE(欧拉方程)

欧拉方程. 通过换元转化为常系数线性*ODE*

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = f(t),$$

当$t>0$时, 令$t=e^s$, 则 $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx}{ds}\cdot\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{1}{t}\dfrac{dx}{ds}$,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\frac{dx}{ds}\right) = -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{t}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

$$= -\frac{1}{t^2}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{t}\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{1}{t^2}\left(\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\right),$$

例：$t^2\frac{d^2x}{dt^2}+2t\frac{dx}{dt}+2x=0.$

解：令$s=\ln|t|$，则 $t\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{ds}$，$t^2\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2x}{ds^2}-\frac{dx}{ds}$，代入原方程得$\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{dx}{ds}+2x=0$.该方程的特征方程为$\lambda^2+\lambda+2=0$，特征根为$\lambda=(-1\pm i\sqrt{7})/2$，通解为

$$x=e^{-s/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}s}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{7}s}{2}\right).$$

于是原方程的通解为

$$x=|t|^{-1/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{7}\ln|t|}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{7}\ln|t|}{2}\right).\square$$