

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМІДОВИЧ

数学分析 习题集题解

山东科学技术出版社



Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(一)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

В. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (1)/费定
晖编.—2版—济南:山东科学技术出版社, 1999. 9

ISBN 7-5331-0099-9

I. В… II. 费… III. 数学分析-高等学校-解题 IV. 0
17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43960 号

В. П. 吉米多维奇
~~数学分析习题集题解~~
(一)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东莒县印刷厂印刷

787mm×1092mm 32开本 15 125印张 331千字

1999年11月第2版第8次印刷

印数: 212 601—222 600

ISBN 7—5331—0099—9

0·5 定价:13.30元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自50年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出

版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有楼世拓、姚琦、陈兆宽同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

目 录

第一章 分析引论.....	1
§ 1. 实数.....	1
§ 2. 叙列的理论	25
§ 3. 函数的概念	95
§ 4. 函数的图形表示法.....	128
§ 5. 函数的极限.....	226
§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶.....	357
§ 7. 函数的连续性.....	375
§ 8. 反函数. 用参数表示的函数	425
§ 9. 函数的一致连续性.....	444
§ 10. 函数方程	463

第一章 分析引论

§ 1. 实数

1° 数学归纳法 为了证明某定理对任意的自然数 n 为真, 只须证明下面两点就够了: (1) 这定理对 $n = 1$ 为真, (2) 设这定理对任何的一个自然数 n 为真, 则它对其次的一自然数 $n + 1$ 也为真.

2° 分割 假设分有理数为 A 和 B 两类, 使其满足于下列条件: (1) 两类均非空集, (2) 每一个有理数必属于一类, 且仅属于一类, (3) 属于 A 类(下类)的任一数小于属于 B 类(上类)的任何数, 这样的分类法称为分割. (a) 若或是下类 A 有最大的数, 或是上类 B 有最小的数, 则分割 A/B 确定一个有理数. (b) 若 A 类无最大数, 而 B 类亦无最小数, 则分割 A/B 确定一个无理数. 有理数和无理数统称为实数*.

3° 绝对值 假若 x 为实数, 则用下列条件所确定的非负数 $|x|$, 称为 x 的绝对值:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0 \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

对于任何的实数 x 和 y , 有以下的不等式或立:

$$|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|.$$

4° 上确界和下确界 设 $X = \{x\}$ 为实数的有界集合. 若:

* 以后若没有相反的附带说明, 数这个字我们将理解为实数.

(1) 每一个 $x \in X^*$ 满足不等式

$$x \geq m;$$

(2) 对于任何的 $\epsilon > 0$, 存在有 $x' \in X$, 使

$$x' < m + \epsilon,$$

则数 $m = \inf\{x\}$ 称为集合 X 的下确界.

同样, 若:

(1) 每一个 $x \in X$ 满足不等式

$$x \leq M,$$

(2) 对于任何的 $\epsilon > 0$, 存在有 $x'' \in X$, 使

$$x'' > M - \epsilon,$$

则数 $M = \sup\{x\}$ 称为集合 X 的上确界.

若集合 X 下方无界, 则通常说

$$\inf\{x\} = -\infty;$$

若集合 X 上方无界, 则认为

$$\sup\{x\} = +\infty.$$

5° 绝对误差和相对误差 设 $a (a \neq 0)$ 是被测的量的准确数值, 而 x 是这个量的近似值, 则

$$\Delta = |x - a|$$

称为绝对误差, 而

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

称为被测的量的相对误差.

假若 x 的绝对误差不超过它的第 n 个有数数字的单位的一半, 则说 x 有 n 位准确的数字.

利用数学归纳法求证下列等式对任何自然数 n 皆成立:

$$1. \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

* 符号 $x \in X$ 表示 x 属于集合 X .

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设对于 $n = k$ (自然数) 时, 等式成立, 即

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + k + (k + 1) &= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时等式也成立.

于是, 由数学归纳法知, 对于任何自然数 n , 有

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$2. \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6},$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \cdots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)] \\ &= \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$, 时等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 = (1 + 2 + \cdots + k)^2,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & 1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k + 1)^3 \\ &= (1 + 2 + \cdots + k)^2 + (k + 1)^3 \\ &= \frac{k^2(k + 1)^2}{4} + (k + 1)^3 \\ &= \frac{(k + 1)^2(k + 2)^2}{4} \\ &= \left\{ \frac{(k + 1)[(k + 1) + 1]}{2} \right\}^2 \\ &= [1 + 2 + \cdots + (k + 1)]^2, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

4. $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$

证 当 $n = 1$ 时, 等式成立.

设 $n = k$ 时, 等式成立, 即

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} = 2^k - 1,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{k-1} + 2^k \\ &= (2^k - 1) + 2^k = 2^{k+1} - 1, \end{aligned}$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

5. 设 $a^{(n)} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$ 及 $a^{(0)} = 1$, 求证

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)},$$

其中 C_n^m 是由 n 个元素中选取 m 个的组合数, 由此推出牛顿的二项式公式.

证 当 $n=1$ 时, 由于

$$[a+b]^{(1)} = a+b$$

及
$$\sum_{m=0}^1 C_1^m a^{(1-m)} b^{(m)} = a+b,$$

所以等式成立.

设 $n=k$ 时, 等式成立, 即

$$(a+b)^{(k)} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{(k-m)} b^{(m)}. \quad (1)$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$(a+b)^{(k+1)} = (a+b)^{(k)} \cdot (a+b-kh). \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned} (a+b)^{(k+1)} &= (a+b-kh) \cdot \sum_{m=0}^k C_k^m a^{(k-m)} b^{(m)} \\ &= (a+b-kh) \{ C_k^0 a^{(k)} b^{(0)} + C_k^1 a^{(k-1)} b^{(1)} \\ &\quad + \cdots + C_k^k a^{(0)} b^{(k)} \} \\ &= \{ (a-kh) + b \} C_k^0 a^{(k)} b^{(0)} \\ &\quad + \{ [a-(k-1)h] + (b-h) \} C_k^1 a^{(k-1)} b^{(1)} \\ &\quad + \cdots + \{ a + (b-kh) \} C_k^k a^{(0)} b^{(k)} \\ &= C_k^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + C_k^0 a^{(k)} b^{(1)} + C_k^1 a^{(k)} b^{(1)} \\ &\quad + C_k^1 a^{(k-1)} b^{(2)} + \cdots + C_k^k a^{(1)} b^{(k)} \\ &\quad + C_k^k a^{(0)} b^{(k+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + (C_k^0 + C_k^1) a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \cdots + (C_k^{k-1} + C_k^k) a^{(1)} b^{(k)} + C_{k-1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)} \\
&= C_{k+1}^0 a^{(k+1)} b^{(0)} + (C_{k+1}^0 a^{(k)} b^{(1)} \\
&\quad + \cdots + (C_{k+1}^k a^{(1)} b^{(k)} + C_{k+1}^{k+1} a^{(0)} b^{(k+1)}) \\
&= \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},
\end{aligned}$$

故由 $(a+b)^{(k)} = \sum_{m=0}^k C_k^m a^{(k-m)} b^{(m)}$ 可推得下式成立:

$$(a+b)^{(k+1)} = \sum_{m=0}^{k+1} C_{k+1}^m a^{(k+1-m)} b^{(m)},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$(a+b)^{(n)} = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{(n-m)} b^{(m)}. \quad (3)$$

在式子

$$a^{(n)} = a(a-h)\cdots[a-(n-1)h]$$

中, 令 $h = 0$, 即得

$$a^{(n)} = a^n. \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式, 得牛顿二项式公式

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m a^{n-m} b^m.$$

6. 证明贝努里不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n.$$

式中 x_1, x_2, \cdots, x_n 是符号相同且大于 -1 的数.

证 当 $n = 1$ 时, 此式取等号.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k) \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_k$,

则对于 $n=k+1$ 时, 由于 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 大于 -1 , 所以 $1+x_i > 0$. 因而有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & \geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_k)(1+x_{k+1}) \\ & = (1+x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}) \\ & \quad + (x_1x_{k+1}+x_2x_{k+1}+\cdots+x_kx_{k+1}). \end{aligned}$$

由于 $x_ix_j \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_{k+1}) \\ & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_{k+1}, \end{aligned}$$

即对于 $n=k+1$ 时, 不等式也成立,

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$\begin{aligned} & (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) \\ & \geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n. \end{aligned}$$

7. 证明若 $x > -1$, 则不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (n > 1)$$

为真, 且仅当 $x=0$ 时, 等号成立.

证 只要在 6 题的贝努里不等式中, 设

$$x_i = x \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

即得证

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

从 6 题的证明过程中看出, 仅当 $x=0$ 时, 上式才取等号.

8. 证明不等式

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证 当 $n = 2$, 因为 $\left(\frac{2+1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} > 2 = 2!$, 故不等式成立.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 则

$$k! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$(k+1)! < \left(\frac{k+1}{2}\right)^k (k+1) = 2 \left(\frac{k+1}{2}\right)^{k+1}.$$

由于

$$\left(\frac{k+2}{k+1}\right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > 2 (k = 1, 2, \dots),$$

从而有

$$(k+1)! < \left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]^{k+1},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立.

于是, 对于任何自然数 n , 有

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

9. 证明不等式

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! > [(n+1)!]^n \quad \text{当 } n > 1.$$

证 当 $n = 2$ 时, 因为 $2! \cdot 4! = 48$, 及 $[(2+1)!]^2 = 36$, 所以, $2! \cdot 4! > [(2+1)!]^2$, 故不等式成立.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$$2! \cdot 4! \cdots (2k)! > [(k+1)!]^k,$$

则对于 $n = k + 1$ 时, 有

$$2! \cdot 4! \cdots (2k+2)! > [(k+1)!]^k (2k+2)!$$

$$= [(k+1)!]^{k+1}(k+2)(k+3)\cdots(2k+2) \\ > [(k+1)!]^{k+1}(k+2)^{k+1} = [(k+2)!]^{k+1},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立. 于是, 据归纳法原理, 本题证毕.

10. 证明不等式

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

证 当 $n = 1$ 时, 因为 $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$, 不等式显然成立.

设 $n = k$ 时, 不等式成立, 即

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

对于 $n = k + 1$ 而言, 由于

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \\ = \frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2},$$

故只要证

$$\frac{\sqrt{2k+1}}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即证 $(2k+1)(2k+3) < (2k+2)^2$,

而上述不等式由于

$$4k^2 + 8k + 3 < 4k^2 + 8k + 4,$$

因而是成立的. 于是, 最后得

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}},$$

即对于 $n = k + 1$ 时, 不等式也成立. 由归纳法证毕.

11. 设 c 为正整数, 而不为整数的平方, 且 A/B 为确定实数 \sqrt{c} 的分割, 其中 B 类包含所有合于 $b^2 > c$ 的正有理数 b , 而 A 类包含所有其余的有理数. 求证在 A 类中无最大数, 而在 B 类中无最小数.

证 设 $a \in A$. 若 $a \leq 0$, 则显然存在 $a' > a$ ($a' > 0$) 且 $a' \in A$. 故可设 $a > 0$, 于是 $a^2 \leq c$. 但不可能有 $a^2 = c$. 因若 $a^2 = c$, 设 $a = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^2}{q^2} = c$. 由于 c 是正整数, 而 p^2 与 q^2 也是互质的, 故必 $q = 1$, 从而 $c = p^2$, 此与假定矛盾, 故必 $a^2 < c$. 下而我们证明, 存在正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^2 < c,$$

于是 $a + \frac{1}{n}$ 也属于 A .

上述不等式相当于:

$$a^2 + \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c, \quad \frac{2a}{n} + \frac{1}{n^2} < c - a^2,$$

若 n 满足不等式

$$\frac{2a + 1}{n} < c - a^2,$$

则上面的第二个不等式也自然能满足了.

为此, 只要取

$$n > \frac{2a + 1}{c - a^2},$$

而这是恒为可能的. 因此, 不论 a 为 A 类内的怎样的数, 在 A 类内总能找到大于它的数, 故 A 类中无最大数.

同法可证 B 类中无最小数.

实质上, 此处分割 A/B 确定了一个无理数 \sqrt{c} .

12. 确定数 $\sqrt[3]{2}$ 的分割 A/B 用下面的方法来作成: A 类包含所有的有理数 a , 而 $a^3 < 2$; B 类包含所有其余的有理数. 证明在 A 类中无最大数, 而在 B 类中也无最小数.

证 设 $a \in A$, 即 $a^3 < 2$. 下证必可取正整数 n , 使

$$\left(a + \frac{1}{n}\right)^3 < 2.$$

事实上, 上式相当于 $\frac{3a^2}{n} + \frac{3a}{n^2} + \frac{1}{n^3} < 2 - a^3$. 若 $a \leq 0$, 取 $n = 1$ 即可. 若 $a > 0$, 注意到 $n \geq 1$, 即知若取 n 充分大, 使 $n > \frac{3a^2 + 3a + 1}{2 - a^3}$, 则上列各式均成立. 从而 $a + \frac{1}{n} \in A$. 故 A 中无最大数.

下设 $b \in B$, 则 $b^3 \geq 2$. 下证不可能有 $b^3 = 2$. 事实上, 若 $b^3 = 2$, 设 $b = \frac{p}{q}$, p 与 q 为互质的正整数, 则 $\frac{p^3}{q^3} = 2$, $p^3 = 2q^3$, 从而 p^3 为偶数, 因此 p 必为偶数: $p = 2r$, r 为正整数. 由于 q 与 p 是互质的, 故 q 必为奇数, 从而 q^3 也为奇数. 但 $q^3 = 4r^3$, 故 q^3 又必是偶数, 因此矛盾. 由此可知必有 $b^3 > 2$. 仿前面之证, 可取正整数 n , 使 $\left(b - \frac{1}{n}\right)^3 > 2$, 从而 $b - \frac{1}{n} \in B$. 由此可知 B 类中无最小数. 实质上, 此处分割 A/B 确定了一个无理数 $\sqrt[3]{2}$.

13. 作出适当的分割, 然后证明等式:

(a) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$;

(b) $\sqrt{2} \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

证 (a) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B : 一切有理数 $a \leq 0$ 以及满足 $a^2 < 2$ 的正有理数 a 都归于 A 类, 一切满足 $b^2 > 2$ 的

正有理数 b 归入 B 类. 又作确定 $\sqrt{8}$ 的分割 A'/B' : 一切有理数 $a' \leq 0$ 以及满足 $a'^2 < 8$ 的正有理数 a' 归入 A' 类, 一切满足 $b'^2 > 8$ 的正有理数 b' 归入 B' 类. 我们知道, 根据实数加法的定义, 满足不等式.

$a + a' < c < b + b'$ (对任何 $a \in A, b \in B, a' \in A', b' \in B'$)

的唯一实数 c 就是 $\sqrt{2} + \sqrt{8}$. 因此, 如果我们能证明恒有 $(a + a')^2 < 18$ (当 $a + a' > 0$ 时), $(b + b')^2 > 18$, 则有 $a + a' < \sqrt{18} < b + b'$. 于是得知 $\sqrt{18} = c = \sqrt{2} + \sqrt{8}$.

若 $a + a' > 0$, 则 a 与 a' 中至少有一个为正, 从而由 $a^2 a'^2 < 16$ 知 $aa' < 4$, 从而 $(a + a')^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' < 2 + 8 + 8 = 18$; 同样, 因 $b^2 > 2, b'^2 > 8, b > 0, b' > 0$, 故 $b^2 b'^2 < 16, bb' > 4, (b + b')^2 = b^2 + b'^2 + 2bb' > 2 + 8 + 8 = 18$. 于是证毕.

(6) 作确定 $\sqrt{2}$ 的分割 A/B 如 (a) 中所示, 再作确定 $\sqrt{3}$ 的分割 A_1/B_1 : 一切有理数 $a_1 \leq 0$ 以及满足 $a_1^2 < 3$ 的正有理数 a_1 归入 A_1 类, 一切满足 $b_1^2 > 3$ 的正有理数 b_1 归入 B_1 类. 根据实数乘法的定义, 满足

$aa_1 < c_1 < bb_1$ (对任何 $a \in A, a > 0, a_1 \in A_1, a_1 > 0, b \in B, b_1 \in B_1$)

的(正)实数 c_1 存在唯一, 它就是 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. 但由于当 $a \in A, a > 0, a_1 \in A_1, a_1 > 0$ 时 $(aa_1)^2 < 6$, 而当 $b \in B, b_1 \in B_1$ 时, $(bb_1)^2 > 6$. 故恒有 $aa_1 < \sqrt{6} < bb_1$. 由此可知 $\sqrt{6} = c_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$. 证完.

14. 建立确定数 $2^{\sqrt{2}}$ 的分割.

解 先作分割 A_1/B_1 , 使之确定数 $\sqrt{2}$.

其次, 作分割 A/B , 其中 A 类包含全体负有理数、零以及满足下述条件的正有理数 a :

如果有 $\frac{p}{q}$ (p, q 互质) 属于 A_1 , 则有

$$a^q < 2^p;$$

而其余的正有理数归入 B 类.

这样的分割 A/B 就确定数 $2^{\sqrt{2}}$.

15. 求证任何非空且下方有界的数集有下确界, 而任何非空且上方有界的数集有上确界.

证 不失一般性, 只证本题的后半部分, 分两种情形:

(1) A 中有最大数 \bar{a} . 设 $a \in A$, 此时则有 $a \leq \bar{a}$, 说明 \bar{a} 为 A 的上界. 又由于 $\bar{a} \in A$, 故对 A 的任何上界 M , 均有 $\bar{a} \leq M$, 故 \bar{a} 为 A 的有上确界.

(2) A 中无最大数. 此时, 作分割 A_1/B_1 : 取集 A 的一切上界归入 B_1 类, 而其余的数归入 A_1 类. 这样, A 中一切数全部落在 A_1 内, A_1 及 A_2 均非空, 且 A_1 中的数小于 B_1 中的数, 这确实是一个实数分割, 易知由此分割所产生的实数 β 是 B_1 类中的最小数, 即 β 是 A 的最小上界, 从而 β 是 A 的上确界.

16. 证明一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中 m 及 n 为自然数, 且 $0 < m < n$) 的集合无最小及最大的元素. 并求集合的上确界及下确界.

证 令 E 表一切有理真分式 $\frac{m}{n}$ (式中正整数 m, n 满足 0

$\langle m < n \rangle$ 所成的集合. 对任何 $\frac{m}{n} \in E$, 显然 $\frac{m+1}{n+1} \in E$ 且 $\frac{m+1}{n+1} > \frac{m}{n}$, 又 $\frac{m^2}{n^2} \in E$, 且 $\frac{m^2}{n^2} < \frac{m}{n}$; 故 E 中既无最大数, 也无最小数. 显然

$$\sup E = 1, \quad \inf E = 0.$$

17. 有理数 r 满足不等式

$$r^2 < 2.$$

求这些有理数 r 所成集合的下确界和上确界.

解 用 E 表所有满足 $r^2 < 2$ 的有理数 r 所成的集合. 我们知道, 分割 A/B 确定无理数 $\sqrt{2}$, 这里 A 表由一切非正有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的正有理数 r 所成的类, B 表其余有理数构成的类, 并且已证 A 中无最大数, 于是

$$\sup E = \sup A = \sqrt{2}.$$

同样, 分割 A'/B' 确定无理数 $-\sqrt{2}$, 这里 B' 表由所有非负有理数以及满足 $r^2 < 2$ 的负有理数 r 构成的类, A' 表其余有理数构成的类, 并且 B' 中无最小数. 于是, 显然有

$$\inf E = \inf B' = -\sqrt{2}.$$

18. 设 $\{-x\}$ 为数的集合; 这些数是与 $x \in \{x\}$ 符号相反的数. 证明等式:

$$(a) \inf\{-x\} = -\sup\{x\}; \quad (b) \sup\{-x\} = -\inf\{x\}.$$

证 (a) 设 $\inf\{-x\} = m'$, 则有:

(1) 当 $-x \in \{-x\}$ 时, $-x \geq m'$;

(2) 对于任何的正数 ε , 存在有 $-x' \in \{-x\}$, 使

$$-x' < m' + \varepsilon.$$

由(1)及(2)推得:

(3) 当 $x \in \{x\}$ 时, $x \leq -m'$;

(4) 对于任何的正数 ϵ , 存在有 $x' \in \{x\}$, 使

$$x' > -m' - \epsilon.$$

由(3)及(4)知数 $-m' = \sup\{x\}$, 即 $m' = -\sup\{x\}$, 所以 $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$.

(5) 设 $\sup\{-x\} = M'$, 则有:

(5) 当 $-x \in \{-x\}$ 时, $-x \leq M'$;

(6) 对于任何的正数 ϵ , 存在有 $-x' \in \{-x\}$, 使

$$-x' > M' - \epsilon.$$

由(5)及(6)推得:

(7) 当 $x \in \{x\}$ 时, $x \geq -M'$;

(8) 对于任何的正数 ϵ , 存在有 $x' \in \{x\}$, 使

$$x' < -M' + \epsilon.$$

由(7)及(8)知数 $-M' = \inf\{x\}$, 即 $M' = -\inf\{x\}$, 所以, $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. 设 $\{x+y\}$ 为所有 $x+y$ 这些和的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$. 证明等式:

(a) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

(b) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$, 则有:

(1) 当 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$ 时, $x \geq m_1, y \geq m_2$;

(2) 对于任何的正数 ϵ , 存在有数 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$, 使

$$x' < m_1 + \frac{\epsilon}{2}, \quad y' < m_2 + \frac{\epsilon}{2}.$$

由(1)及(2)推得:

(3) 当 $x+y \in \{x+y\}$ 时(其中 $x \in \{x\}, y \in \{y\}$),

$$x + y \geq m_1 + m_2;$$

(4) 对于任何的正数 ε , 存在有 $x' + y' \in \{x + y\}$ (其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$), 使

$$x' + y' < (m_1 + m_2) + \varepsilon.$$

由(3)及(4)知数 $m_1 + m_2 = \inf\{x + y\}$, 即

$$\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

(6) 同法可证

$$\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}.$$

20. 设 $\{xy\}$ 为所有 xy 乘积的集合, 其中 $x \in \{x\}$ 及 $y \in \{y\}$, 且 $x \geq 0$ 及 $y \geq 0$. 证明等式:

$$(a) \inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\};$$

$$(b) \sup\{x\}\sup\{y\} = \sup\{xy\}.$$

证 (a) 设 $\inf\{x\} = m_1, \inf\{y\} = m_2$, 由于恒有 $x \geq 0, y \geq 0$. 故必 $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$. 于是

$$(1) \text{ 当 } x \in \{x\}, y \in \{y\} \text{ 时, } x \geq m_1 \geq 0, y \geq m_2 \geq 0;$$

(2) 对任何的正数 ε , 存在有数 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$, 使

$$0 \leq x' < m_1 + \varepsilon, 0 \leq y' < m_2 + \varepsilon.$$

由(1)及(2)推得:

$$(3) \text{ 当 } xy \in \{xy\}, \text{ 其中 } x \in \{x\}, y \in \{y\}, xy \geq m_1 m_2;$$

(4) 对于任何的正数 ε , 存在有 $x' y' \in \{xy\}$ (其中 $x' \in \{x\}, y' \in \{y\}$), 使

$$0 \leq x' y' < (m_1 + \varepsilon)(m_2 + \varepsilon) = m_1 m_2 + \varepsilon',$$

其中 $\varepsilon' = (m_1 + m_2)\varepsilon + \varepsilon^2$.

由(3)及(4)知数 $m_1 m_2 = \inf\{xy\}$, 即

$$\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}.$$

(6) 同法可证

$$\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}.$$

21. 求证不等式:

$$(a) |x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|;$$

$$(b) |x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

证 (a) 由 $|x - y| = |x + (-y)| \geq |x| - |-y|$
 $= |x| - |y|,$

及 $|x - y| = |y - x| \geq |y| - |x|$
 $= -(|x| - |y|),$

即得

$$|x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|$$

也可如下证明: 由 $|xy| \geq xy$ 知

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq x^2 - 2|xy| + y^2,$$

则 $(x - y)^2 \geq (|x| - |y|)^2,$

开方即得

$$|x - y| \geq \left| |x| - |y| \right|.$$

$$(b) |x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - |x_1 + \cdots + x_n|,$$

而 $|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2 + \cdots + x_n| \leq \cdots$
 $\leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|,$

所以,

$$|x + x_1 + \cdots + x_n| \geq |x| - (|x_1| + \cdots + |x_n|).$$

解不等式:

22. $|x + 1| < 0.01.$

解 由 $|x + 1| < 0.01$ 推得

$$-0.01 < x + 1 < 0.01,$$

所以,

$$-1.01 < x < -0.99.$$

23. $|x - 2| \geq 10.$

解 由 $|x - 2| \geq 10$ 推得

$$x - 2 \geq 10 \quad \text{或} \quad x - 2 \leq -10,$$

所以,

$$x \geq 12 \quad \text{或} \quad x \leq -8.$$

24. $|x| > |x + 1|.$

解 两边平方,即得

$$x^2 > (x + 1)^2 \quad \text{或} \quad 2x + 1 < 0,$$

于是,有

$$x < -\frac{1}{2}.$$

25. $|2x - 1| < |x - 1|.$

解 两边平方,即得

$$(2x - 1)^2 < (x - 1)^2 \quad \text{或} \quad 3x^2 - 2x < 0,$$

解之,得

$$0 < x < \frac{2}{3}.$$

26. $|x + 2| + |x - 2| \leq 12.$

解 令 $x - 2 = t$, 则得

$$|t + 4| + |t| \leq 12 \quad \text{或} \quad |t + 4| \leq 12 - |t|.$$

两边平方,即有

$$t^2 + 8t + 16 \leq 144 - 24|t| + t^2,$$

或

$$3|t| \leq 16 - t.$$

将上式两端再平方,化简整理得

$$t^2 + 4t - 32 \leq 0,$$

于是,有

$$-8 \leq t \leq 4.$$

从而得

$$-8 \leq x - 2 \leq 4,$$

即

$$-6 \leq x \leq 6 \quad \text{或} \quad |x| \leq 6.$$

27. $|x + 2| - |x| > 1.$

解 $1 + |x| < |x + 2|$, 将此式两端平方, 化简得

$$2|x| < 4x + 3.$$

再平方之, 化简得

$$4x^2 + 8x + 3 > 0.$$

于是,有

$$x > -\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x < -\frac{3}{2}.$$

后者不适合, 所以,

$$x > -\frac{1}{2}.$$

28. $\left| |x + 1| - |x - 1| \right| < 1.$

解 两端平方, 化简得

$$x^2 + \frac{1}{2} < |x^2 - 1|,$$

即

$$x^2 - 1 > x^2 + \frac{1}{2} \quad \text{或} \quad x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right).$$

前者不可能, 所以,

$$x^2 - 1 < -\left(x^2 + \frac{1}{2}\right),$$

即 $x^2 < \frac{1}{4}$, 解之得

$$|x| < \frac{1}{2}.$$

29. $|x(1-x)| < 0.05$.

解 由 $|x-x^2| < \frac{1}{20}$ 得

$$x^2 - x + \frac{1}{20} > 0 \quad \text{或} \quad x^2 - x - \frac{1}{20} < 0,$$

解之得

$$\begin{cases} \frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10} \\ \frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x \quad \text{或} \quad x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10}, \end{cases}$$

即

$$\frac{5 - \sqrt{30}}{10} < x < \frac{5 - \sqrt{20}}{10} \quad \text{或}$$

$$\frac{5 + \sqrt{20}}{10} < x < \frac{5 + \sqrt{30}}{10}.$$

30. 证明恒等式

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

证 $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2$
 $= \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x|x| + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x|x| = x^2.$

31. 当测量长度 10 厘米时, 绝对误差为 0.5 毫米; 当测量距离 500 千米时, 绝对误差等于 200 米. 哪种测量较为精确?

解 用相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

进行比较,其中 a 为被测量的精确值,而 Δ 是绝对误差.

$$\text{对于前者, } \delta = \frac{0.5 \times 0.1}{10} = 0.5\%,$$

$$\text{对于后者, } \delta = \frac{200}{500 \times 1000} = 0.04\%,$$

所以,后者测量较为精确.

32. 设数

$$x = 2.3752$$

的相对误差为 1%,试求此数包含若干位准确数字?

解 因为 $\frac{\Delta}{2.3752} = 0.01$, 所以 $\Delta = 0.023752$.

因而,此数包含两位准确数字.

33. 数

$$x = 12.125$$

包含三位准确数字. 试求此数的相对误差?

解 因为 x 包含三位准确数字, 所以 $\Delta < 0.05$. 于是得相对误差

$$\delta = \frac{\Delta}{|x|} < \frac{0.05}{12.125} < 0.42\%$$

即

$$\delta < 0.42\%.$$

34. 矩形的边等于:

$$x = 2.50 \text{ 厘米} \pm 0.01 \text{ 厘米},$$

$$y = 4.00 \text{ 厘米} \pm 0.02 \text{ 厘米}.$$

这个矩形的面积 S 界于甚么范围内? 设其边长取平均值时, 矩形面积的绝对误差 Δ 和相对误差 δ 为何?

解 $S_{\min} = (2.50 - 0.01)(4.00 - 0.02)$
 $= 9.9102(\text{平方厘米})''',$

$$S_{\max} = (2.50 + 0.01)(4.00 + 0.02) \\ = 10.0902(\text{平方厘米}),$$

$$S_{\min} \leq S \leq S_{\max},$$

$$S_{\text{平均}} = 2.50 \times 4.00 = 10(\text{平方厘米}),$$

$$\Delta_1 = 10.0902 - 10 = 0.0902(\text{平方厘米}),$$

$$\Delta_2 = 10 - 9.9102 = 0.0898(\text{平方厘米});$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.0902(\text{平方厘米}),$$

$$\delta = \frac{\Delta}{10} \leq \frac{0.0902}{10} < 0.91\%.$$

*) 以后各题简写为厘米², 厘米³ 等.

35. 物体的重量 $P = 12.59$ 克 ± 0.01 克, 其体积 $V = 3.2$ 厘米³ ± 0.2 厘米³. 若对物体的重量和体积都取其平均值, 试求物体的比重, 并估计比重的绝对误差和相对误差.

解 比重 $C = \frac{12.59}{3.2}$ 克 / 厘米³ = 3.93 克 / 厘米³.

$$C_{\max} = \frac{12.60}{3.0} \text{ 克 / 厘米}^3 = 4.20 \text{ 克 / 厘米}^3,$$

$$C_{\min} = \frac{12.58}{3.4} \text{ 克 / 厘米}^3 = 3.70 \text{ 克 / 厘米}^3,$$

$$C_{\min} \leq C \leq C_{\max},$$

$$\Delta_1 = C_{\max} - C = 0.27 \text{ 克 / 厘米}^3,$$

$$\Delta_2 = C - C_{\min} = 0.23 \text{ 克 / 厘米}^3;$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 0.27 \text{ 克 / 厘米}^3;$$

一般地, 比重为 (3.93 ± 0.27) 克 / 厘米³;

$$\delta \leq \frac{0.27}{3.70} < 7.3\%.$$

36⁺. * 圆半径

$$r = 7.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

若取 $\pi = 3.14$, 则求出的圆面积的最小相对误差为何?

解 圆面积 $A = \pi \times 7.2^2 \approx 51.84\pi(\text{米}^2)$

$$\Delta_1 = \pi(7.2 + 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2 = 1.45\pi.$$

$$\Delta_2 = |\pi(7.2 - 0.1)^2 - \pi \cdot 7.2^2| = 1.43\pi.$$

$$\Delta \leq \max(\Delta_1, \Delta_2) = 1.45\pi(\text{米}^2)$$

即一般的圆面积 A 为 $(51.84 \pm 1.45)\pi(\text{米}^2)$, 故

$$\delta \leq \frac{1.45\pi}{51.84\pi} < 2.80\%.$$

37. 对直角平行六面体测得

$$x = 24.7 \text{ 米} \pm 0.2 \text{ 米};$$

$$y = 6.5 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米};$$

$$z = 1.2 \text{ 米} \pm 0.1 \text{ 米}.$$

这个平行六面体的体积 V 界于甚么范围内? 若测量的各结果都取其平均值, 则求出的平行六面体的体积可能有的绝对误差和相对误差为何?

解 $24.5 \times 6.4 \times 1.1 \leq V \leq 24.9 \times 6.6 \times 1.3$

即 $172.480 \text{ 米}^3 \leq V \leq 213.642 \text{ 米}^3.$

当 x, y, z 均取平均值时,

$$V = 24.7 \times 6.5 \times 1.2 = 192.660 \text{ 米}^3.$$

$$\Delta_1 = 213.642 - 192.660 = 20.982(\text{米}^3);$$

$$\Delta_2 = 192.660 - 172.480 = 20.180(\text{米}^3).$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

于是,

$$\Delta \leq 20.982 \text{ 米}^3;$$

$$\delta \leq \frac{20.982}{172.480} \approx 12.2\%.$$

38. 测量正方形的边 x , 此处 $2 \text{ 米} < x < 3 \text{ 米}$, 应有多小的绝对误差, 才能使此正方形面积有可能精确到 0.001 米^2 ?

解 按题设我们有 $0 < x^2 - 4 < 0.001$ 或 $0 < 9 - x^2 < 0.001$, 解之得

$$2.99983 < x < 3 \quad \text{或} \quad 2 < x < 2.00024.$$

因此, Δ 取二者中误差较小者, 即

$$\Delta \leq 0.00017(\text{米}) = 0.17 \text{ 毫米},$$

故当边长 x 的绝对误差不超过 0.17 毫米 时, 就能使此正方形的面积精确到 0.001 米^2 .

39. 假定矩形每边的长皆不超过 10 米 , 为了使根据测量所计算出来的面积与原面积之差不超过 0.01 平方米 , 问测量矩形的边 x 与 y 时, 许可的绝对误差 Δ 的值多大*)?

解 按题设我们有

$$(x + \Delta)(y + \Delta) - xy \leq 0.01,$$

即 $\Delta^2 + (x + y)\Delta \leq 0.01,$

由于 $x \leq 10$ 及 $y \leq 10$, 所以只要

$$\Delta^2 + 20\Delta \leq 0.01 \quad \text{或} \quad \Delta^2 + 20\Delta - 0.01 \leq 0$$

即可. 解之, 得

$$\begin{aligned} \Delta &\leq \frac{-20 + \sqrt{20^2 + 0.04}}{2} = -10 + \frac{20.00099}{2} \\ &= 0.000499 < 0.0005(\text{米}). \end{aligned}$$

*) 此题假设 x, y 有相等的绝对误差. 又原著上为“ 0.01 平方米 ”, 面误译为“ 0.01 平方厘米 ”.

40. 设 $\delta(x)$ 及 $\delta(y)$ 为数 x 和 y 的相对误差, $\delta(xy)$ 为数 xy 的相对误差. 求证:

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

证 设 $x = a + \Delta_x$, $y = b + \Delta_y$,

其中 a 及 b 分别是 x 及 y 的精确值, Δ_x 及 Δ_y 是绝对误差, 则有

$$xy - ab = b\Delta_x + a\Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y$$

于是,

$$\begin{aligned} \Delta &= |xy - ab| \\ &\leq |b| \cdot \Delta_x + |a| \cdot \Delta_y + \Delta_x \cdot \Delta_y \end{aligned}$$

最后即得

$$\delta(xy) = \frac{\Delta}{|ab|} \leq \frac{\Delta_x}{|a|} + \frac{\Delta_y}{|b|} + \frac{\Delta_x}{|a|} \cdot \frac{\Delta_y}{|b|}.$$

此即

$$\delta(xy) \leq \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y).$$

§ 2. 叙列的理论

1° 叙列的极限的概念 假设对于任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$, 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \varepsilon,$$

则称叙列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 有极限 a (或者说, 收敛于 a) 亦即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

其中, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0,$$

则称 x_n 为无穷小.

没有极限的叙列, 称为发散的.

2° 极限存在的准则

(1) 设

$$y_n \leq x_n \leq z_n$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = c,$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c.$

(2) 单调而且有界的数列有极限.

(3) 哥西判别法 数列 $\{x_n\}$ 的极限存在的必要而且充分的条件是: 对于任何的 $\varepsilon > 0$, 有数 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, $|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$

3° 关于数列的极限的基本定理 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在, 则有:

(1) 若 $x_n \leq y_n$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$

(4) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}.$

4° 数 e , 数列

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

有确定的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.7182818284 \dots$$

5° 无穷极限 符号

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 有数 $N = N(E)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| > E.$

6° 聚点 设已知数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 有子数列

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \dots, x_{p_n}, \dots$$

适合

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \xi,$$

则称数 ξ (或符号 ∞) 为已知数列 $a_n (n = 1, 2, \dots)$ 的聚点.

一切有界的叙列至少有一个有穷的聚点(波尔查诺 外尔斯特拉斯原理). 若这个聚点是唯一的, 则它即为已知叙列的有穷极限.

叙列 x_n 的最小聚点(有穷的或无穷的)

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为下极限, 而它的最大聚点

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

称为此叙列的上极限

等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

为叙列 x_n 的(有穷或无穷)极限存在的必要而且充分的条件.

41. 设

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1,$$

即: 对于任一个给定的 $\epsilon > 0$, 求数 $N = N(\epsilon)$

使得

$$\text{在 } n > N \text{ 时, } |x_n - 1| < \epsilon.$$

填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N					

证 $|x_n - 1| = \frac{1}{n+1}$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n - 1| < \epsilon$, 只

要

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon.$$

即只要 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$. 可取

$$N = N(\epsilon) = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n - 1| < \epsilon$. 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
N	10	100	1000	10000	...

42. 假若:

$$(a) x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad (\sigma) \frac{2n}{n^3 + 1};$$

$$(B) x_n = \frac{1}{n!}; \quad (\Gamma) x_n = (-1)^n \cdot 0.999^n.$$

对于任何的 $\epsilon > 0$, 求出数 $N = N(\epsilon)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$;

即证明 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为无穷小 (就是说, 有极限值为 0)

对应着上面四种情形, 填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	...	
N					

证 (a) $|x_n| = \frac{1}{n}$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要

$$\frac{1}{n} < \epsilon,$$

即只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(6) $|x_n| = \frac{2n}{n^3 + 1} < \frac{2}{n^2}$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要

$$\frac{2}{n^2} < \epsilon,$$

即只要 $n > \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}$. 取 $N = \left\lceil \sqrt{\frac{2}{\epsilon}} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(B) $|x_n| = \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要

$$\frac{1}{2^{n-1}} < \epsilon,$$

即只要 $n > 1 + \log_2 \frac{1}{\epsilon}$. 取

$$N = \left\lceil \log_2 \frac{1}{\epsilon} \right\rceil + 1,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

(r) $|x_n| = 0.999^n$. 任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x_n| < \epsilon$, 只要 $n \lg 0.999 < \lg \epsilon$.

由于 $\lg 0.999 < 0$, 故只要 $n > \frac{\lg \epsilon}{\lg 0.999} \approx 2500 \lg \frac{1}{\epsilon}$. * * *

取

$$N = \left\lceil 2500 \lg \frac{1}{\epsilon} \right\rceil,$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| < \epsilon$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

填下表:

ϵ		0.1	0.01	0.001	...
(a)	N	10	100	1000	...
(b)	N	4	14	44	...
(B)	N	4	7	10	...
(r)	N	2500	5000	7500	...

*) 或取 $N \geq \frac{1}{\epsilon}$. 以下各题类似, 不再一一说明.

**) 查四位数学用表所得的数据.

43. 证明叙列

(a) $x_n = (-1)^n n$, (b) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, (B) $x_n = \lg(\lg n)$ ($n \geq 2$)

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有无穷极限(即成为无穷大), 即:

对任意的 $E > 0$, 求数 $N = N(E)$, 使

当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$.

对应着上面的每一种情形, 填下表:

E	10	100	1000	10000	...
N					

证 (a) $|x_n| = n$. 任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要
 $n > E$.

取 $N = [E]$, 则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

(b) $|x_n| = 2^{\sqrt{n}}$, 任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要 $2^{\sqrt{n}} > E$.

即只要 $n > \left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2$. 取

$$N = \left[\left(\frac{\lg E}{\lg 2}\right)^2\right],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

(B) 当 $n > 10$ 时, $\lg n > 1$ 及 $\lg(\lg n) > 0$.

任给 $E > 0$, 要 $|x_n| > E$, 只要

$$\lg(\lg n) > E,$$

即只要 $n > 10^{(10^E)}$. 取

$$N = [10^{(10^E)}],$$

则当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty.$$

填下表:

E		10	100	1000	10000	...
(a)	N	10	100	1000	10000	...
(b)	N	11	44	99	176	...
(B)	N	$10^{(10^{10})}$	$10^{(10^{100})}$	$10^{(10^{1000})}$	$10^{(10^{10000})}$...

44. 求证

$$x_n = n^{(-1)^n} \quad (n=1, 2, \dots)$$

无界, 但当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它并不成为无穷大.

证 因为 $x_n = n^{(-1)^n} = \begin{cases} 2k, & \text{当 } n=2k, k \text{ 为自然数,} \\ \frac{1}{2k+1}, & \text{当 } n=2k+1, \end{cases}$

所以,

$$x_{2k} \rightarrow \infty, \quad x_{2k+1} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

由于 $x_{2k} \rightarrow \infty$, 故 x_n 无界; 但因 $x_{2k+1} \rightarrow 0$, 故 x_n 并不趋于无穷大.

45. 用不等式表示下列各式:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

解 (a) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N=N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $|x_n| > E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

(b) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N=N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $x_n < -E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

(c) 对于任给的正数 E , 存在有自然数 $N=N(E)$, 使当 $n > N$ 时, $x_n > E$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

设 n 跑过自然数列, 求下列各式之值:

46. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2+1}$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10000}{n + \frac{1}{n}} = 0$.

$$47. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0. \end{aligned}$$

$$48. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1},$$

解 因为 $\sin n!$ 有界: $|\sin n!| \leq 1$ 及 $\frac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin n!}{n+1} = 0.$$

$$49. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1} + 1} = \frac{1}{3}.$$

$$50. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \quad (|a| < 1, |b| < 1).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\frac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \frac{1-b}{1-a}.$$

$$51. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

$$52. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right].$$

解 当 $n=2k$ 时 (k 为自然数),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \frac{1}{2k} - \frac{2}{2k} + \frac{3}{2k} - \dots - \frac{2k}{2k} = \frac{-k}{2k} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}$$

当 $n=2k+1$,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \\ &= \frac{1}{2k+1} - \frac{2}{2k+1} + \frac{3}{2k+1} - \dots + \frac{2k+1}{2k+1} \\ &= \frac{k+1}{2k+1} \rightarrow \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

由于取不同方式时, 所得的极限值不同, 所以, 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right]$$

不存在.

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解 } & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^3} \cdot \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right] = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right].$$

解 设 $f(n) = \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3}$, 由 53 题

$$\begin{aligned} \text{即得 } & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \dots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [8f(2n) - 4f(n)] = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

$$55. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$$

解 设 $f(n) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$,

$$g(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}},$$

则有 $2f(n+1) - g(n) = f(n) + 1$,

又由 $2f(n+1) - f(n) = f(n) + \frac{2n+1}{2^n} = g(n) + 1$,

故 $f(n) = g(n) + 1 - \frac{2n+1}{2^n}$.

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} [g(n) + 1] = 3$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$, 故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right) = 3.$$

*) 参看 58 题

$$56. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right].$$

解 $\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}$,

$$\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \dots,$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

相加之, 得 $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

$$= 1 - \frac{1}{n+1},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right]$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$$57. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}).$$

解 由于 $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}$
 $= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)$
 $= 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right]$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}\right] = 2.$

证明下列等式:

$$58. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

证 因为 $2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots + 1$
 $> \frac{n(n-1)}{2} \quad (n > 2),$

故 $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{2}{n-1};$

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0.$$

$$59. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

证 因为 $0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdots \frac{2}{n} \leq \frac{4}{n}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0.$$

$$60. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1).$$

证 令 $a = 1 + \lambda \quad (\lambda > 0),$

$$\begin{aligned} \text{则 } a^n &= (1+\lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + \dots \\ &+ \lambda^n > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 \quad (n > 2). \end{aligned}$$

当 $n > 2$ 时, $n-1 > \frac{n}{2}$, 此时,

$$a^n > \frac{n^2}{4}\lambda^2 = \frac{n^2(a-1)^2}{4}.$$

分三种情形:

(1) 当 $k \leq 0$ 时, 这时显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n \cdot n^{-k}} = 0.$$

(2) 当 $k = 1$ 时,

$$0 < \frac{n^k}{a^n} = \frac{n}{a^n} < \frac{4n}{n^2(a-1)^2},$$

而 $\frac{4n}{n^2(a-1)^2} \rightarrow 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{a^n} = 0;$$

(3) 当 $k > 0$ 时,

$$\frac{n^k}{a^n} = \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \right]^k,$$

而 $a^{\frac{1}{k}} > 1$, 于是由(1)知, $\frac{n}{(a^{\frac{1}{k}})^n} \rightarrow 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0.$$

61. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$

证 令 k 代表任何一个大于 $2|a|$ 的自然数,

则当 $n > k$ 时, 有

$$0 < \left| \frac{a^n}{n!} \right| = \left(\frac{|a|}{1} \cdot \frac{|a|}{2} \cdots \frac{|a|}{k} \right) \left(\frac{|a|}{k+1} \cdot \frac{|a|}{k+2} \cdots \frac{|a|}{n} \right)$$

$$< |a|^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{(2|a|)^k}{2^n}.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2|a|)^k}{2^n} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

62. $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$, 若 $|q| < 1$.

证 (1) 当 $0 < q < 1$ 时, 可令 $q = \frac{1}{a}$, 其中 $a > 1$, 所以,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $nq^n = \frac{n}{a^n} \rightarrow 0$;

(2) 当 $-1 < q < 0$ 时, 可令 $q = -q'$, 其中 $0 < q' < 1$, 所以,

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $nq^n = (-1)^n nq'^n \rightarrow 0$;

(3) 当 $q = 0$ 时, $nq^n = 0$.

总之, 当 $|q| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} nq^n = 0$.

*) 利用 60 题的结果。

63. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 0$).

证 (1) 当 $a = 1$ 时, 等式显然成立;

(2) 当 $a > 1$ 时, 因为 $(1 + \epsilon)^n > 1 + n\epsilon$ ($n > 1, \epsilon > 0$), 则当 n 充分大后, 可使 $1 + n\epsilon > a$, 即 $(1 + \epsilon)^n > a$. 事实上, 只要取 $N = \left[\frac{a-1}{\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 就可保证这点. 所以,

$$1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \epsilon,$$

于是, 当 $n > N$ 时, $|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon$,

此即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$;

(3) 当 $0 < a < 1$ 时, 则令 $a = \frac{1}{a'}$, 其中 $a' > 1$.

于是,当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} \rightarrow 1$.

总之,当 $a > 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

64. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0 \quad (a > 1)$.

证 先证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 事实上,令 $a_n = \sqrt[n]{n}$, 则

$a_n > 1$. 由 60 题前半部分的推导知

$$a_n^n > \frac{n^2}{4}(a_n - 1)^2,$$

即 $n > \frac{n^2}{4}(\sqrt[n]{n} - 1)^2,$

由此可知

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 成立.

现任给 $\varepsilon > 0$. 因 $a^{\varepsilon} > 1 (a > 1)$, 故存在 $N = N(\varepsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 恒有 $\sqrt[n]{n} < a^{\varepsilon}$, 由此可知 ($n > N$),

$$0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon.$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$.

65. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证 在 64 题的证明过程中已证.

66. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

证 由数学归纳法易证 $n! \geq \frac{1}{2} n^{\frac{n}{2}}$, 从而 $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq 2^{\frac{1}{n}}$.

$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$, 又因 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

67. 当 n 充分大时, 下面的式子哪个大些?

(a) $100n+200$ 或 $0.01n^2$?; (b) 2^n 或 n^{1000} ?

(B) 1000^n 或 $n!$?

证 (a) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n+200}{0.01n^2} = 0$, 所以,

当 n 充分大时, $0.01n^2$ 较 $100n+200$ 大些.

(b) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1000}}{2^n} = 0^{**})$, 所以,

当 n 充分大时, 2^n 较 n^{1000} 大些.

(B) 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000^n}{n!} = 0^{***})$, 所以,

当 n 充分大时, $n!$ 较 1000^n 大些.

*) 利用 60 题的结果.

**) 利用 61 题的结果.

68. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

证 因为 $0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ **),

又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) = 0.$$

*) 利用 10 题的结果.

69. 证明叙列

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

是单调增加的, 且上方有界. 而叙列

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

是单调减少的, 且下方有界. 由此推出这些叙列有公共的极限:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

证 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + C_n^2 \frac{1}{n^2} + C_n^3 \frac{1}{n^3} + \dots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n}$

$$= 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

其中每一项都为正, 当 n 增加时, 不但对应的项数增多, 而且每一个括弧内的数值也增大, 所以, 叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 单调增加.

又当 $k > 2$ 时, $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < 1, \frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}}$, 所以,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 2 + \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 3,$$

此即叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 上方有界.

由此, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 存在, 以 e 表之.

其次, 由于

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2-1} > 1 + \frac{1}{n},$$

$$\text{即 } \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \frac{n+1}{n},$$

$$\text{也即 } \left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}, \text{ 所以,}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

此即 $y_{n-1} > y_n$, 因而, 数列 $y_n (n=1, 2, \dots)$ 单调减少. 又因

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2,$$

所以, 数列 $y_n (n=1, 2, \dots)$ 下方有界.

由此, 我们知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 存在, 且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e. \end{aligned}$$

于是:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

70. 证明

$$0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

当指数 n 是甚么样的数值时, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差小于 0.001?

证 利用 69 题的结果知

$$0 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

$$\text{即 } 0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$

$$\text{而 } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right]$$

$$= \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n},$$

因而 $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}.$

其次, 要 $e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 0.001$, 只要 $\frac{3}{n} \leq 0.001$, 即只要 $n \geq 3000$, 所以, 当指数 n 是代表任一不小于 3000 的自然数, 表示式 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ 与数 e 之差就小于 0.001.

71. 设 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 为趋于 $+\infty$ 的任意数列, 而 $q_n (n=1, 2, \dots)$ 为趋于 $-\infty$ 的任意数列. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$$

证 令 $k_n = [p_n]$, 即 k_n 表 p_n 的整数部分, 则

$$k_n \leq p_n < k_n + 1.$$

由于 $p_n \rightarrow +\infty$, 故 $k_n \rightarrow +\infty$. 从而显然 $\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n} \rightarrow e$

(参看 89 题题解). 由于

$$\frac{1}{k_n} \geq \frac{1}{p_n} > \frac{1}{k_n + 1},$$

$$\left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} > \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} > \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n},$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n}\right)^{k_n + 1} = e,$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{k_n + 1}$$

$$\cdot \left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right)^{-1} = e,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$

其次, 若 $q_n \rightarrow -\infty$, 令 $q_n = -p_n$, 其中 $p_n \rightarrow +\infty$.

于是,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{p_n}{p_n - 1}\right)^{p_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n - 1}\right)^{p_n - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{p_n}\right) = e,\end{aligned}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_n}\right)^{q_n} = e.$

72. 已知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e.$

由此推出公式

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! n},$$

其中 $0 < \theta_n < 1$, 并计算数 e 准确到 10^{-5} .

证 因为 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right),$

若固定 k , 且 $n > k$, 则有

$$\begin{aligned}x_n &> 2 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &+ \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right),\end{aligned}$$

今使 n 趋于无穷, 在上式两边取极限, 得

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!}.$$

由于此不等式对任何自然数 k 皆成立, 因此,

$$2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq e.$$

另一方面,有

$$x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}, \text{ 及 } x_n \rightarrow e,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e.$$

其次,设 $\omega_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$, 则

$$\begin{aligned} 0 < \omega_{n+m} - \omega_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n+2)(n+3)\cdots(n+m)} \right\} < \frac{1}{(n+1)!} \\ &\quad \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+2)^{m-1}} \right\} \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left\{ 1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots \right\} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1}, \end{aligned}$$

今让 n 固定不变, 并让 m 趋于无穷, 取极限, 得

$$0 \leq e - \omega_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n+2}{n+1} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n+2}{(n+1)^2}.$$

由于 $\frac{n+2}{(n+1)^2} < \frac{1}{n}$, 所以,

$$0 < e - \omega_n < \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n},$$

即 $0 < e - \omega_n = \frac{\theta_n}{n! \cdot n}$, 其中 $0 < \theta_n < 1$,

$$\text{因而 } e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n! \cdot n}. \quad (1)$$

下而将用公式(1)计算 e , 使之准确到 10^{-5} . 首先须确定怎

样选取 n , 才能实现这一准确度。取 $n=8$, 在公式(1)中的余项已是小于

$$\frac{1}{8! \cdot 8} < 0.0000032,$$

所以弃去它时, 由公式所造成的误差远远地小于所规定的限度, 因此, 取 $n=8$ 计算之。其次, 还须考虑计算每一项时的舍入误差, 为保证 e 准确到 10^{-5} , 我们在计算每一项时, 计算到第六位小数上四舍五入凑成整数, 则舍入误差总的

$$\text{不超过 } \frac{1}{2 \cdot 10^6} \times 6 = \frac{3}{10^6}, \text{ 于是总误差不超过}$$

列表:

$$\begin{array}{r} 2.000000 \\ \frac{1}{2!} = 0.500000 \\ \frac{1}{3!} = 0.166667 \quad (-) \\ \frac{1}{4!} = 0.041667 \quad (-) \\ \frac{1}{5!} = 0.008333 \quad (+) \\ \frac{1}{6!} = 0.001389 \quad (-) \\ \frac{1}{7!} = 0.000198 \quad (+) \\ \frac{1}{8!} = 0.000025 \\ \hline 2.718279 \quad (-) \end{array}$$

考虑到修正数的符号, 则总误差介于 $-\frac{2}{10^6}$ 和 $\frac{4}{10^6}$ 之间, 因而, 数 e 介于

2.718277 及 2.718283

之间,所以,

$$e = 2.71828 \pm 0.00001.$$

73. 证明数 e 为无理数.

证 假设 e 为有理数 $\frac{m}{n}$, 则对于这个 n 有公式

$$\frac{m}{n} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n} \quad (0 < \theta_n < 1).$$

在等式两端同乘以 $n!$, 我们即得出左端是整数, 而右端是整数加一真分数 $\frac{\theta_n}{n}$, 但这是矛盾的. 所以数 e 为无理数.

74. 证明不等式

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

证 由 $\sqrt{i(n-i)} \leq \frac{n}{2}$, 则 $\frac{1}{2}[\ln i + \ln(n-i)] \leq \ln \frac{n}{2}$.

从而 $\sum_{i=1}^{n-1} \ln i \leq (n-1) \ln \frac{n}{2}$, $(n-1)! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{n-1}$.

两边同乘以 $\frac{n}{2}$, 得 $\frac{1}{2}n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$. 于是

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n < e\left(\frac{n}{2}\right)^n,$$

即 $n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

再证 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

设 $x_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n$, 则有

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}e} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}n}{e} < n.$$

所以 (注意到 $x_1 = \frac{1}{e} < 1$)

$$x_n = x_1 \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!$$

从而证得 $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$.

75. 证明不等式:

(a) $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, 式中 n 为任意的自然数.

(6) $1 + a < e^a$, 式中 a 为异于零的实数.

证 (a) 因为 $1 < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$, 两边取对数, 得

$$0 < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

故 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$;

又因为 $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 两边取对数, 得

$$1 < (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

故 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$.

因而 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

(6) $(1+x)^n \geq 1+nx$ ($x > 0, n$ 为正整数).

设 a 为正有理数: $a = \frac{p}{q}$, p, q 是正整数. 则由于 $e >$

$\left(1 + \frac{1}{q}\right)^q$, 故 $e^a > \left(1 + \frac{1}{q}\right)^{qa} = \left(1 + \frac{1}{q}\right)^p \geq 1 + \frac{p}{q} = 1 + a$.

至于 a 为任意实数 ($\neq 0$) 时的证明见 1289 题 (a).

76. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \quad (a > 0),$$

式中 $\ln a$ 是取 $e = 2.718 \dots$ 作底时数 a 的对数.

证 先设 $a > 1$. 令 $b_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$, 则 $b_n > 0$,

且 $\frac{\ln a}{n} = \ln(1 + b_n)$, 故

$$n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)}.$$

由于 $b_n \rightarrow 0$, 故存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, $0 < b_n < 1$. 于

是, 对每个 $n > N$, 存在唯一正整数 k_n , 使 $\frac{1}{k_n + 1} \leq b_n < \frac{1}{k_n}$.

由于 $b_n \rightarrow 0$, 故 $k_n \rightarrow +\infty$. 由 75 题(a)知

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_n + 2} &< \ln\left(1 + \frac{1}{k_n + 1}\right) \leq \ln(1 + b_n) \\ &< \ln\left(1 + \frac{1}{k_n}\right) < \frac{1}{k_n}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{k_n + 1} = \frac{k_n}{k_n + 1} &< \frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} < \frac{k_n + 2}{k_n} \\ &= 1 + \frac{2}{k_n}, \end{aligned}$$

由于 $k_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow \infty$), 故 $\frac{b_n}{\ln(1 + b_n)} \rightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$), 由此得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a.$$

现设 $0 < a < 1$. 则 $\frac{1}{a} > 1$. 于是, 由上结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-a^{\frac{1}{n}}) \cdot n\left(\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right)$$

$$= -\ln \frac{1}{a} = \ln a.$$

当 $a=1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^{\frac{1}{n}} - 1) = \ln a$ 显然成立, 故此式对任何 $a > 0$ 成立, 证毕.

利用关于单调而且有界的叙列的极限存在的定理, 证明以下各叙列的收敛性:

$$77. x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \cdots + \frac{p_n}{10^n} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

式中 $p_i (i=0, 1, 2, \cdots)$ 是非负的整数, 从 p_1 起不大于 9.

证 $x_{n+1} = x_n + \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}$, 由于 $p_{n+1} > 0$, 所以,

$$x_{n+1} > x_n,$$

因而, $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 是单调增加的. 其次由于 $p_0 + \frac{1}{10} < x_n$

$\leq 9 \left(\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^n} \right) + p_0 < 1 + p_0$, 所以, 叙列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 是有界的.

因而, 根据单调而且有界的叙列的极限存在的定理, 可知叙列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

$$78. x_n = \frac{10}{1} \cdot \frac{11}{3} \cdots \frac{n+9}{2n-1}.$$

解 当 $n \leq 10$ 时, 虽然 $\{x_n\}$ 单调增加; 但当 $n > 10$ 时, 由

$\frac{n+9}{2n-1} < 1$ 知叙列 $\{x_n\}$ 单调减少. 注意有下界 $x_n > 0 (n=1, 2, \cdots)$. 因而, 叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$79. x_n = \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

证 因 $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) < x_n$, 所以, 叙列 $\{x_n\}$ 是单调

减少的.

又因 $0 < x_n < 1$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$80. x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

证 因 $x_{n+1} = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) > x_n$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的.

又因 $1 + a < e^a$, 所以,

$$0 < x_n < e^{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{4}} \cdots e^{\frac{1}{2^n}} = e^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}} < e,$$

即数列是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

$$81. x_1 = \sqrt{2}, x_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \cdots,$$

$$x_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}, \cdots.$$

证 数列 $\{x_n\}$ 显然是单调增加的.

其次, 利用数学归纳法可以证明: $x_n < \sqrt{2} + 1$. 事实上, 对于 $n=1$ 是成立的. 假设 $x_k < \sqrt{2} + 1$, 则

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \sqrt{2 + x_k} < \sqrt{2 + \sqrt{2} + 1} \\ &< \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = \sqrt{2} + 1, \end{aligned}$$

因而, 不等式对一切自然数均成立.

由此知数列 $\{x_n\}$ 是有界的. 因而 $\{x_n\}$ 收敛.

利用哥西判别法, 证明以下各数列的收敛性:

$$82. x_n = a_0 + a_1 q + \cdots + a_n q^n,$$

其中 $|a_k| < M (k=0, 1, 2, \cdots)$ 且 $|q| < 1$.

$$\text{证 } |x_m - x_n| = |a_{n+1} q^{n+1} + \cdots + a_m q^m|$$

$$\begin{aligned} &\leq |a_{n+1}| \cdot |q|^{n+1} + \cdots + |a_m| \cdot |q|^m \\ &< M \cdot |q|^{n+1} (1 + |q| + \cdots + |q|^{m-n-1}) \\ &< M \cdot |q|^{n+1} \cdot \frac{1}{1-|q|} \quad (m > n). \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$. 由于 $|q|^{n+1} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 故存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 有

$$|q|^{n+1} < \frac{(1-|q|)\epsilon}{M}.$$

于是, 当 $m > n > N$ 时, 恒有

$$|x_m - x_n| < \epsilon.$$

由此可知, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$83. x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad |x_m - x_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^m} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} \quad (m > n). \end{aligned}$$

$$\text{任给 } \epsilon > 0, \text{ 取 } N = \left[\frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2} \right],$$

则当 $m > n > N$ 时, 必有 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, 从而 $|x_m - x_n| < \epsilon$, 所以, 数列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$84. x_n = \frac{\cos 1!}{1 \cdot 2} - \frac{\cos 2!}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n!}{n(n+1)}.$$

$$\text{证} \quad |x_m - x_n| = \left| \frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{\cos m!}{m(m+1)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \\
&< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \cdots \\
&+ \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \quad (m > n).
\end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $m > n > N$ 时, 必有 $|x_m - x_n| < \varepsilon$, 所以, 叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

85. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

证 $|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}, \quad (m > n)$.

以下与 84 题证法步骤相同, 故知叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

86. 若存在数 c , 使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c$$

($n = 2, 3, \cdots$),

则称叙列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 有有界变差.

证明凡有有界变差的叙列是收敛的.

举出一个收敛叙列而无有界变差的例子.

证 设 $y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|$
($n = 2, 3, \cdots$),

则叙列 $\{y_n\}$ 单调增加且有界, 所以它是收敛的.

根据哥西收敛准则, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 N , 使

$$\text{当 } m > n > N \text{ 时, } |y_m - y_n| < \varepsilon,$$

即 $|x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

而对于叙列 $\{x_n\}$ 有

$$|x_m - x_n| = |x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + \cdots$$

$$\begin{aligned}
 &+ |x_{n+1} - x_n| \leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots \\
 &+ |x_{n+1} - x_n| < \varepsilon,
 \end{aligned}$$

所以, 叙列 $\{x_n\}$ 是收敛的.

叙列: $1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, (-1)\frac{1}{n}, \dots$, 它是以零为极限的收敛叙列. 但它不是有有界变差的. 事实上,

$$\begin{aligned}
 &|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + |x_4 - x_3| + \cdots \\
 &+ |x_{2n} - x_{2n-1}| > |x_2 - x_1| + |x_4 - x_3| + \cdots \\
 &+ |x_{2n} - x_{2n-1}| \\
 &= 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} \right),
 \end{aligned}$$

而叙列 $\omega_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ 是发散的^{*}, 又是递增的, 故 $\omega_n \rightarrow +\infty$. 于是,

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}|$$

不是有界的, 因而, 收敛叙列 $\{x_n\}: 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$ 无有界变差.

*) 详见 88 题的证明.

87. 试叙述“某叙列不满足哥西准则”的意义.

解 即存在某一个 $\varepsilon_0 > 0$, 不论对于怎样的数 N , 总有 $n_0 > N, m_0 > N$, 使得

$$|x_{n_0} - x_{m_0}| \geq \varepsilon_0.$$

88. 利用哥西判别法, 证明叙列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

的发散性.

证 取 $m=2n$, 则

$$\begin{aligned}|x_m - x_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \\ &> \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

所以, 叙列 $\{x_n\}$ 发散.

89. 证明若叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$ 收敛, 则它的任何子叙列 x_{p_k} 也收敛, 且有同一极限:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在有正整数 N , 使

$$\text{当 } n > N \text{ 时, } |x_n - a| < \epsilon.$$

今因自然数叙列 $\{p_k\}$ 以 $+\infty$ 为其极限, 所以, 对于 N , 存在有正整数 k_0 , 使

$$\text{当 } k > k_0 \text{ 时, } p_k > N,$$

此时 $|x_{p_k} - a| < \epsilon (k > k_0)$, 所以, 子叙列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

90. 证明: 若单调叙列的某一子叙列收敛, 则此单调叙列本身是收敛的.

证 不失一般性, 假设叙列 $\{x_n\}$ 单调增加, 其一子叙列 $\{x_{p_k}\}$ 收敛于 a . 则对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N , 使

$$\text{当 } k > N \text{ 时, } |x_{p_k} - a| < \epsilon,$$

令 $N' = p_{N+1}$. 设 $n > N'$, 由于 $p_1 < p_2 < p_3 < \cdots \rightarrow +\infty$, 故必有 $p_k (k > N)$ 使 $p_k \leq n < p_{k+1}$. 由上知

$$|x_{p_k} - a| < \epsilon, |x_{p_{k+1}} - a| < \epsilon.$$

而 $x_{p_k} \leq x_n \leq x_{p_{k-1}}$ (因 x_n 递增), 故必

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 即 $\{x_n\}$ 是收敛的.

91. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有数 N , 使当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$. 又因 $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a|$, 故当 $n > N$ 时, $||x_n| - |a|| < \varepsilon$. 于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|.$$

92. 设 $x_n \rightarrow a$, 则极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

是什么? :

解 按题意, 应设 $x_n \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$.

若 $a \neq 0$, 则显然

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{a}{a} = 1.$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能不存在, 例如, 若 $\{x_n\}$ 为:

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^3}, \dots$$

则 $x_n \rightarrow 0$, 但显然 $\frac{x_{2m}}{x_{2m-1}} \rightarrow 1, \frac{x_{2m+1}}{x_{2m}} \rightarrow \frac{1}{2}$, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 不存

在. 下面我们证明, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 设为 b , 则必有 $-1 \leq$

$b \leq 1$.

用反证法. 若 $|b| > 1$. 取 r , 使 $|b| > r > 1$. 利用 91 题结果, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = |b|.$$

于是, 存在正整数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 恒有 $\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} > r$. 从而, 当 $n > N$ 时,

$$|x_n| = |x_N| \cdot \left| \frac{x_{N+1}}{x_N} \right| \cdot \left| \frac{x_{N+2}}{x_{N+1}} \right| \cdots \left| \frac{x_n}{x_{n-1}} \right| > |x_N| \cdot r^{n-N},$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, 此与 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 矛盾, 故必有 $-1 \leq b \leq 1$.

总结起来, 若 $a \neq 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$; 若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty}$

$\frac{x_{n+1}}{x_n}$ 可能存在也可能不存在, 当存在时, 它必属于 $[-1, 1]$.

93. 证明收敛的数列是有界的.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 要证 $\{x_n\}$ 有界. 对于正数 $\epsilon = 1$, 存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 必有 $|x_n - a| < 1$, 从而 $|x_n| < |a| + 1 (n > N)$. 于是, 令

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1\}.$$

则 $|x_n| \leq M (n = 1, 2, \dots)$. 由此可知 $\{x_n\}$ 有界.

94. 证明收敛的数列或达到其上确界, 或达到其下确界, 或两者都达到. 举出这三类数列的例子.

证 (1) 对于各项恒为常数的数列, 显然上、下确界均达到.

(2) 对于不恒为常数的收敛数列,

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 则或存在某 $x_i > A$, 或存在某 $x_j < A$, 或这种 x_i, x_j 都存在. 作 A 的充分小的邻域使它不包含 x_i 或 x_j , 或 x_i, x_j 都不包含在此邻域内. 由于 $x_n \rightarrow A$, 故在这三种情况的任一种下, 这个邻域外部都只有 $\{x_n\}$ 中的有限个元素. 因此分别为必达到上确界、必达到下确界或上、下确界均必达到. 在第一种情形下确界可能达到, 也可能达不到; 在第二种情形, 上确界可能达到也可能达不到.

95. 证明趋近于 $+\infty$ 的数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 必定达到其下确界.

证 由题设可知存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时恒有 $x_n > x_1$, 于是, 显然, x_1, x_2, \dots, x_N 中的最小者即为 $\{x_n\}$ 的下确界.

求数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的最大项, 设:

96. $x_n = \frac{n^2}{2^n}$.

解 当 $n = 3$ 时, $n^2 > 2^n$; 当 $n \neq 3$ 时, $n^2 \leq 2^n$;

所以, 最大项为 $x_3 = \frac{9}{8}$.

97. $x_n = \frac{\sqrt{n}}{100 + n}$.

解 $x_n = \frac{1}{\left(\sqrt{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2 + 20} \leq \frac{1}{20}$, 其中 $x_{100} = \frac{1}{20}$,

所以, 最大项为 $x_{100} = \frac{1}{20}$.

98. $x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

解 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}$.

当 $n+1 < 1000$ 时, $x_{n+1} > x_n$;

当 $n+1 > 1000$ 时, $x_{n+1} < x_n$.

所以, 最大项为 $x_{999} = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!}$.

求数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的最小项, 若:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$.

解 若 $n^2 - 9n \geq 0$, 则 $n \geq 9$;

若 $n^2 - 9n < 0$, 则 $0 < n < 9$.

所以, 最小项从 x_1 到 x_8 中寻找, 比较之, 得 x_n 的最小项为

$$x_4 = x_5 = -20 - 100 = -120.$$

100. $x_n = n + \frac{100}{n}$.

解 $x_n = \left(\sqrt{n} - \frac{10}{\sqrt{n}} \right)^2 + 20 \geq 20$, 其中 $x_{10} = 20$,

所以, 最小项为 $x_{10} = 20$.

求数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n$, 设:

101. $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

解 $\inf\{x_n\} = 0$; $\sup\{x_n\} = 1$;

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

102. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$.

解 $\inf\{x_n\} = -1$; $\sup\{x_n\} = \frac{3}{2}$;

$$\varliminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \varlimsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1;$$

$$103. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}.$$

$$\text{解 } x_1 = 1, x_2 = 1 - \frac{2}{3}, x_3 = 1, x_4 = 1 + \frac{4}{5}, \dots$$

$$\inf\{x_n\} = 0; \quad \sup\{x_n\} = 2;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2.$$

$$104. x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

$$\text{解 } x_{4k} = 1 - 2 + 3, x_{4k+1} = 1 + 2 + 3,$$

$$x_{4k+2} = 1 - 2 - 3, x_{4k+3} = 1 + 2 - 3 (k = 0, 1, 2,$$

...

$$\inf\{x_n\} = -4; \quad \sup\{x_n\} = 6;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -4; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 6.$$

$$105. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}.$$

$$\text{解 } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2} \right), x_3 = \frac{1}{2},$$

$$x_4 = \frac{3}{5} \left(-\frac{1}{2} \right), x_5 = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2} \right), x_6 = \frac{5}{7},$$

$$x_7 = \frac{3}{4} \left(-\frac{1}{2} \right), x_8 = \frac{7}{9} \left(-\frac{1}{2} \right), x_9 = \frac{4}{5}, \dots$$

$$\inf\{x_n\} = -\frac{1}{2}; \quad \sup\{x_n\} = 1;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

$$106. x_n = (-1)^n n.$$

$$\text{解 } \inf\{x_n\} = -\infty; \quad \sup\{x_n\} = +\infty;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

$$107. x_n = -n[2 + (-1)^n].$$

解 $\inf\{x_n\} = -\infty$; $\sup\{x_n\} = -1$;

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty.$$

108. $x_n = n(-1)^n$.

解 $\inf\{x_n\} = 0$; $\sup\{x_n\} = +\infty$;

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

109. $x_n = 1 + n \sin \frac{n\pi}{2}$.

解 $x_1 = 1 + 1, x_2 = 1 + 0, x_3 = 1 - 3, x_4 = 1 + 0,$
 $x_5 = 1 + 5, \dots$

$\inf\{x_n\} = -\infty$; $\sup\{x_n\} = +\infty$;

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty.$$

110. $x_n = \frac{1}{n - 10.2}$.

解 当 n 由 1 到 10 时, x_n 由负数往下降;

当 n 由 11 到 $+\infty$ 时, x_n 由正数往下降, 所以,

$\inf\{x_n\} = x_{10} = -5$; $\sup\{x_n\} = x_{11} = 1.25$;

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

求 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 设:

111. $x_n = \frac{n^2}{1 + n^2} \cos \frac{2n\pi}{3}$.

解 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\frac{1}{2}$; $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

112. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$

解 $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\left(e + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = e + 1$.

$$113. x_n = \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{4}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

$$114. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^n \cdot (-1)^n}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ (因 $(2^{2k} + 1)^{\frac{1}{2k}}$
 $= 2 \left(1 + \frac{1}{2^{2k}} \right)^{\frac{1}{2k}} \rightarrow 2$).

$$115. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}.$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0; \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$

求下列各叙列的聚点:

$$116. \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots.$$

解 聚点为 0 及 1.

$$117. 1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \dots,$$

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots.$$

解 聚点为

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots.$$

它们分别为子叙列:

$\left\{ \frac{1}{n} \right\}, \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}, \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \right\}, \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right\}, \dots$ 的极限.

$$118. \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots.$$

解 所述数列正好包含 $(0, 1)$ 中全部有理数, 故对于闭

区间 $[0, 1]$ 上的每一点 x ,在其任意的 ε 邻域内均有此数列中无穷个数,因此 x 必可作为某子数列的极限,所以, x 是所述数列的聚点,由此可知 $[0, 1]$ 中的任何点都是所述数列的聚点,显然, $[0, 1]$ 外的点都不是所述数列的聚点.

119. $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.

解 因为 $2 \cdot (-1)^n$ 为2或-2.所以,聚点为5及1.

120. $x_n = \frac{1}{2}[(a+b) + (-1)^n(a-b)]$.

解 聚点为 a 及 b .

121. 试举出以已知数

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

作为聚点的数列的例子.

解 数列

$$a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, \dots, a_p - \frac{1}{2}, a_1 - \frac{1}{3},$$

$$a_2 - \frac{1}{3}, \dots, a_p - \frac{1}{3}, \dots, a_1 - \frac{1}{n}, a_2 - \frac{1}{n}, \dots,$$

$$a_p - \frac{1}{n}, \dots$$

显然以 a_1, a_2, \dots, a_p 为聚点.

122. 试举出数列的例子,对此数列而言,已知数列

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

所有各项皆为其聚点,已知数列还必有怎样的聚点?

解 例如,数列

$$a_1 + \frac{1}{2}, a_2 + \frac{1}{2}, a_1 + \frac{1}{3}, a_2 + \frac{1}{3}, a_3 + \frac{1}{3},$$

$$a_1 + \frac{1}{4}, a_2 + \frac{1}{4}, a_3 + \frac{1}{4}, a_4 + \frac{1}{4}, \dots,$$

$$a_1 + \frac{1}{n}, a_2 + \frac{1}{n}, a_3 + \frac{1}{n}, \dots, a_n + \frac{1}{n}, \dots$$

就以 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 为其聚点.

另外,很明显,若 $\{x_n\}$ 为一数列,使已知数列 $\{a_n\}$ 的各项 a_1, a_2, a_3, \dots 皆为 $\{x_n\}$ 的聚点,则已知数列 $\{a_n\}$ 本身的聚点也必为数列 $\{x_n\}$ 的聚点.

123. 举出叙列的例子:

- (a) 没有有限的聚点;
- (b) 有唯一有限的聚点,但非收敛者;
- (c) 有无限多的聚点;
- (d) 以每一实数作为聚点.

解 (a) 叙列 $x_n = n (n = 1, 2, \dots)$ 没有有限的聚点.

(b) 叙列: $1, -1, \frac{1}{2}, -2, \frac{1}{3}, -3, \dots, \frac{1}{n}, -n, \dots$ 有唯一有限的聚点 0,但此叙列却不收敛.

(c) 118 题的叙列即有无限多的聚点.

(d) 我们按下述“对角线法则”来构造一个叙列,使每一元素后面跟一个对应的负数,排列顺次如图 1.1.

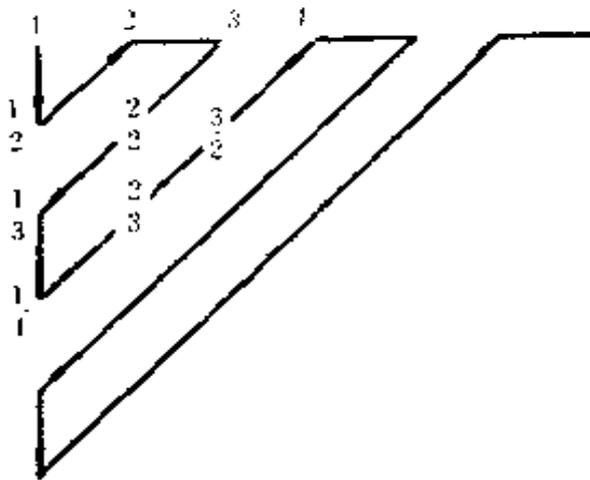


图 1.1

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 1, x_2 = -1, x_3 = \frac{1}{2}, x_4 = -\frac{1}{2}, x_5 = 2, \\
 x_6 &= -2, x_7 = 3, x_8 = -3, x_9 = \frac{2}{2}, \\
 x_{10} &= -\frac{2}{2}, x_{11} = \frac{1}{3}, x_{12} = -\frac{1}{3}, \dots
 \end{aligned}$$

此叙列以每一实数作为其聚点,即聚点的集合为 $(-\infty, +\infty)$.

124. 证明叙列 x_n 和 $y_n = x_n \cdot \sqrt[n]{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 有相同的聚点.

证 因为 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$, 所以, 叙列 $\{x_n\}$ 的子叙列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{y_{n_k}\}$ 的对应子叙列 $\{x_{n_k} \cdot \sqrt[n_k]{n_k}\}$ 同时收敛, 且具有相同的极限, 此即叙列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 有相同的聚点.

125. 证明从有界的叙列 x_n ($n = 1, 2, \dots$) 中, 永远可选出收敛的子叙列 x_{p_n} ($n = 1, 2, \dots$).

证 因为叙列 $\{x_n\}$ 有界, 故可设一切项满足不等式

$$a \leq x_n \leq b,$$

其中 a, b 为有限的实数, 将区间 $[a, b]$ 二等分之, 得区间 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right], \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$, 其中必至少有一个包含所给叙列的无限多项, 将它记成 $[a_1, b_1]$ (若两者均含无穷多项, 则任取其一作为 $[a_1, b_1]$). 再将区间 $[a_1, b_1]$ 等分之, 又可得区间 $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, 它包含所给叙列的无限多项. 依次类推, 于是得一串区间:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots,$$

其中每一 $[a_n, b_n]$ 都包含所给叙列 $\{x_n\}$ 中的无限多项,

且有

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

因此, 根据区间套定理诸 $[a_n, b_n]$ 具有唯一的公共点 c , 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c.$$

现按下法选出 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{p_k}\}$: 在包含于 $[a_1, b_1]$ 内的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_1} . 然后, 在包含于 $[a_2, b_2]$ 内且在 x_{p_1} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_2} , 然后, 又在包含于 $[a_3, b_3]$ 内且在 x_{p_2} 后面的诸 x_n 中任取一个作为 x_{p_3} . 余类推 (这是可能的, 因为每个 $[a_k, b_k]$ 中都包含有 x_n 无穷多项). 于是我们得出 $\{x_n\}$ 的一子数列 $\{x_{p_k}\}$, 满足

$$a_k \leq x_{p_k} \leq b_k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

由此, 知 $|x_{p_k} - c| \leq b_k - a_k (k = 1, 2, \dots)$,

故 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = c$. 从而 $\{x_{p_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的一个收敛于 c 的子数列. 证毕.

126. 证明: 若数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 无界, 则存在子数列 $x_{p_n} (n = 1, 2, \dots)$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{p_n} = \infty.$$

证 因 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 无界, 故存在某项 x_{p_1} 满足 $|x_{p_1}| > 1$. 由于数列 $x_n (n = p_1 + 1, p_1 + 2, \dots)$ 也无界, 故又存在某项 $x_{p_2} (p_2 > p_1)$, 使 $|x_{p_2}| > 2$; 又由于数列 $x_n (n = p_2 + 1, p_2 + 2, \dots)$ 无界, 故又存在某项 $x_{p_3} (p_3 > p_2)$, 使 $|x_{p_3}| > 3$. 余类推. 于是, 我们得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{p_k}\}$, 满足

$$|x_{p_k}| > k (p = 1, 2, \dots).$$

由此可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{p_k} = \infty.$$

证毕.

127. 设数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 收敛, 而数列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 发散, 则能否断定关于数列
(a) $x_n + y_n$; (б) $x_n y_n$
的收敛性?

举出适当的例子.

解 (a) $\{x_n + y_n\}$ 一定发散. 如果 $\{x_n + y_n\}$ 收敛, 则由 $(x_n + y_n) - x_n = y_n$, 知 $\{y_n\}$ 收敛, 与题设矛盾.

(б) 数列 $\{x_n y_n\}$ 可能收敛, 也可能发散. 例如:

(1) 数列 $x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 收敛,

数列 $y_n = n (n = 1, 2, \dots)$ 发散,

而数列 $x_n y_n = 1 (n = 1, 2, \dots)$ 是收敛的.

(2) 数列 $x_n = \frac{1}{n} (n = 1, 2, \dots)$ 收敛,

数列 $y_n = n^2 (n = 1, 2, \dots)$ 发散,

而数列 $x_n y_n = n (n = 1, 2, \dots)$ 却是发散的.

128. 设数列 x_n 和 y_n 发散 ($n = 1, 2, \dots$). 可否断定数列
(a) $x_n + y_n$; (б) $x_n y_n$
也发散呢?

举出适当的例子.

解 不能. 例如, 数列

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} (n = 1, 2, \dots)$$

都发散,但叙列

$$x_n + y_n = 1 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

及

$$x_n y_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots)$$

却都是收敛的,

129. 设:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

及 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 为任意叙列,能否断定

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0?$$

举出适当的例子.

解 不能.例如,叙列

$$x_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

及

$$y_n = n (n = 1, 2, \dots)$$

的乘积

$$x_n y_n = 1 (n = 1, 2, \dots),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 1,不趋于 0.

130. 设:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$$

是否由此可得出或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$?

解 不能.例如,叙列

$$x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \text{ 及 } y_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} (n = 1, 2, \dots),$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$$

但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 均不存在.

当然,还可举例 $x_n = \frac{1}{n^2}, y_n = n, (n = 1, 2, \dots)$, 则 $x_n, y_n \rightarrow 0, x_n \rightarrow 0$, 而 $\{y_n\}$ 极限不存在(当 $n \rightarrow \infty$). 注意, 假若已知 $x_n, y_n \rightarrow 0$, 而又已知 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 中至少有一个数列有极限的话, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ 至少有一个是成立的.

131. 证明

$$(a) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

及

$$(b) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在上面关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} \rightarrow a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 对于序列 $\{y_n\}$, 必有子序列 $y_{n_{k_1}} \rightarrow \beta = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_{k_1}}$. 显然 $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_{k_1}} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$. 由于 $x_{n_{k_1}} + y_{n_{k_1}} \rightarrow a + \beta$, 故 $a + \beta$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点.

由此可知

$$a + \beta \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n).$$

故得

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq a + \beta \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左端的不等式, 根据定义, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$ 使 $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow a' = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$.

对于序列 $\{x_n\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_1}}\}$ 使 $x_{n_{k_1}} \rightarrow \beta' = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_1}}$,

显然 $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_1}} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由于

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow a' - \beta'.$$

故 $a' - \beta'$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$a' - \beta' \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a' \geq \beta' + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(6) 先证右端不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n + y_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} + y_{n_k} \rightarrow r = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$.

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}$. 显然

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n. \text{ 由于}$$

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} + y_{n_{k_i}}) - x_{n_{k_i}} \rightarrow r - \tau,$$

故 $r - \tau$ 是 $\{y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$r - \tau \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = r \leq \tau + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在 $\{y_n\}$ 的一个子序列 $\{y_{n_i}\}$, 使 $y_{n_i} \rightarrow r' = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$. 对于序列 $\{x_{n_i}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{i_j}}\}$ 使 $x_{n_{i_j}} \rightarrow \tau' = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} x_{n_{i_j}}$. 显然 $\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} x_{n_{i_j}} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$. 由于

$$x_{n_{i_j}} + y_{n_{i_j}} \rightarrow r' + \tau',$$

故 $r' + \tau'$ 是 $\{x_n + y_n\}$ 的一个聚点, 从而

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + \tau'.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq r' + r' \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证毕.

以下举不等号成立的例子. 例如, 令

$\{x_n\}$ 为: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

$\{y_n\}$ 为: $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$.

则有不等式

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= 0 < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 1 \\ &< \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 2. \end{aligned}$$

而对于数列

$\{x_n\}$ 为: $0, 2, 0, 2, 0, 2, \dots$

$\{y_n\}$ 为: $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$,

则有

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n &= 1 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 2 \\ &< \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 3. \end{aligned}$$

132. 设 $x_n \geq 0$ 和 $y_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$.

证明:

$$(a) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

及

$$(b) \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

举出在这些关系式中仅不等号成立的例子.

证 (a) 先证右端的不等式. 根据定义, 存在 $\{x_n\}$ 的一个子序列 $\{x_{n_k}\}$, 使 $x_{n_k} \rightarrow a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$; 对于序列 $\{y_n\}$, 存在于序列 $\{y_{n_k}\}$, 使 $y_{n_k} \rightarrow \beta = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \geq 0$. 显然 $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \leq$

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$. 由于 $x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow a\beta$, 故 $a\beta$ 是序列 $\{x_n y_n\}$ 的一个聚点, 因此

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq a\beta$$

由此, 再注意到 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$, 即得知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \leq a\beta \leq \alpha(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式. 若 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 则此不等式显然成立, 故设 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta' > 0$. 于是, 存在正整数 N_0 , 使当 $n > N_0$ 时, $x_n > 0$. 根据定义, 存在 $\{x_n y_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k} y_{n_k}\}$ 使

$$x_{n_k} y_{n_k} \rightarrow a' = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq 0.$$

对于序列 $\{x_{n_k}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$, 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \beta' = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}}.$$

注意到 $\beta' = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \beta' > 0$ 以及 $x_n > 0 (n > N_0)$,

知

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{a'}{\beta'}.$$

故 $\frac{a'}{\beta'}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点, 从而

$$\frac{a'}{\beta'} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = a' \geq \beta' (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \geq (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

(6) 先证右端不等式, 可设 $\{y_n\}$ 有界 (若 $\{y_n\}$ 无界, 则 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$, 从而此不等式显然成立). 根据定义, 存在 $\{x_{n_i} y_{n_i}\}$ 的子序列 $\{x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}\}$ 使

$$x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \bar{a} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \geq 0.$$

对于 $\{x_{n_i}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \bar{\beta} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq 0.$$

若 $\bar{\beta} = 0$, 则由于 $\{y_n\}$ 有界, 知 $x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow 0$, 从而 $\bar{a} = 0$, 此时所要证的不等式显然成立, 故下设 $\bar{\beta} > 0$. 于是, 当 i 充分大时 ($i > i_0$), $x_{n_{k_i}} > 0$, 故得

$$y_{n_{k_i}} = (x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}}) \cdot \frac{1}{x_{n_{k_i}}} \rightarrow \frac{\bar{a}}{\bar{\beta}}.$$

因此, $\frac{\bar{a}}{\bar{\beta}}$ 是 $\{y_n\}$ 之一聚点, 从而 $\frac{\bar{a}}{\bar{\beta}} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$, 由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \bar{a} \leq \bar{\beta} (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

再证左端的不等式. 根据定义, 存在 $\{y_n\}$ 的一子序列 $\{y_{n_i}\}$, 使 $y_{n_i} \rightarrow r = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \geq 0$, 对于 $\{x_{n_i}\}$, 存在子序列 $\{x_{n_{k_i}}\}$ 使

$$x_{n_{k_i}} \rightarrow \tau = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq 0.$$

显然, $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} x_{n_{k_i}} \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 0$. 由于

$$x_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} \rightarrow \tau r,$$

故 τr 是 $\{x_n y_n\}$ 之一聚点, 从而

$$\tau r \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n),$$

由此可知

$$(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq rr \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n).$$

证毕.

下面举不等号成立的例子,例如,令

$$\{x_n\} \text{ 为: } \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$$

$$\{y_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$$

则有不等式

$$\begin{aligned} (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) &= \frac{1}{8} < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= \frac{1}{2} < (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 1. \end{aligned}$$

再令

$$\{x_n\} \text{ 为: } 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\{y_n\} \text{ 为: } \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2, \dots$$

则有不等式

$$\begin{aligned} (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) &= \frac{1}{2} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) \\ &= 1 < (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) = 4. \end{aligned}$$

133. 证明:若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,则对任何的叙列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$,有

$$(a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

及

$$(b) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n (x_n \geq 0).$$

证 (a) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在,故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

从而,利用 131 题的结果可知

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n), \end{aligned}$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(6) 分三种情形: (i) 设 $y_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$. 则利用 132 题的结果可知

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &\leq (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \\ &= (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \\ &= (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n), \end{aligned}$$

故得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n).$$

(ii) 设 $y_n \leq 0 (n = 1, 2, \dots)$. 则 $-y_n \geq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 于是, 仍利用 132 题的结果可知

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \\ &= \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n), \end{aligned}$$

故得

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n);$$

但是根据上、下极限的定义, 显然有等式

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n y_n) &= -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n), \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-y_n) &= -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n, \end{aligned}$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

(iii) 设 $\{y_n\}$ 中有无穷多项是非负的, 设这些项构成的子序列为 $\{y_{n_k}\} (y_{n_k} \geq 0, k = 1, 2, \dots)$ (如果 $\{y_n\}$ 中只有有限项是非负的, 则从某一项开始有 $y_n < 0$, 这时应用(ii)的结果即知所要证的等式成立). 于是, 注意到 $x_n \geq 0$, 显然有(利用(i)已证的结果)

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) &= \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} y_{n_k}) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n. \end{aligned}$$

证毕.

134. 证明: 若对于某非负^(*) 叙列 $x_n (x_n \geq 0, n = 1, 2, \dots)$, 任何叙列 $y_n (n = 1, 2, \dots)$ 都使下二等式中至少有一成立:

$$(a) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

或

$$(b) \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n,$$

则叙列 x_n 是收敛的.

证 取 $\{x_n\}$ 的子叙列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} \rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

取

$$y_n = \begin{cases} -x_n, & \text{当 } n \neq n_k \text{ 时,} \\ A, & \text{当 } n = n_k \text{ 时,} \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

其中 A 为任取的正常数, 对此 $\{y_n\}$ 若(a)成立, 则由(注意到 $x_n \geq 0$)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = A,$$

知

$$(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) + A,$$

由此可知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

故 $\{x_n\}$ 收敛.

若 (σ) 成立, 则由 (同样, 注意到 $x_n \geq 0$)

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = A \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

知

$$A \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = A \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

由此可知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

故 $\{x_n\}$ 也是收敛的. 证毕.

*) 编者注: 原著中将 $x_n \geq 0$ 的假定加在条件(6)后, 似不妥, 因为数列 x_n 应该是预先给定的.

135. 证明: 若 $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 及

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = 1,$$

则数列 x_n 是收敛的.

证 由假定知

$$0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n < +\infty, 0 < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} < +\infty. (**)$$

由于 (利用 132 题的结果)

$$1 = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) \leq (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n})$$

$$\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot \frac{1}{x_n}) = 1,$$

故

$$(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}) = 1,$$

从而

$$(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}) = (\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n) \cdot (\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}).$$

由此,再注意到(*)式,即知

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad (0 < a < +\infty).$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在有限,因此 $\{x_n\}$ 收敛,证毕.

136. 证明:若叙列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 有界,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = 0,$$

则此叙列的聚点密布于下极限和上极限

$$l = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ 和 } L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

之间,即是说间隔 (l, L) 中的任意一个数都是已知叙列的聚点.

证 根据定义, l 与 L 都是 $\{x_n\}$ 的聚点,故我们只要证明 l 与 L 之间的任何数 $a (l < a < L)$ 都是 $\{x_n\}$ 的聚点. 先证:对于任意给定的 $\epsilon > 0$ 及任意给定的正整数 N ,必有正整数 $n' > N$ 存在,使 $|x_{n'} - a| < \epsilon$.

由假定,必有正整数 N' 存在,使当 $n > N'$ 时,恒有 $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$. 令 $N_0 = \max\{N, N'\}$, 则于序列 $x_n (n = N_0 + 1, N_0 + 2, \dots)$ 中必至少有两项 $x_{n'}$ 和 $x_{n''}$ 存在,使 $x_{n'} < a, x_{n''} > a$ (因为否则的话,例如,无小于 a 的项,则必 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a$, 此与 $l < a$ 矛盾), 不妨设 $n' < n''$, 令

满足 $n' \leq n \leq n''$ 且使 $x_n < a$ 的正整数 n 中之最大者为 n^* . 显然 $n^* \leq n'' - 1$, 且 $x_{n^*} < a, x_{n^*+1} > a$. 故 $n^* > N, n^* > N'$ 并且

$$|x_{n^*} - a| < x_{n^*+1} - x_{n^*} < \varepsilon.$$

现取 $\varepsilon_1 = 1, N_1 = 1$, 则存在 $x_{n_1} (n_1 > 1)$, 使 $|x_{n_1} - a| < 1$; 再取 $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}, N_2 = n_1$, 则存在 $x_{n_2} (n_2 > n_1)$ 使 $|x_{n_2} - a| < \frac{1}{2}$; 又取 $\varepsilon_3 = \frac{1}{3}, N_3 = n_2$, 存在则 $x_{n_3} (n_3 > n_2)$ 使 $|x_{n_3} - a| < \frac{1}{3}$; 这样一直继续下去, 则得 $\{x_n\}$ 的一个子数列 $\{x_{n_k}\}$, 满足

$$|x_{n_k} - a| < \frac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

故 $x_{n_k} \rightarrow a$, 即 a 是 $\{x_n\}$ 的一个聚点, 证毕.

137. 设数列 $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ 满足条件

$$0 \leq x_{m+n} \leq x_m + x_n (m, n = 1, 2, \dots)$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在.

证 证法一:

由于

$$x_n \leq x_{n-1} + x_1 \leq x_{n-2} + x_1 + x_1 \leq \dots \leq nx_1,$$

故 $0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1$, 从而数列 $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ 有界, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = a$, 则 0

$\leq a \leq x_1$, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 $N > 1$ 使 $\frac{x_N}{N} < a + \varepsilon$.

任何正整数 $n > N$ 都可表为 $n = qN + r$ 的形式, 其中 q 为正整数, r 为小于 N 的非负整数 ($0 \leq r < N$).

我们有

$$\begin{aligned} x_n &= x_{qN+r} \leq x_{(q-1)N} + x_N + x_r \leq x_{(q-2)N} + x_N + \\ &+ x_N + x_r \leq \cdots \leq qx_N + x_r \leq qx_N + rx_1 \\ &\leq qx_N + Nx_1, \end{aligned}$$

从而

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{qx_N}{n} + \frac{Nx_1}{n} \leq \frac{x_N}{N} + \frac{Nx_1}{n} < a + \varepsilon + \frac{Nx_1}{n}.$$

由此可知

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a + \varepsilon,$$

再根据 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 即得

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} \leq a,$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n},$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 存在有限.

证法二:

用反证法. 假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ 不存在, 则序列 $\left\{ \frac{x_n}{n} \right\}$ 至少有两个聚点 a 与 b , 不妨设 $a < b$, 由于 (证法一中已证)

$$0 \leq \frac{x_n}{n} \leq x_1 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

故 $0 \leq a < b \leq x_1$. 根据聚点定义, 存在 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{n_i}\}$ 与 $\{x_{m_j}\}$, 使

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{x_{n_i}}{n_i} = a, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} = b.$$

任给 $\epsilon < 0$, 必存在正整数 $i_0 > 1$, 使

$$\frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} < a + \epsilon.$$

显然, 当 j 充分大时 ($j > j_0$), 必 $m_j > n_{i_0}$, 此时仿证法一, 有不等式 ($[x]$ 表 x 的整数部分)

$$x_{m_j} \leq \left[\frac{m_j}{n_{i_0}} \right] x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1 \leq \frac{m_j}{n_{i_0}} x_{n_{i_0}} + n_{i_0} x_1,$$

故 ($j > j_0$ 时)

$$\frac{x_{m_j}}{m_j} \leq \frac{x_{n_{i_0}}}{n_{i_0}} + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j} < a + \epsilon + \frac{n_{i_0} x_1}{m_j},$$

由此可知

$$b = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{x_{m_j}}{m_j} \leq a + \epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 即得 $b \leq a$, 此与 $a < b$ 矛盾, 证毕.

138. 证明: 若叙列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 收敛, 则算术平均值的叙列

$$\zeta_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也收敛, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

反之, 则结论不真, 举例说明之.

证 令 $s_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, 则

$$\begin{aligned} \frac{s_n}{n} &= \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{N}{n}\right). \end{aligned}$$

因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设收敛于 a , 则对于任给的 $\epsilon > 0$ 存在序

号 N , 使当 $n > N$ 时, $|x_n - a| < \varepsilon$, 即 x_{N+1}, x_{N+2}, \dots 均 $\in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. 由此推得 $\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N}$ 也含在 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 之内, 即

$$\frac{x_{N+1} + x_{N+2} + \dots + x_n}{n - N} = a + \alpha,$$

式中 $|\alpha| < \varepsilon$.

这样, $\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + (a + \alpha)(1 - \frac{N}{n})$. 由此得

$$\left| \frac{s_n}{n} - a \right| \leq \frac{|s_N|}{n} + |\alpha| + (|a| + |\alpha|) \frac{N}{n}.$$

今取 $N' > N$, 使当 $n > N'$ 时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \varepsilon, \quad \frac{N}{n} < \frac{\varepsilon}{|a| + \varepsilon}.$$

于是, 当 $n > N'$ 时, 恒有 $\left| \frac{s_n}{n} - a \right| < 3\varepsilon$.

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = a,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

但反之不然, 例如叙列 $x_n = (-1)^{n+1} (n = 1, 2, \dots)$ 是发散的, 但是叙列

$$\zeta_n = \begin{cases} 0, & \text{若 } n \text{ 为偶数,} \\ -\frac{1}{n}, & \text{若 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

却是收敛的.

139. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty,$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty$.

证 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, 故对于任给的 $M > 0$, 存在有序号 N , 使当 $n > N$ 时, $x_n > 3M$. 此时, 仿 138 题之证, 有

$$\frac{s_n}{n} = \frac{s_N}{n} + \frac{s_n - s_N}{n - N} \left(1 - \frac{N}{n}\right) > \frac{s_N}{n} + 3M \left(1 - \frac{N}{n}\right).$$

又因 $\frac{s_N}{n} \rightarrow 0, 1 - \frac{N}{n} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$, 故可取正整数 $N' > N$, 使当 $n > N'$ 时, 恒有

$$\frac{|s_N|}{n} < \frac{M}{2}, \quad 1 - \frac{N}{n} > \frac{1}{2}.$$

于是, 当 $n > N'$ 时恒有 $\frac{s_n}{n} > M$, 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty.$$

140. 证明: 若数列 $x_n (n = 1, 2, \cdots)$ 收敛, 且 $x_n > 0$,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. 因 $x_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$, 故 $a \geq 0$. 先设 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln x_n = \ln a$, 于是, 利用 138 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) = \ln a.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n} (\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n)} \\ &= e^{\ln a} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

若 $a = 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-\ln x_n) = +\infty$. 利用 139 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n) = +\infty,$$

由此可知

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{n}(-\ln x_1 - \ln x_2 - \cdots - \ln x_n)} \\ &= 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.\end{aligned}$$

证毕.

141. 证明: 若 $x_n > 0 (n = 1, 2, \dots)$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$ 存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

证 令 $y_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} (n = 1, 2, \dots)$, 则 $y_n > 0$. 由假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 存在, 设为 a . 利用 140 题的结果可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} = a.$$

于是

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} \sqrt[n]{\frac{x_2}{x_1} \frac{x_3}{x_2} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1} \left[(y_1 y_2 \cdots y_{n-1})^{\frac{1}{n-1}} \right]^{\frac{n-1}{n}} \\ &= 1 \cdot a = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}.\end{aligned}$$

142. 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

证 设数列 $x_n = \frac{n^n}{n!} (n = 1, 2, \dots)$ 则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

所以, 利用 141 题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = e.$$

143. 证明:若

$$(a) y_{n+1} > y_n (n = 1, 2, \dots),$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty,$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \text{ 存在,}$$

$$\text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

证 假定 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$. 由此, 并注意到 $y_n \rightarrow +\infty$,

知对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在有序号 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} - a \right| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ (且 } y_n > 0).$$

于是分数(当 $n > N$ 时)

$$\frac{x_{N+2} - x_{N+1}}{y_{N+2} - y_{N+1}}, \frac{x_{N+3} - x_{N+2}}{y_{N+3} - y_{N+2}}, \dots,$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}, \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$$

都包含在 $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$ 之内, 因为 $y_{n+1} > y_n$, 所以, 这

些分数的分母都是正数, 于是得

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}) < x_{N+2} - x_{N+1}$$

$$< (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+2} - y_{N+1}),$$

$$(a - \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}) < x_{N+3} - x_{N+2}$$

$$< (a + \frac{\varepsilon}{2})(y_{N+3} - y_{N+2}),$$

.....

$$\begin{aligned} (a - \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_n) &< x_{n+1} - x_n \\ &< (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_n), \end{aligned}$$

相加之,得

$$\begin{aligned} (a - \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}) &< x_{n+1} - x_{N+1} \\ &< (a + \frac{\epsilon}{2})(y_{n+1} - y_{N+1}), \end{aligned}$$

即 $a - \frac{\epsilon}{2} < \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} < a + \frac{\epsilon}{2},$

所以,当 $n > N$ 时,恒有

$$\left| \frac{x_{n+1} - x_{N+1}}{y_{n+1} - y_{N+1}} - a \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

另外,我们有(当 $n > N$ 时)

$$\begin{aligned} \frac{x_n}{y_n} - a &= \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} + (1 - \frac{y_{N+1}}{y_n}) \\ &\quad \cdot \left(\frac{x_n - x_{N+1}}{y_n - y_{N+1}} - a \right), \end{aligned}$$

故

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| \leq \left| \frac{x_{N+1} - ay_{N+1}}{y_n} \right| + \frac{\epsilon}{2}.$$

现取正整数 $N' > N$,使当 $n > N'$ 时,恒有

$$\frac{|x_{N+1} - ay_{N+1}|}{y_n} < \frac{\epsilon}{2}$$

于是,当 $n > N'$ 时,恒有

$$\left| \frac{x_n}{y_n} - a \right| < \epsilon.$$

由此可知, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$

注. 本题中, 若将条件(B) 换为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}$$

则结论仍成立:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

详见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一章 § 2.

144. 求 (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} (a > 1)$;

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n}.$$

解 (a) 设 $x_n = n^2, y_n = a^n (a > 1)$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{a^{n+1} - a^n} = \frac{2n+1}{a^n(a-1)}.$$

再设 $x'_n = 2n+1, y'_n = a^n$,

则 $y'_{n+1} > y'_n, y'_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \frac{2}{a^n(a-1)} \rightarrow 0,$$

因而利用 143 题的结果得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{a^n} = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = 0.$$

继续利用 143 题的结果, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = 0,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{a^n} = 0.$$

(6) 设 $x_n = \lg n, y_n = n,$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty,$ 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 0,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0.$

注 143 题的结果属于 O. Stolz, 当 $y_n = n$ 时, 早已被 A.

L. Cauchy 所证明, 此结果常用于确定 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的待定式

$\frac{x_n}{y_n}$ 的极限, 144 题即是一例. 应用此结果, 也可证明 138

题及 139 题的结果(此结果属于哥西 Cauchy). 事实上,

令

$$x'_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, y'_n = n,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_n}{y'_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x'_{n+1} - x'_n}{y'_{n+1} - y'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n. \end{aligned}$$

145. 证明: 若 p 为自然数, 则

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1};$$

$$(6) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2};$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

证 (a) 令 $x_n = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, y_n = n^{p+1},$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty,$ 且有

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(n+1)^p}{(p+1)n^p} + \cdots$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{p+1},$$

式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} o\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ 为无穷小, 以下不再说明,

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

$$(6) \text{ 令 } x_n = (p+1)(1^p + 2^p + \cdots + n^p) - n^{p+1},$$

$$y_n = (p+1)n^p,$$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(p+1)(n+1)^p [n^{p+1} - (n+1)^{p+1}]}{(p+1)[(n+1)^p - n^p]} \\ &= \frac{p(p+1)n^{p-1} + \cdots}{p(p+1)n^{p-1} + \cdots}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} \rightarrow \frac{1}{2}$, 所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

$$(8) \text{ 令 } x_n = 1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p, y_n = n^{p+1},$$

则 $y_{n+1} > y_n, y_n \rightarrow +\infty$, 且有

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} &= \frac{(2n+1)^p}{(n+1)^{p+1} - n^{p+1}} = \frac{(2n+1)^p}{(p+1)n^p + \cdots} \\ &= \frac{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^p}{p+1 + o\left(\frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{2^p}{p+1}, \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 3^p + \cdots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \frac{2^p}{p+1}.$$

$$= \frac{2^p}{p+1}.$$

146. 证明: 叙列

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1, 2, \cdots)$$

收敛.

因此有公式

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

式中 $C = 0.577216 \cdots$ 称为尤拉常数, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$.

证 因为 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

故 $\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$,

令 $n=1, 2, 3, \cdots, n$ 得出

$$\ln 2 - \ln 1 < 1,$$

$$\ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2},$$

$$\ln 4 - \ln 3 < \frac{1}{3},$$

.....

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

相加之得

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

于是,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \\ &> \frac{1}{n+1} > 0, \end{aligned}$$

即 $\{x_n\}$ 是一个有下界的数列, 其次,

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ (**), 所以 $x_n - x_{n+1} > 0$, 这就是说, $\{x_n\}$ 又是一个单调下降的数列. 因而 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 用 C 表示之, 即

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right),$$

它的近似值为 0.577216. 或表成

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$.

*) 及 **) 利用 75 题(a)的结果.

147. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right).$$

解 因为

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n, \quad (1)$$

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n} = C + \ln 2n + \varepsilon_{2n}, \quad (2)$$

其中 C 为尤拉常数, $\varepsilon_n \rightarrow 0, \varepsilon_{2n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$.

(2)式减(1)式得

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} &= \ln 2n - \ln n + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \\ &= \ln 2 + (\varepsilon_{2n} - \varepsilon_n) \rightarrow \ln 2 (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

148. 数列 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 是由下列各式

$$x_1 = a, x_2 = b, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} (n=3, 4, \cdots)$$

所确定. 求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

解 由于

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = \frac{x_{n-1} - x_n}{2} \\ &= \cdots = \frac{x_2 - x_1}{(-2)^{n-1}} = \frac{b-a}{(-2)^{n-1}} \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \sum_{m=1}^n (x_{m+1} - x_m) + x_1 \\ &= (b-a) \sum_{m=1}^n \frac{1}{(-2)^{m-1}} + a, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{b-a}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + a = \frac{a+2b}{3}.$$

149. 设 $a > 0$ 和 $x_n (n=1, 2, \cdots)$ 为由以下各式

$$x_0 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) (n=0, 1, 2, \cdots)$$

所确定的数列. 求证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

证 由 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x_n} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x_n}} \right)^2 + \sqrt{a} \geq \sqrt{a}$
 $(n=0, 1, 2, \dots),$

则 $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{x_n} - x_n \right) \leq 0.$

知 $\{x_n\}$ 为单调下降的有界数列, 必有极限存在. 设其极限为 l , 则 $l \geq \sqrt{a} > 0$, 对于等式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

两端取极限, 即得

$$l = \frac{1}{2} \left(l + \frac{a}{l} \right),$$

解之得

$$l = \sqrt{a} \text{ (负值不合适),}$$

故证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

150. 证明由下列各式

$$x_1 = a, y_1 = b, x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

确定的数列 x_n 和 $y_n (n=1, 2, \dots)$ 有公共的极限

$$\mu(a, b) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

(数 a 和 b 的算术—几何平均数).

证 分两种情形:

1) a 与 b 中至少有一个为零, 例如, 设 $a=0$. 则显然有 $x_n = 0 (n=1, 2, \dots), y_{n+1} = \frac{y_n}{2}$, 从而, 递推得

$$y_n = \frac{b}{2^{n-1}} (n=1, 2, \dots).$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

2) 设 $a \neq 0, b \neq 0$. 这时, 必须 $a > 0, b > 0$. 否则, 若 $ab < 0$, 则 $x_2 = ab$ 没有意义; 若 $a < 0, b < 0$, 则 $x_2 = \sqrt{ab} > 0, y_2 = \frac{a+b}{2} < 0$, 从而 $x_3 = \sqrt{x_2 y_2}$ 没有意义. 因此, 必须 $a > 0, b > 0$. 不妨假定 $a \leq b$. 由于两正数的等比中项不超过它们的等差中项, 并且都界于原来两数之间, 故有

$$a \leq x_2 \leq y_2 \leq b,$$

由此又有

$$a \leq x_2 \leq x_3 \leq y_3 \leq y_2 \leq b.$$

应用数学归纳法可知一般有

$$a \leq x_n \leq x_{n+1} \leq y_{n+1} \leq y_n \leq b \quad (n=2, 3, \dots).$$

故 $\{x_n\}$ 为单调增大的有界数列, $\{y_n\}$ 为单调减小的有界数列, 因此它们的极限都存在, 令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \beta.$$

在等式

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

两端取极限, 得

$$\beta = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

故 $\alpha = \beta$, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

证毕.

§ 3. 函数的概念

1° 函数的概念 若对于集合 $X = \{x\}$ 中的每一个 x , 有一个确定的实数 $y \in Y = \{y\}$ 与之对应, 则变量 y 称为变量 x 在已知变域 X 的单值函数 f , 并记为 $y = f(x)$.

集合 X 名为函数 $f(x)$ 的定义域或存在域; Y 称为这个函数的值域, 在最简单的情形下, 集合 X 或为开区间 $(a, b): a < x < b$, 或为半开区间 $(a, b]: a < x \leq b$ 或 $[a, b): a \leq x < b$, 或为闭区间 (线段 $[a, b]: a \leq x \leq b$, 其中 a 和 b 为某实数或符号 $-\infty$ 和 $+\infty$).

若对于 X 中的每一个值 x 有若干个值 $y = f(x)$ 与之对应, 则 y 称为 x 的多值函数.

2° 反函数 若把 x 了解为满足方程式

$$f(x) = y$$

(式中 y 为属于函数 $f(x)$ 的值域 Y 中之一固定数值) 的任何数值, 则这个对应关系确定出在集合 Y 上的某函数

$$x = f^{-1}(y),$$

这个函数称为函数 $f(x)$ 的反函数, 这个函数一般地说来是多值的。若函数 $y = f(x)$ 是严格单调的, 即当 $x_2 > x_1$ 时, $f(x_2) > f(x_1)$ [或相应地 $f(x_2) < f(x_1)$], 则反函数 $x = f^{-1}(y)$ 为单值而且严格的单调函数。

求下列函数的存在域:

151. $y = \frac{x^2}{1+x}$.

解 当 $1+x \neq 0$, 即 $x \neq -1$ 时, 函数 y 才有意义, 所以, 它的存在域为 $(-\infty, -1), (-1, +\infty)$.

152. $y = \sqrt{3x-x^3}$.

解 存在域为满足不等式

$$3x - 3x^3 \geq 0$$

的实数 x 的集合, 解之, 得存在域为 $(-\infty, -\sqrt{3}]$, $[0, \sqrt{3}]$.

$$153.^+ y = (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

解 当 $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ 时, y 值确定.

解之, 得存在域为满足

$$-1 \leq x < 1$$

的数 x 的集合.

$$154. (a) y = \log(x^2 - 4), (b) y = \log(x+2) + \log(x-2).$$

解 (a) 当 $x^2 - 4 > 0$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为 $(-\infty, -2), (2, +\infty)$.

(b) 函数 y 由两个函数组成, 其中第一个函数的存在域为 $(-2, +\infty)$, 而第二个函数的存在域为 $(2, +\infty)$, 于是, 函数 y 的存在域为它们的公共部分, 即 $(2, +\infty)$.

$$155. y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}.$$

解 当 $\sin \sqrt{x} \geq 0$ 时, y 值才为确定的实数. 解之, 得

$$2k\pi \leq \sqrt{x} \leq (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

存在域为满足不等式

$$4k^2\pi^2 \leq x \leq (2k+1)^2\pi^2 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

$$156. y = \sqrt{\cos x^2}.$$

解 当 $\cos x^2 \geq 0$ 时, y 值才为确定的实数, 即只要 x 满足

$$0 \leq x^2 \leq \frac{\pi}{2} \text{ 及 } (4k-1)\frac{\pi}{2} \leq x^2 \leq (4k+1)\frac{\pi}{2} \\ (k=1, 2, \dots).$$

解之,得存在域为满足不等式

$$|x| \leq \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ 及 } \sqrt{(4k-1)\frac{\pi}{2}} \leq |x| \leq \sqrt{(4k+1)\frac{\pi}{2}} \\ (k=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

157. $y = \log\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$.

解 当 $\sin \frac{\pi}{x} > 0$ 时, y 值确定, 即只要

$$2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

及

$$-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi.$$

所以, 存在域为满足不等式

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k}, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

及

$$-\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2}$$

的数 x 的集合.

158. $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

解 当 $x \geq 0$ 及 $\sin \pi x \neq 0$ 时, y 值确定, 解之, 得存在域为满足关系式

$$x > 0, x \neq n (n=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

159. $y = \arcsin \frac{2x}{1+x}$.

解 当 $\left| \frac{2x}{1+x} \right| \leq 1$ 时, y 值确定. 解之, 得

$$-1 \leq \frac{2x}{1+x} \leq 1,$$

$$-1 \leq 2 - \frac{2}{1+x} \leq 1,$$

$$-3 \leq -\frac{2}{1+x} \leq -1,$$

$$\frac{2}{3} \leq 1+x \leq 2.$$

最后得存在域为满足不等式

$$-\frac{1}{3} \leq x \leq 1$$

的数 x 的集合.

160. $y = \arccos(2\sin x)$.

解 当 $|2\sin x| \leq 1$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为满足不等式

$$|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

161. $y = \lg[\cos(\lg x)]$.

解 当 $\cos(\lg x) > 0$ 时, y 值确定. 解之, 得

$$\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < \lg x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi.$$

从而存在域为满足不等式

$$10^{\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi} < x < 10^{\left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的数 x 的集合.

162. $y = (x - |x|) \sqrt{-\sin^2 \pi x}$.

解 由于 $\sin^2 \pi x \geq 0$, 故仅当 $\sin \pi x = 0$ 时 $\sqrt{-\sin^2 \pi x}$ 才有

意义,从而函数 y 才有意义. 解之,得存在域为

$$x=k \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

163. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$.

解 当 $\sin \pi x \neq 0$ 时, 第一项有意义, 即 $x \neq k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

当 $0 \leq 2^x \leq 1$ 时, 第二项有意义, 即 $x \leq 0$. 由此得存在域为满足关系式

$$x < 0, x \neq -n \quad (n=1, 2, \dots)$$

的数 x 的集合。

164. $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$.

解 当 $-1 \leq 1-x \leq 1$, 即 $0 \leq x \leq 2$ 时, 第一个函数有意义;

当 $\lg x > 0$, 即 $x > 1$ 时, 第二个函数有意义.

由此得存在域为满足不等式

$$1 < x \leq 2$$

的数 x 的集合。

165. $y = (2x)_1$.

解 当 $2x = n$ ($n=0, 1, \dots$) 时, y 值确定, 所以, 存在域为集合:

$$0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots, \frac{n}{2}, \dots$$

求下列函数的存在域和函数值域:

166. $y = \sqrt{2+x-x^2}$.

解 当 $2+x-x^2 \geq 0$ 时, y 值确定. 解之, 得存在域为满足不等式

$$-1 \leq x \leq 2$$

的数 x 的集合. 又因

$$y = \sqrt{\frac{9}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{3}{2},$$

所以, 函数值域为满足不等式

$$0 \leq y \leq \frac{3}{2}$$

的数 y 的集合.

167. $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

解 当 $1 - 2\cos x > 0$ 时, y 值确定, 解之, 得存在域为满足不等式

$$2k\pi + \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{5\pi}{3} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2 \cdots)$$

的数 x 的集合 A . 因为

$$\max_{x \in A} (1 - 2\cos x) = 1 - (-2) = 3,$$

$$\inf_{x \in A} (1 - 2\cos x) = 0,$$

所以, 函数值域为满足不等式

$$-\infty < y \leq \lg 3$$

的数 y 的集合.

168. $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$.

解 当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$ 时, y 值确定, 而对于 $-\infty < x < +\infty$ 来说, 始终有 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 所以, 存在域为全体实数所组成的集合, 而函数值域为闭区间 $[0, \pi]$.

169. $y = \arcsin \left(\lg \frac{x}{10} \right)$.

解 当 $-1 \leq \lg \frac{x}{10} \leq 1$ 时, 即当 $\frac{1}{10} \leq \frac{x}{10} \leq 10$, 或 $1 \leq x \leq 100$ 时, y 值确定, 且在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上变化, 所以, 存在域为闭区间 $[1, 100]$, 函数值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

170. $y = (-1)^x$.

解 存在域为数 $x: x = \frac{p}{2q+1}$ (p, q 为整数) 的集合, 而函数值域为: $y = (-1)^p$, 即由 $-1, 1$ 两数组成的集合.

171. 在底为 $AC = b$ 和高为 $BD = h$ 的三角形 ABC 中(图 1.2) 内接一个高为 $NM = x$ 的矩形 $KLMN$. 把矩形 $KLMN$ 的周长 P 及其面积 S 表为 x 之函数.

作函数 $P = P(x)$ 及 $S = S(x)$ 的图形.

解 因为 $\frac{LM}{b} = \frac{h-x}{h}$,
所以,

$$LM = b \left(1 - \frac{x}{h} \right).$$

周长 $P = 2LM + 2x$, 即

$$P = P(x) = 2 \left(1 - \frac{b}{h} \right) x + 2b,$$

式中 $0 < x < h$.

当 $b < h$ 时, 如图 1.3 中直线段 AB 所示(不包含 A, B 两点).

当 $b > h$ 时, 如图 1.3 中直线段 AC 所示(不包含 A, C 两点). 其中 $OA = 2b$, B 和 C 的坐标为 h 和 $2h$.

矩形面积

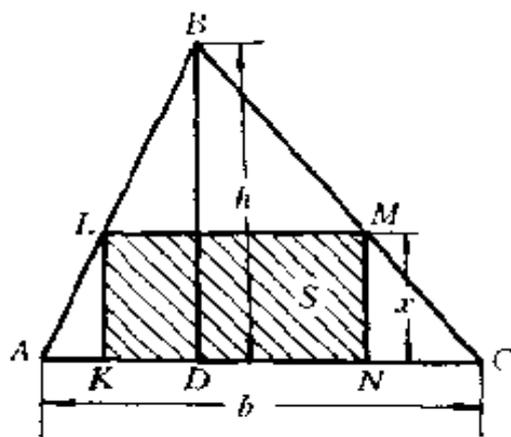


图 1.2

$$S = I.M \cdot x = bx \cdot \left(1 - \frac{x}{h}\right) \quad (0 < x < h).$$

如图 1·4 所示, 它是一段不包含 O 点及 B 点的抛物线弧 \widehat{OAB} 。

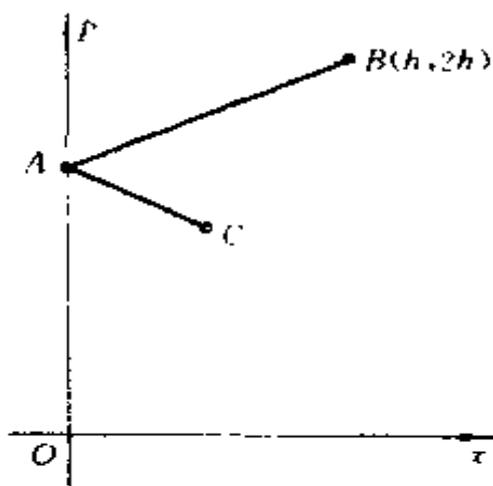


图 1.3

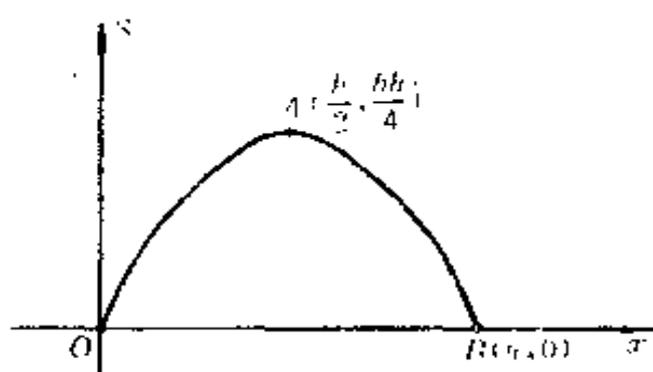


图 1.4

172. 在三角形 ABC 中, 边 $AB=6$ 厘米, 边 $AC=8$ 厘米, 角 $BAC=x$. 把边 $BC=a$ 和面积 $ABC=S$ 表为变量 x 的函数, 作函数 $a=a(x)$ 及 $S=S(x)$ 的图形.

解 利用余弦定理得三角形的边

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos x} = \sqrt{100 - 96 \cos x} \quad (0 < x < \pi),$$

如图 1·5 所示(系一不包含 A 点及 B 点的曲线弧 \widehat{AB}), 面三角形的面积

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 \sin x = 24 \sin x \quad (0 < x < \pi).$$

如图 1·6 所示(两轴单位取得不同, 系一不包含 O 点及 A 点的弧 \widehat{OBA}).

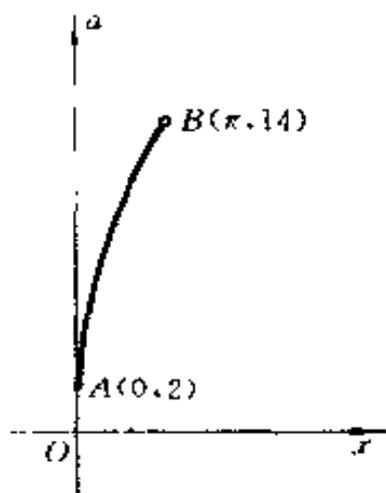


图 1.5

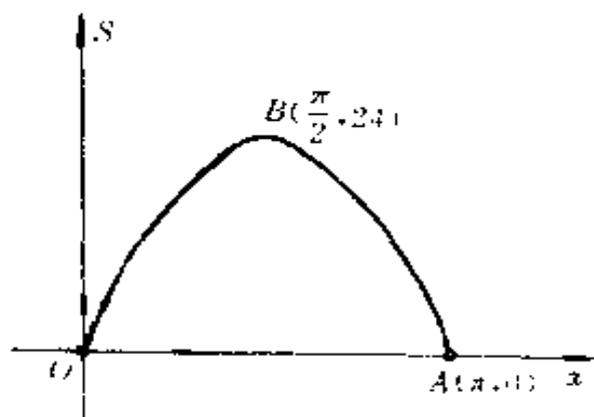


图 1.6

173. 在等腰梯形 $ABCD$ 中(图 1·7), 底为 $AD=a$, $BC=b$ ($a > b$), 高为 $HB=h$, 引直线 $MN \parallel BH$, MN 与顶点 A 相距 $AM=x$, 把图形 $ABNMA$ 的面积 S 表为变量 x 的函数. 作函数 $S=S(x)$ 的图形.

解 $AH = \frac{1}{2}(a-b)$, 分三种情况讨论:

(1) 当 $0 \leq x \leq \frac{a-b}{2}$ 时, 即 MN 线在 $\triangle ABH$ 内, 此时

$$\frac{MN}{h} = \frac{x}{\frac{a-b}{2}}, MN = \frac{2hx}{a-b}.$$

于是,

$$S = \frac{1}{2} MN \cdot x = \frac{hx^2}{a-b},$$

如图 1·8 中弧 \widehat{OA} (系抛物线段).

(2) 当 $\frac{a-b}{2} < x < \frac{a-b}{2} + h = \frac{a+b}{2}$ 时, 面积

$$S = \frac{a-b}{2} \cdot \frac{h}{2} + h \left(x - \frac{a-b}{2} \right) = h \left(x - \frac{a-b}{4} \right),$$

如图 1·8 中不含 A 点及 B 点的直线段 AB .

(3) 当 $\frac{a+b}{2} \leq x \leq a$ 时, 面积

$$S = \frac{h(a+b)}{2} - \frac{h}{a-b} \cdot (a-x)^2 = h \left[\frac{a+b}{2} - \frac{(a-x)^2}{a-b} \right],$$

如图 1·8 中抛物线段 \widehat{BC} .

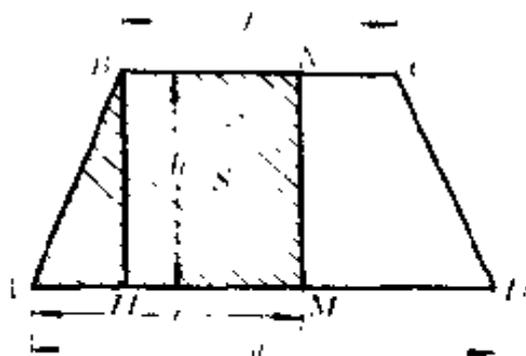


图 1.7

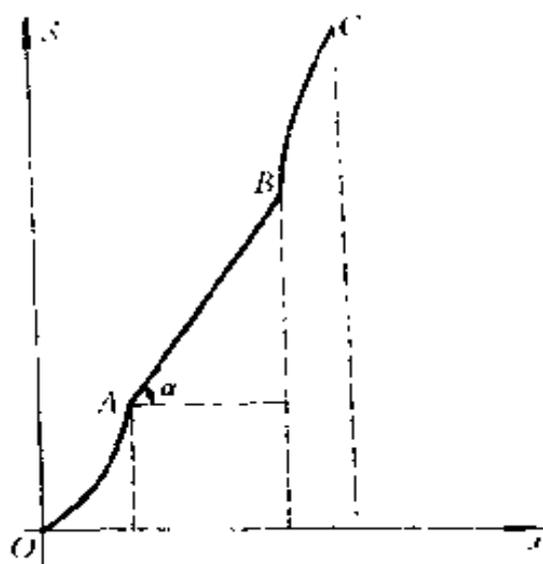


图 1.8

图 1·8 中各点的位置如下:

$$A \left(\frac{a-b}{2}, \frac{h(a-b)}{4} \right), B \left(\frac{a+b}{2}, \frac{h(a+3b)}{4} \right),$$

$$C \left(a, \frac{h(a+b)}{2} \right),$$

又 $\operatorname{tg} \alpha = h$.

174. 在 Ox 轴上的闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 内有等于 2 克的质量均匀地分布着, 而在此轴上的两点 $x=2$ 和 $x=3$ 有集中的质量各 1 克.

设 $m(x)$ 是介于区间 $(-\infty, x)$ 的质量的值, 求函数 $m = m(x) (-\infty < x < +\infty)$ 的解析表示式, 并作这个函

数的图形。

解 当 $-\infty < x \leq 0$ 时, $m(x) = 0$;

当 $0 < x \leq 1$ 时, 因为

$$1 : x = 2 : m(x),$$

于是,

$$m(x) = 2x;$$

当 $1 < x \leq 2$ 时, $m(x) = 2$;

当 $2 < x \leq 3$ 时, $m(x) = 3$;

当 $3 < x < +\infty$ 时, $m(x) = 4$.

如图 1·9 所示.

175. 函数 $y = \operatorname{sgn} x$, 用下列方法来定义:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{若 } x > 0; \\ 0, & \text{若 } x = 0; \\ -1, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

作这个函数的图形. 证明

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

解 函数 $\operatorname{sgn} x$ 的图形如图 1·10 所示.

因为

当 $x < 0$ 时,

$$|x| = -x = x \operatorname{sgn} x;$$

当 $x = 0$ 时,

$$|x| = 0 = x \operatorname{sgn} x;$$

当 $x > 0$ 时,

$$|x| = x = x \operatorname{sgn} x.$$

所以,

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

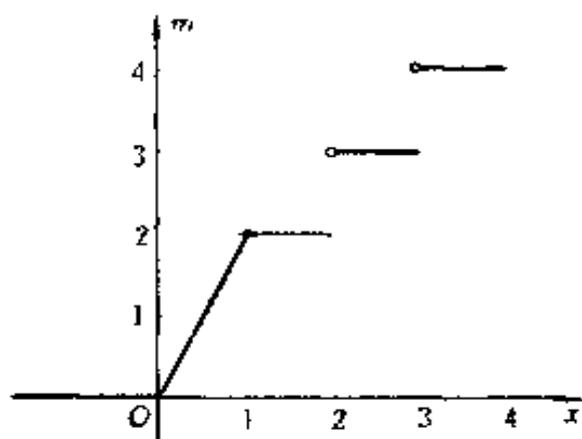


图 1.9

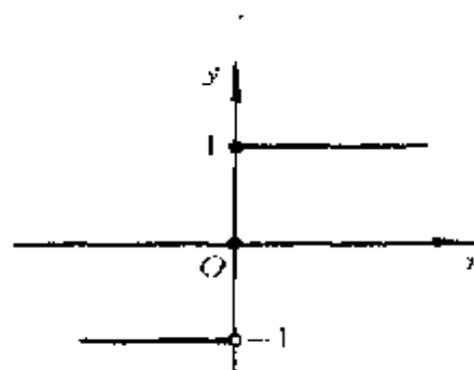


图 1.10

176. 函数 $y = [x]$ (数 x 的整数部分) 用下法定义: 若 $x = n + r$, 式中 n 为整数且 $0 \leq r < 1$, 则

$$[x] = n.$$

作这个函数的图形.

解 当 $x \in [n, n+1]$ 时 (n 为整数) $y = n$, 如图 1.11 所示.

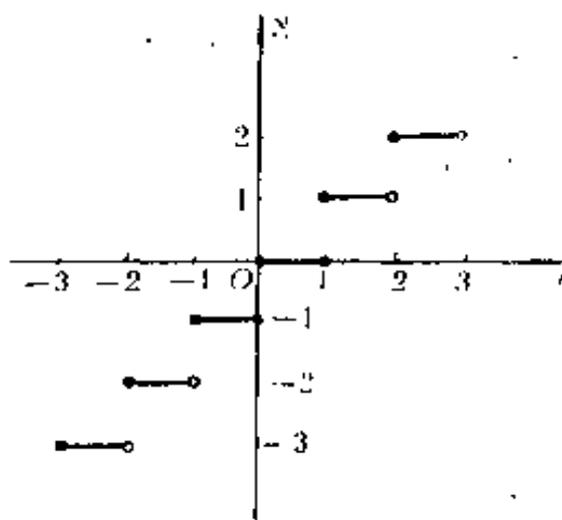


图 1.11

177. 设:

$$y = \pi(x) \quad (x \geq 0),$$

表示不超过数 x 的素数的数目, 对于自变数 $0 \leq x \leq 20$ 的值, 作这个函数的图形.

解 按题设可知:

当 $0 \leq x < 2$ 时, $\pi(x) = 0$;

当 $2 \leq x < 3$ 时, $\pi(x) = 1$;

当 $3 \leq x < 5$ 时, $\pi(x) = 2$;

当 $5 \leq x < 7$ 时, $\pi(x) = 3$;

当 $7 \leq x < 11$ 时, $\pi(x) = 4$;

当 $11 \leq x < 13$ 时, $\pi(x) = 5$;

当 $13 \leq x < 17$ 时, $\pi(x) = 6$;

当 $17 \leq x < 19$ 时, $\pi(x) = 7$;

当 $19 \leq x \leq 20$ 时, $\pi(x) = 8$ (如图 1.12 所示).

函数 $y = f(x)$ 在怎样的集合 E_y 上映出集合 E_x , 若:

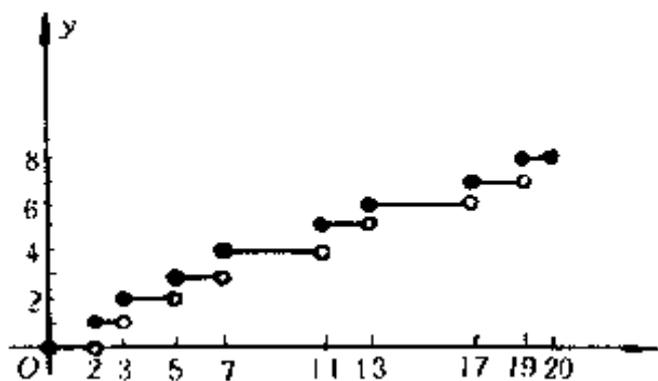


图 1.12

178. $y = x^2, E_x = \{1 \leq x \leq 2\}$.

解 $E_y = \{1 \leq y \leq 4\}$.

179. $y = \lg x, E_x = \{10 < x < 1000\}$.

解 $E_y = \{1 < y < 3\}$.

$$180. y = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x, E_x = \{-\infty < x < +\infty\}.$$

解 $E_y = \{0 < y < 1\}.$

$$181. y = \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}, E_x = \{0 < |x| \leq 1\}.$$

解 $E_y = \{1 < |y| < +\infty\}.$

$$182. y = |x|, E_x = \{1 \leq |x| \leq 2\}.$$

解 $E_y = \{1 \leq y \leq 2\}.$

变量 x 跑过区间 $0 < x < 1$, 则变量 y 跑过怎样的集合, 若

$$183. y = a + (b-a)x.$$

解 变量 x 从 0 变至 1 时, y 从 a 变至 b . 于是, 变量 y 的变化区间为 $a < y < b$ (当 $a < b$) 或 $b < y < a$ (当 $b < a$).

$$184. y = \frac{1}{1-x}.$$

解 当 x 从 0 变至 1 时, y 从 1 变至正无穷大. 于是, y 的变化区间为 $1 < y < +\infty$.

$$185. y = \frac{x}{2x-1}.$$

解 $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x-1}.$

当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$, y 从 0 变至负无穷大; 当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时, y 从正无穷大变至 1. 于是, y 的变化区间为 $-\infty < y < 0, 1 < y < +\infty$.

$$186. y = \sqrt{x-x^2}.$$

解 $y = \sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}.$

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, $y = \frac{1}{2}$ (最大值); 由于 x 趋于 0 时, y 趋于 0, 而 $y > 0$, 从而 $y = 0$ 是变量 y 的下确界. 于是, y 的

变化区间为 $0 < y \leq \frac{1}{2}$.

187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$.

解 当 x 从 0 变至 1 时, 变量 y 从 $+\infty$ 变至 $-\infty$. 于是, 变量 y 的变化区间为 $-\infty < y < +\infty$.

188. $y = x + [2x]$.

解 当 x 从 0 变至 $\frac{1}{2}$ 时, y 从 0 变至 $\frac{1}{2}$; 当 x 从 $\frac{1}{2}$ 变至 1 时, y 从 $\frac{3}{2}$ 变至 2. 于是, y 的变化区间为 $0 < y < \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \leq y < 2$.

189. 设:

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x,$$

求 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$.

解 因为 $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$, 所以,

$$f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = 0,$$

$$f(4) = 24.$$

190. 设:

$$f(x) = \lg x^2,$$

求 $f(-1), f(-0.001), f(100)$.

解 $f(-1) = \lg 1 = 0;$

$$f(-0.001) = \lg 0.000001 = -6;$$

$$f(100) = \lg 10000 = 4.$$

191. 设:

$$f(x) = 1 + [x],$$

求 $f(0.9), f(0.99), f(0.999), f(1)$.

解 $f(0.9) = f(0.99) = f(0.999) = 1,$
 $f(1) = 2$

192. 设:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0; \\ 2^x, & \text{当 } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

求 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2).$

解 $f(-2) = 1 - 2 = -1, f(-1) = 1 - 1 = 0,$
 $f(0) = 1 + 0 = 1, f(1) = 2^1 = 2,$
 $f(2) = 2^2 = 4$

193. 设:

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}$$

求 $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}.$

解 $f(0) = 1,$

$$f(-x) = \frac{1+x}{1-x},$$

$$f(x+1) = \frac{1-(x+1)}{1+(x+1)} = -\frac{x}{x+2},$$

$$f(x)+1 = \frac{1-x}{1+x} + 1 = \frac{2}{1+x},$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{x-1}{x+1},$$

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1+x}{1-x}.$$

194. 设:

(a) $f(x) = x - x^3; (b) f(x) = \sin \frac{\pi}{x};$

$$(B) f(x) = (x + |x|)(1 - x).$$

求使以下各式满足的 x 值:

$$(1) f(x) = 0; (2) f(x) > 0; (3) f(x) < 0.$$

解 (a) (1) $x - x^3 = 0$, 所以, $x = 0, 1$ 及 -1 .

$$(2) x - x^3 > 0, \text{即 } x(1 - x)(1 + x) > 0,$$

所以, $-\infty < x < -1$ 和 $0 < x < 1$.

(3) $x(1 - x)(1 + x) < 0$, 所以, $-1 < x < 0$ 和 $1 < x < +\infty$.

(6) (1) $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, 则 $\frac{\pi}{x} = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 所以, $x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$.

(2) $\sin \frac{\pi}{x} > 0$, 则 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 和 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$, 所以

$$\frac{1}{2k+1} < x < \frac{1}{2k} \text{ 和 } -\frac{1}{2k+1} < x < -\frac{1}{2k+2} \\ (k = 0, 1, 2, \dots)$$

(3) $\sin \frac{\pi}{x} < 0$, 则 $(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+2)\pi$ 和 $-(2k+1)\pi < \frac{\pi}{x} < -2k\pi (k = 0, 1, 2, \dots)$,

所以, $\frac{1}{2k+2} < x < \frac{1}{2k+1}$ 和 $-\frac{1}{2k} < x < -\frac{1}{2k+1} (k = 0, 1, 2, \dots)$,

(B) (1) $(x + |x|)(1 - x) = 0$, 则 $x \leq 0$ 和 $x = 1$.

(2) 因为 $x + |x| \geq 0$, 所以 $1 - x > 0$, 即 $x < 1$.

而由 $f(x) > 0$, 得 $x + |x| > 0$, 即 $x > 0$.

总之,当 $0 < x < 1$ 时, $(x + |x|)(1-x) > 0$.

(3) $(x + |x|)(1-x) < 0$.

首先, $x > 0$, 否则 $x + |x| = 0$.

其次, 应有 $1-x < 0$, 所以 $x > 1$, 此即所求之解。

195. 设:

(a) $f(x) = ax + b$; (b) $f(x) = x^2$; (B) $f(x) = a^x$.

求 $\varphi(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

解 (a) $\varphi(x) = \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} = a$;

(b) $\varphi(x) = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = 2x + h$;

(B) $\varphi(x) = \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h}$.

196. 设:

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

证明 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$.

证 $f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x)$

$$\begin{aligned} &= a(x+3)^2 + b(x+3) + c - 3[a(x+2)^2 \\ &\quad + b(x+2) + c] + 3[a(x+1)^2 + b(x+1) + c] \\ &\quad - [ax^2 + bx + c] = ax^2 + 6ax + 9a + bx + 3b + c \\ &\quad - 3ax^2 - 12ax - 12a - 3bx - 6b - 3c + 3ax^2 \\ &\quad + 6ax + 3a + 3bx + 3b + 3c - ax^2 - bx - c \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是,

$$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) \equiv 0$$

197. 若 $f(0) = -2$, $f(3) = 5$, 求线性整函数:

$$f(x) = ax + b.$$

$f(1)$ 及 $f(2)$ 等于什么(线性补插法)?

解 因为 $f(0)=b=-2$ 及 $f(3)=3a+b=5$,
所以,

$$a=\frac{7}{3}, b=-2.$$

于是,所求的线性整函数为

$$f(x)=\frac{7}{3}x-2,$$

且 $f(1)=\frac{1}{3}, f(2)=\frac{8}{3}.$

198. 若 $f(-2)=0, f(0)=1, f(1)=5$. 求二次有理整函数:

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

$f(-1)$ 及 $f(0.5)$ 等于什么(二次补插法)?

解 因为 $f(-2)=4a-2b+c=0$,

$$f(0)=c=1, f(1)=a+b+c=5,$$

所以, $a=\frac{7}{6}, b=\frac{17}{6}, c=1$.

于是,所求的二次有理整函数为

$$f(x)=\frac{7}{6}x^2+\frac{17}{6}x+1,$$

且 $f(-1)=-\frac{2}{3}, f(0.5)=\frac{65}{24}=2\frac{17}{24}.$

199. 设 $f(-1)=0, f(0)=2, f(1)=-3, f(2)=5$. 求三次有理整函数:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d.$$

解 因为 $f(-1)=-a+b-c+d=0$,

$$f(0)=d=2.$$

$$f(1)=a+b+c+d=-3.$$

$$f(2)=8a+4b+2c+d=5,$$

所以, $a = \frac{10}{3}, b = -\frac{7}{2}, c = -\frac{29}{6}, d = 2$.

于是, 所求的三次有理整函数为

$$f(x) = \frac{10}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{29}{6}x + 2.$$

200. 设 $f(0) = 15, f(2) = 30, f(4) = 90$, 求形状为

$$f(x) = a + bc^x$$

的函数.

解 因为 $f(0) = a + b = 15$.

$$f(2) = a + bc^2 = 30,$$

$$f(4) = a + bc^4 = 90,$$

所以, $a = 10, b = 5, c = 2$ (-2 不适合).

于是, 所求的函数为

$$f(x) = 10 + 5 \cdot 2^x.$$

201. 证明: 对于线性函数

$$f(x) = ax + b,$$

若自变量的诸值 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 组成一等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 也组成一等差级数.

证 设数列 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 为

$$x_1, x_1 + d, x_1 + 2d, x_1 + 3d, \dots,$$

$$x_1 + (n-1)d, \dots$$

其中 d 为公差.

于是,

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= (ax_n + b) - (ax_{n-1} + b) \\ &= \{a[x_1 + (n-1)d] + b\} - \\ &\quad \{a[x_1 + (n-2)d] + b\} = ad, \end{aligned}$$

由于 ad 为一常数, 所以, 数列 $y_n = f(x_n)$ 也组成等差级数.

202. 证明: 对于指数函数

$$f(x) = a^x (a > 0),$$

若自变数 $x = x_n (n = 1, 2, \dots)$ 的值组成一等差级数, 则对应的函数值 $y_n = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 组成一等比级数.

证 因为 $x_n - x_{n-1} = d$, 所以

$$y_n : y_{n-1} = a^{x_n} : a^{x_{n-1}} = a^{x_n - x_{n-1}} = a^d,$$

即函数值 $y_n = f(x_n)$ 组成一等比级数.

203. 设当 $0 < u < 1$ 函数 $f(u)$ 有定义, 求下列函数的定义域:

(a) $f(\sin x)^+$; (b) $f(\ln x)$; (c) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

解 (a) 因为 $0 < \sin x < 1$, 所以,

$$2k\pi < x < \pi + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \text{ 且}$$

$$x \neq \frac{4k+1}{2}\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

(b) 因为 $0 < \ln x < 1$, 所以, $1 < x < e$;

(c) 因为 $0 < \frac{[x]}{x} < 1$,

所以, $x > 1$ 且 $x \neq k (k = 2, 3, 4, \dots)$.

204. 设:

$$f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x}) (a > 0).$$

证明: $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) \cdot f(y)$.

证 $f(x+y) + f(x-y)$

$$= \frac{1}{2}(a^{x+y} + a^{-x-y}) + \frac{1}{2}(a^{x-y} + a^{-x+y})$$

$$= \frac{1}{2}(a^x \cdot a^y + a^{-x} \cdot a^{-y}) + \frac{1}{2}(a^x \cdot a^{-y} + a^{-x} \cdot a^y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}a^x(a^y+a^{-y}) + \frac{1}{2}a^{-x}(a^{-y}+a^y) \\
&= \frac{1}{2}(a^x+a^{-x})(a^y+a^{-y}) \\
&= 2f(x)f(y),
\end{aligned}$$

于是,

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y).$$

205. 设:

$$f(x)+f(y)=f(z).$$

求出 z , 若:

$$(a) f(x)=ax; \quad (b) f(x)=\frac{1}{x};$$

$$(c) f(x)=\operatorname{arctg}x (|x|<1); \quad (r) f(x)=\lg \frac{1+x}{1-x}.$$

解 (a) $f(x)+f(y)=ax+ay=a(x+y),$
 $f(z)=az,$

由 $f(x)+f(y)=f(z)$ 得 $z=x+y.$

$$(b) \text{ 由 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \text{ 得 } z = \frac{xy}{x+y}.$$

(c) 由 $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}y = \operatorname{arctg}z$ 得

$$\operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arctg}z$$

所以, $z = \frac{x+y}{1-xy};$

$$(r) \text{ 由 } \lg \frac{1+x}{1-x} + \lg \frac{1+y}{1-y} = \lg \frac{1+z}{1-z} \text{ 得}$$

$$\frac{(1+x)(1+y)}{(1-x)(1-y)} = \frac{1+z}{1-z},$$

所以, $z = \frac{x+y}{1+xy}.$

求 $\varphi[\varphi(x)], \psi[\psi(x)], \varphi[\psi(x)]$ 及 $\psi[\varphi(x)],$ 设:

206. $\varphi(x) = x^2$ 及 $\psi(x) = 2^x$.

解 $\varphi[\varphi(x)] = (x^2)^2 = x^4$; $\varphi[\psi(x)] = (2^x)^2 = 2^{2x}$;
 $\psi[\psi(x)] = 2^{(2^x)}$; $\psi[\varphi(x)] = 2^{(x^2)}$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

解 $\varphi[\varphi(x)] = \operatorname{sgn}(\operatorname{sgn} x) = \operatorname{sgn} x$;

$$\psi[\psi(x)] = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x (x \neq 0);$$

$$\varphi[\psi(x)] = \operatorname{sgn}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0);$$

$$\psi[\varphi(x)] = \frac{1}{\operatorname{sgn} x} = \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$ 及 $\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0, \\ -x^2, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$

解 $\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$; $\psi[\psi(x)] = 0$ (因为 $-x^2 \leq 0$);
 $\varphi[\psi(x)] = 0$; $\psi[\varphi(x)] = \psi(x)$.

209. 设:

$$f(x) = \frac{1}{1-x},$$

求 $f[f(x)], f\{f[f(x)]\}$.

解 $f[f(x)] = \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}} = 1 - \frac{1}{x}$;

$$f\{f[f(x)]\} = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{x}\right)} = x.$$

210. 设:

$$f_n(x) = \underbrace{f\{f[\dots f(x)]\}}_{n \text{ 次}}.$$

若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $f_n(x)$.

解 当 $n=2$ 时, $f_2(x) = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}$.

设对于 $n=k$ 时, 有

$$f_k(x) = \frac{x}{\sqrt{1+kx^2}},$$

则对于 $n=k+1$ 时, 有

$$f_{k+1}(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+kx^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1+kx^2}}} = \frac{x}{\sqrt{1+(k+1)x^2}}.$$

从而由数学归纳法知, 对于任何自然数 n , 有

$$f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}.$$

211. 设:

$$f(x+1) = x^2 - 3x + 2,$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f(x+1) = (x+1)^2 - 5(x+1) + 6$, 于是,

$$f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

212. 设:

$$f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2},$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, 于是,

$$f(x) = x^2 - 2.$$

213. 设:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{1+x^2} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

解 因为 $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{1}{x}}$, 于是,

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{1+x^2}}{x}.$$

证明下列各函数在所示间隔内是单调增函数:

214. $f(x) = x^2 \quad (0 \leq x < +\infty)$.

证 当 $x_2 > x_1 \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= x_2^2 - x_1^2 \\ &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0, \end{aligned}$$

于是 $f(x) = x^2$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 内是单调增函数.

215. $f(x) = \sin x \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$.

证 当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时,

$$\text{因为 } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2} \text{ 及 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以, } \cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0 \text{ 及 } \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0.$$

$$\begin{aligned} \text{又因 } f(x_2) - f(x_1) &= \sin x_2 - \sin x_1 \\ &= 2 \cos \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0, \end{aligned}$$

所以, $f(x) = \sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

216. $f(x) = \operatorname{tg} x \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{证 } f(x_2) - f(x_1) &= \operatorname{tg}x_2 - \operatorname{tg}x_1 = \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} \\ &= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cdot \cos x_2}, \end{aligned}$$

当 $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ 时, $\cos x_1 > 0, \cos x_2 > 0$ 及 $\sin(x_2 - x_1) > 0$, 从而可知

$$f(x_2) - f(x_1) > 0,$$

所以, $f(x) = \operatorname{tg}x$ 在 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 内是单调增函数.

217. $f(x) = 2x + \sin x (-\infty < x < +\infty)$.

$$\text{证 } f(x_2) - f(x_1) = 2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1,$$

因为 $|\sin x_2 - \sin x_1|$

$$\begin{aligned} &= 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \right| \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{2} \right| \\ &\leq 2 \cdot \left| \sin \frac{x_2 - x_1}{1} \right| \leq 2 \cdot \left| \frac{x_2 - x_1}{2} \right| = |x_2 - x_1|, \end{aligned}$$

所以当 $x_2 < x_1$ 时, 有

$$-(x_2 - x_1) \leq \sin x_2 - \sin x_1 \leq x_2 - x_1,$$

从而

$$2(x_2 - x_1) + \sin x_2 - \sin x_1 > 2(x_2 - x_1)$$

$$-(x_2 - x_1) = x_2 - x_1 > 0,$$

即 $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 于是, $f(x) = 2x + \sin x$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内是单调增函数.

证明下列各函数在所示间隔内是单调减函数:

218. $f(x) = x^2 \quad (-\infty < x \leq 0)$.

$$\begin{aligned} \text{证 } f(x_2) - f(x_1) &= (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0 \\ &\quad (x_1 < x_2 < 0), \end{aligned}$$

于是, $f(x) = x^2$ 在 $-\infty < x \leq 0$ 内是单调减函数.

219. $f(x) = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

$$\begin{aligned}\text{证 } f(x_2) - f(x_1) &= \cos x_2 - \cos x_1 \\ &= -2 \sin \frac{x_2 + x_1}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2},\end{aligned}$$

当 $0 < x_1 < x_2 < \pi$ 时,

$$0 < \frac{x_1 + x_2}{2} < \pi \text{ 及 } 0 < \frac{x_2 - x_1}{2} < \frac{\pi}{2},$$

于是, $\sin \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$, $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$, 从而

$$f(x_2) - f(x_1) < 0.$$

即 $f(x) = \cos x$ 在 $0 \leq x \leq \pi$ 内是单调减函数.

220. $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ($0 < x < \pi$).

$$\begin{aligned}\text{证 } f(x_2) - f(x_1) &= \frac{\cos x_2}{\sin x_2} - \frac{\cos x_1}{\sin x_1} \\ &= \frac{\cos x_2 \sin x_1 - \cos x_1 \sin x_2}{\sin x_1 \sin x_2} = \frac{\sin(x_1 - x_2)}{\sin x_1 \cdot \sin x_2} < 0 \\ &\quad (\text{当 } 0 < x_1 < x_2 < \pi \text{ 时}),\end{aligned}$$

于是, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ 在 $0 < x < \pi$ 内是单调减函数.

221. 研究下列函数的单调性:

$$(a) f(x) = ax + b; \quad (b) f(x) = ax^2 + bx + c;$$

$$(c) f(x) = x^3; \quad (r) f(x) = \frac{ax + b}{cx + d};$$

$$(n) f(x) = a^x (a > 0).$$

解 (a) 对于 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$.
当 $a > 0$ 时, 它大于零; 当 $a < 0$ 时, 它小于零. 所以, 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 是增函数; 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 是减函数.

$$(b) f(x) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

(1) 当 $a > 0$ 时, 图形呈凹形, 顶点在 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$, 于是, 在 $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ 内, 函数单调下降, 在 $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$, 函数单调上升.

(2) 当 $a < 0$ 时, 图形呈凸状. 于是, 在 $-\infty < x < -\frac{b}{2a}$ 内增加, 而在 $-\frac{b}{2a} < x < +\infty$ 内减小.

$$(B) f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 - x_1^3$$

+ $(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) > 0$ ($x_2 > x_1$), 于是 $f(x) = x^3$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内单调增加.

(r) $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} = \frac{a}{c} + \frac{b - a\frac{d}{c}}{cx + d}$, 其中 $c \neq 0$, 若 $c = 0$, 则同 (a) 一样讨论. 下面不妨就 $c > 0$ 讨论其增减性.

(1) 当 $b > a\frac{d}{c}$ 时, 若 x 值单调增加, 则 $f(x)$ 值减小.

所以, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ 内减小.

(2) 当 $b < a\frac{d}{c}$ 时, 若 x 值单调增加, 则 $f(x)$ 值也增加. 所以, $f(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{d}{c}\right)$ 及 $\left(-\frac{d}{c}, +\infty\right)$ 内增加.

(A) $f(x_2) - f(x_1) = a_2^x - a_1^x$. 若 $x_2 > x_1$, 则

当 $0 < a < 1$ 时, $f(x_2) - f(x_1) < 0$, 此时 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 内减小.

当 $a > 1$ 时, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, 此时, $f(x)$ 在 $-\infty$

$< x < +\infty$ 内增加.

222. 不等式能否逐项取对数?

解 不一定可以, 当底大于 1 时才可以. 因为对于对数函数当底大于 1 时为单调增函数, 若底介于 0 与 1 之间, 则为单调减函数, 所以, 此时就不能逐项取对数.

223. 设 $\varphi(x), \psi(x)$ 及 $f(x)$ 为单调增函数. 证明: 若

$$\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x), \quad (1)$$

则 $\varphi[\varphi(x)] \leq f[f(x)] \leq \psi[\psi(x)].$ (2)

证 设 x_0 为三个函数公共域内的任一点, 则

$$\varphi(x_0) \leq f(x_0) \leq \psi(x_0).$$

由(1) 以及函数 $f(x)$ 的单调增性知

$$f[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)],$$

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[\varphi(x_0)];$$

从而

$$\varphi[\varphi(x_0)] \leq f[f(x_0)].$$

同理, 可证

$$f[f(x_0)] \leq \psi[\psi(x_0)],$$

由 x_0 的任意性, 于是(2) 式得证.

求反函数 $x = \varphi(y)$ 和它的存在域, 若:

224. $y = 2x + 3$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 $x = \frac{y-3}{2}, -\infty < y < +\infty.$

225. $y = x^2$. (a) ($-\infty < x \leq 0$), (b) ($0 \leq x < +\infty$).

解 (a) $x = -\sqrt{y}, 0 \leq y < +\infty;$

(b) $x = \sqrt{y}, 0 \leq y < +\infty.$

226. $y = \frac{1-x}{1+x}$ ($x \neq -1$).

解 由于 $y + xy = 1 - x$, 解出 x 得反函数

$$x = \frac{1-y}{1+y}, \quad y \neq -1.$$

227. $y = \sqrt{1-x^2}$. (a) $(-1 \leq x \leq 0)$; (b) $(0 \leq x \leq 1)$.

解 (a) $x = -\sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1$;

(b) $x = \sqrt{1-y^2}, 0 \leq y \leq 1$.

228. $y = \operatorname{sh}x$, 式中 $\operatorname{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 由于 $2y = e^x - e^{-x}$, 即

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0,$$

解出 e^x 两端再取对数, 即得

$$x = \operatorname{arsh}y = \ln(y + \sqrt{1+y^2}), \quad -\infty < y < +\infty.$$

229. $y = \operatorname{th}x$, 式中 $\operatorname{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 由于 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x)^2 - 1}{(e^x)^2 + 1}$, 即

$$e^{2x} = \frac{1+y}{1-y},$$

两端取对数, 并注意到 $\frac{1+y}{1-y} > 0$ 即 $-1 < y < 1$, 于是

$$x = \operatorname{arth}y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+y}{1-y}, \quad -1 < y < 1.$$

230. $y = \begin{cases} x, & \text{若 } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{若 } 1 \leq x \leq 4; \\ 2^x, & \text{若 } 4 < x < +\infty. \end{cases}$

解

$$x = \begin{cases} y, & \text{若 } -\infty < y < 1; \\ \sqrt{y}, & \text{若 } 1 \leq y \leq 16; \\ \log_2 y, & \text{若 } 16 < y < +\infty. \end{cases}$$

231. 函数 $f(x)$ 定义于对称区间 $(-l, l)$ 中, 且若

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为偶函数, 若

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

确定下列各已知函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数:

(a) $f(x) = 3x - x^3$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

(c) $f(x) = a^x + a^{-x} (a > 0)$; (d) $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$;

(e) $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

解 (a) $f(-x) = -3x + x^3 = -f(x)$, 故为奇函数.

(b) $f(-x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2} = f(x)$,
故为偶函数.

(c) $f(-x) = a^{-x} + a^x = f(x)$, 故为偶函数.

(d) $f(-x) = \ln \frac{1+x}{1-x} = -\ln \frac{1-x}{1+x} = -f(x)$,

故为奇函数.

$$\begin{aligned} (e) f(-x) &= \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) \\ &= \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} \\ &= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x), \end{aligned}$$

故为奇函数.

232. 证明定义于对称区间 $(-l, l)$ 内的任何函数 $f(x)$ 可以表示为偶函数与奇函数之和的形式.

证 因为

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2},$$

而 $\frac{f(x) + f(-x)}{2}$ 为偶函数, $\frac{f(x) - f(-x)}{2}$ 为奇函数, 于是本题得证.

233. 若存在有数 $T > 0$ (函数的周期——在广义的意义上) 使对于一切被考虑的自变量 x 满足等式

$$f(x + nT) = f(x) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

则函数 $f(x)$ 称为周期函数.

说明下列各已知函数中哪些是周期函数, 并求它们的最小周期. 设:

$$(a) f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x;$$

$$(b) f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x;$$

$$(B) f(x) = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3 \operatorname{tg} \frac{x}{3}; \quad (\Gamma) f(x) = \sin^2 x;$$

$$(\Delta) f(x) = \sin x^2; \quad (e) f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x};$$

$$(\kappa) f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}; \quad (s) f(x) = \sin x + \sin(x \sqrt{2}).$$

解 对于(a), 由于

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) &= A \cos \lambda \left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) + B \sin \lambda \left(x + \frac{2\pi}{\lambda}\right) \\ &= A \cos \lambda x + B \sin \lambda x = f(x), \end{aligned}$$

故为周期函数, 最小周期为 $T = \frac{2\pi}{\lambda}$ ($\lambda > 0$). 同理可证:

(a)、(B)、(Γ) 和 (e) 也是周期函数, 最小周期分别为 2π 、 6π 、 π 和 π . 对于(Δ), 若周期为 a , 即 $\sin(x+a)^2 = \sin x^2$.

令 $x = 0$ 即得 $a = \pm \sqrt{m\pi}$ (m 为某正整数), 代入, 又令 x

$= \sqrt{2m\pi}$, 易得 $\sin(2\sqrt{2m}\pi) = 0$. 但 $2\sqrt{2m}$ 显然不是整数, 得到矛盾. 于是, $\sin x^2$ 不是周期函数. 同理, (к) 和 (з) 也不是周期函数.

234. 证明: 对于迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

任何有理数皆为其周期.

证 设 l 为任一有理数, 则当 x 为有理数时, $x+l$ 也为有理数. 若 x 为无理数, 则 $x+l$ 也为无理数, 所以

$$\chi(x+l) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

即 $\chi(x+l) = \chi(x)$, l 为周期.

235. 证明定义于公共的集合上且周期是可公度的二个周期函数之和及其乘积也是周期函数.

证 设 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 为定义在集合 A 上的周期函数, T_1 及 T_2 分别为它们的周期. 又设 T 为 T_1 及 T_2 的公约数, 即

$$T_1 = Tk_1, T_2 = Tk_2,$$

其中 k_1, k_2 为正整数. 于是

$$f_1(x + k_2T_1) = f_1(x), f_2(x + k_1T_2) = f_2(x).$$

设

$$F_1(x) = f_1(x) + f_2(x), F_2(x) = f_1(x)f_2(x),$$

可以证明, k_1k_2T 分别是 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 的周期. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} F_1(x + k_1k_2T) &= f_1(x + k_1k_2T) \\ &+ f_2(x + k_1k_2T) \end{aligned}$$

$$= f_1(x) + f_2(x) = F_1(x).$$

$$\begin{aligned} F_2(x + k_1 k_2 T) &= f_1(x + k_1 k_2 T) f_2(x + k_1 k_2 T) \\ &= f_1(x) f_2(x) = F_2(x). \end{aligned}$$

从而本题得证.

236. 证明: 若对于函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 有等式

$$f(x + T) = kf(x)$$

(式中 k 和 T 为正的常数) 成立, 则

$$f(x) = a^x \varphi(x)$$

(式中 a 为大于零的常数, 而 $\varphi(x)$ 为以 T 为周期的函数).

证 由假定 $k > 0, T > 0$, 令 $a = k^{\frac{1}{T}} > 0$, 则 $a^T = k$. 于是有

$$f(x + T) = a^T f(x).$$

今定义函数 $\varphi(x)$ 如下:

$$\varphi(x) = a^{-x} f(x).$$

易知 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 事实上,

$$\begin{aligned} \varphi(x + T) &= a^{-(x+T)} f(x + T) = a^{-x} a^{-T} a^T f(x) \\ &= a^{-x} f(x) = \varphi(x). \end{aligned}$$

于是

$$f(x) = a^x \varphi(x),$$

其中 $\varphi(x)$ 是周期为 T 的函数. 证毕.

§ 4. 函数的图形表示法

1° 要作函数 $y = f(x)$ 的图形可用下法来进行: (1) 确定函数的存在域 $X = \{x\}$; (2) 从 X 中选出充分密集自变数值 $x_1, x_2,$

\dots, x_n 并作出函数

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

的对应数值表；(3) 在坐标平面 Oxy 上绘出一系列的点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 并用线把它们连接起来，此连线的性质就是可认为是许多中间点的位置。

2° 为了得到函数的正确图形，应当研究这个函数的一般性质。

首先必须：(1) 解方程式 $f(x) = 0$ ，求出函数图形与 Ox 轴的交点（函数值为零的点）；(2) 确定使函数为正或为负时自变数的变域；(3) 尽可能地说明函数单调（增或减）的区间；(4) 研究当自变数无限趋近于函数存在域的边界点时函数的情况。

这一节里要假定读者已经知道最简单的初等函数的性质，如幂函数、指数函数、三角函数等。

利用这些性质，不用作大量的计算工作，立即可以画出许多函数的略图，其他的图形有时就是这些最简单图形的组合（和或乘积等等）。

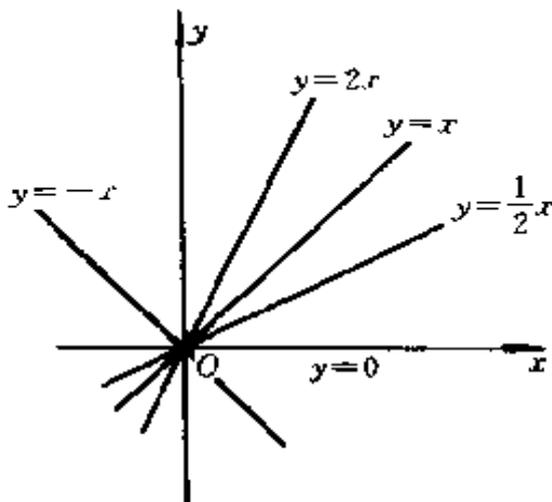


图 1.13

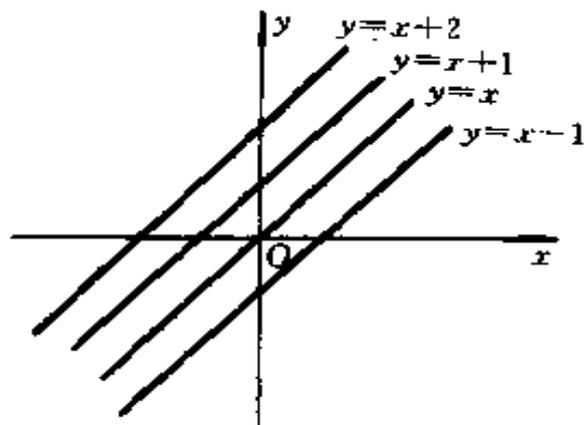


图 1.14

237. 作出线性齐次函数

$$y = ax$$

当 $a = 0, \frac{1}{2}, 1, 2, -1$ 时的图形.

解 如图 1.13 所示.

238. 作出线性函数

$$y = x + b$$

当 $b = 0, 1, 2, -1$ 时的图形.

解 如图 1.14 所示.

239. 作出线性函数的图形:

(a) $y = 2x + 3;$

(b) $y = 2 - 0.1x;$ (B) $y = -\frac{x}{2} - 1.$

解 如图 1.15 所示.

240. 铁的线性膨胀系数 $a = 1.2 \times 10^{-6}$. 在适当的尺度下作出函数

$$l = f(T)$$

$$(-40^\circ \leq T \leq 100^\circ)$$

的图形, 其中 T 表温度 (以度计), l 表当温度为

T 时铁棒的长. 设当 $T = 0^\circ$ 时, $l = 100$ 厘米.

解 铁棒的长与温度的关系为

$$l = l_0(1 + aT).$$

当 $T = 0$ 时, $l = 100$, 代入上式得 $l_0 = 100$.

于是, $l = 100(1 + 1.2 \times 10^{-6}T),$

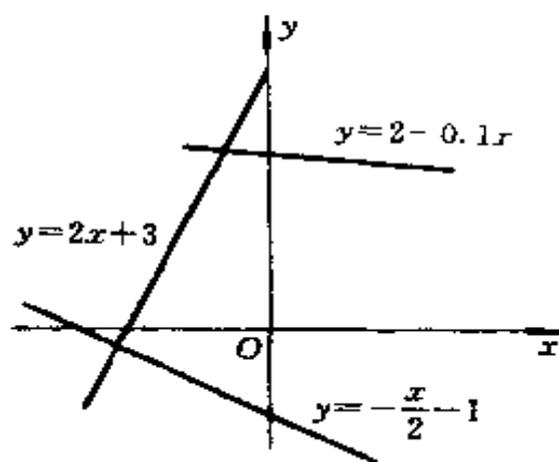


图 1.15

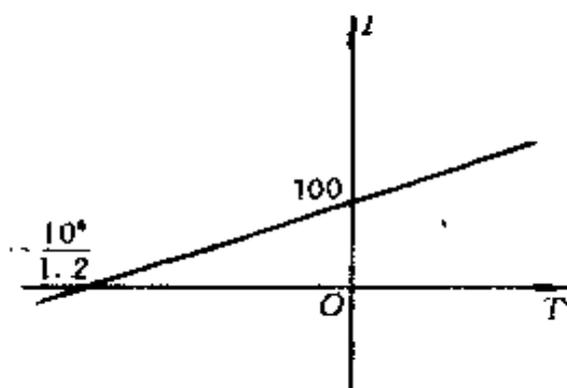


图 1.16

如图 1.16 所示(两轴单位不同).

241. 二质点在数轴上运动, 第一质点在时间 $t = 0$ 的时刻在原点左方 20 米处, 其速度为 $v_1 = 10$ 米/秒; 第二质点当 $t = 0$ 时在原点 O 之右方 30 米处, 其速度为 $v_2 = -20$ 米/秒; 作出此二点运动方程的图形并求它们相遇的时刻和位置.

解 二质点运动的位移 s 与时间 t 的关系分别为

$$s = 10t - 20,$$

$$s = -20t + 30,$$

如图 1.17 所示. 解上述方程, 得

$$t = 1 \frac{2}{3} (\text{秒}), s = -3 \frac{1}{3} (\text{米}),$$

即在运动开始后 $1 \frac{2}{3}$ 秒, 在 Ot 轴之下方 $3 \frac{1}{3}$ 米处相遇,

如图中 P 点所示.

242. 作出二次有理整函数的图形(抛物线):

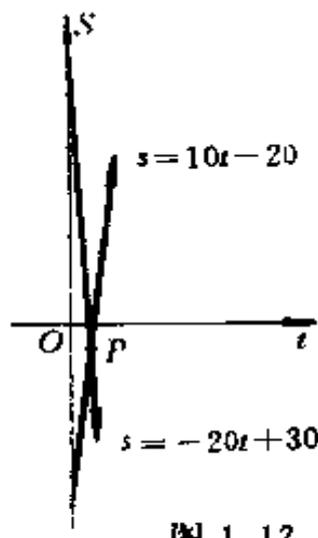


图 1.17

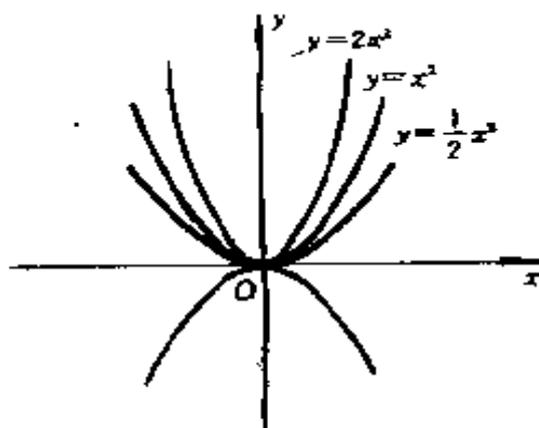


图 1.18

(a) $y = ax^2$, 当 $a = 1, \frac{1}{2}, 2, -1$;

(6) $y = (x - x_0)^2$, 当 $x_0 = 0, 1, 2, -1$;

(B) $= x^2 + c$, 当 $c = 0, 1, 2, -1$.

解 (a) 如图 1.18 所示.

(c) 如图 1.19 所示.

(b) 如图 1.20 所示.

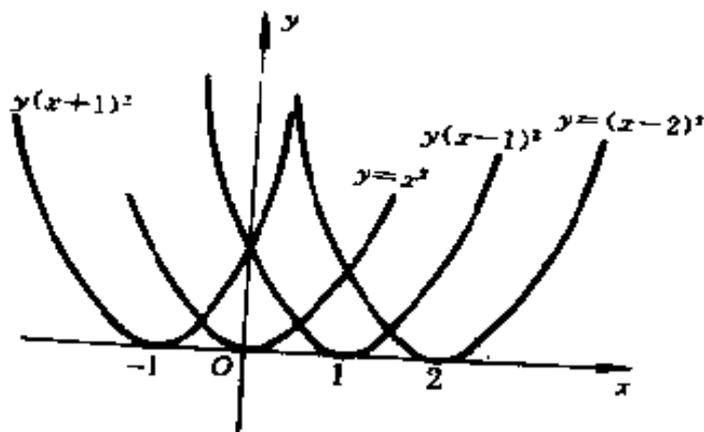


图 1.19

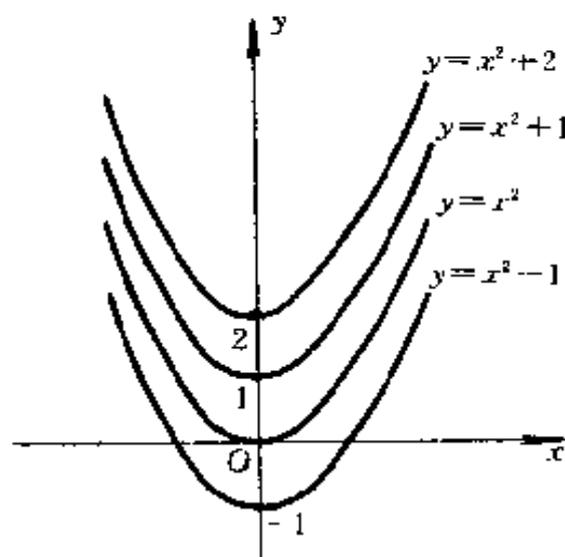


图 1.20

243. 把二次三项式

$$y = ax^2 + bx + c$$

化为下面的形状

$$y = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

作出它的图形,研究例子:

$$(a)y = 8x - 2x^2; \quad (b)y = x^2 + 3x + 2;$$

$$(c)y = -x^2 + 2x - 1; \quad (d)y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1.$$

解 利用配方法得

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = y_0 + a(x - x_0)^2,$$

其中

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

如图 1.21 所示.

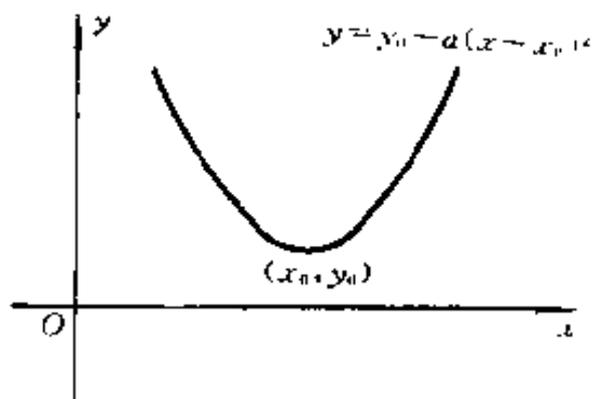


图 1.21

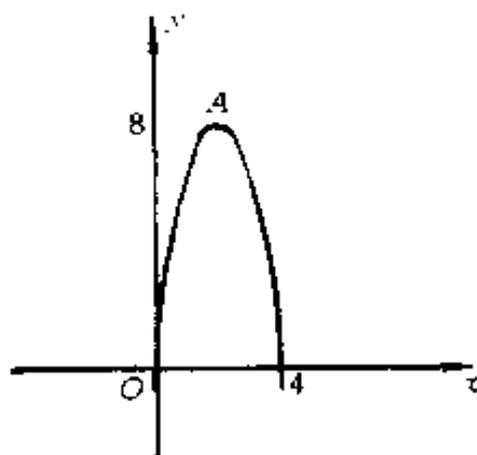


图 1.22

$$(a)y = 8x - 2x^2 = 8 - 2(x - 2)^2,$$

$$x_0 = 2, \quad y_0 = 8, \quad a = -2,$$

如图 1.22 所示,顶点 $A(2, 8)$.

$$(b)y = x^2 + 3x + 2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

$$x_0 = -\frac{3}{2}, \quad y_0 = -\frac{1}{4}, \quad a = 1,$$

如图 1.23 所示. 顶点 $B\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{4}\right)$.

$$(a) y = -x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2,$$

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 0, \quad a = -1,$$

如图 1.24 所示. 顶点 $C(1, 0)$.

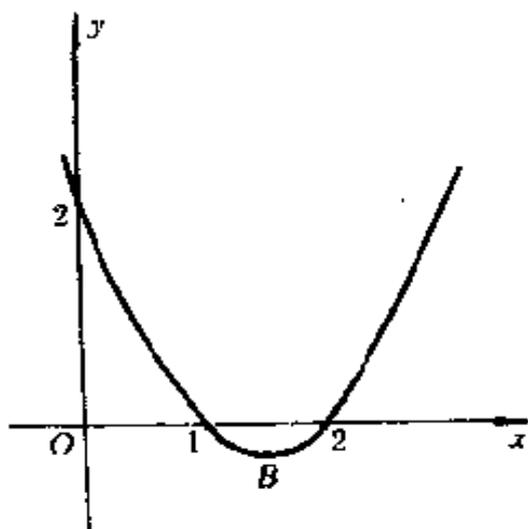


图 1.23

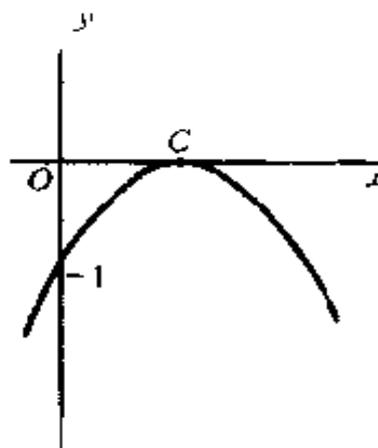


图 1.24

$$(r) y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2},$$

$$x_0 = -1, \quad y_0 = \frac{1}{2}, \quad a = \frac{1}{2},$$

如图 1.25 所示. 顶点 $D\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

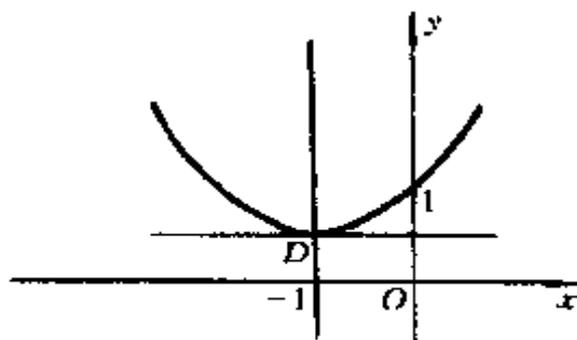


图 1.25

244. 质点以初速度 $v_0 = 600$ 米 / 每秒沿与水平面成角 $\alpha = 45^\circ$ 的方向射出. 作出运动轨道的图形, 并求最大的升高及飞行的射程(假定 $g \approx 10$ 米 / 秒², 空气的阻力不计).

解 运动轨道方程为

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

以 $v_0 = 600, g = 10, \alpha = 45^\circ$ 代入得

$$y = x - \frac{x^2}{36000},$$

即

$$y = -\frac{1}{36000}(x - 18000)^2 + 9000.$$

当 $x = 18000$ 时, y 值最大, 最大升高为 9000 米;

当 $x = 36000$ 时, $y = 0$, 即飞行射程为 36000 米. 如

图 1.26 所示.

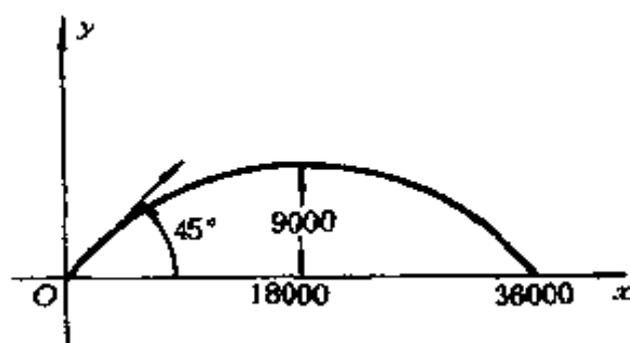


图 1.26

作出高于二次的有理整函数的图形:

245. $y = x^3 + 1.$

解 如图 1.27 所示.

246. $y = (1 - x^2)(2 + x).$

解 当 $x = \pm 1, -2$ 时, $y = 0$;

当 $x < -2, -1 < x < 1$ 时, $y > 0$;

当 $-2 < x < -1$ 及 $x > 1$ 时, $y < 0$.

当 $x < -2$ 及 $x > 1$ 时, 曲线下降; 当 $-1 < x < 1$ 时, 曲线由上升到下降; 当 $-2 < x < -1$ 时, 曲线由下降到上升. 如图 1.28 所示.

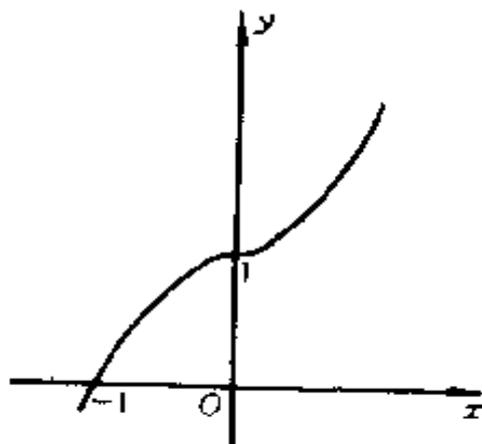


图 1.27

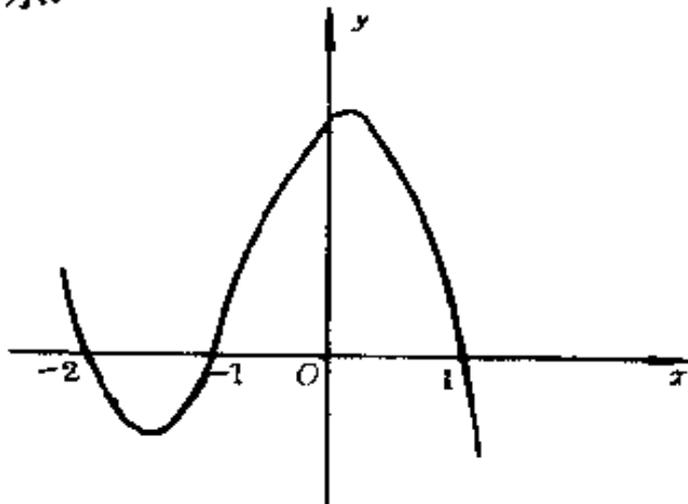


图 1.28

247. $y = x^2 - x^4$.

解 $y = x^2(1-x)(1+x) = \frac{1}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2$.

图形关于 Oy 轴对称, 与两坐标轴的交点为

$(-1, 0), (1, 0), (0, 0)$,

且在 $(0, 0)$ 点与 Ox 轴相切.

当 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y = \frac{1}{4}$, 此时 $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ 及

$B\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right)$ 均为图形上的最高点.

当 $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, 曲线上升;

当 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$ 时, 曲线下降. 如图 1.29 所示.

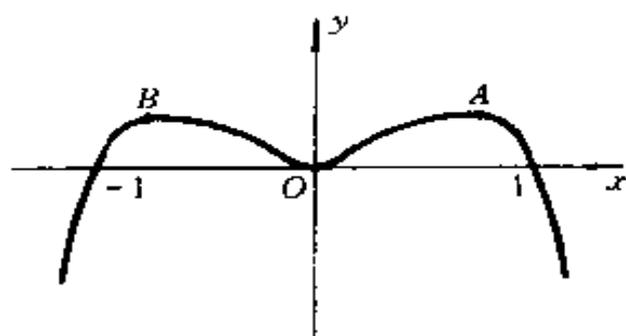


图 1.29

248. $y = x(a - x)^2(a + x)^3$

($a > 0$).

解 当 $x = 0, a, -a$ 时, $y = 0$. $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 为切点.

当 $x > 0$ 及 $x < -a$ 时, $y > 0$;

当 $-a < x < 0$ 时, $y < 0$. 如图 1.30 所示.

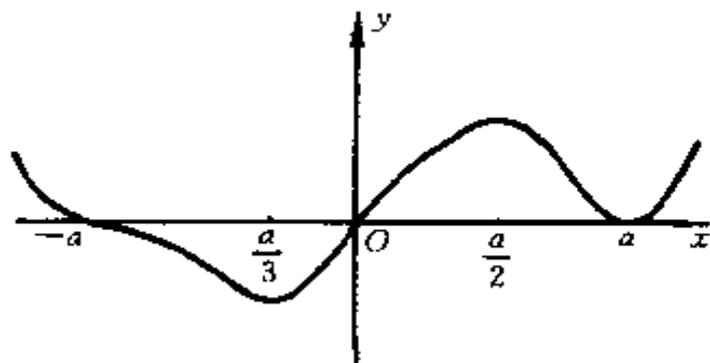


图 1.30

作出线性分式函数的图形(双曲线):

249. $y = \frac{1}{x}$.

解 如图 1.31 所示.

$$250. y = \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\text{解 } y = -1 + \frac{2}{1+x},$$

图形的对称中心为 $(-1, -1)$, 如图 1.32 所示.

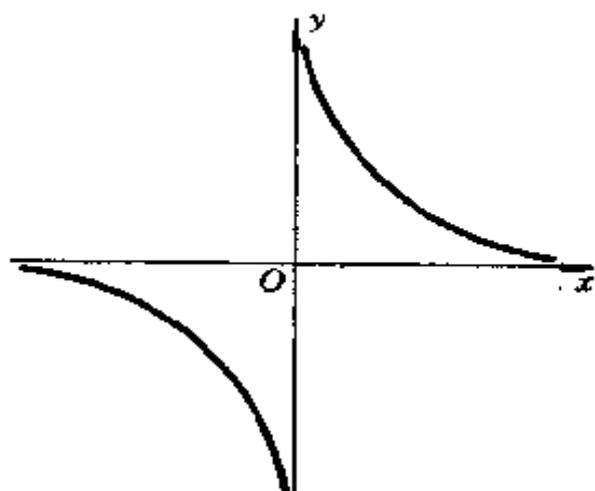


图 1.31

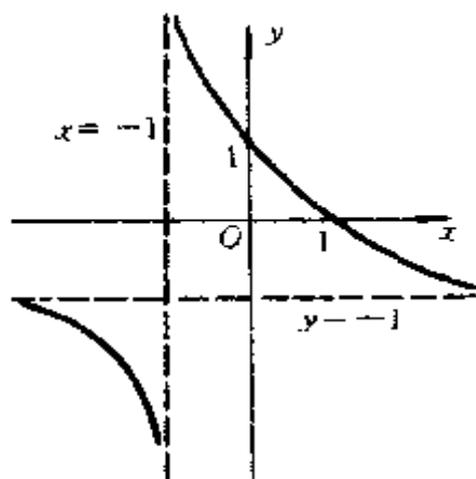


图 1.32

251. 把线性分式函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$(ad - bc \neq 0, c \neq 0).$$

化为下面的形式

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}.$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = \frac{3x+2}{2x-3}.$$

$$\text{解 } y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x - \left(-\frac{d}{c}\right)} = y_0 + \frac{m}{x - x_0},$$

其中

$$x_0 = -\frac{d}{c}, \quad y_0 = \frac{a}{c}, \quad m = \frac{bc - ad}{c^2},$$

如图 1.33 所示.

对于 $y = \frac{3x + 2}{2x - 3}$, 有

$x_0 = y_0 = \frac{3}{2}$, 如图 1.34 所示.

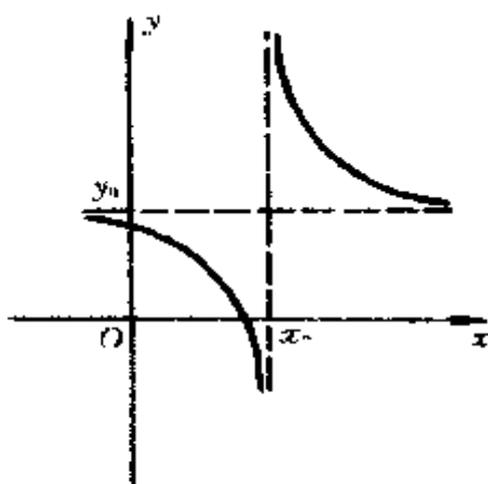


图 1.33

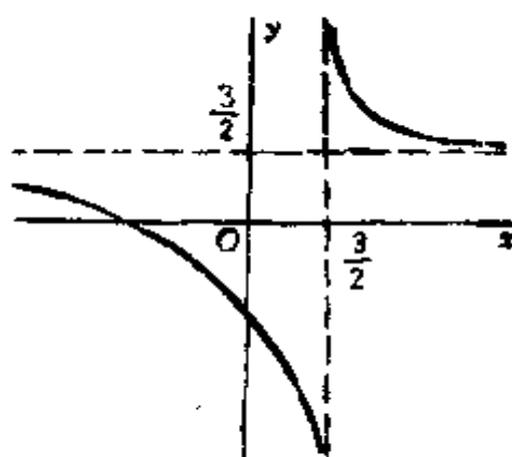


图 1.34

252. 气体当压力 $p_0 = 1$ 大气压时占有体积 $v_0 = 12$ 立方米. 设气体的温度保持不变作出气体体积 v 随压力变化而变化的图形(波义耳—马瑞阿特定律).

解 当温度 $T = k$ (常数) 时, 气体体积 v 与压力 p 成反比, 即

$$pv = C$$

其中 C 为常数.

当 $p_0 = 1$ 时, $v_0 = 12$, 故 $C = 12$, 从而 $pv = 12$, 如图 1.35 所示.

作下列有理分式函数的图形:

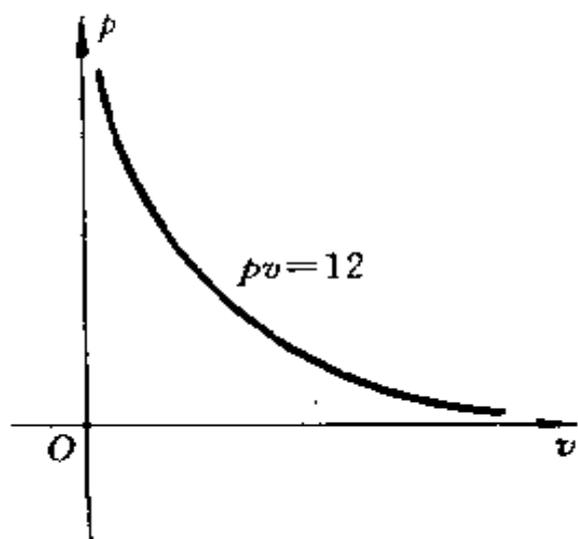


图 1.35

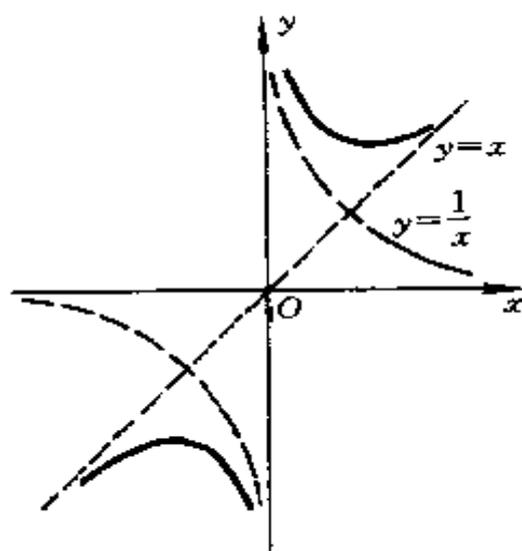


图 1.36

253. $y = x + \frac{1}{x}$ (双曲线).

解 将 $y = x$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得, 如图 1.36 中黑粗线所示.

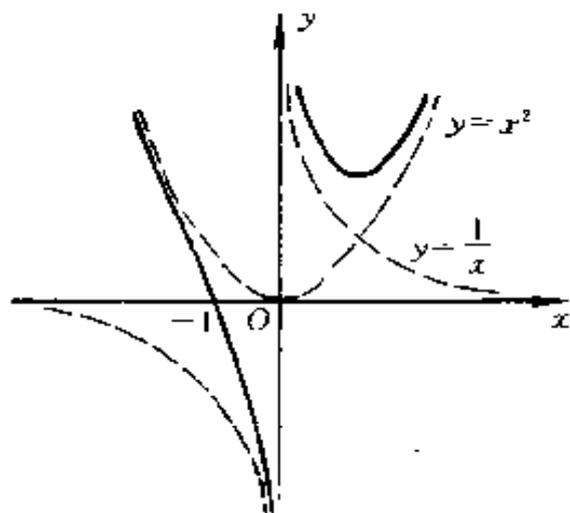


图 1.37

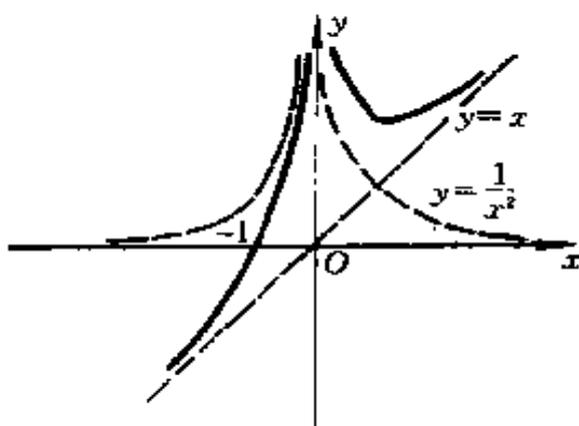


图 1.38

254. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (牛顿三次曲线).

解 将 $y = x^2$ 及 $y = \frac{1}{x}$ 的图形叠加即得, 如图 1.37 中黑粗线所示.

255. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

解 如图 1.38 中黑粗线所示.

256. $y = \frac{1}{1+x^2}$ (箕舌线).

解 图形对称于 Oy 轴, 位于 Ox 轴上方, 最高点为 $(0, 1)$. 当 x 的绝对值无限增大时, y 值无限变小. 如图 1.39 所示.

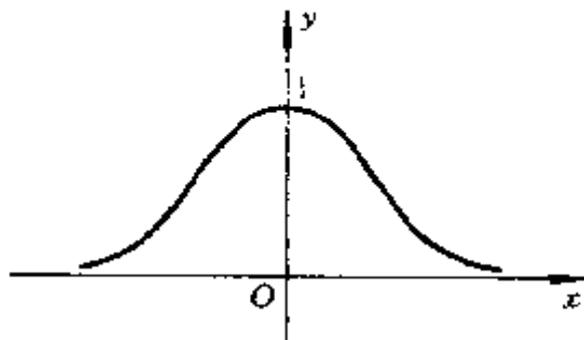


图 1.39

257. $y = \frac{2x}{1+x^2}$ (牛顿蛇形线).

解 以 $-x$ 换 x , y 值的绝对值不变但改变符号, 故图形对称于原点.

又因 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$, 故 $-1 \leq y \leq 1$.

当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$, 曲线上升; 当 $1 < x < +\infty$ 时, $y > 0$, 曲线下降.

图形以 Ox 轴为渐近线, 如图 1.40 所示.

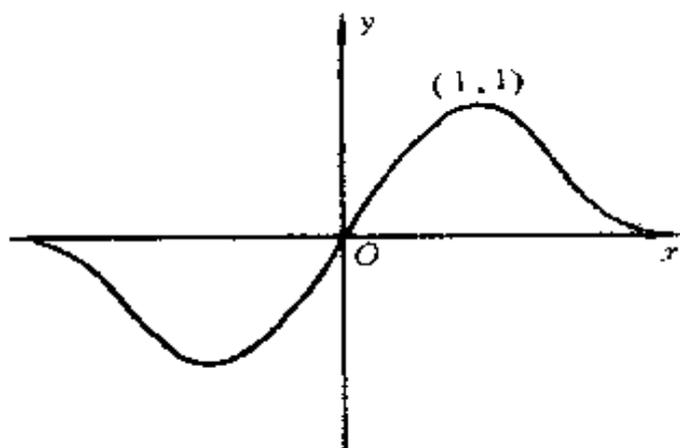


图 1.40

258. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 且经过点 $(0, 1)$.

当 $0 < x < 1$ 及 $x > 1$ 时, 曲线上升, 但当 $x = \pm 1$ 时, y 无意义. $x = \pm 1$ 为曲线的渐近线. 如图 1.41 所示.

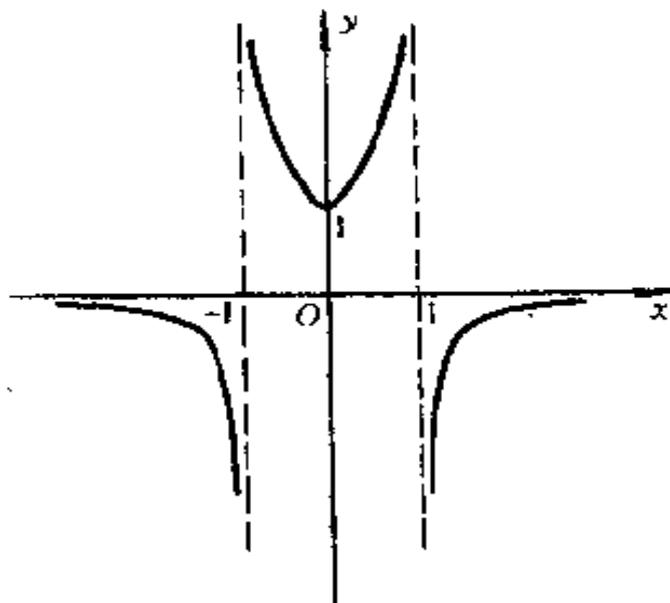


图 1.41

259. $y = \frac{x}{1-x^2}$.

解 图形关于原点对称, 且经过原点. $x = \pm 1$ 为渐近

线. 在 $(0, 1)$ 及 $(1, +\infty)$ 内曲线上升. 如图 1.42 所示.

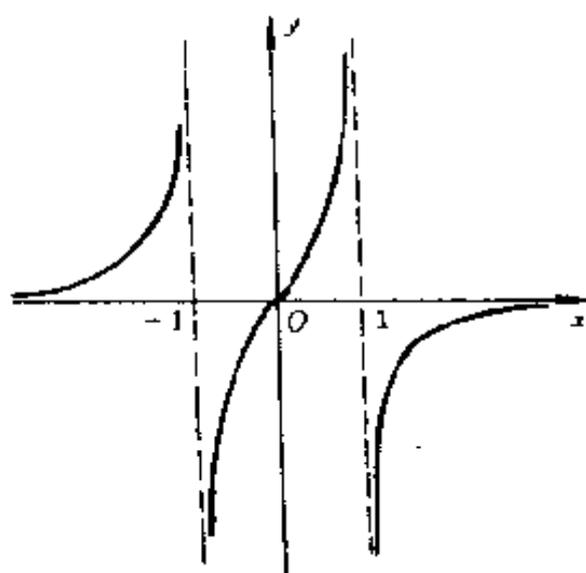


图 1.42

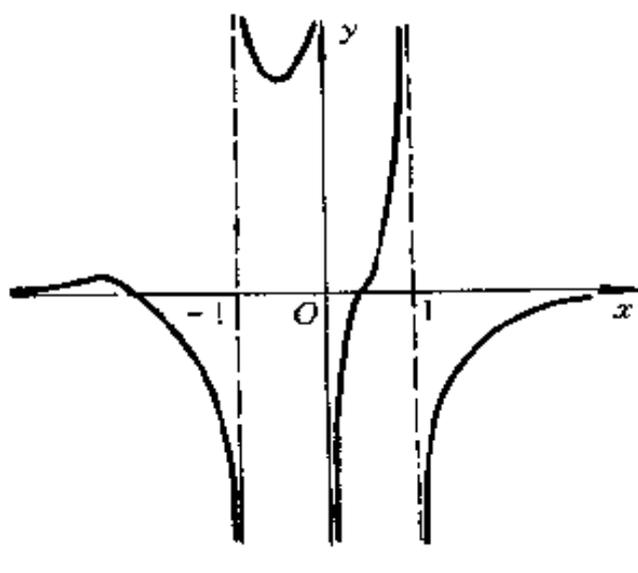


图 1.43

$$260. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

解 将 $y = \frac{1}{1+x}$, $y = -\frac{2}{x}$ 及 $y = \frac{1}{1-x}$ 的图形叠加即得, 渐近线: $x = -1, x = 0, x = 1$ 及 $y = 0$, 如图 1.43 所示.

$$261. y = \frac{1}{1+x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

解 图形关于 Oy 轴对称, 渐近线: $x = -1, x = 1, x = 0$ 及 $y = 0$. 如图 1.44 所示.

$$262. y = \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}.$$

$$\text{解 } y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2} = 1 - \frac{2x}{x^2 + x - 2}.$$

将 $y = 1$ 及 $y = -\frac{2x}{(x+2)(x-1)}$ 的图形叠加即得. 如图 1.45 所示.

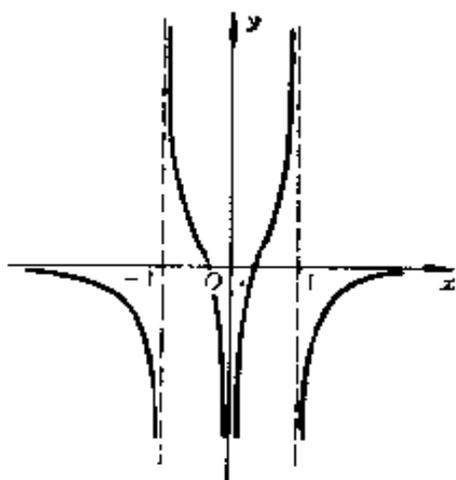


图 1.44

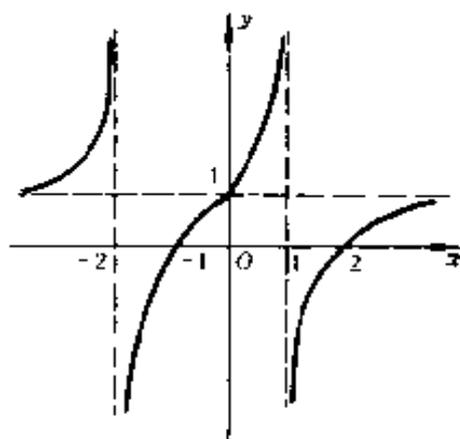


图 1.45

263. 把函数

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1x + b_1} \quad (a_1 \neq 0)$$

化为下面的形状

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0},$$

然后作出它的略图. 研究例子

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

解
$$y = \frac{a}{a_1}x + \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2} + \frac{\frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1b - ab_1)}{x - \left(-\frac{b_1}{a_1}\right)}$$

$$= kx + m + \frac{n}{x - x_0}$$

其中 $k = \frac{a}{a_1}, m = \frac{a_1b - ab_1}{a_1^2},$

$$x_0 = -\frac{b_1}{a_1},$$

$$n = \frac{c}{a_1} - \frac{b_1}{a_1^3}(a_1b - ab_1).$$

如图 1.46 中黑粗线所示.

$$\text{对于 } y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 1}$$

$$= x - 5 + \frac{8}{x + 1},$$

如图 1.47 中黑粗线所示.

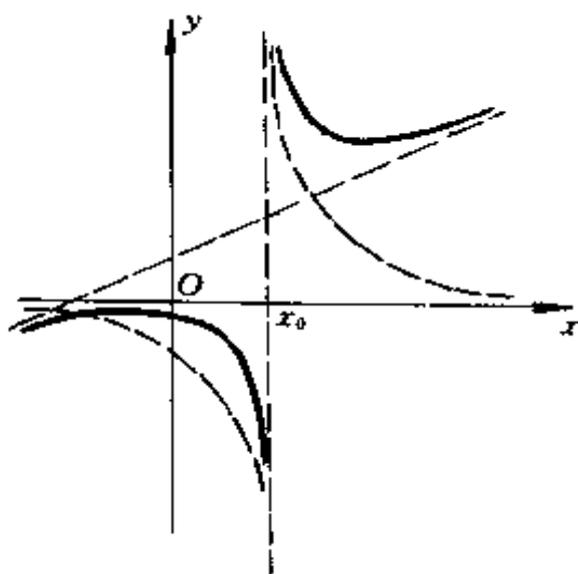
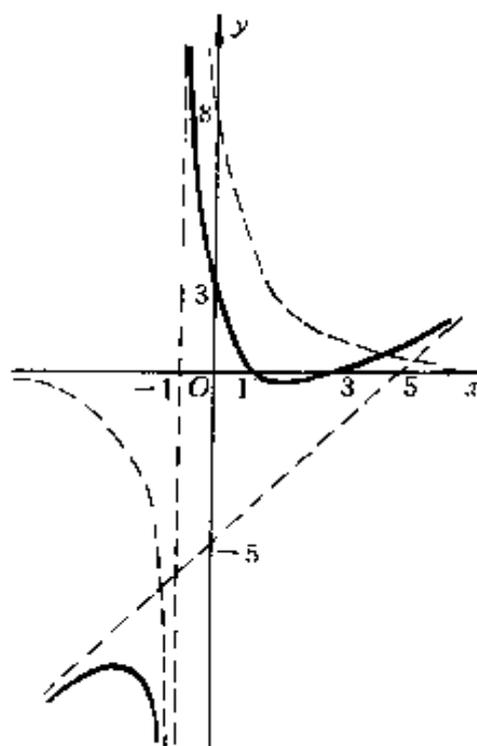


图 1.46



1.47

264. 一质点与引力中心相距 x . 设当 $x = 1$ 米时引力 $F = 10$ 千克, 作出质点的引力 F 的绝对值的图形(牛顿定律).

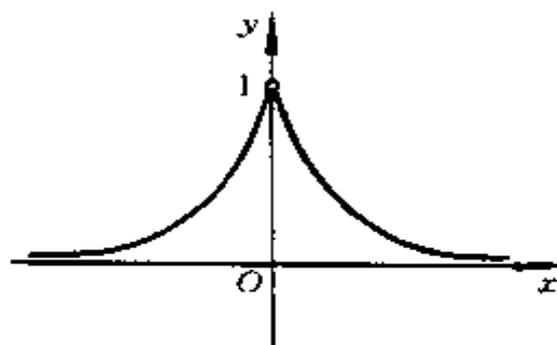


图 1.48

解 由万有引力定律知

$$F = \frac{k}{x^2},$$

其中 k 为常数.

当 $x = 1$ 时, $F = 10$, 从而 $k = 10$, 于是,

$$F = \frac{10}{x^2},$$

如图 1.48 所示.

265. 根据梵德耳瓦斯定律 (Закон Ван-дер-Вадтса), 当温度不变时, 真实气体的体积 v 和它的压力 p 以关系式

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = c$$

相联系.

设 $a = 2, b = 0.1$ 及 $c = 10$, 作出函数 $p = p(v)$ 的图形.

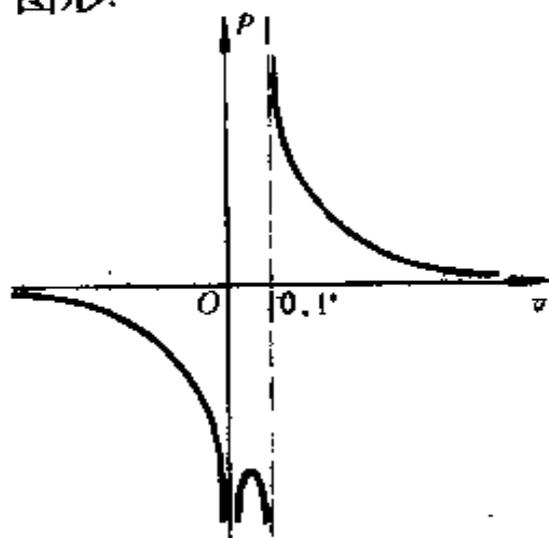


图 1.49

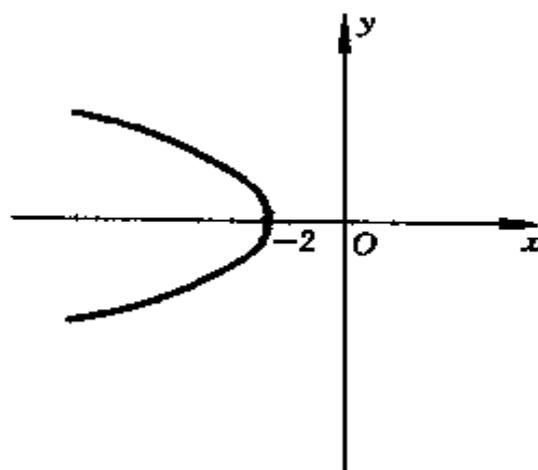


图 1.50

解 由于

$$p = \frac{10}{v - 0.1} - \frac{2}{v^2},$$

将 $p = \frac{10}{v - 0.1}$ 及 $p = \frac{2}{v^2}$ 的图形叠加即得, 如图 1.49 所示.

作下列无理函数的图形:

266. $y = \pm \sqrt{-x - 2}$ (抛物线).

解 $y^2 = -(x + 2)$, 如图 1.50 所示.

267. $y = \pm x \sqrt{x}$ (半立方抛物线).

解 $y^2 = x^3$, 如图 1.51 所示.

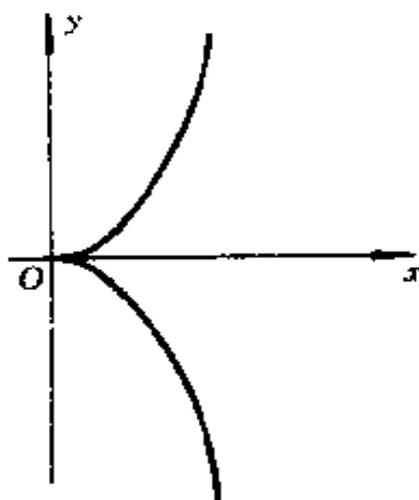


图 1.51

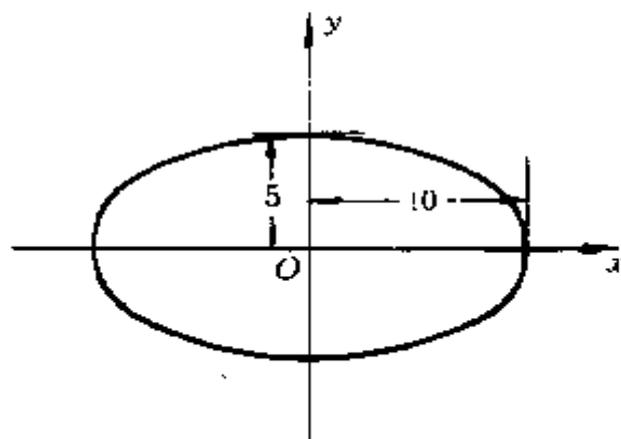


图 1.52

268. $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{100 - x^2}$ (椭圆).

解 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$, 如图 1.52 所示.

269. $y = \pm \sqrt{x^2 - 1}$ (双曲线).

解 $x^2 - y^2 = 1$, 如图 1.53 所示.

270. $y = \pm \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

解 $y^2 = \frac{1-x}{1+x}$, $x = -1 + \frac{2}{1+y^2}$,

将 $x = -1$ 及 $x = \frac{2}{1+y^2}$ 的图形叠加即得, 如图 1.54 所示 ($-1 < x \leq +1$).

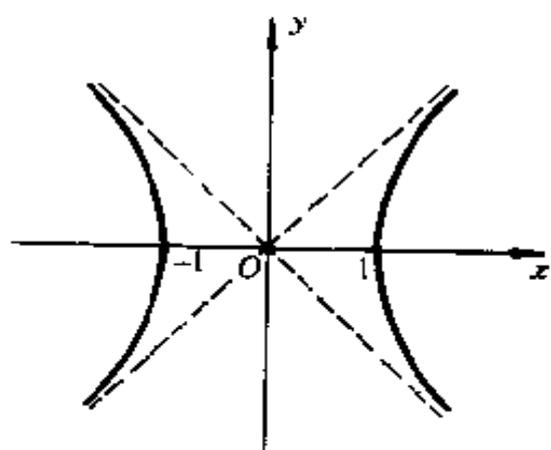


图 1.53

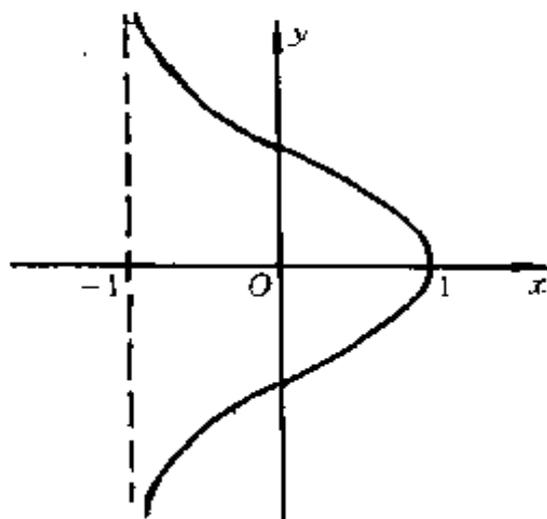


图 1.54

271. $y = \pm x \sqrt{100 - x^2}$.

解 当 $x = 0, \pm 10$ 时, $y = 0$.

将 $y = x$ 和 $y = \sqrt{100 - x^2}$ 的图形上点的纵坐标相乘, 即可描出图形. 如图 1.55 所示.

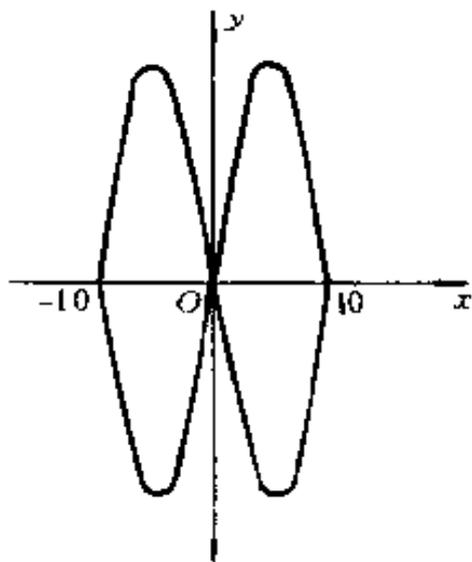


图 1.55

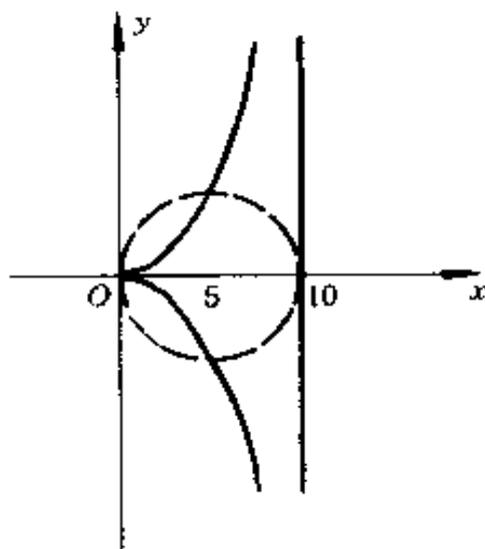


图 1.56

272. $y = \pm x \sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (蔓叶线).

解 $y^2(10-x) = x^3$, 如图 1.56 所示.

273. $y = \pm \sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

解 $y = \pm \sqrt{16 - (x^2-5)^2}$. 如图 1.57 所示.

274. 作幂函数

$$y = x^n$$

当: (a) $n = 1, 3, 5$; (b) $n = 2, 4, 6$ 时的图形.

解 如图 1.58 所示.

275. 作幂函数

$$y = x^n$$

当: (a) $n = -1, -3$; (b) $n = -2, -4$ 时的图形.

解 如图 1.59 所示.

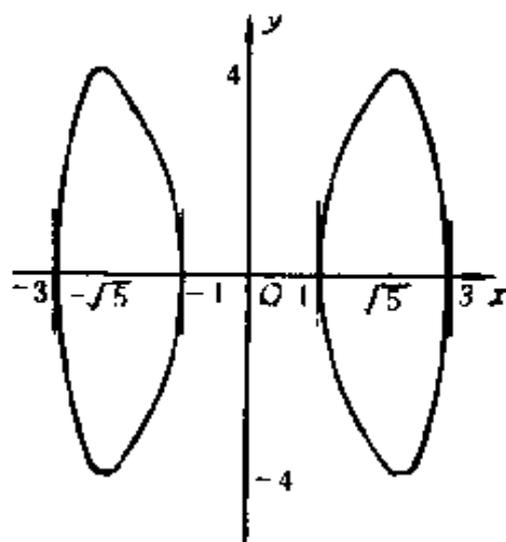


图 1.57

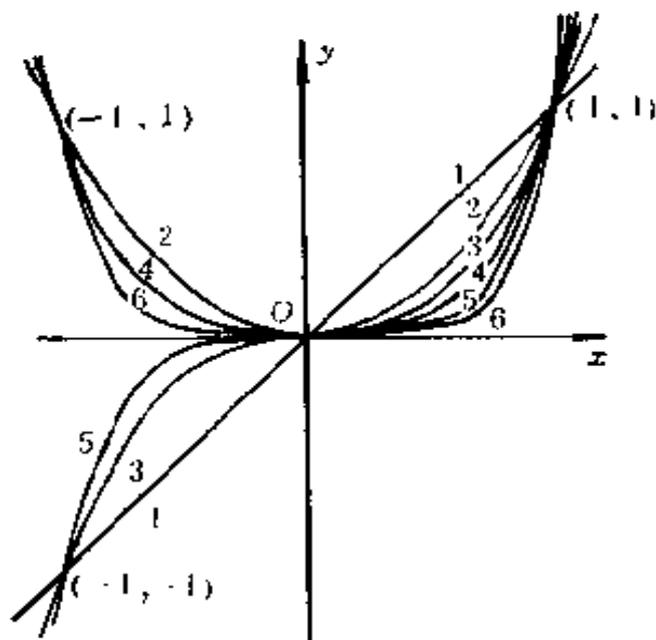


图 1.58

1. $y = \frac{1}{x}$, 2. $y = \frac{1}{x^2}$, 3. $y = \frac{1}{x^3}$, 4. $y = \frac{1}{x^4}$.

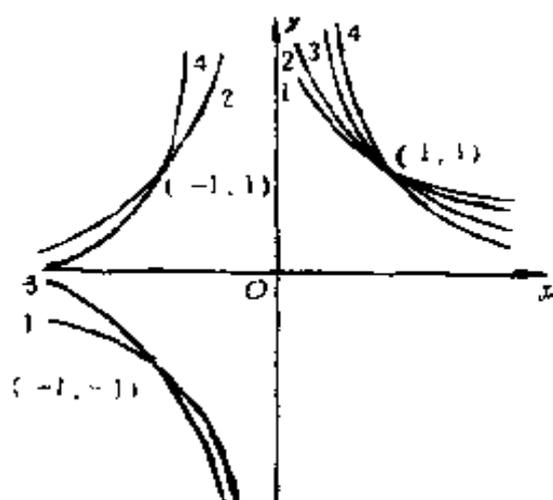


图 1.59

276. 作根式

$$y = \sqrt[m]{x}$$

当: (a) $m = 2, 4$;

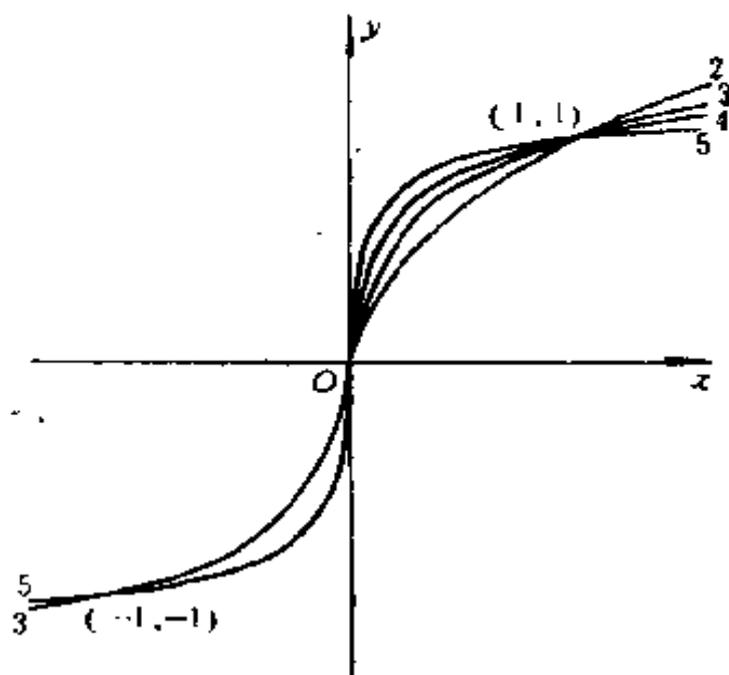


图 1.60

(b) $m = 3, 5$ 时的图形.

解 如图 1.60 所示.

277. 设:

- (a) $m = 2, k = 1$; (б) $m = 2, k = 3$;
 (в) $m = 3, k = 1$; (г) $m = 3, k = 2$;
 (д) $m = 3, k = 4$; (е) $m = 4, k = 2$;
 (ж) $m = 4, k = 3$.

作根式的图形

$$y = \sqrt[m]{x^k}$$

解 将所给数据代入 $y = \sqrt[m]{x^k}$, 可知:

- (a) 即 $y = \sqrt{x}$ 的图形, 见图 1.60.
 (б) $y = x \sqrt{x}$, 如图 1.61 所示:1;
 (в) 即 $y = \sqrt[3]{x}$ 的图形, 见图 1.60;
 (г) $y = \sqrt[3]{x^2}$, 如图 1.61 所示:2;
 (д) $y = x \sqrt[3]{x}$, 如图 1.61 所示:3;
 (е) 即 $y = \sqrt{|x|}$ 的图形;
 (ж) $y = \sqrt[4]{x^3}$, 如图 1.61 所示:4.

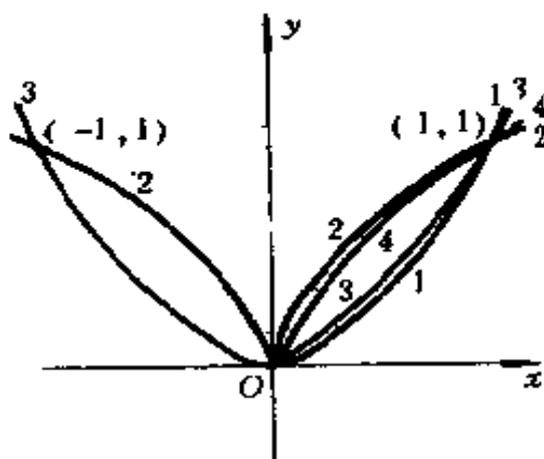


图 1.61

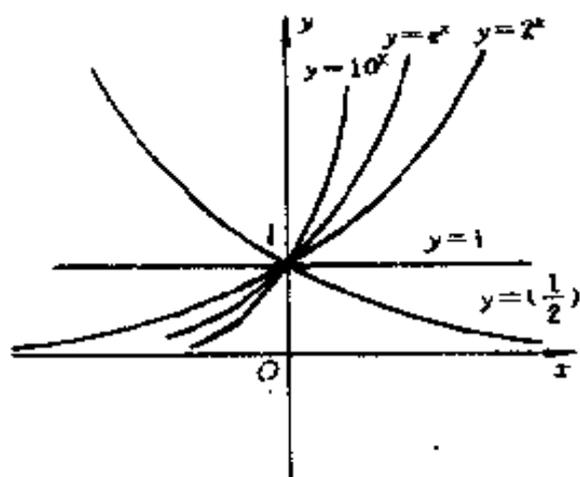


图 1.62

278. 作指数函数

$$y = a^x$$

当 $a = \frac{1}{2}, 1, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如图 1.62 所示.

279. 作复合指数函数

$$y = e^{y_1}$$

的图形, 设:

(a) $y_1 = x^2$; (б) $y_1 = -x^2$; (в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

(г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; (e) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

解 (a) 如图 1.63 所示; (б) 如图 1.64 所示;

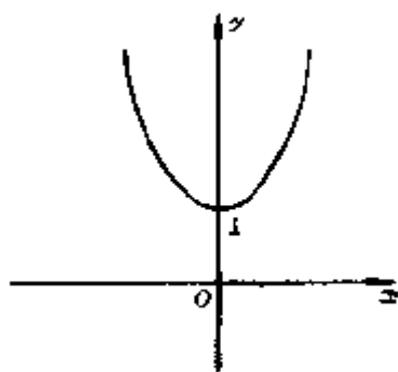


图 1.63

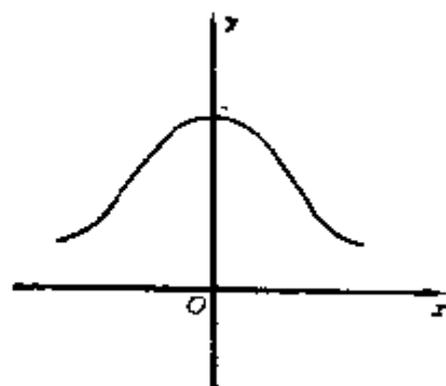


图 1.64

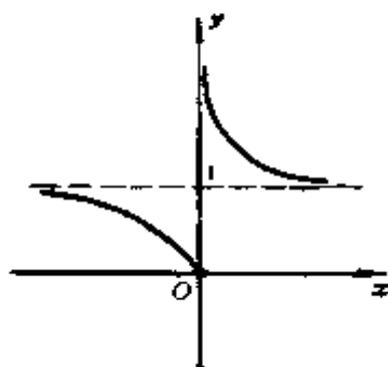


图 1.65

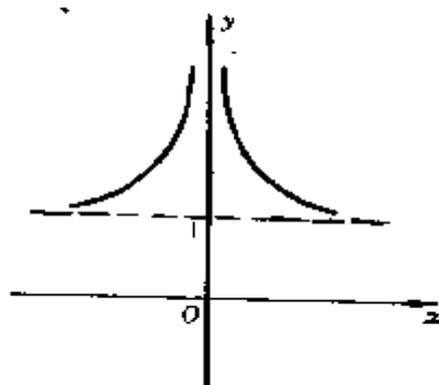


图 1.66

(в) 如图 1.65 所示; (г) 如图 1.66 所示;

(д) 如图 1.67 所示; (e) 如图 1.68 所示.

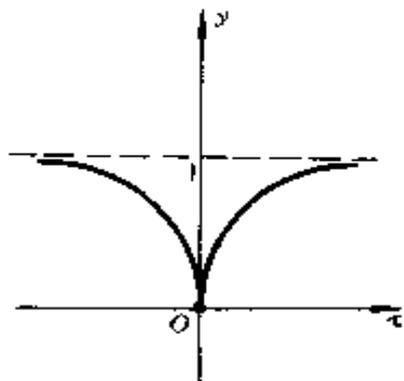


图 1.67

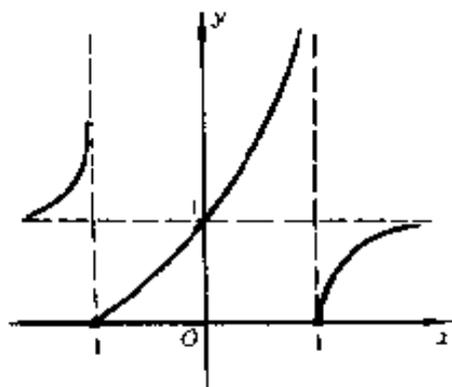


图 1.68

280. 作对数函数 $y = \log_a x$ 当 $a = \frac{1}{2}, 2, e, 10$ 时的图形.

解 如图 1.69 所示.

281. 作下列函数的图形:

(a) $y = \ln(-x)$; (б) $y = -\ln x$.

解 如图 1.70 所示.

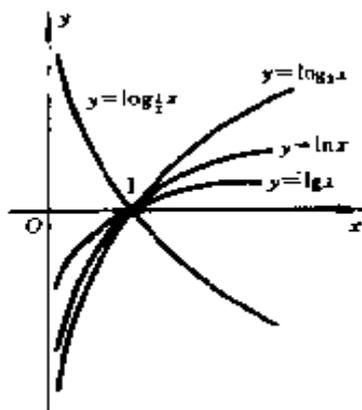


图 1.69

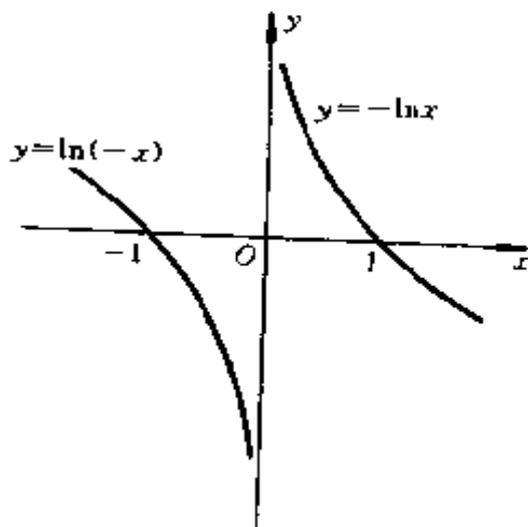


图 1.70

282. 设:

(a) $y_1 = 1 + x^2$; (б) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

(в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; (г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; (д) $y_1 = 1 + e^x$.

作出对数复合函数 $y = \ln y_1$ 的图形.

解 (a) 如图 1.71 所示;

(b) 存在域: $x > 3$ 或 $x < 1$.

$y = \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + 3\ln|x-3|$, 将此三个函数的图形叠加即得, 如图 1.72 所示;

(c) $y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$, 将 $y = \ln(1-x)$ 及 $y = -\ln(1+x)$ 的图形叠加即得, 如图 1.73 所示 ($-e < x < 1$);

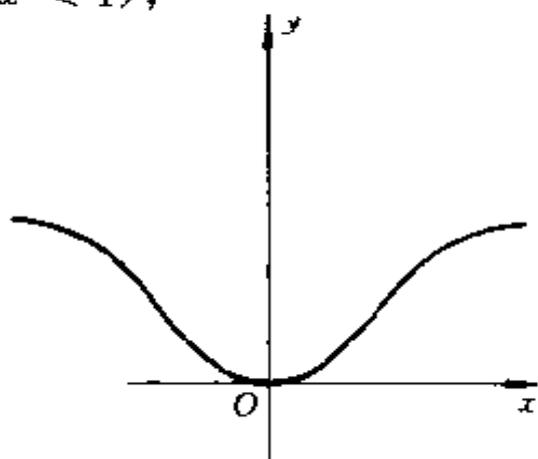


图 1.71

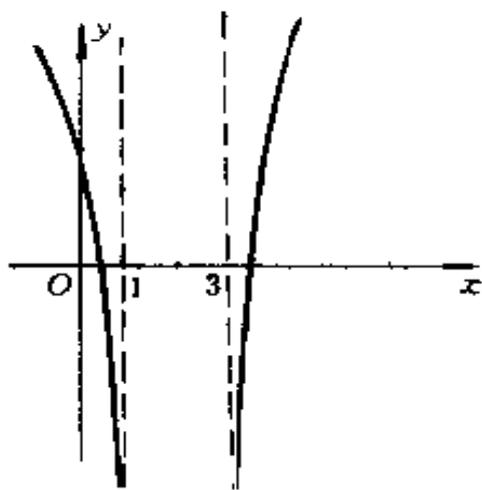


图 1.72

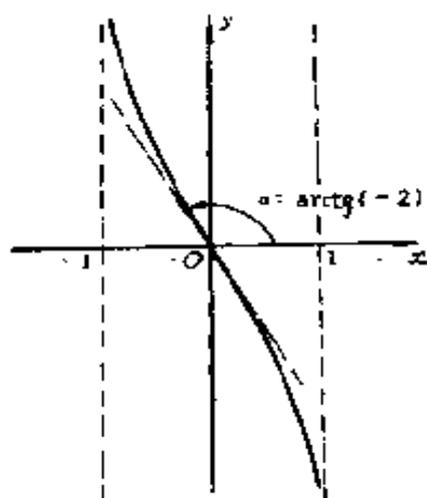


图 1.73

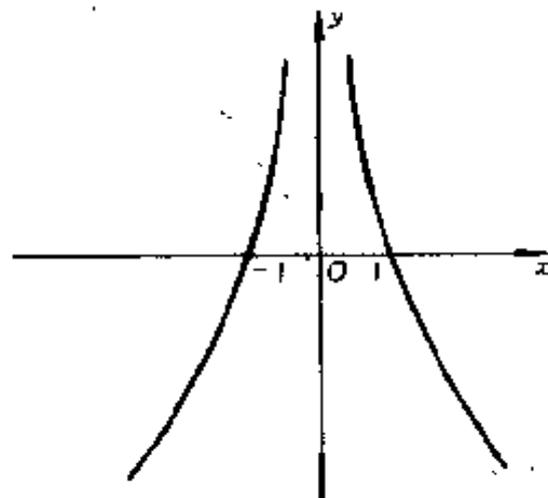


图 1.74

(c) $y = \ln \frac{1}{x^2}$, 如图 1.74 所示, 图形关于 Oy 轴对称;

(d) 如图 1.75 所示.

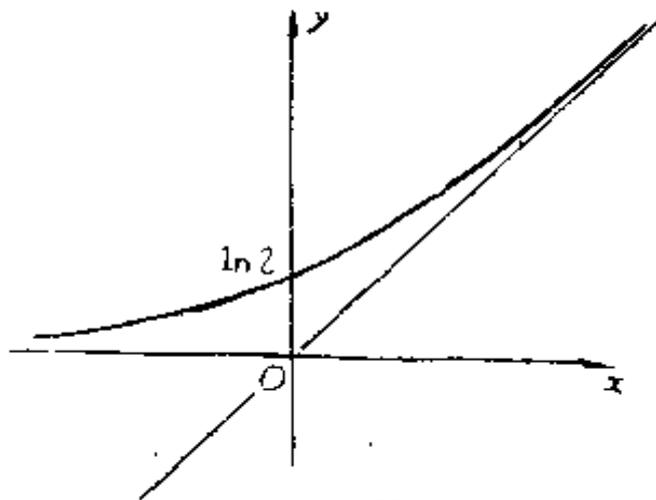


图 1.75

283. 作函数

$$y = \log_x 2$$

的图形

解 如图 1.76 所示.

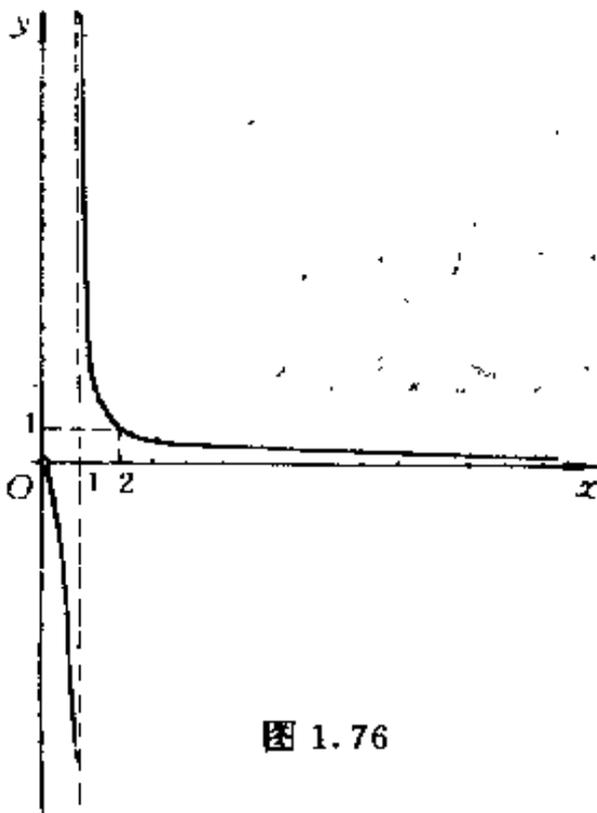


图 1.76

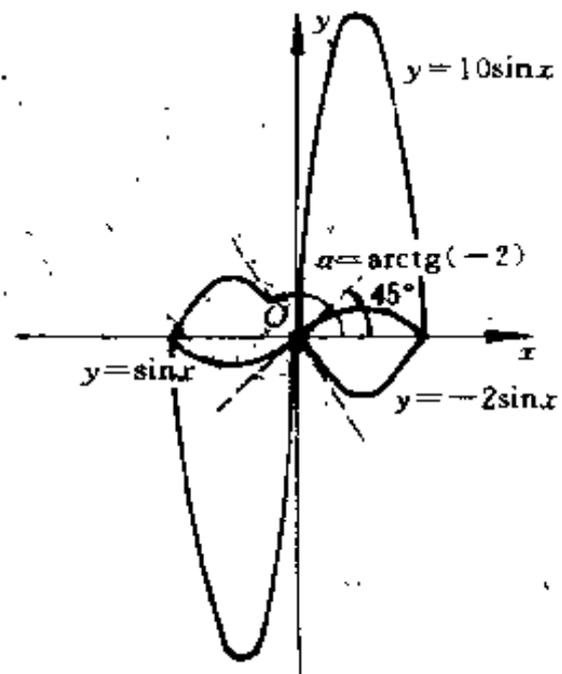


图 1.77

284. 作函数

$$y = A \sin x$$

当 $A = 1, 10, -2$ 时的图形.

解 如图 1.77 所示.

285. 作函数

$$y = \sin(x - x_0)$$

当 $x_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 时的图形.

解 只要将 $y = \sin x$ 的图形向右平移距离 $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ 即得, 如图 1.78 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$;

3. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; 4. $y = \sin\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$;

5. $y = \sin(x - \pi)$.

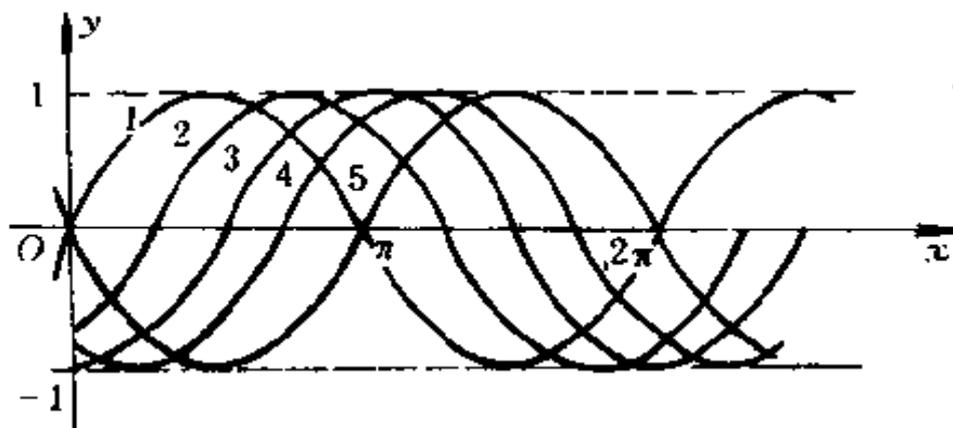


图 1.78

286. 作函数

$$y = \sin nx$$

的图形. 设 $n = 1, 2, 3, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

解 如图 1.79 所示.

1. $y = \sin x$; 2. $y = \sin 2x$;
3. $y = \sin 3x$; 4. $y = \sin \frac{1}{2}x$;
5. $y = \sin \frac{1}{3}x$.

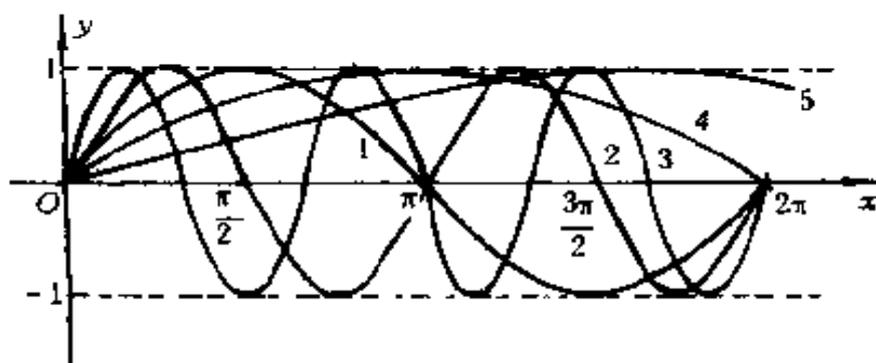


图 1.79

287. 把函数

$$y = a \cos x + b \sin x$$

化为下面的形状

$$y = A \sin(x - x_0),$$

再作它的图形.

研究例子

$$y = 6 \cos x + 8 \sin x.$$

解 $y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right),$

由于

$$\left| \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1, \quad \left| \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \text{ 及}$$

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

故可令

$$\sin x_0 = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos x_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (1)$$

于是

$$y = A \sin(x - x_0) \quad (2)$$

其中

$$A = \sqrt{a^2+b^2} \quad (a^2+b^2 \neq 0), x_0 \text{ 适合(1)式.}$$

(2)式图形是这样作的:先把正弦曲线 $y = \sin x$ 沿 Ox 轴平移距离 $|x_0|$ (或 $x_0 > 0$ 时,则向右移;若 $x_0 < 0$ 时向左移),然后再从纵轴“伸长” A 倍(当 $A < 1$ 时为压缩 $\frac{1}{A}$ 倍).

对于例子

$$y = 6\cos x + 8\sin x,$$

$$A = \sqrt{6^2+8^2} = 10,$$

$$\sin x_0 = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5},$$

$$\cos x_0 = -\frac{4}{5},$$

$$x_0 = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4},$$

如图 1.80 所示.

作下列三角函数的图形:

288. $y = \cos x.$

解 如图 1.81 所示.

289. $y = \operatorname{tg} x.$

解 如图 1.82 所示.

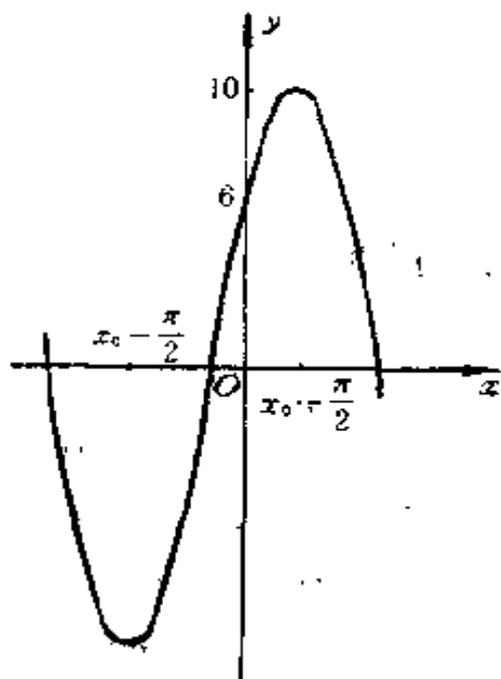


图 1.80

290. $y = \text{ctg}x.$

解 如图 1.83 所示.

291. $y = \sec x.$

解 如图 1.84 所示.

292. $y = \csc x.$

解 如图 1.85 所示.

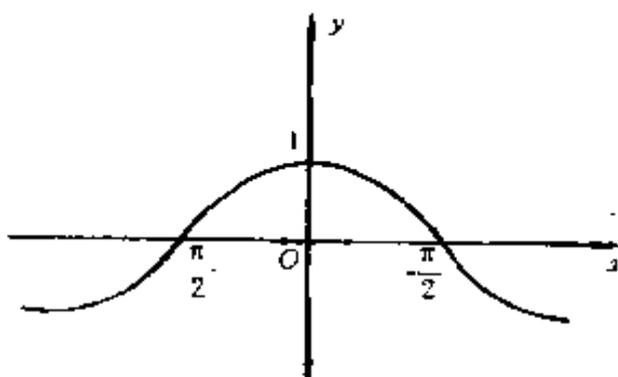


图 1·81

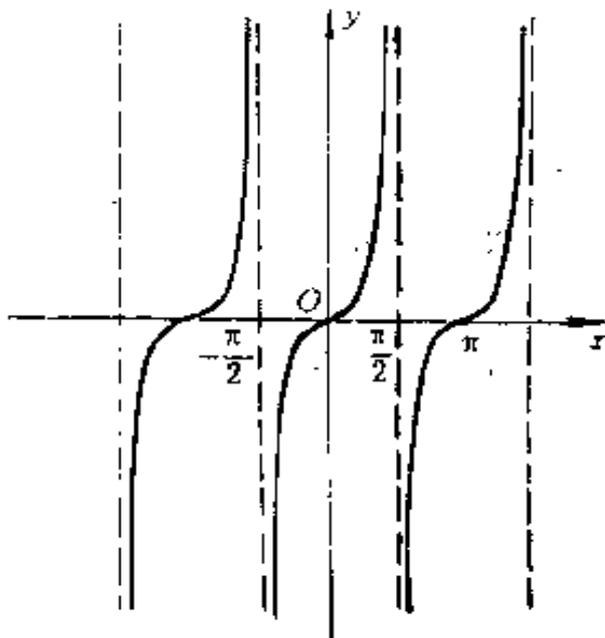


图 1·82

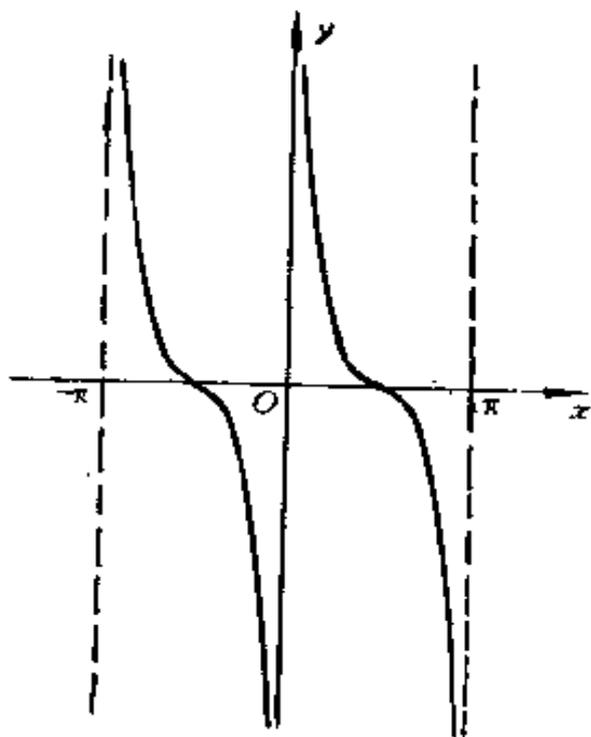


图 1·83

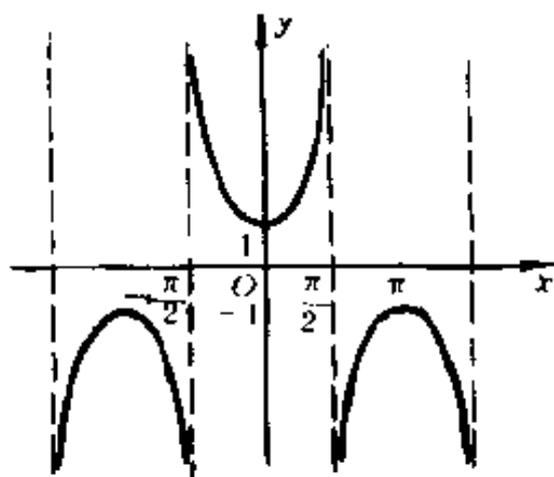


图 1·84

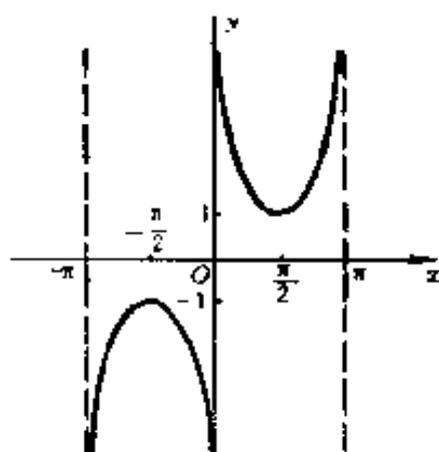


图 1·85

293. $y = \sin^2 x$.

解 如图 1.86 所示.

294. $y = \sin^3 x$.

解 如图 1.87 所示.

295. $y = \text{ctg}^2 x$

解 如图 1.88 所示.

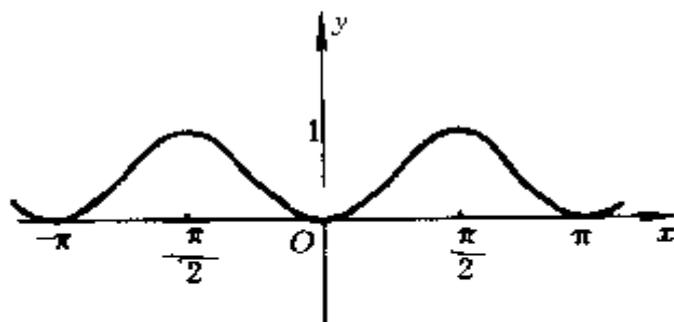


图 1·86

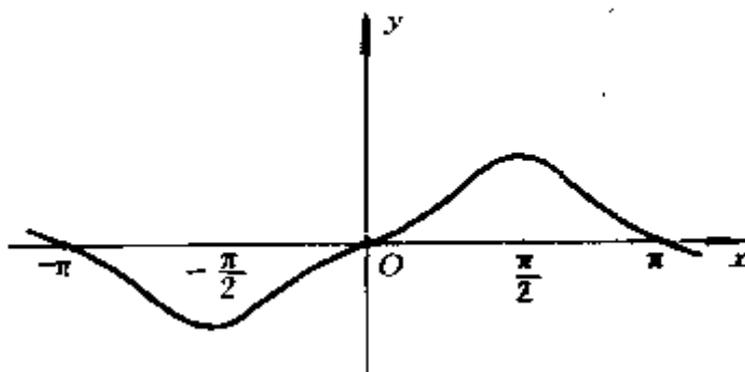


图 1·87

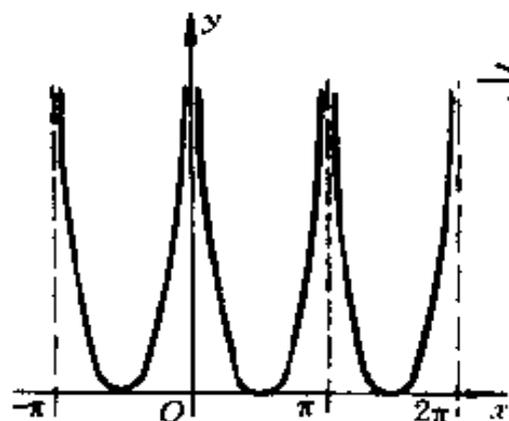


图 1·88

296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 周期为 π . 将 $y = \frac{1}{2}\cos 2x$ 及 $y = -\frac{1}{2}\cos 4x$ 的图形叠加即得. 如图 1.89 所示.

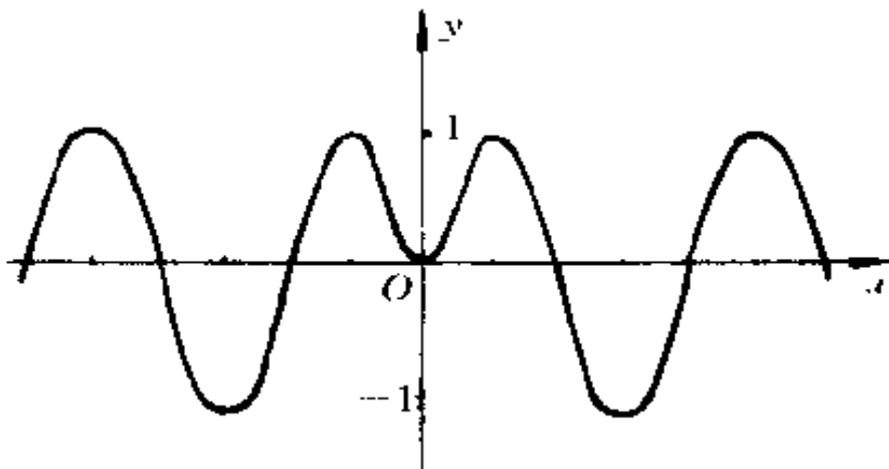


图 1.89

297. $y = \pm \sqrt{\cos x}$.

解 图形关于 Ox 轴及 Oy 轴均对称, 是以 2π 为周期的周期函数, 如图 1.90 所示.

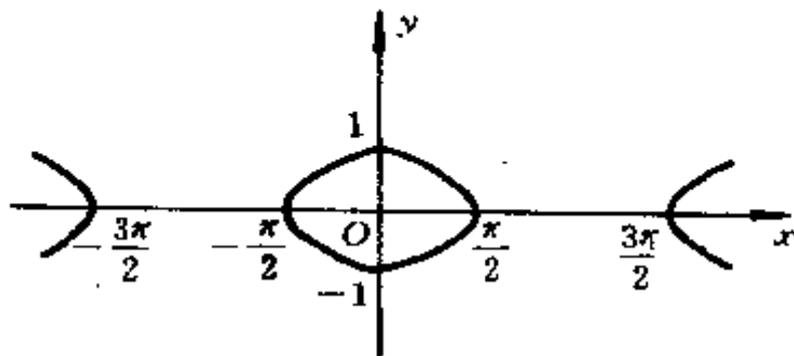


图 1.90

作下列函数的图形:

298. $y = \sin x^2$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 因为

$$f(\sqrt{\pi}) = f(\sqrt{2\pi}) = \dots = f(\sqrt{n\pi}) = 0.$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1}\pi - \sqrt{n\pi}) = 0$, 所以曲线和横轴的相邻交点的相互距离所成的叙列的极限为零.

由不等式 $\sin x^2 < x^2$, 我们知道这条曲线位于抛物线 $y = x^2$ 的下方, 如图 1.91 所示.

299. $y = \sin \frac{1}{x}$.

解 $-1 \leq y \leq 1$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $y = 0$ 为渐近线.

当 x 由 $+\infty$ 减小到 $\frac{2}{\pi}$ 时, 则 $\frac{1}{x}$ 由 0 增大到 $\frac{\pi}{2}$, 而 y 由 0 增到 1; 但当 x 由 $\frac{2}{\pi}$ 减小到 $\frac{2}{3\pi}$, 则 $\frac{1}{x}$ 由 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$, 而 y 由 1 减小到 -1 . 当 $x = \frac{1}{\pi}$ 时, $y = 0$ 等. 因为 y 是奇函数, 故图形关于原点对称. 当 x 无限接近 0 时, 函数在 -1 与 1 之间摆动, 并且凝聚于 0 点, 而在点 $x = 0$ 处, 函数 y 没有定义. 如图 1.92 所示.

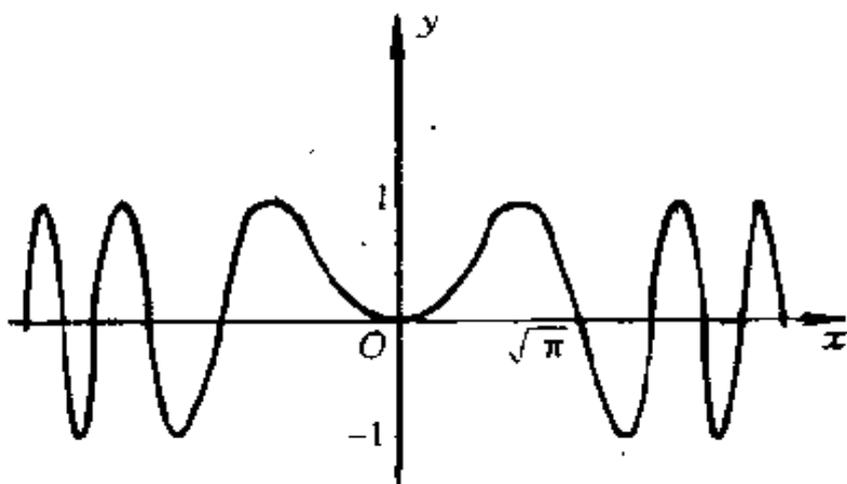


图 1.91

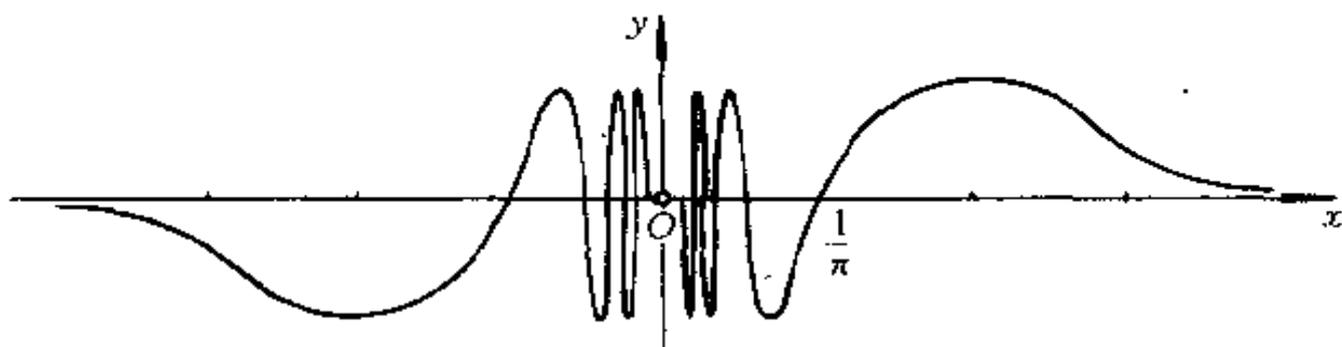


图 1·92

300. $y = x \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $-x \leq y \leq x$. $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$.

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

当 $x > 2$ 时, y 单调增加, 因为 y 是奇函数, 故图形关于原点对称. 而在点 $x = 0$, 函数 y 没有定义.

当 x 无限接近 0 时, 函数作无限次衰减摆动, 并凝聚于 O 点. 如图 1.93 所示.

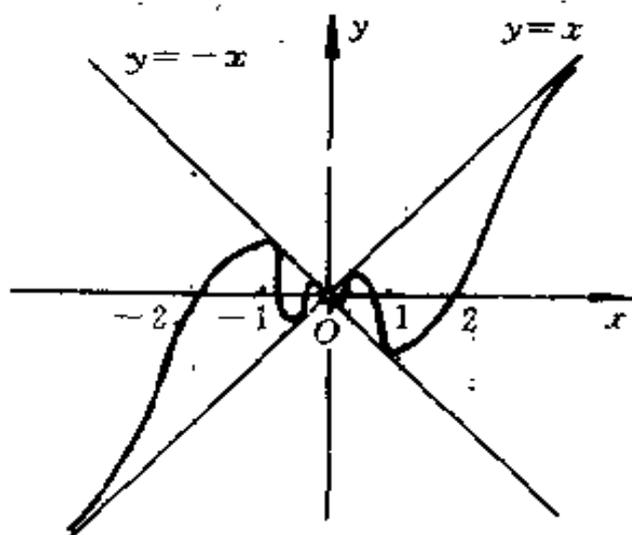


图 1·93

301. $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{x}$.

解 当 $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

当 $x \rightarrow \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y \rightarrow \infty$.

当 $x > 2$ 时, $y > 0$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

因为 y 为奇函数, 故图形关于原点对称.

当 $x \rightarrow 0$ 时, 图形凝聚于 O 点, 而在点 $x = \frac{2}{2k+1}$ 及

0, 函数 y 是没有定义的.

如图 1.94 所示.

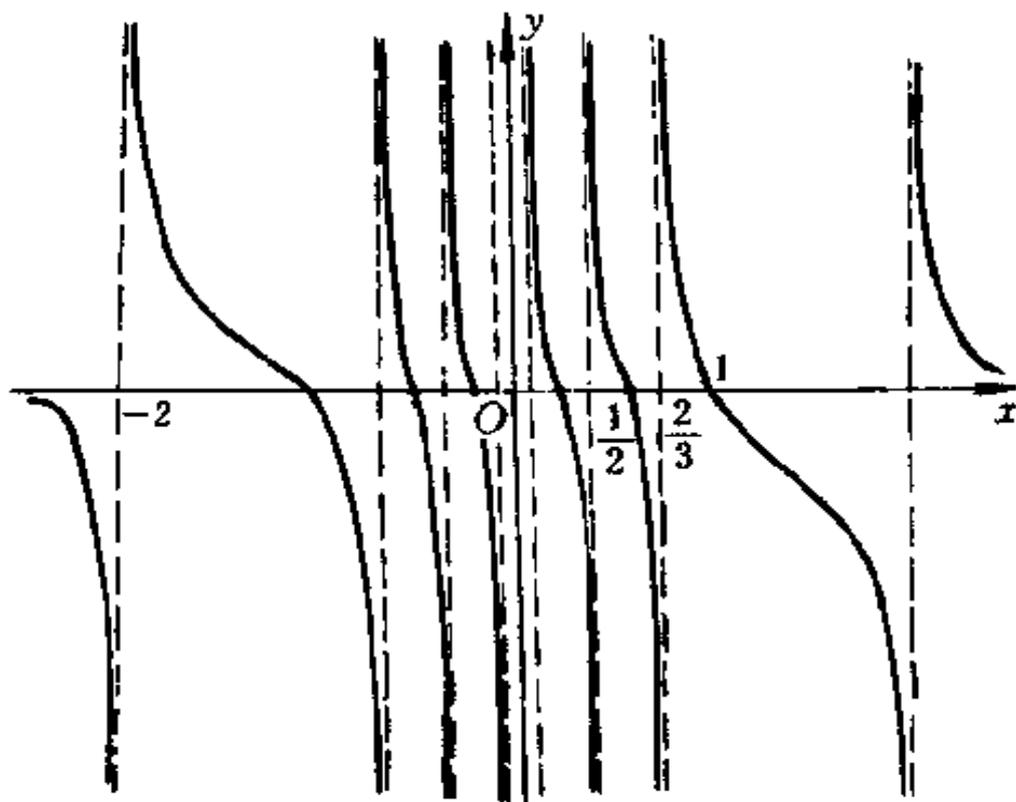


图 1.94

302. $y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$.

解 先作 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形. 因为 y 为偶函数, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = \pm x$.

当 $x = \frac{1}{k\pi}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

当 $x > \frac{2}{\pi}$ 时, y 单调增加, 且有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 1^{**}$$

如图 1.95 所示(在点 $x = 0$ 无定义).

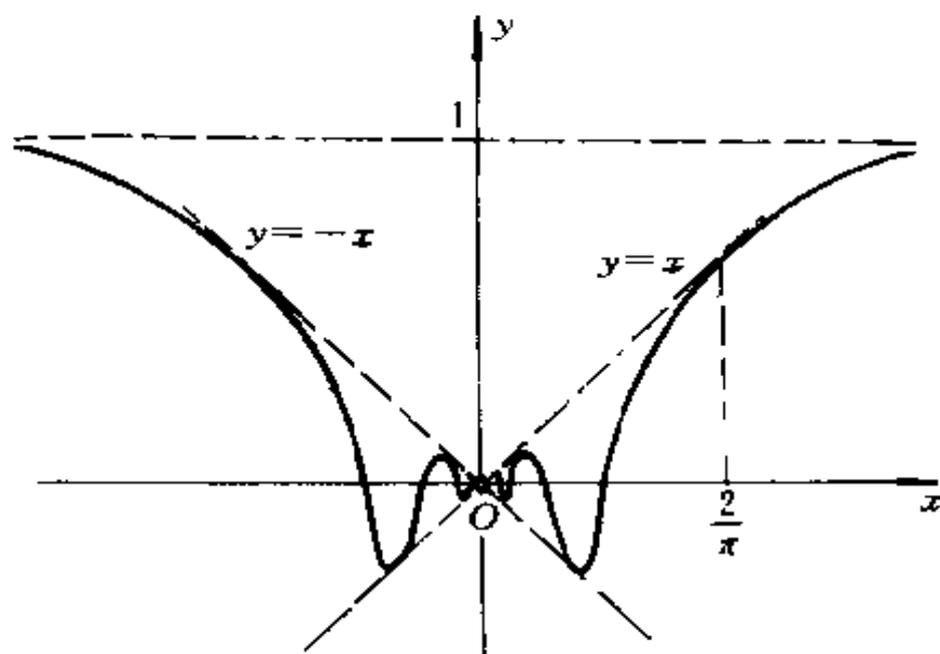


图 1.95

其次, 再将函数 $y = 2x$ 及 $y = x \sin \frac{1}{x}$ 的图形“叠加”, 即得

$$y = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right)$$

的图形. 如图 1.96 所示.

*) 此结果参看本章 § 5.

303. $y = \pm \sqrt{1-x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

解 图形关于原点及 Oy 轴, Ox 轴均对称.

由于

$$\begin{aligned} -\sqrt{1-x^2} &\leq y \\ &\leq \sqrt{1-x^2} \\ &(|x| \leq 1), \end{aligned}$$

故图形位于圆 $x^2 + y^2 = 1$ 内.

将函数 $y = \pm \sqrt{1-x^2}$

与 $y = \sin \frac{\pi}{x}$ 的纵坐标

对应相乘, 即可描出
所求的图形.

如图 1.97 所示.

304. $y = \frac{\sin x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$. 由于 $|y| \leq \frac{1}{|x|}$,

故图形在 $y = -\frac{1}{x}$

及 $y = \frac{1}{x}$ 之间. 又图形关于 Oy 轴对称. 当 $x = k\pi$ 时, $y =$

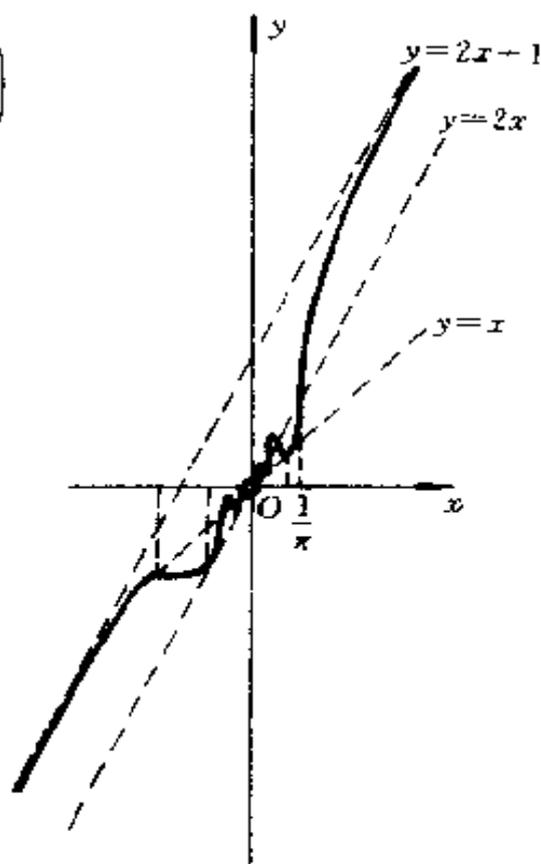


图 1.96

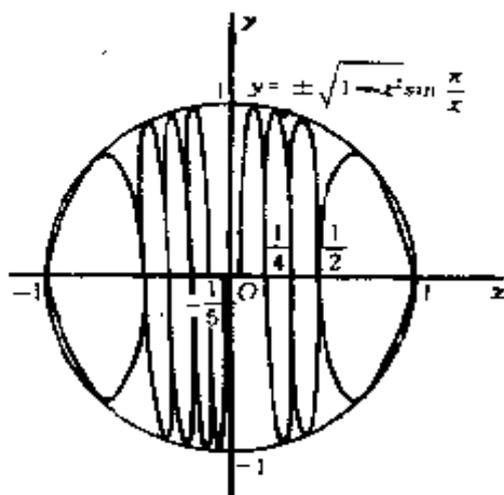


图 1.97

$0(k = \pm 1, \pm 2, \dots)$.

如图 1.98 所示.

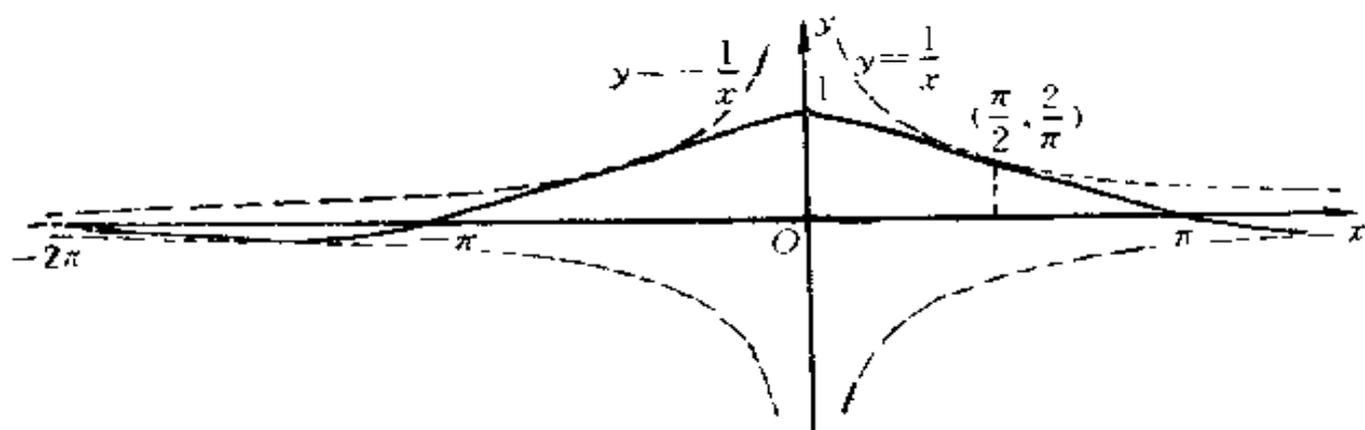


图 1.98

305. $y = e^x \cos x$.

解 由于 $-e^x \leq y \leq e^x$, 故图形在 $y = e^x$ 及 $y = e^{-x}$ 之间.

当 $x = (2k + 1) \frac{\pi}{2} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y =$

0. 且 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$, 但 $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cos x$ 却不存在.

如图 1.99 所示.

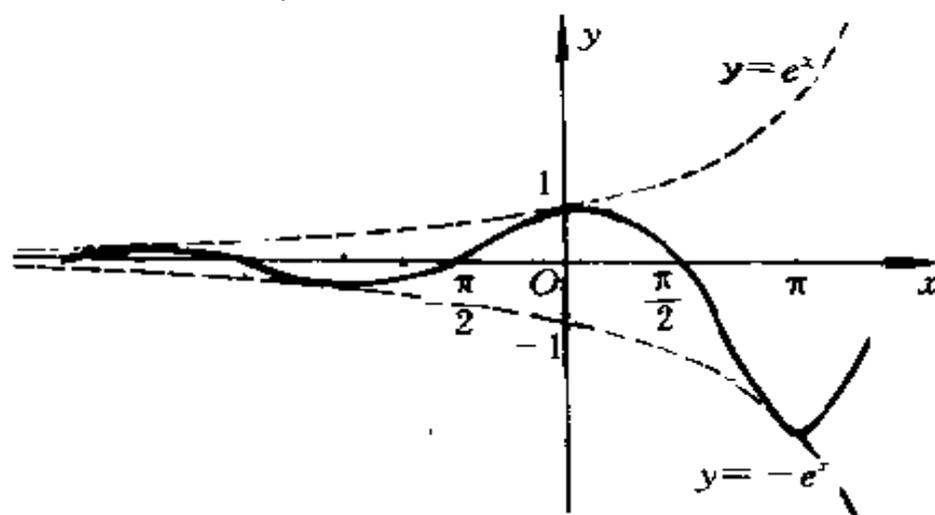


图 1.99

306. $y = \pm 2^{-x} \sqrt{\sin \pi x}$.

解 当 $2k \leq x \leq (2k+1)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) 时, y 值才确定. 当 $k = 2k + \frac{1}{2}$ 时, $y = \pm 2^{-x}$.

图形关于 Ox 轴对称. $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} y$ 不存在.

如图 1·100 所示.

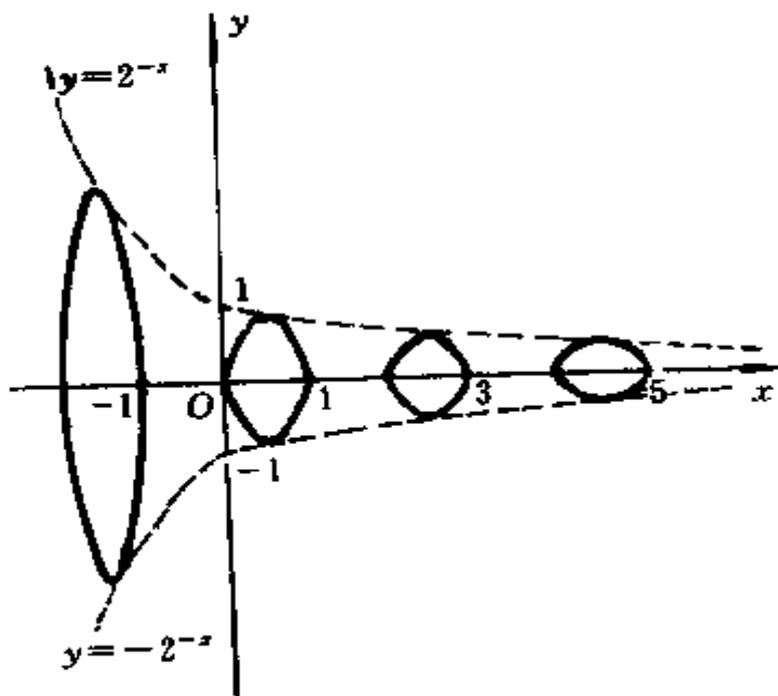


图 1·100

307. $y = \frac{\cos x}{1+x^2}$.

解 $-\frac{1}{1+x^2} \leq y \leq \frac{1}{1+x^2}$,

图形在 $y = -\frac{1}{1+x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1+x^2}$ 之间, 且关于 Oy 轴对称.

$\lim_{x \rightarrow \infty} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

如图 1·101 所示.

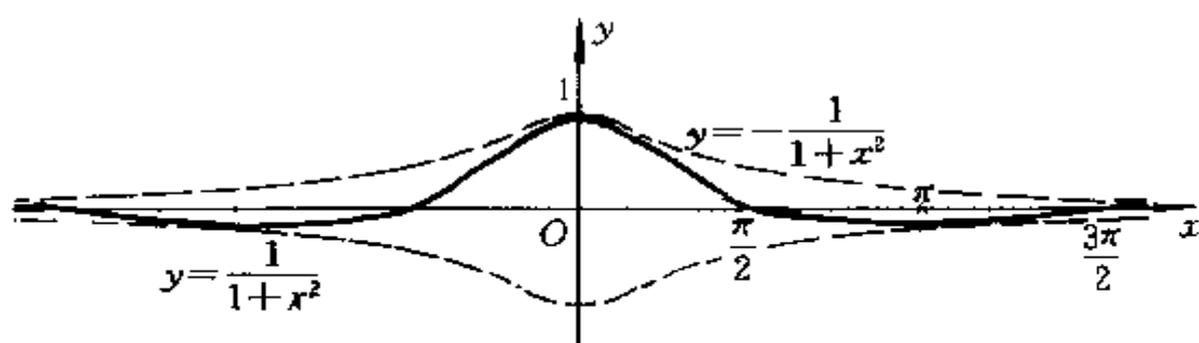


图 1·101

308. $y = \ln(\cos x)$.

解 存在域是使 $\cos x > 0$ 的开区间

$$\left((4k-1)\frac{\pi}{2}, (4k+1)\frac{\pi}{2} \right) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

的全体. 函数 y 是以 2π 为周期的周期函数. 在区间

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 内, y 单调增加, 且 $y < 0$. 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内, y 单调

减小, $y < 0$. 最大值是 $y = \ln \cos 0 = 0$.

又 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} y = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} y = -\infty$. 如图 1·102 所示.

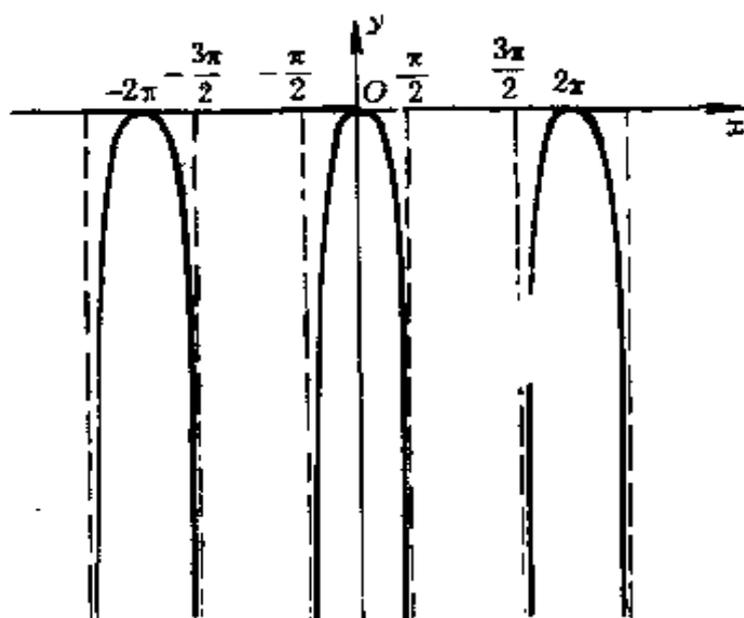


图 1·102

309. $y = \cos(\ln x)$.

解 存在域为数 $x > 0$ 的全体.

当 $x = e^{(2k+1)\frac{\pi}{2}}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

当 $x = e^{2k\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 1$;

而当 $x = e^{(2k+1)\pi}$ 时, $y = -1$.

图形始终在直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 之间摆动, 而且越靠近原点时, 摆动越密.

如图 1.103 所示. (两轴所取的单位不一致).

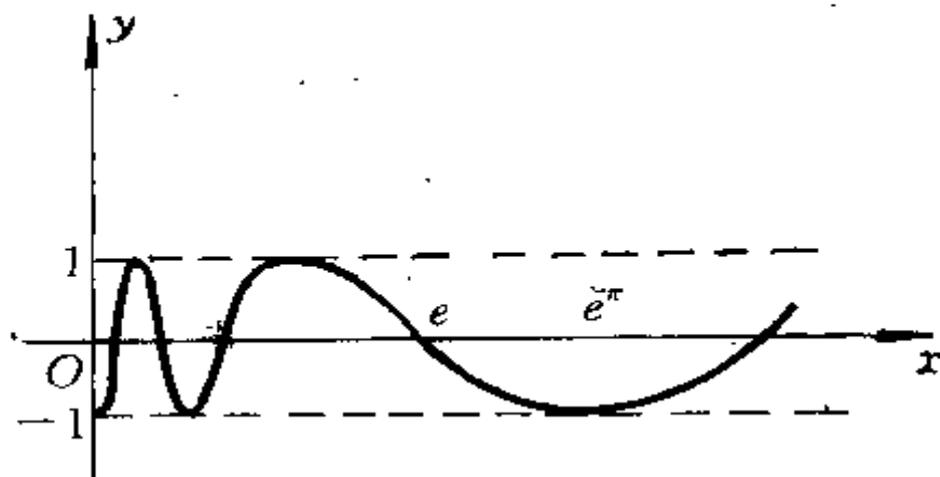


图 1.103.

310. $y = e^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $y > 0$.

函数 y 是以 2π 为周期的周期函数.

当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, y 单调减少;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 时, y 单调增加. 又有

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow \pi-0} y = +\infty.$$

$y|_{x=\frac{\pi}{2}} = e$ 为区间 $(0, \pi)$ 内, 函数 y 的最小值.

同理, x 由 π 到 $\frac{3\pi}{2}$ 时, y 由 0 增到 $\frac{1}{e}$; 而 x 由 $\frac{3\pi}{2}$ 到 2π 时, y 由 $\frac{1}{e}$ 减到 0. $\lim_{x \rightarrow \pi+0} y = \lim_{x \rightarrow 2\pi-0} y = 0$.

如图 1·104 所示.

作下列反三角函数的图形:

311. $y = \arcsin x$.

解 如图 1.105 所示的 AB 段曲线.

312. $y = \arccos x$.

解 如图 1.106 所示的 AB 段曲线.

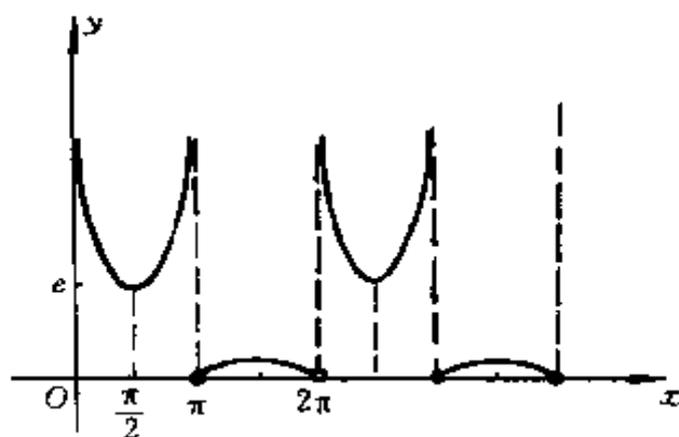


图 1·104

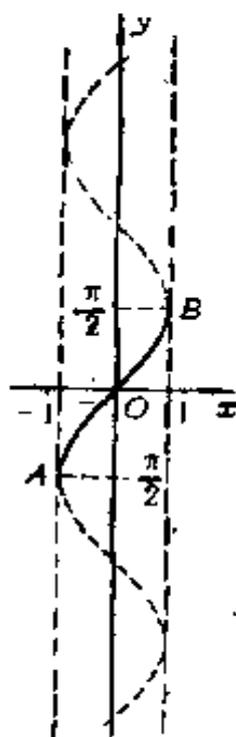


图 1·105

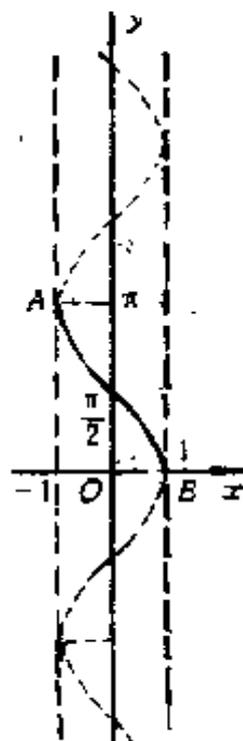


图 1·106

313. $y = \operatorname{arctg} x.$

解 如图 1.107 所示的 AB 段曲线.

314. $y = \operatorname{arcctg} x.$

解 如图 1.108 所示的 AB 段曲线.

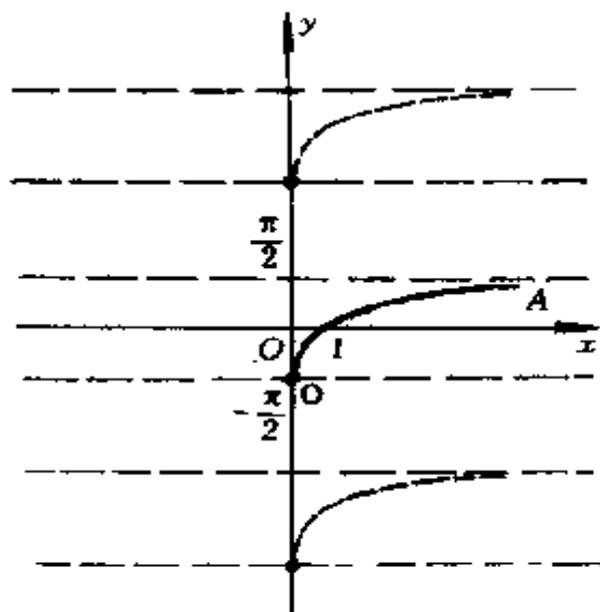


图 1 · 107

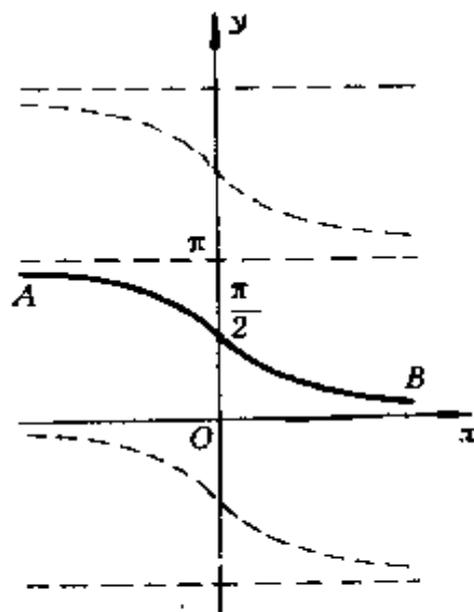


图 1 · 108

315. $y = \arcsin \frac{1}{x}.$

解 图形关于原点对称.

存在域是区间 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$.

当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 也是减函数, 且有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} y &= \frac{\pi}{2} \\ &= y|_{x=1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} y \\ &= 0. \end{aligned}$$

如图 1 · 109 所示.

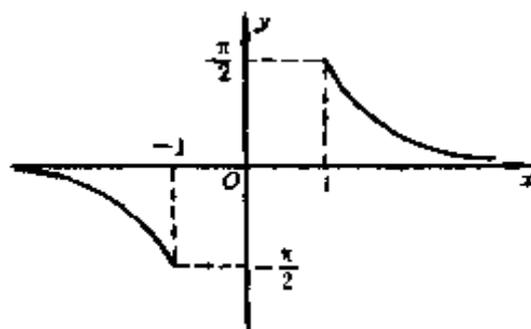


图 1 · 109

316. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

解 存在域是区间 $(-\infty, -1]$ 和 $[1, +\infty)$.

当 $1 \leq x < +\infty$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 是增函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

同理, 当 $-\infty < x \leq -1$ 时, y 单调增加; 且有

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} y = \pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = \frac{\pi}{2}.$$

如图 1·110 所示.

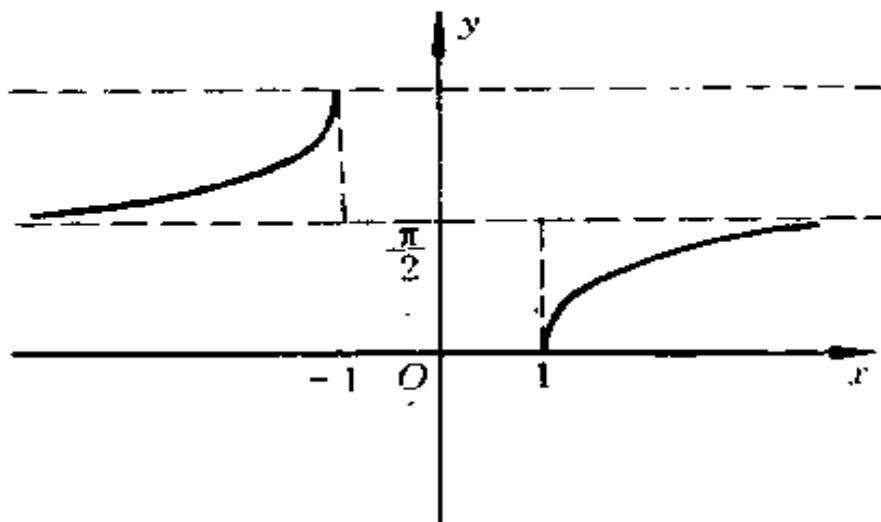


图 1·110

317. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

解 图形关于原点对称.

当 $x > 0$ 时, 由于 $\frac{1}{x}$ 单调减少, 所以, y 是减函数, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0.$$

如图 1·111 所示.

318. $y = \arcsin(\sin x)$.

解 $\sin y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

因此, 当 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$;

当 $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = \pi - x$;

当 $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{5\pi}{2}$ 时, $y = x - 2\pi$.

一般地,

当 $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = x - 2k\pi$;

($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

而当 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = (\pi - x) + 2k\pi$.

如图 1·112 所示.

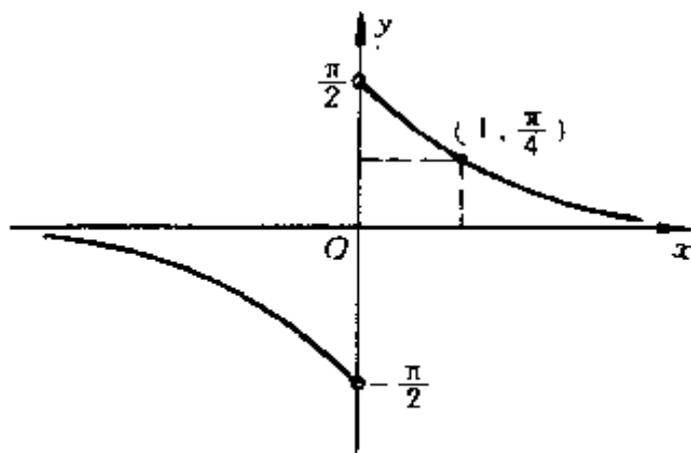


图 1·111

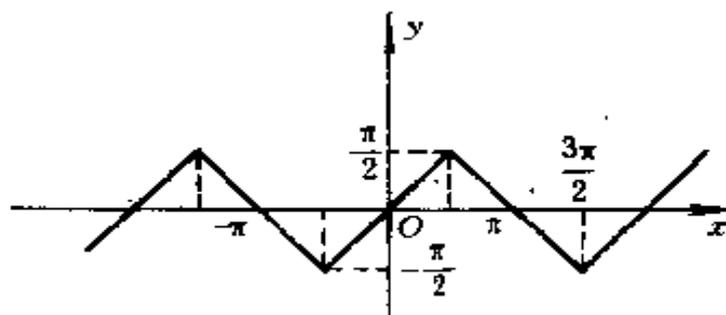


图 1·112

319. $y = \arcsin(\cos x)$.

解 $\sin y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

因此, 当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = \frac{\pi}{2} + x$;

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = \frac{\pi}{2} - x$.

一般地,

当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时, $y = \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2k\pi$
 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

而当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时, $y = \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi$.

如图 1·113 所示.

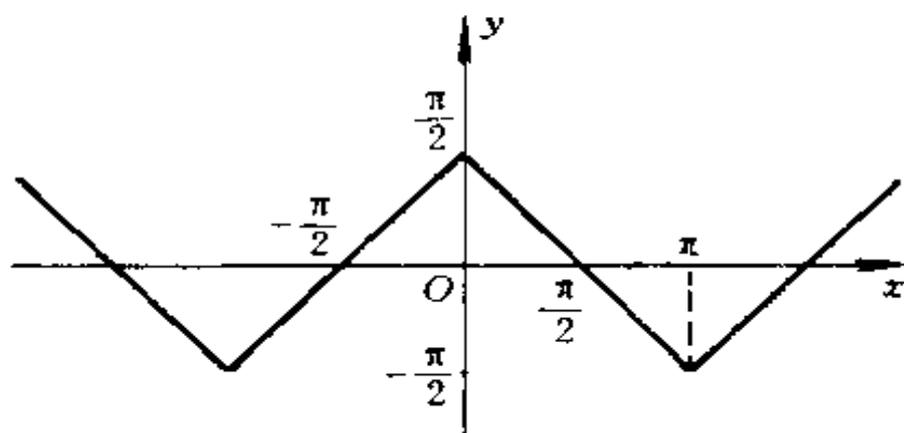


图 1·113

320. $y = \arccos(\cos x)$.

解 $\cos y = \cos x, 0 \leq y \leq \pi$.

因此, 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $y = x$;

当 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 时, $y = 2\pi - x$;

当 $-\pi \leq x \leq 0$ 时, $y = -x$.

一般地,

当 $(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ 时, $y = -x + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$);

而当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时, $y = x - 2k\pi$.

如图 1·114 所示.

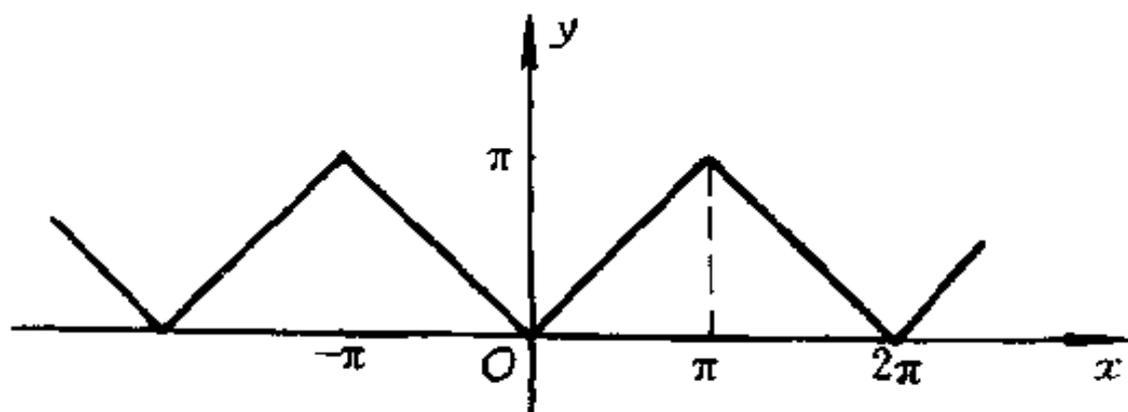


图 1·114

321. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$.

解 $\operatorname{tgy} = \operatorname{tg}x, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

因此, 当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $y = x$;

当 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 时, $y = x - \pi$;

当 $-\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}$ 时, $y = \pi + x$.

一般地,

当 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ 时, $y = x - k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

如图 1·115 所示.

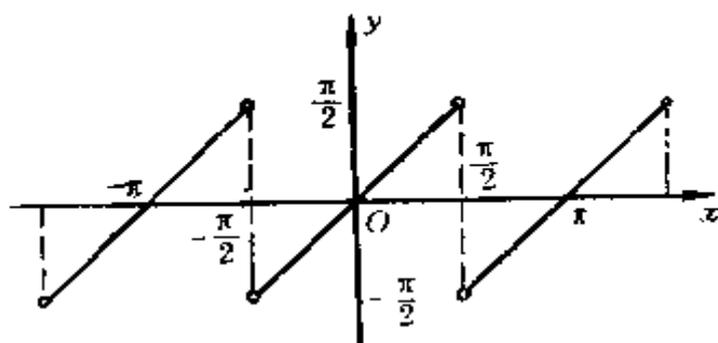


图 1.115

322. $y = \arcsin(2\sin x)$.

解 $\sin y = 2\sin x$, $-\frac{2}{\pi} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

存在域为区间:

$$\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right], \dots$$

的全体, 即 $\left[-\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right] (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

的全体.

利用复合函数作图法得其图形, 如图 1.116 所示, 它关于原点对称.

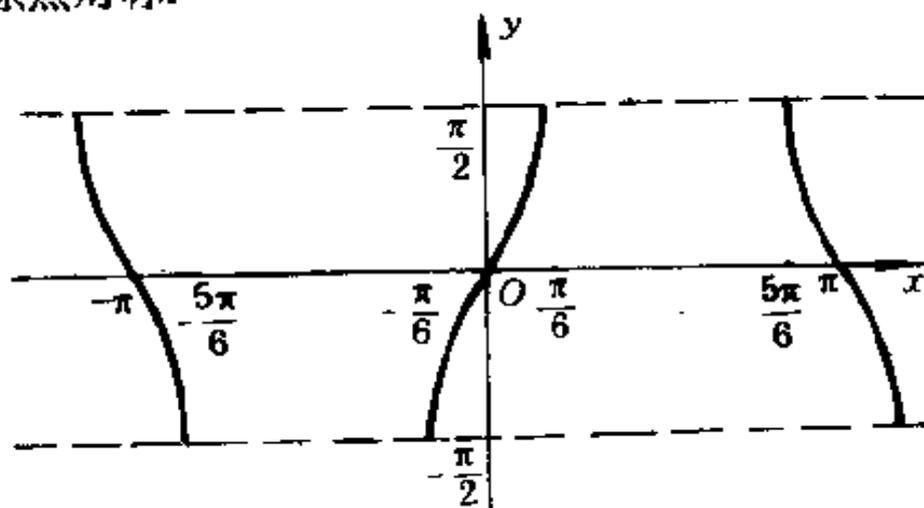


图 1.116

323. 设

$$(a) y_1 = 1 - \frac{x}{2}; \quad (b) y_1 = \frac{2x}{1+x^2};$$

$$(c) y_1 = \frac{1-x}{1+x}; \quad (r) y_1 = e^x.$$

作函数

$$y = \arcsin y_1$$

的图形.

解 (a) 存在域
为满足不等式

$$0 \leq x \leq 4$$

的数 x 的集合.

当 $0 \leq x \leq 2$ 时,

y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0;

而当 $2 \leq x \leq 4$ 时,

y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$.

如图 1·117 所示.

(b) 图形关于原点对称. 存在域为全体实数.

当 x 由 0 增到 1

时, 由于 $\frac{2x}{1+x^2}$ 为增函数, 故 y 由

0 增到的 $\frac{\pi}{2}$. 而当

$x > 1$ 时, $\frac{2x}{1+x^2}$ 为减函数, 故 y 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y$

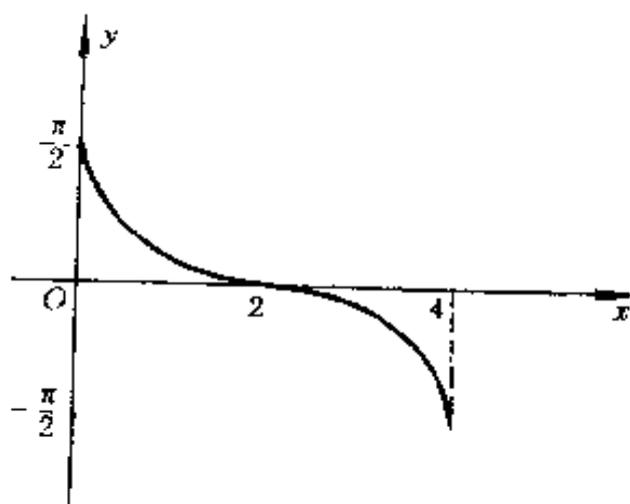


图 1·117

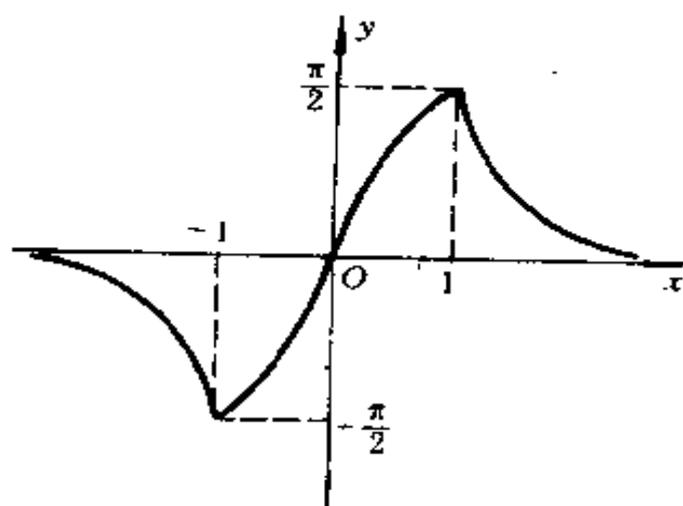


图 1·118

= 0. 如图 1·118 所示.

(b) 要 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| \leq 1$, 只要 $x \geq 0$, 故存在域为 $x \geq 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 0 增到 1 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 1 减少到 0, 而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0; 而当 x 由 1 增到 $+\infty$ 时, $\frac{1-x}{1+x}$ 由 0 减少到 -1 , 而 y 由 0 减少到 $-\frac{\pi}{2}$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \frac{\pi}{2}$, 如图 1·119 所示.

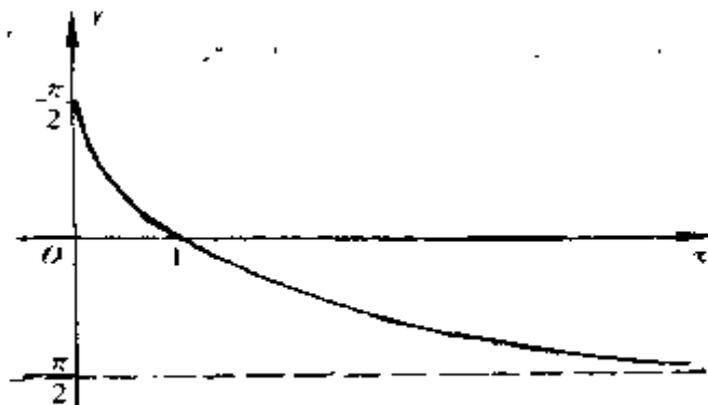


图 1·119

(c) 存在域为 $-\infty < x \leq 0$ 的数 x 的集合. 当 x 由 $-\infty$ 增到 0 时, e^x 由 0 增到 1, 而 y 则由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$. 如图 1·120 所示.

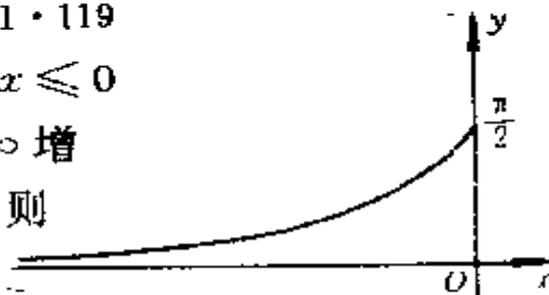


图 1·120

324. 设

$$(a) y_1 = x^2; (b) y_1 = \frac{1}{x^2};$$

(B) $y_1 = \ln x$; (r) $y_1 = \frac{1}{\sin x}$.

作函数

$$y = \operatorname{arctg} y_1$$

的图形.

解 (a) 如图 1·121 所示的 AB 曲线.

(b) 如图 1·122 所示.

(B) 如图 1·123 所示的 OA 曲线.

(r) 以 2π 为周期. 当 x 由 0 增到 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{1}{\sin x}$ 由 $+\infty$

减到 1, 而 y 则由 $\frac{\pi}{2}$ 减到 $\frac{\pi}{4}$. 余类推, 如图 1·124 所示.

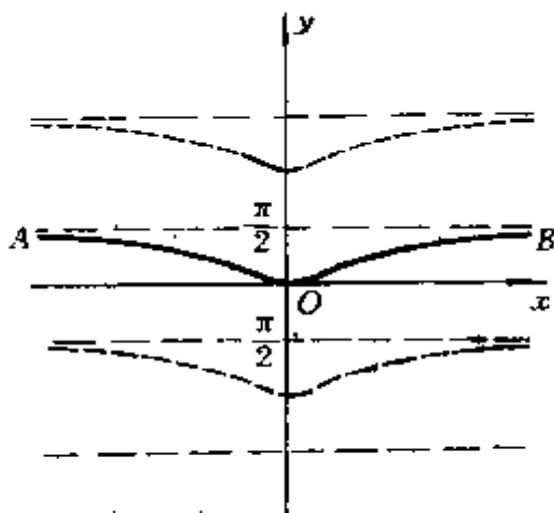


图 1·121

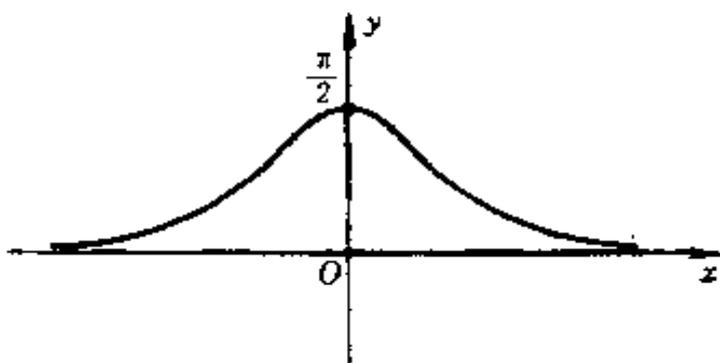


图 1·122

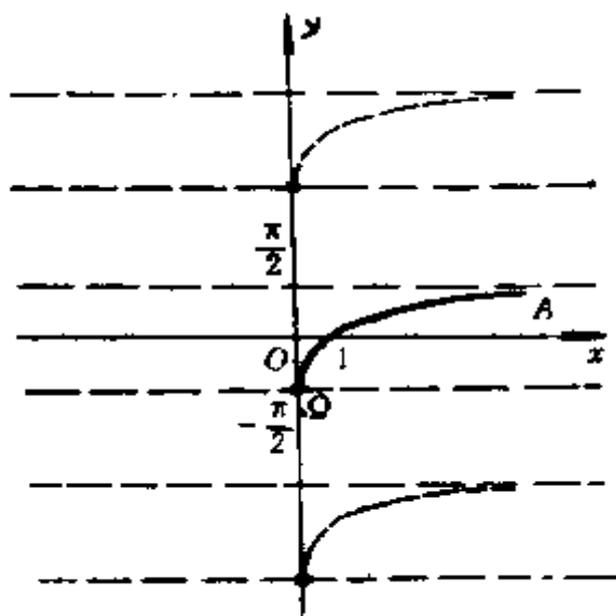


图 1·123

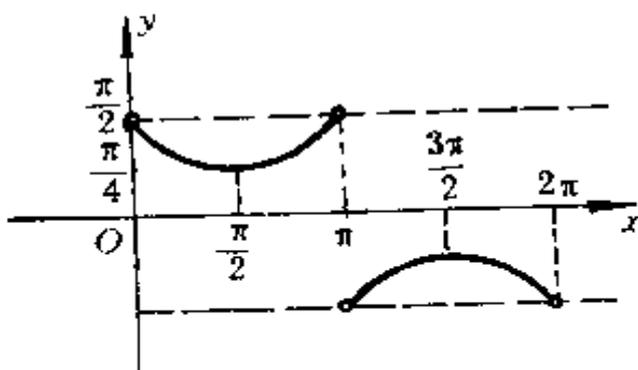


图 1·124

325. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形，
作下列各函数的图形

- (a) $y = -f(x)$;
(b) $y = f(-x)$;
(c) $y = -f(-x)$.

解 (a) 函数 $y = -f(x)$
的图形和函数 $y = f(x)$
的图形关于 Ox 轴
对称. 如图 1·125
所示.

(b) 函数 $y = f(-x)$ 的图形和
函数 $y = f(x)$ 的
图形关于 Oy 轴

对称. 如图 1·126 所示.

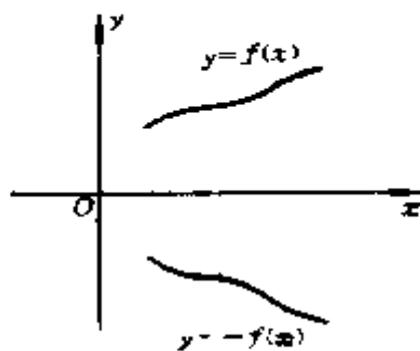


图 1·125

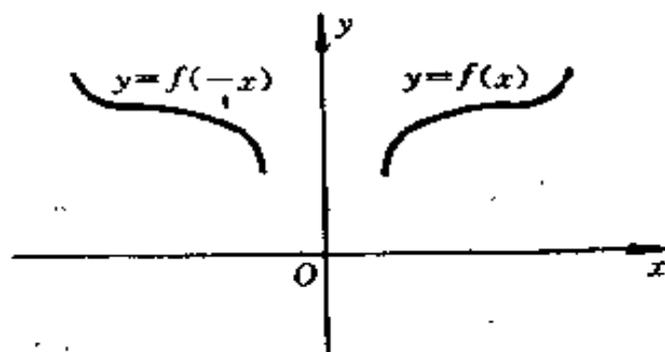


图 1·126

(b) 函数 $y = -f(-x)$ 的图形和函数 $y = f(x)$ 的图形关于原点对称. 如图 1·127 所示.

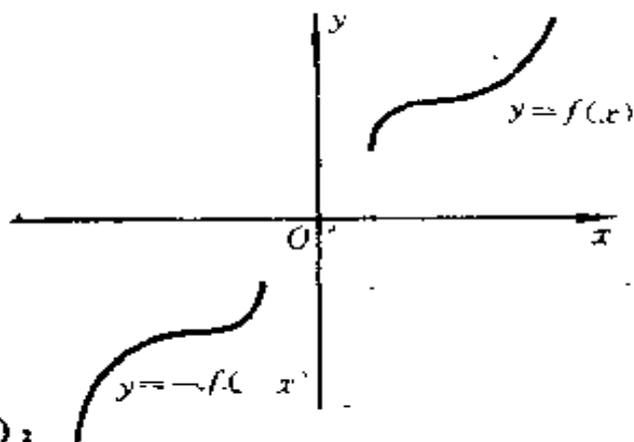


图 1·127

326. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列各函数的图形:

(a) $y = f(x - x_0)$;

(b) $y = y_0 + f(x - x_0)$;

(c) $y = f(2x)$;

(d) $y = f(kx + b)$
($k \neq 0$)

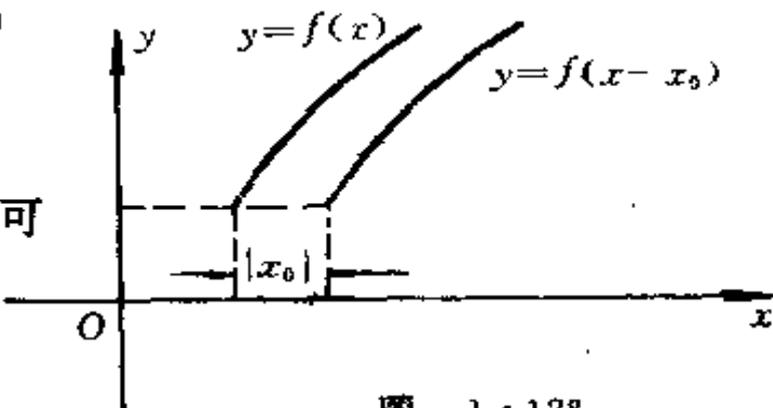


图 1·128

解 (a) 函数 $y = f(x - x_0)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形平移距离 $|x_0|$ 得出.

当 $x_0 > 0$ 时, 向右平移;

当 $x_0 < 0$ 时, 向左平移.

如图 1·128 所示.

(b) 函数 $y = y_0 + f(x - x_0)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形先平移距离 $|x_0|$, 再上下平移距离 $|y_0|$ 得出, 其中

当 $y_0 > 0$ 时, 向上平移;

当 $y_0 < 0$ 时, 向下平移.

事实上, 只要先将坐标原点平移到点 (x_0, y_0) . 坐标轴的

方向均不变,再在新坐标系中作 $y' = f(x')$ 的图形,其中 $y' = y - y_0, x' = x - x_0$.

图形如图 1·129 所示.

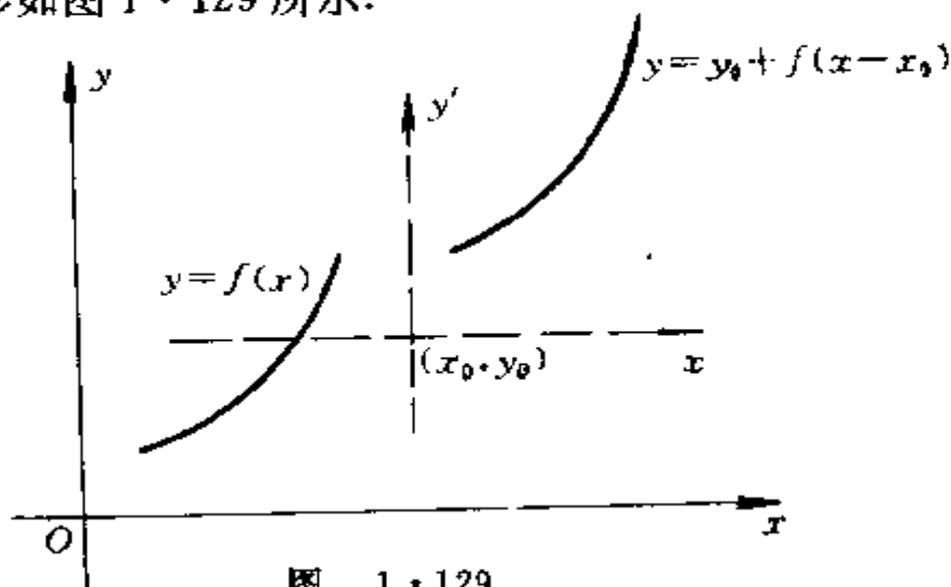


图 1·129

(B) $y = f(2x)$ 的图形可由 $y = f(x)$ 的图形沿 Ox 轴方向缩小二倍得出.

图形如图 1·130 所示.

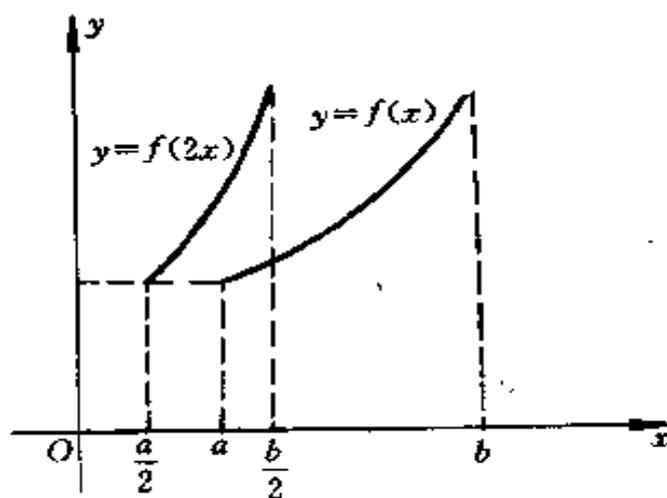


图 1·130

(r) $y = f(kx + b)$

的图形可由 $y = f(x)$ 的图形先沿 Ox 轴方向“压缩” k 倍 ($0 < k < 1$ 时, 理解为“放大”). 然后再将所得图形平移距离 $|b|$.

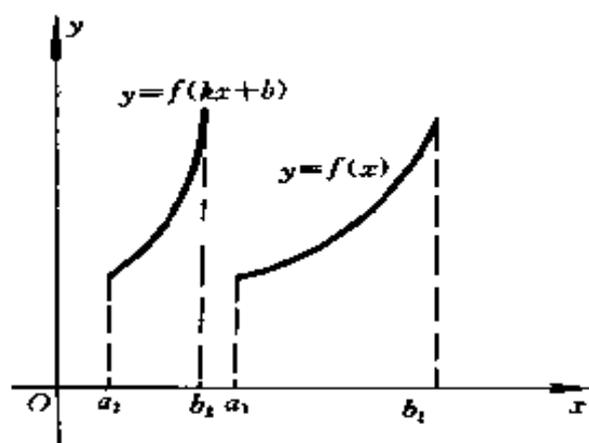


图 1.131

图形如图 1.131 所

示.

327. 作函数的图形

(a) $y = 2 + \sqrt{1-x}$; (б) $y = 1 - e^{-x}$;

(в) $y = \ln(1+x)$. (г) $y = -\frac{\pi}{2} \arcsin(1+x)$;

(д) $y = 3 + 2\cos 3x$.

解 (a) 如图 1.132 所示.

(б) 如图 1.133 所示.

(в) 如图 1.134 所示.

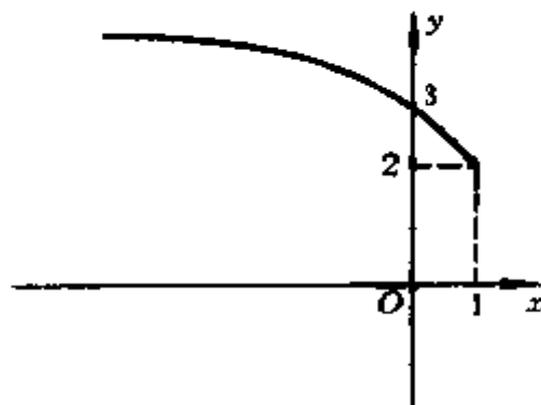


图 1.132

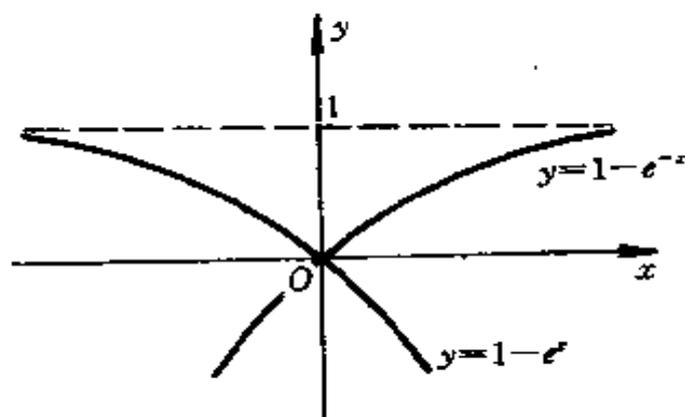


图 1.133

(г) 如图 1.135 所示的 AB 曲线.

(π) 如图 1·136 所示.

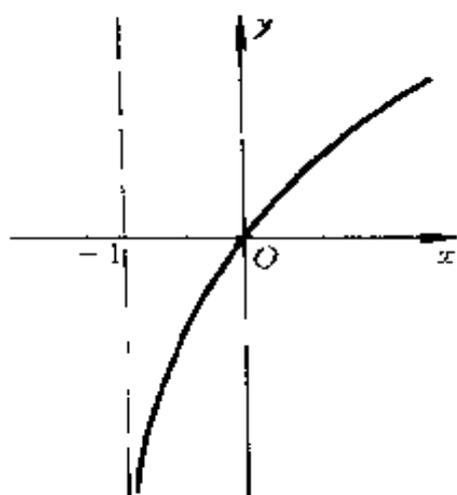


图 1·134

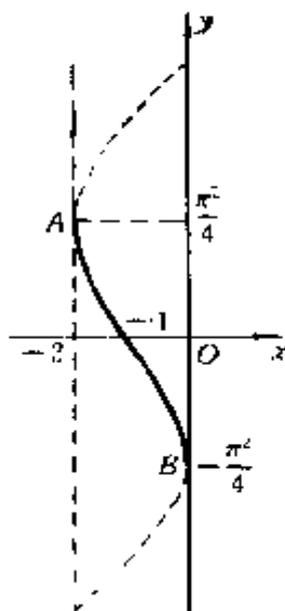


图 1·135

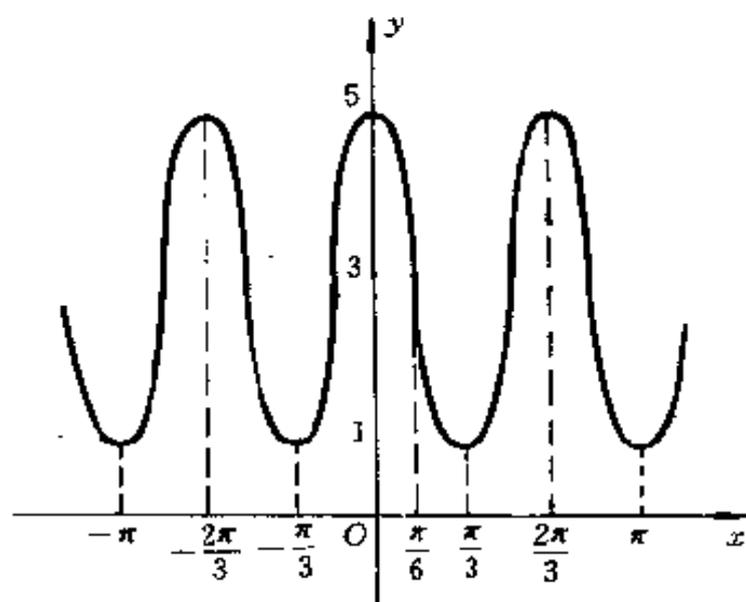


图 1·136

328. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y = |f(x)|$; (b) $y = \frac{1}{2}[|f(x)| + f(x)]$;

$$(B) y = \frac{1}{2} [|f(x)| - f(x)].$$

解 (a) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$;
当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = -f(x)$;

如图 1·137 黑粗线所示.

(b) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = f(x)$;
当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = 0$.

如图 1·138 黑粗线所示.

(B) 当 $f(x) \geq 0$ 时, $y = 0$;
当 $f(x) < 0$ 时,
 $y = -f(x)$.

如图 1·139 黑粗线所示.

329. 已知函数 $y = f(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

- (a) $y = f^2(x)$; (b) $y = \sqrt{f(x)}$;
(B) $y = \ln f(x)$; (r) $y = f[f(x)]$;

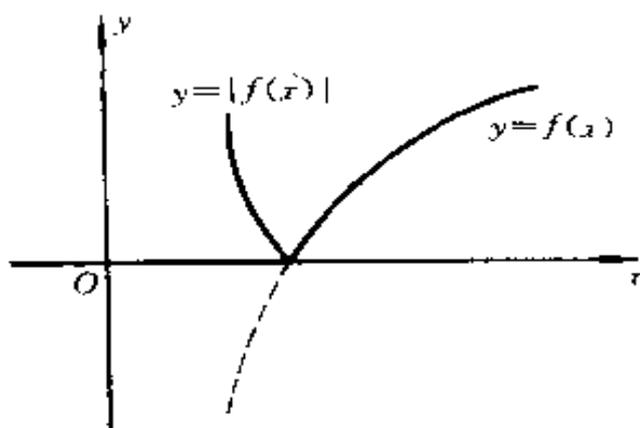


图 1·137

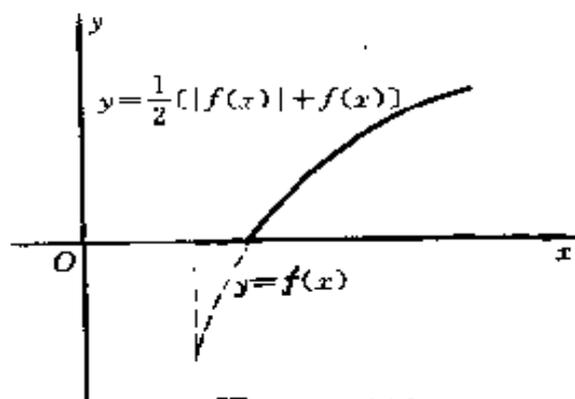


图 1·138

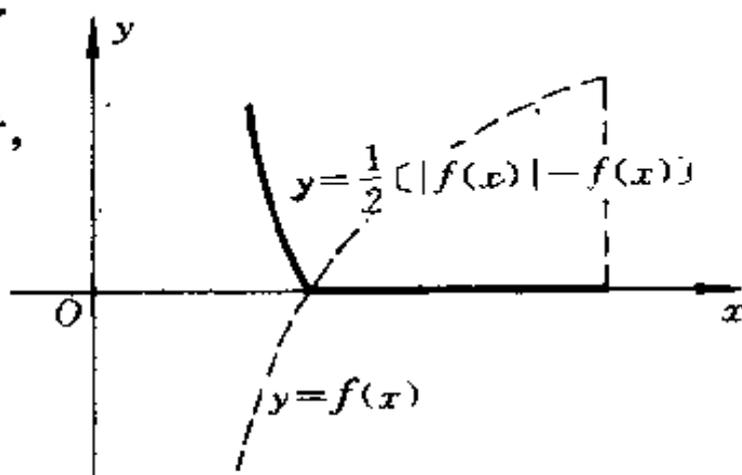


图 1·139

(d) $y = \text{sng} f(x)$; (e) $y = [f(x)]$.

解 (a) 以 $y = 1$ 为图形的分界线.

如图 1·140 所示. 1: $y = f(x)$; 2: $y = f^2(x)$.

(6) 当 $f(x) > 1$ 时, $\sqrt{f(x)} < f(x)$; 而当 $0 \leq f(x) < 1$ 时, $\sqrt{f(x)} \geq f(x)$.

如图 1·141 所示. 1: $y = f(x)$; 2: $y = \sqrt{f(x)}$.

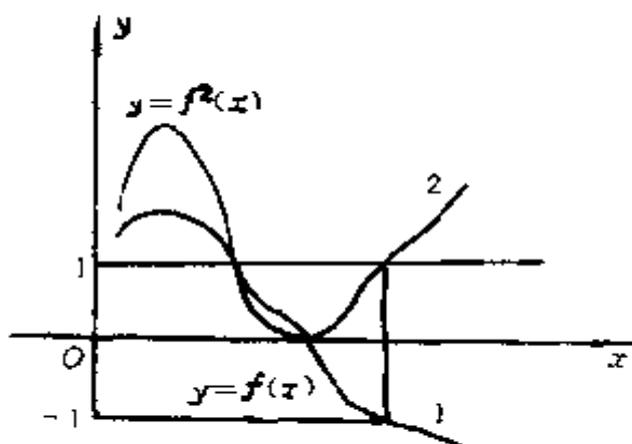


图 1·140

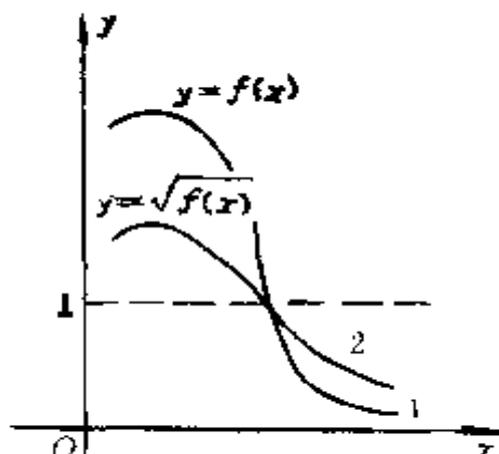


图 1·141

(b) 当 $f(x) \geq 1$ 时, $\ln f(x) < f(x)$; 而当 $0 < f(x) < 1$ 时, $\ln f(x) < f(x)$, 故 $y = \ln f(x)$ 的图形始终在 $y = f(x)$ 之下.

如图 1·142 所示.

(r) 若 $f(x)$ 的存在域为 $[a, b]$, 则仅当 $f(x)$ 之值在 a 与 b 之间, 才能使 $f[f(x)]$ 有意义. 其详细作图法见 330 题(b).

如图 1·143 所示. 1: $y = f(x)$; 2: $y = f[f(x)]$.

(d) 当 $f(x) > 0$ 时, $y = 1$; 当 $f(x) = 0$ 时, $y = 0$; 当 $f(x) < 0$ 时, $y = -1$.

如图 1·144 所示.

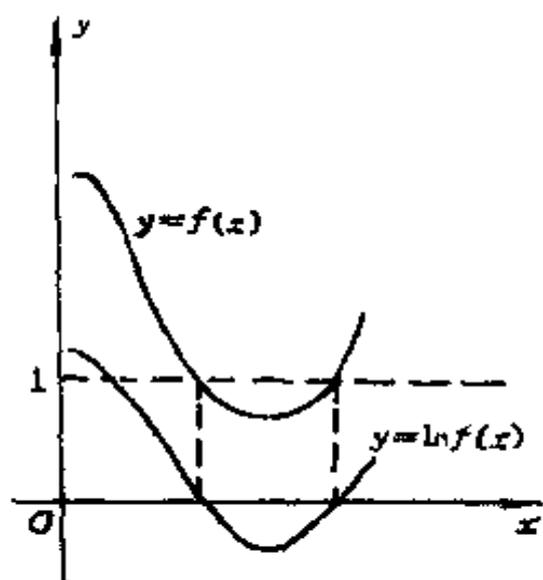


图 1·142

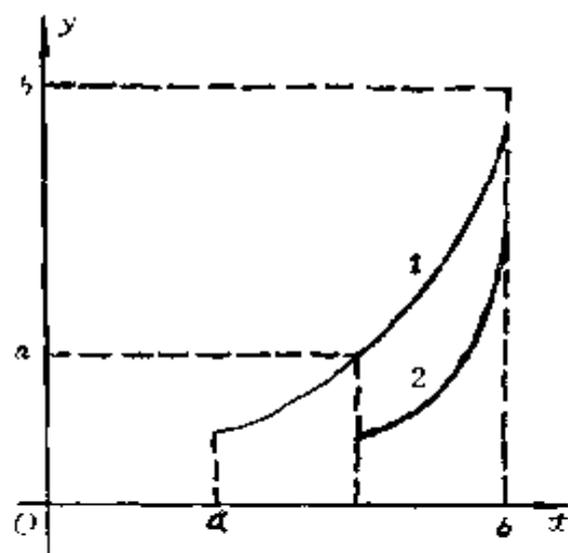


图 1·143

(e) 当 $n \leq f(x) < n+1$ 时, $y = n$ (n 为自然数).

如图 1·145 所示.

其中图 1·144 及 1.145 均为黑粗线所示的图形.

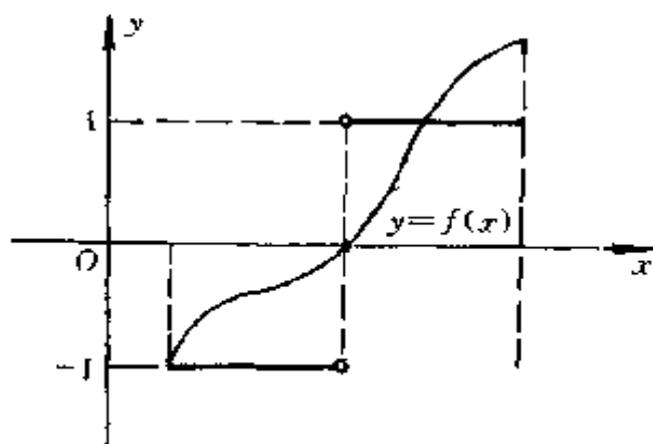


图 1·144

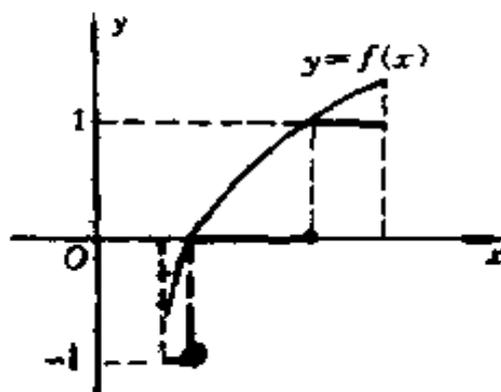


图 1·145

330. 已知函数 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的图形, 作下列函数的图形:

(a) $y = f(x) + g(x)$; (b) $y = f(x)g(x)$;

(B) $y = f[g(x)]$.

解 (a)利用图形相加法即得.

如图 1.146 所示.

(b)利用图形相乘法即得.

如图 1.147 所示.

(B)如图 1.148 所示.

设 P 点是 Ox 轴上横坐标为 x 的点. 通过 P 点引铅直线. 它和 $y=g(x)$ 的图形相交得 Q 点(当然假定值 PQ 在 $f(x)$ 的存在域内). $PQ=g(x)$. 过 Q 点引水平线, 它与 $y=x$ 交于 R 点, 过 R 作铅直线与 Ox 轴及 $y=f(x)$ 分别交于 T 点及 S 点, 则 $OT=TR=PQ=g(x)$, 因而 $TS=f[g(x)]$. 最后, 把 S 点向通过 P 点的铅直线投影得 M 点, 此即函数 $y=f[g(x)]$ 图形上的一点. 至于该图形上的其它点, 同法求得. 但要注意, 函数 $y=f[g(x)]$ 的存在域是满足不等式

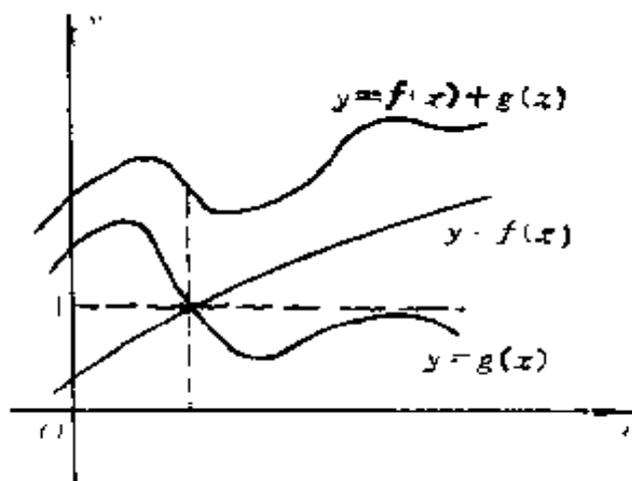


图 1.146

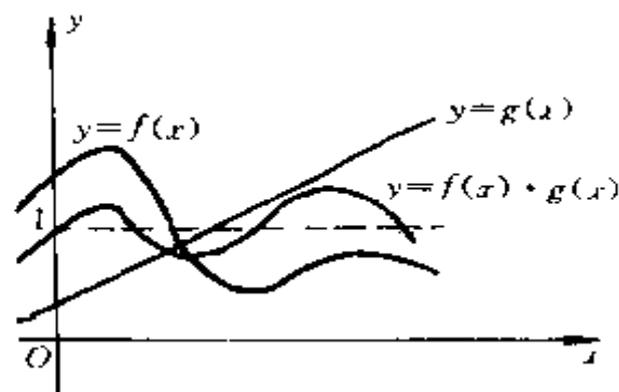


图 1.147

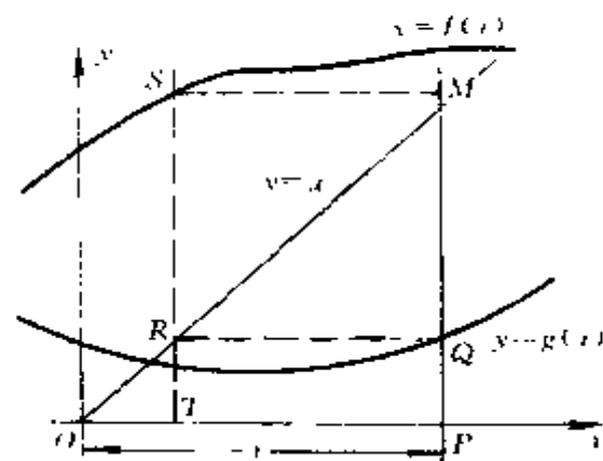


图 1.148

$$a \leq g(x) \leq b$$

的数 x 的集合, 式中 $[a, b]$ 是 $f(x)$ 的存在域.

利用图形的相加法, 作下列函数的图形:

331. $y = 1 + x + e^x$.

解 如图 1.149 所示.

332. $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$

解 图形关于 Oy 轴对称.

如图 1.150 所示.

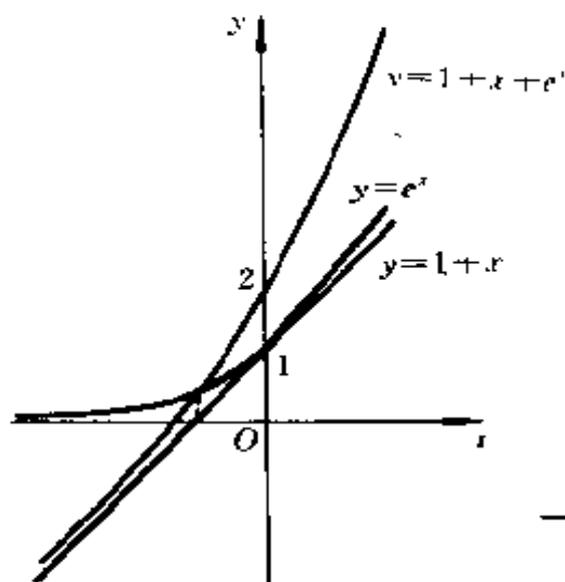


图 1.149

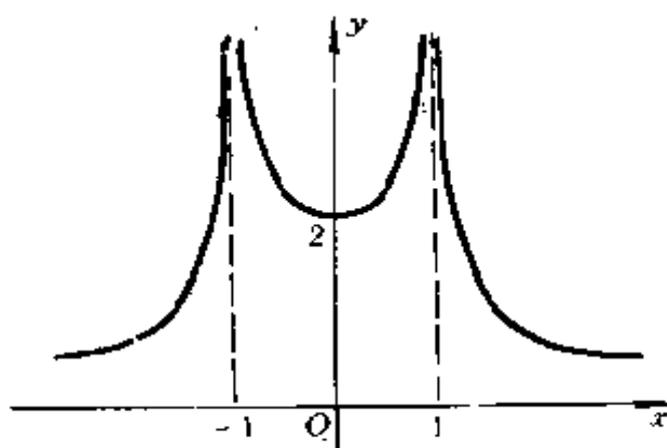


图 1.150

333. $y = x + \sin x$.

解 如图 1.151 所示.

$$P_1Q_1 = P_2Q_2 = \dots = 1.$$

334. $y = x + \operatorname{arctg} x$.

解 如图 1.152 所示, 图中仅画了主值的一支, 一般地, 在平行线 $y = x + (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 及 $y = x + (2k-1)\frac{\pi}{2}$ 之间 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), 有类似的一支.

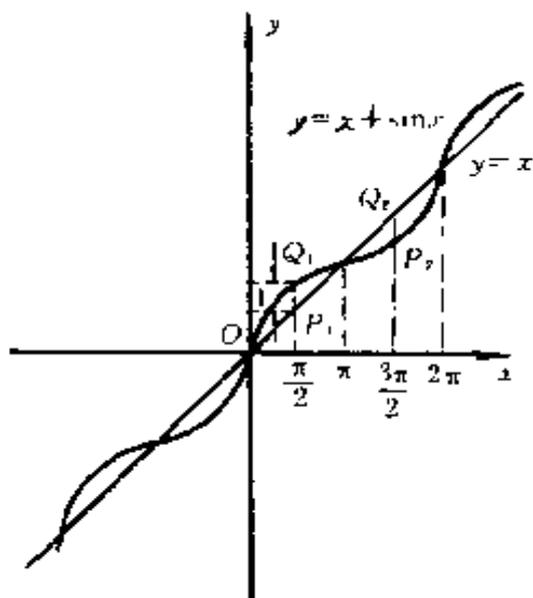


图 1.151

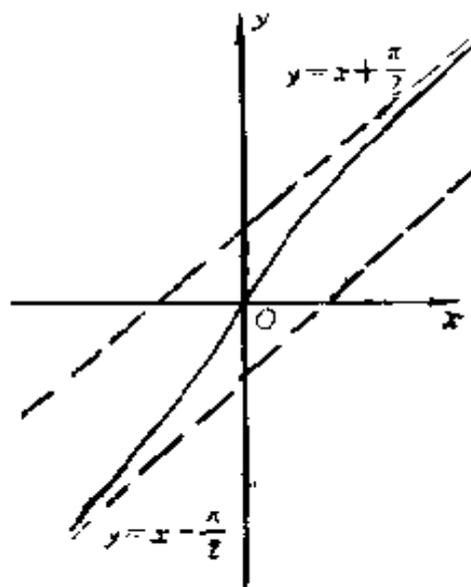


图 1.152

335. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x.$

解 图形关于 Oy 轴对称, 且关于直线 $x = k\pi$ 对称. 周期为 2π . 如图 1.153 所示.

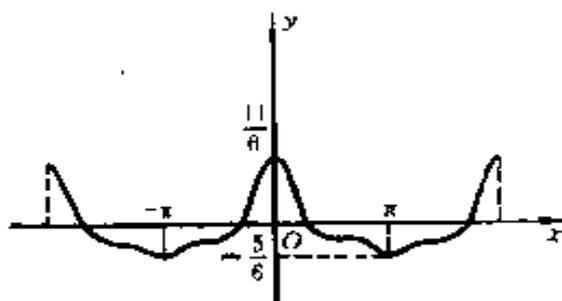


图 1.153

336. $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x.$

解 图形关于原点对称, 周期为 2π , 且有 $f(x + \pi) = -f(x)$, 故在 $[0, 2\pi]$ 内图形关于直线 $x = \pi$ 反对称*. 因此, 我们只需做出 $[0, \pi]$ 内的图形即可.

如图 1.154 所示.

*)即关于点 π 对称,也称之为以 π 为周期的反周期函数.

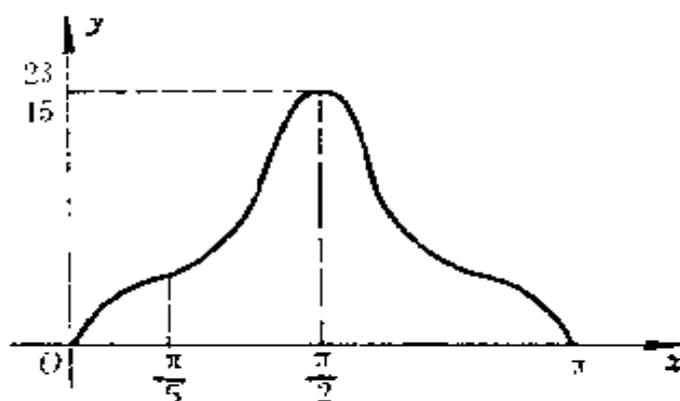


图 1.154

337. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 周期为 $\frac{\pi}{2}$.

如图 1.155 所示.

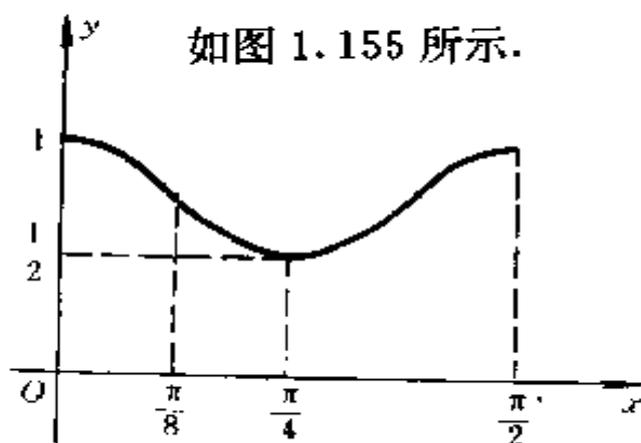


图 1.155

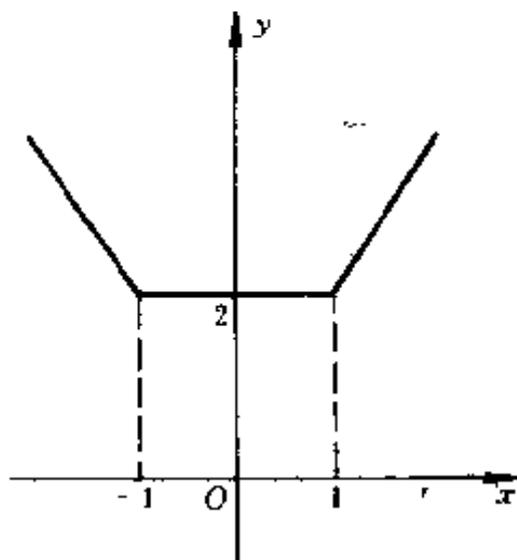


图 1.156

338. $y = |1-x| + |1+x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y=2$;

当 $x < -1$ 时, $y = -2x$;

当 $x > 1$ 时, $y = 2x$.

如图 1.156 所示.

339. $y = |1-x| - |1+x|$.

解 当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, $y = -2x$;

当 $x < -1$ 时, $y = 2$;

当 $x > 1$ 时, $y = -2$.

如图 1.157 所示.

340. 作双曲线函数的图形:

(a) $y = \operatorname{ch}x$, 式中 $\operatorname{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$;

(b) $y = \operatorname{sh}x$; 式中 $\operatorname{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$;

(c) $y = \operatorname{th}x$; 式中 $\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}$.

解 如图 1.158 所示.

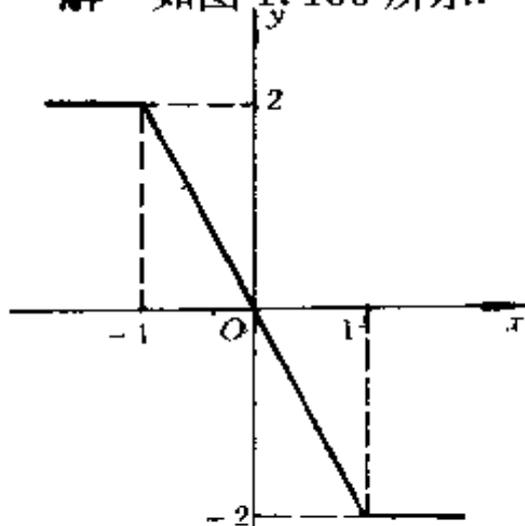


图 1.157

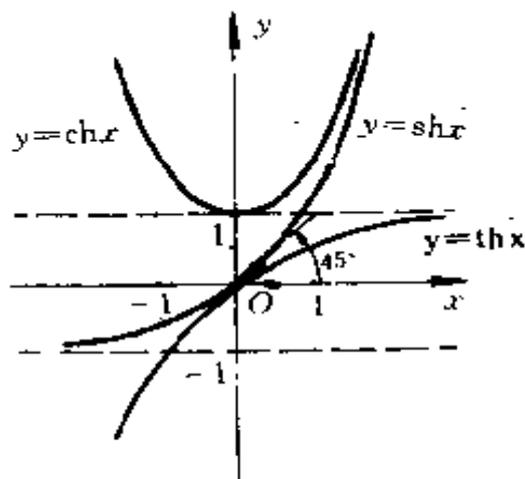


图 1.158

利用图形的相乘法, 作下列函数的图形:

341. $y = x \sin x$.

解 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = x$;

又当 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = -x$.

如图 1.159 所示.

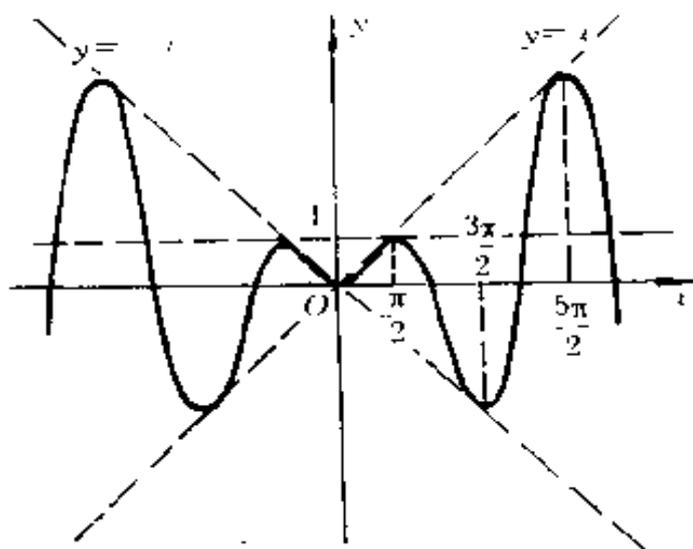


图 1.159

342. $y = x \cos x$.

解 图形关于原点对称.

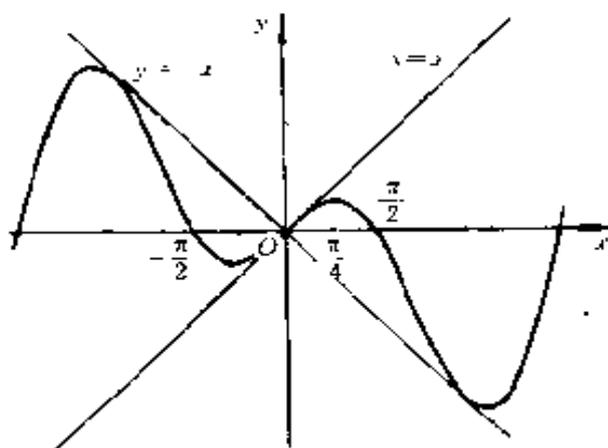


图 1.160

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $y=0$;

当 $x = 2k\pi$ 时, $y=x$; 当 $x = (2k+1)\pi$ 时, $y=-x$.

如图 1.160 所示.

343. $y = x^2 \sin^2 x$.

解 只要将图形 $y = x \sin x$ 作出后, 再按 329 题(a)的作法画出. 如图 1.161 所示.

其实, 我们也可由下列几点画出该函数的图形:

$$0 \leq y \leq x^2;$$

当 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y=0$;

当 $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 时, $y=x^2$.

图形关于 Oy 轴对称.

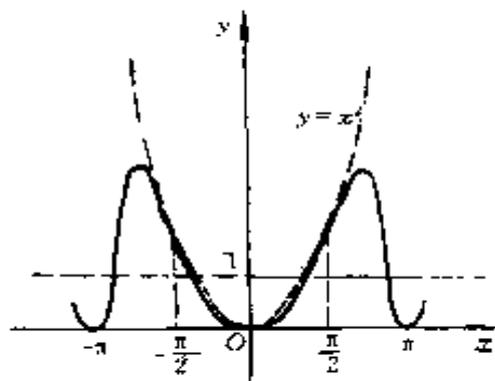


图 1.161

344. $y = \frac{\sin x}{1+x^2}$.

解 图形关于原点对称.

当 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y=0$;

当 $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = -\frac{1}{1+x^2}$;

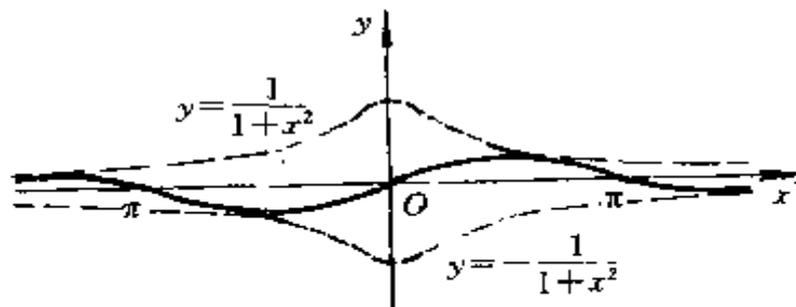


图 1.162

当 $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ 时, $y = \frac{1}{1+x^2}$,

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

如图 1.162 所示.

345. $y = e^{-x^2} \cos 2x$.

解 因 $-e^{-x^2} \leq y \leq e^{-x^2}$, 故图形在图形 $y = e^{-x^2}$ 及 $y = -e^{-x^2}$ 之间.

如图 1.163 所示.

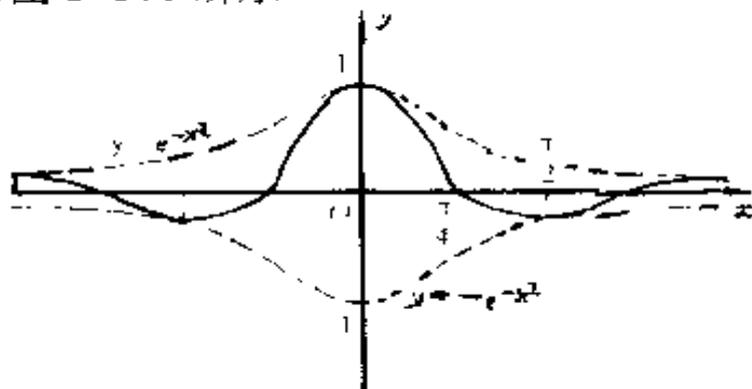


图 1.163

346. $y = x \operatorname{sgn}(\sin x)$.

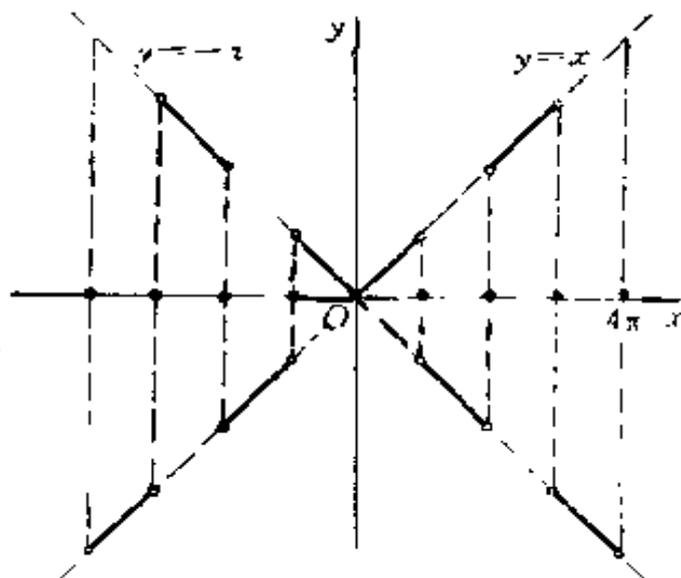


图 1.164

解 图形关于 Oy 轴对称.

当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;
 当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = x$;
 当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -x$.
 如图 1.164 所示.

347. $y = [x] \cdot |\sin \pi x|$.

解 当 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$.
 当 $n < x < n+1 (n \text{ 为自然数})$ 时, $y = n |\sin \pi x|$.
 如图 1.165 所示.

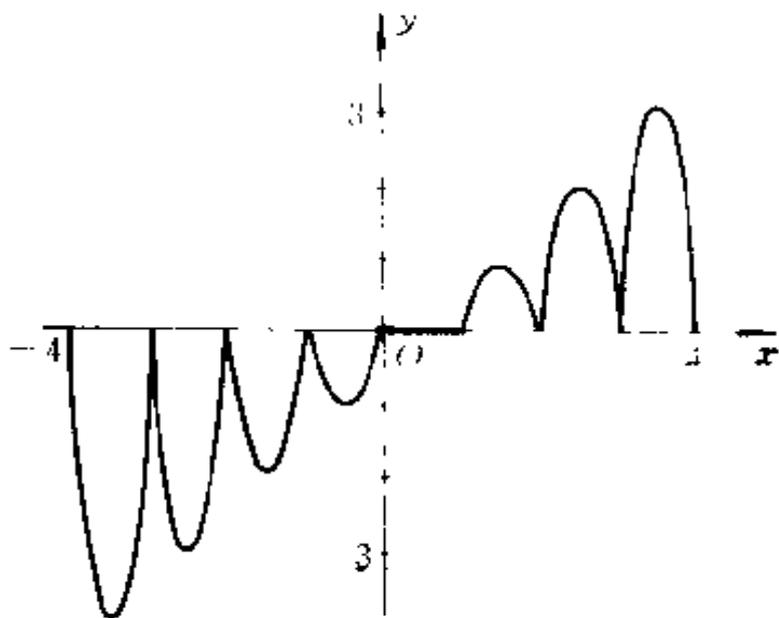


图 1.165

348. $y = \cos x \cdot \operatorname{sgn}(\sin x)$.

解 图形关于原点对称. 周期为 π .
 当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, $y = 0$;
 当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y = \cos x$;
 当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y = -\cos x$.
 如图 1.166 所示.

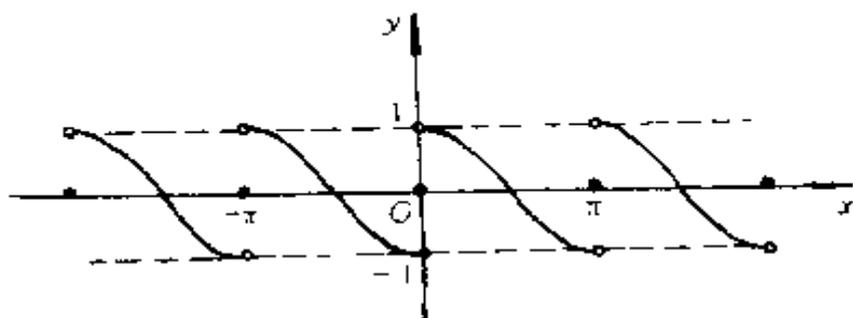


图 1.166

349. 设

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

作函数

$$y = f(x)f(a-x)$$

当 (a) $a = 0$, (b) $a = 1$,

(c) $a = 2$ 时的图形.

解 (a) $y = f(x)f(-x)$.

因为 $f(x)$ 为偶函数,

所以, $y = f^2(x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y = \begin{cases} (1+x)^2, & \text{若 } -1 \leq x < 0, \\ (1-x)^2, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1.167 所示.

(b) $y = f(x) \cdot f(1-x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易得

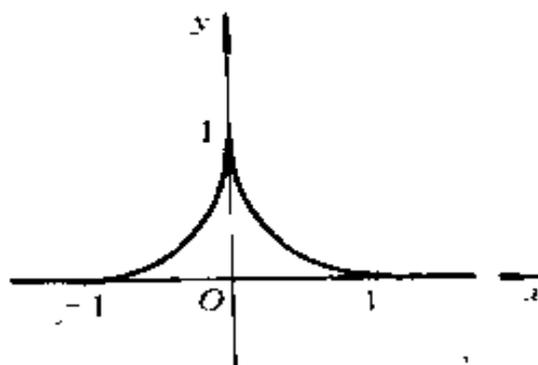


图 1.167

$$y = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \leq 0, \\ x - x^2, & \text{若 } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{若 } x \geq 1. \end{cases}$$

如图 1.168 所示.

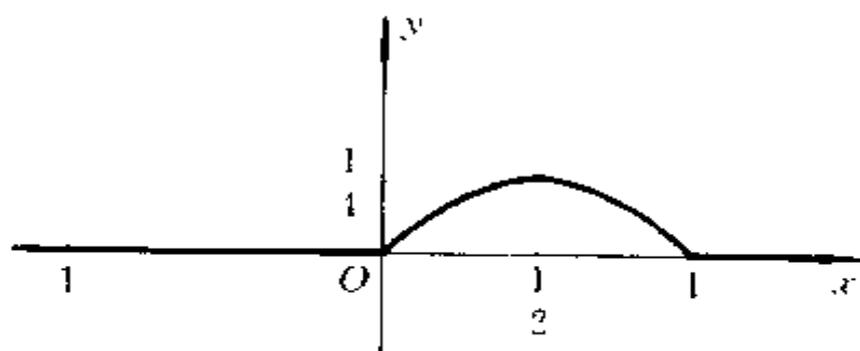


图 1.168

(B) $y = f(x)f(2-x)$.

由函数 $f(x)$ 的定义易得

$$y = 0.$$

如图 1.169 所示.



图 1.169

350. 作函数 $y = x + \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ 的图形.

解 当 $2k < x < 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时,

$$\sin \pi x > 0,$$

$$\operatorname{sgn}(\sin \pi x) = 1,$$

因而, $y = x + \sqrt{x}$.

而当 $2k + 1 < x < 2k + 2$ 时,

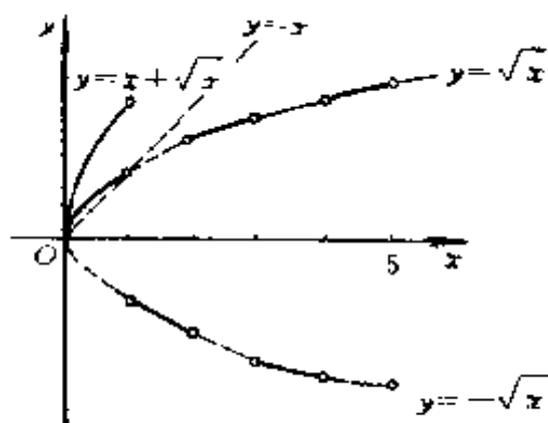


图 1.170

$$y = x - \sqrt{x}.$$

图 1.170 中系函数

$$y = \sqrt{x} \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$$

的图形(黑粗线所示).

其中在 $y=x$ 上的一支系 $y = \sqrt{x} + x$ 的一段.

至于函数

$y = x + \sqrt{x} \cdot \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$ 的图形如图 1.171 所示.

作函数

$$y = \frac{1}{f(x)}$$

的图形, 设:

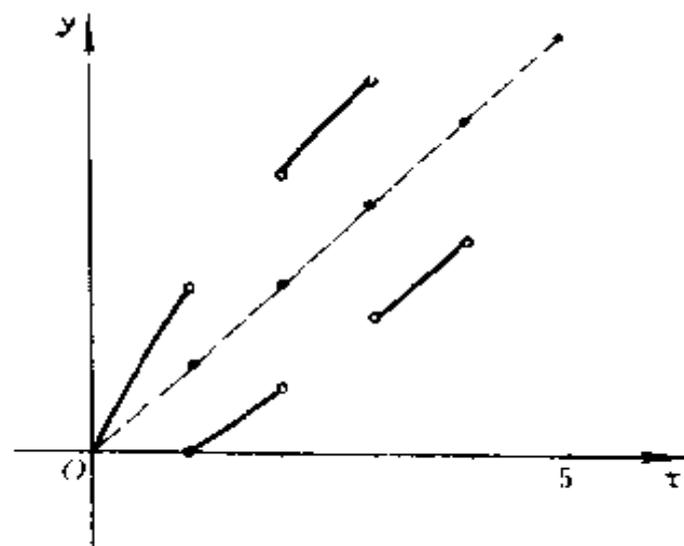


图 1.171

351. $f(x) = x^2(1-x^2).$

解 $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2}.$

利用图形的相加法, 将函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 及 $y = \frac{1}{1-x^2}$ 的图

形相加即得. 如图 1.172 所示.

352. $f(x) = x(1-x)^2.$

解
$$y = \frac{1}{x(1-x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}.$$

当 $x > 0$ 时, $y > 0$;

当 $x < 0$ 时, $y < 0$.

利用图形的相加法即得, 如图 1.173 所示.

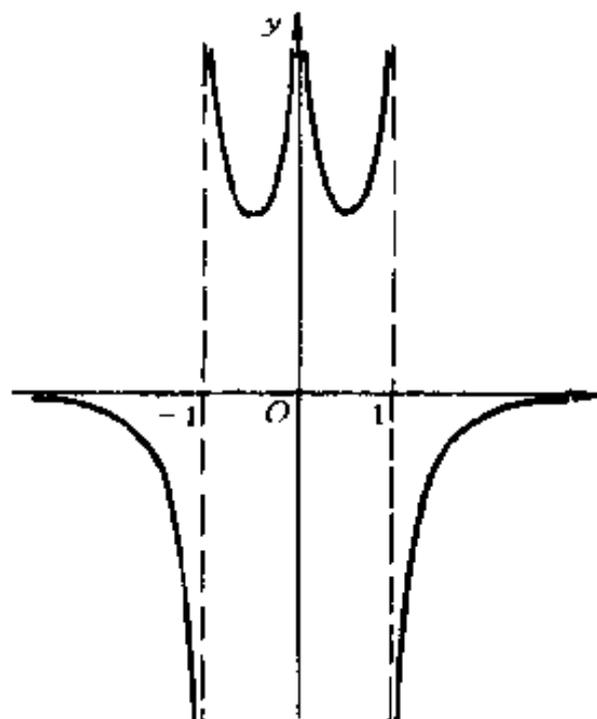


图 1.172

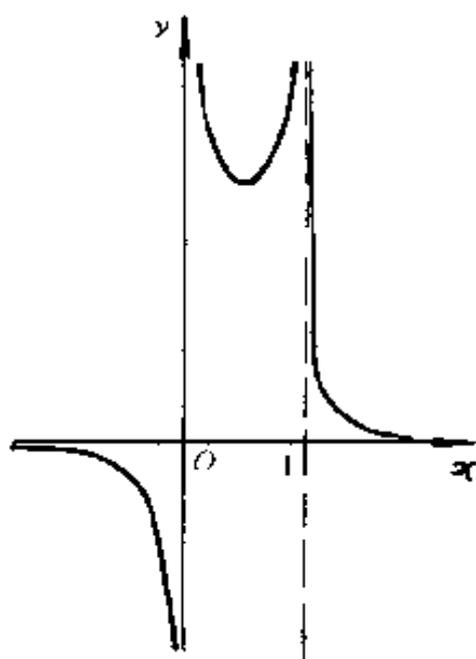


图 1.173

353. $f(x) = \sin^2 x.$

解 $y = \frac{1}{\sin^2 x}$ 是一
周期为 π 的周期函
数.

图形关于 Oy 轴
对称. 如图 1.174 所
示.

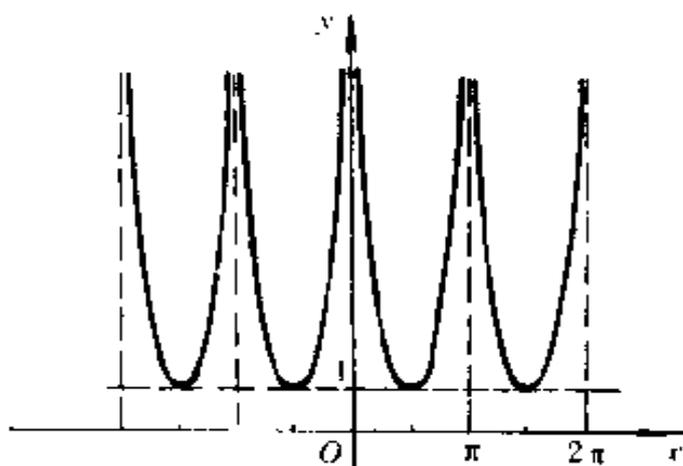


图 1.174

354. $f(x) = \ln x.$

解 $y = \frac{1}{\ln x}$.

当 $0 < x < 1$ 时, y 由 0 下降到 $-\infty$;

当 $1 < x < +\infty$ 时, y 由 $+\infty$ 下降到 0. 如图 1.175 所

示.

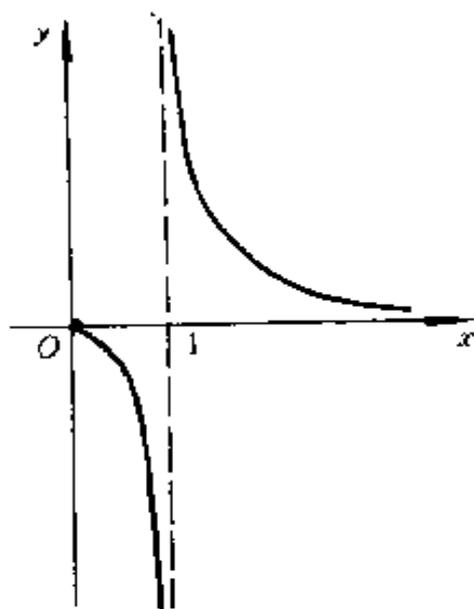


图 1.175

355. $f(x) = e^x \sin x$.

解 $y = e^{-x} \csc x$.

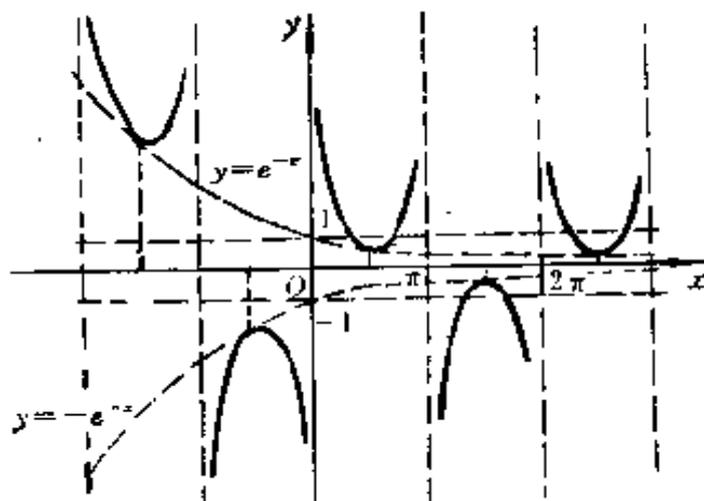


图 1.176

因为 $|\csc x| \geq 1$, 所以

$$|y| \geq e^{-x}.$$

利用图形的相乘法即得. 如图 1.176 所示.

356. 设:

$$f(u) = \begin{cases} -1, & \text{若 } -\infty < u < -1; \\ u, & \text{若 } -1 \leq u \leq 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < u < +\infty. \end{cases}$$

作复合函数

$$y = f(u)$$

的图形, 其中 $u = 2\sin x$.

解 如图 1.177 所示.

当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ 时,

$y = 2\sin x$; 当 $\frac{\pi}{6} < |x - k\pi|$

$< \frac{5\pi}{6}$, $y = (-1)^k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

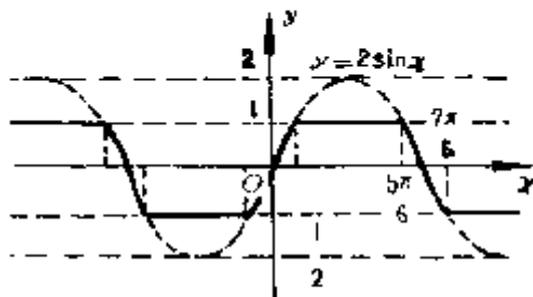


图 1.177

357. 设

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}(x + |x|) \text{ 和}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ x^2, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

作下列函数的图形:

$$(a) y = \varphi[\varphi(x)]; \quad (b) y = \varphi[\psi(x)];$$

$$(v) y = \psi[\varphi(x)]; \quad (r) y = \psi[\psi(x)].$$

$$\text{解 } (a) \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

$\varphi[\varphi(x)] = \varphi(x)$. 如图 1.178 所示.

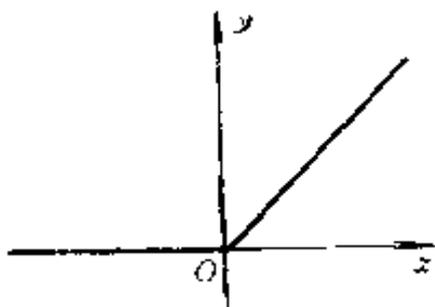


图 1.178

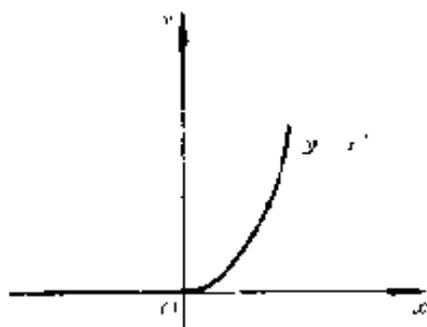


图 1.179

$$(6) \varphi[\psi(x)] = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图 1.179 所示.

$$(B) \psi[\varphi(x)] = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \geq 0; \\ 0, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图 1.179 所示.

$$(r) \psi[\psi(x)] = \begin{cases} x^4, & \text{若 } x \geq 0; \\ x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

如图 1.180 所示.

358. 设

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 0, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ 2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

作函数:

$$(a) y = \varphi[\varphi(x)];$$

$$(6) y = \varphi[\psi(x)];$$

$$(B) y = \psi[\varphi(x)];$$

$$(r) y = \psi[\psi(x)] \text{ 的图形.}$$

解 (a) $\varphi[\varphi(x)] = 1.$

如图 1.181 所示.

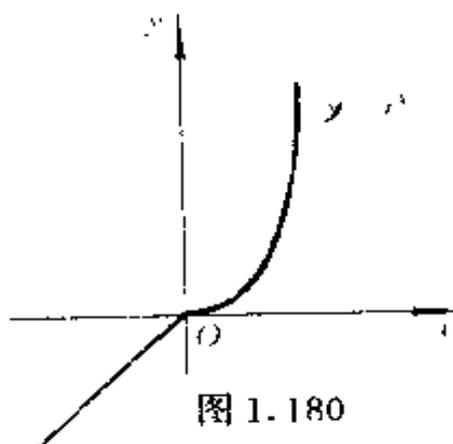


图 1.180

(6) $\varphi[\psi(x)] = \varphi[\psi(-x)]$, 故图形关于 Oy 轴对称.

当 $0 \leq x < 1$ 时,
 $\psi(x) = 2 - x^2$,

由于

$$1 < 2 - x^2 \leq 2,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 0$.

当 $1 \leq x \leq \sqrt{3}$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$, 由于

$$-1 \leq 2 - x^2 \leq 1,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 1$.

当 $\sqrt{3} < x \leq 2$ 时, $\psi(x) = 2 - x^2$, 由于

$$-2 \leq 2 - x^2 < -1,$$

所以, $\varphi[\psi(x)] = 0$.

当 $x > 2$ 时, $\psi(x) = 2$, 所以, $\varphi[\psi(x)] = 0$. 如图 1.182 所示.

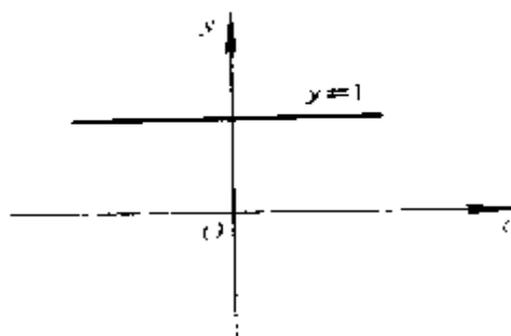


图 1.181

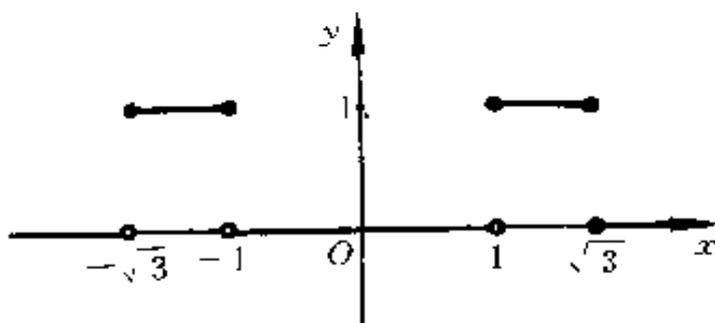


图 1.182

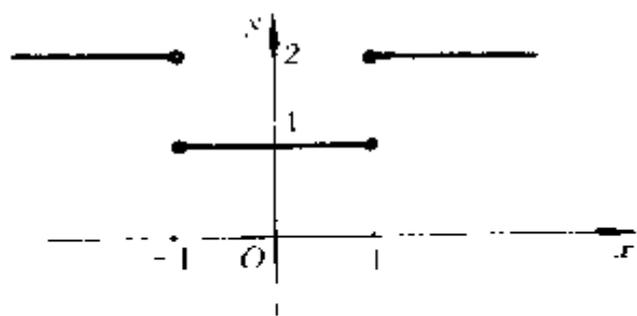


图 1.183

$$(B) \varphi[\psi(x)] = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ 2, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1.183 所示.

$$(r) \psi[\psi(x)] = \begin{cases} 2 - (2 - x^2)^2, & \text{若 } |x| \leq 2; \\ -2, & \text{若 } |x| > 2. \end{cases}$$

如图 1.184 所示.

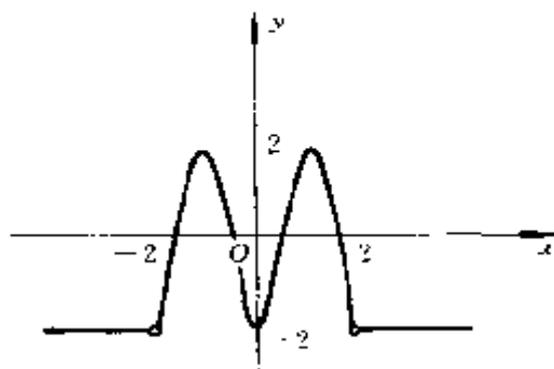


图 1.184

359. 由函数 $f(x)$ 定义于正数域 $x > 0$ 内, 把 $f(x)$ 延拓到负数域 $x < 0$ 内, 使所得的函数为: (1) 偶函数; (2) 奇函数. 设

(a) $f(x) = 1 - x$; (б) $f(x) = 2x - x^2$;

(B) $f(x) = \sqrt{x}$; (r) $f(x) = \sin x$;

(д) $f(x) = e^x$; (e) $f(x) = \ln x$.

作出对应的函数的图形.

解 (a) (1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = 1 + x$, 则 $f(x)$ 在整个数轴上为偶函数.

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -(1 + x)$, 则 $f(x)$ 在整个数轴上为奇函数.

如图 1.185 所示.

(б) (1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -2x - x^2$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = 2x + x^2$ 即行.

如图 1.186 所示.

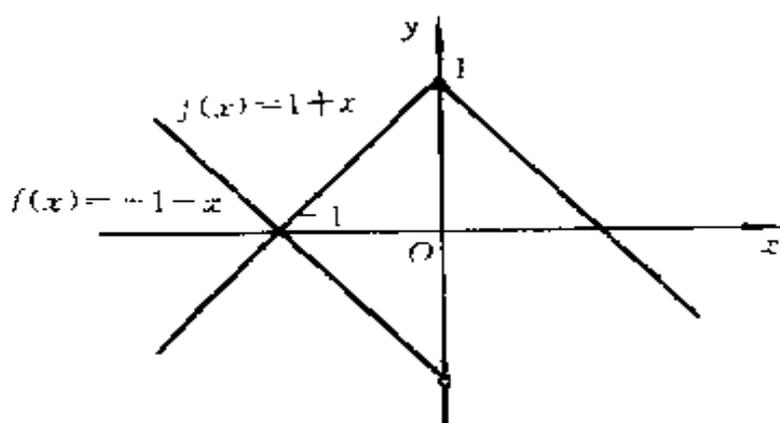


图 1.185

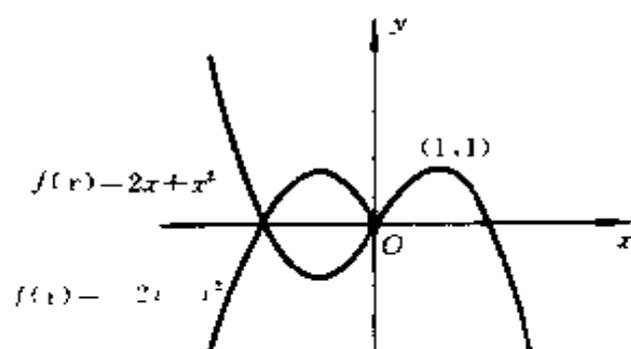


图 1.186

(B)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = \sqrt{-x}$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -\sqrt{-x}$ 即行.

如图 1.187 所示.

(r)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -\sin x = |\sin x|$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = \sin x$ 即行.

如图 1.188 所示.

(n)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = e^{-x}$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -e^{-x}$ 即行.

(e)(1) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = \ln(-x)$ 即行;

(2) 当 $x < 0$ 时, 定义 $f(x) = -\ln(-x)$ 即行.

如图 1.190 所示.

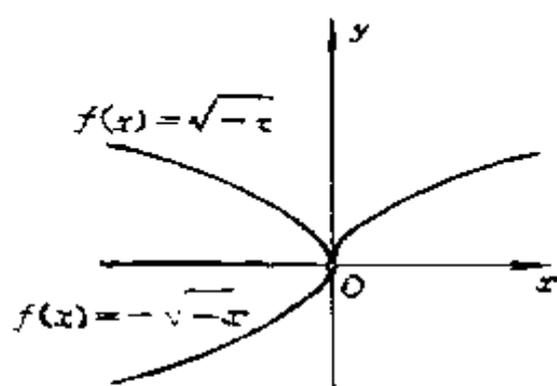


图 1.187

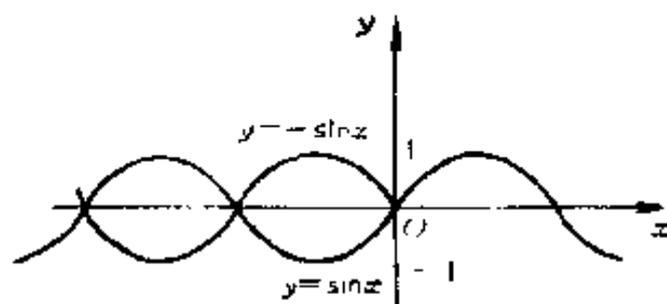


图 1.188

如图 1.189 所示.

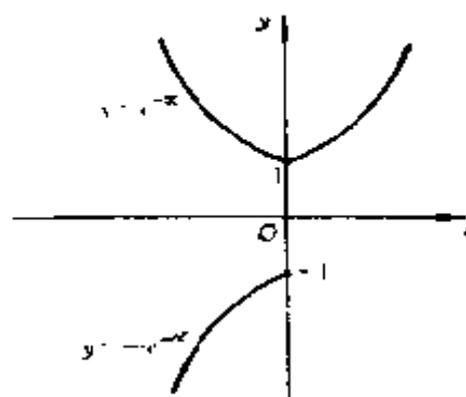


图 1.189

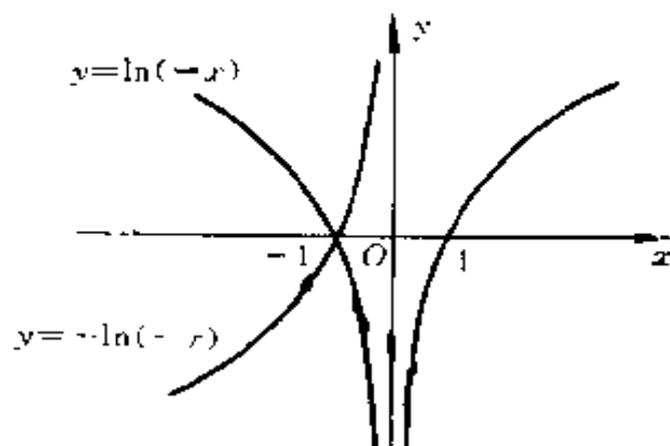


图 1.190

360. 确定下列函数的图形对于什么垂直轴对称:

(a) $y = ax^2 + bx + c$; (6) $y = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}$;

(B) $y = \sqrt{a+x} + \sqrt{b-x}$ ($0 < a < b$);

(r) $y = a + b \cos x$.

解 (a) $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$. 它关于直线 $x = -\frac{b}{2a}$

对称. (6) 显然图形对于直线 $x = \frac{1}{2}$ 对称.

(B) 显然图形对于直线 $x = \frac{b-a}{2}$ 对称.

(Г) 对于直线 $x = k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 对称.

361. 确定下列函数的图形的对称中心:

(a) $y = ax + b$; (б) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$;

(B) $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$;

(Г) $y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3}$;

(Д) $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$.

解 (a) 显然对称中心为 $(x_0, ax_0 + b)$, x_0 任意.

(б) 设对称中心为 (x_0, y_0) , 则对充分大的 x , 有 y 使

$$y + y_0 = \frac{c(x+x_0)+b}{c(x+x_0)+d}, \quad -y + y_0 = \frac{a(-x+x_0)+b}{c(-x+x_0)+d},$$
 由此

易得 $x_0 = -\frac{d}{c}, y_0 = \frac{a}{c}$.

(B) 用类似于(б)的方法, 可得对称中心为 (x_0, y) , 其中 $x_0 = -\frac{b}{3a}, y_0 = ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$.

(Г) 类似于(б), 可得对称中心为 $(2, 0)$.

(Д) 类似于(б), 可得对称中心为 $(2, 1)$.

362. 作周期函数的图形:

(a) $y = |\sin x|$; (б) $y = \operatorname{sgn} \cos x$;

(B) $y = f(x)$, 其中 $f(x) = A \frac{x}{l} \left(2 - \frac{x}{l} \right)$, 假设 $0 \leq x \leq 2l$ 和 $f(x+2l) \equiv f(x)$;

(Г) $y = [x] - 2 \left[\frac{x}{2} \right]$;

(Д) $y = (x)$, 此处 (x) 为从数 x 至与它最近的整数间的距离.

解 (a) 如图 1.191 所示, 周期 π .

(6) 如图 1.192 所示, 周期 2π .

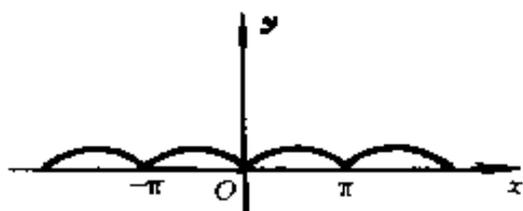


图 1.191

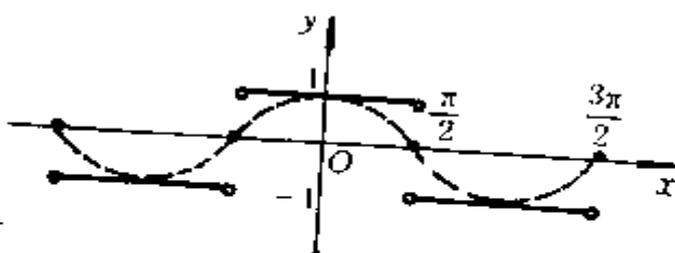


图 1.192

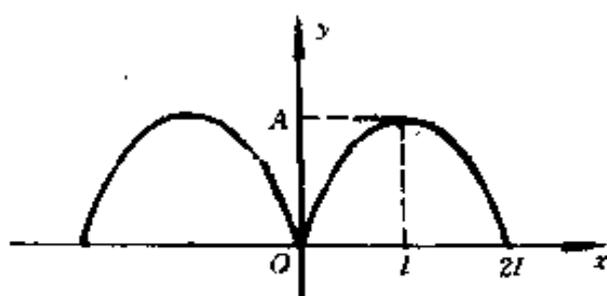


图 1.193

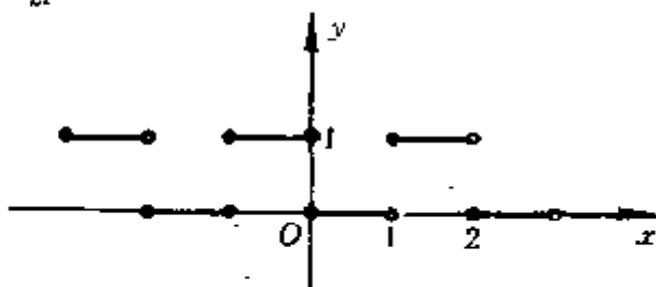


图 1.194

(b) 当 $0 \leq x \leq 2l$ 时,

由 $f(x)$ 的定义易得

$$f(x+2kl) = f(x) \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

故知所给函数为以 $2l$ 为周期的周期函数, 它在 $[0, 2l]$ 内的图形为一抛物线, 顶点为 (l, A) . 如图 1.193 所示.

(c) 周期为 2 , 如图 1.194 所示.

*) 原本该题为 $y = |x| - 2\left[\frac{x}{2}\right]$, 当 $x \geq 0$ 时, 它是以 2 为周期函数.

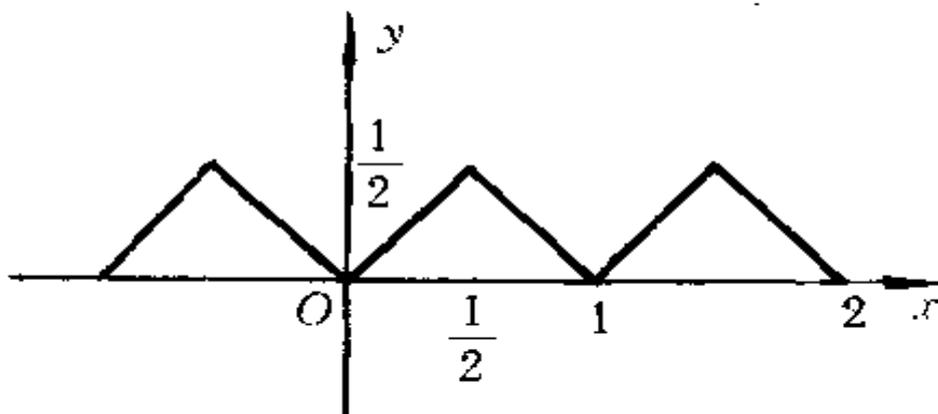


图 1.195

(д) 周期为 1, 如图 1.195 所示.

363. 证明: 若函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于二垂直轴 $x = a$ 和 $x = b$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 为周期函数.

证 设 x 为任一实数, 则按假设有

$$f(a+x) = f(a-x) \text{ 及 } f(b+x) = f(b-x).$$

在 $f(a+x) = f(a-x)$ 中将 x 换成 $x + (b-a)$, 则得

$$f(x+b) = f(a-x-b+a) = f(2a-b-x);$$

而 $f(x+b) = f(b-x)$, 所以

$$f(b-x) = f(2a-b-x).$$

将 $b-x$ 换成 x , 则得 $f(x) = f(2a-2b+x)$.

再将 x 换成 $2(b-a)+x$, 即得

$$f(x+2(b-a)) = f(x),$$

即 $f(x)$ 为一以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数. 如图 1.196 所示.

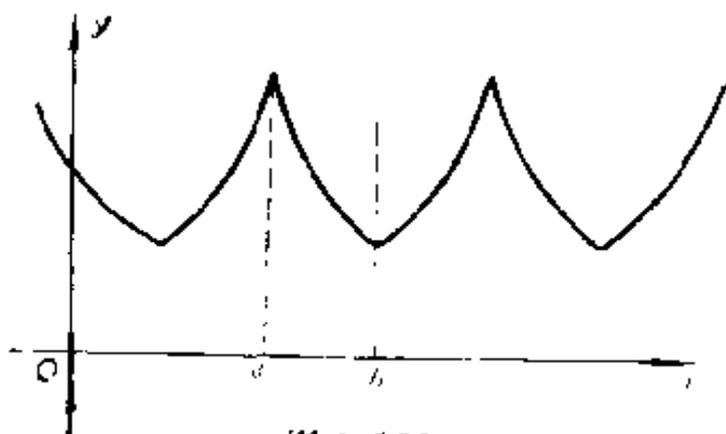


图 1.196

364. 证明: 若函数 $y=f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形对于两点 $A(a, y_0)$ 和 $B(b, y_1)$ ($b > a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 是线性函数与周期函数的和. 特别是, 若 $y_0 = y_1$, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 设 x 是任一实数, 按假设有:

$$f(a+x) - y_0 = y_0 - f(a-x), \quad (1)$$

$$f(b+x) - y_1 = y_1 - f(b-x). \quad (2)$$

在(1)中, 将 x 换成 $x + (b-a)$ 则得

$$f(b+x) - y_0 = y_0 - f(2a-b-x) \quad (3)$$

将(3)代入(2)得

$$2y_1 - f(b-x) = 2y_0 - f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-b-x) \quad (4)$$

在(4)中, 将 $b-x$ 换成 x , 则得

$$f(x) = 2(y_1 - y_0) + f(2a-2b+x) \quad (5)$$

再在(5)中将 x 换成 $2(b-a)+x$, 则得

$$f(x) = 2(y_0 - y_1) + f[2(b-a)+x].$$

令

$$f(x) = -\frac{y_0 - y_1}{b-a}x + \varphi(x) \quad (6)$$

下面证明 $\varphi(x)$ 一定是周期函数. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} f[x+2(b-a)] &= -\frac{y_0-y_1}{b-a}[x+2(b-a)] \\ &\quad +\varphi(x+2(b-a)), \\ f(x)-f[x+2(b-a)] &= 2(y_0-y_1)+\varphi(x) \\ &\quad -\varphi[x+2(b-a)]. \end{aligned}$$

因此由(5)式可得

$$\varphi(x)=\varphi[x+2(b-a)]. \quad (7)$$

由(6)式和(7)式可知, $f(x)$ 是一个线性函数与一个周期函数的和.

若 $y_0=y_1$, 则由(6)式和(7)式可知, $f(x)$ 是一个周期函数.

365. 证明: 若函数 $y=f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 的图形关于点 $A(a, y_0)$ 及直线 $x=b$ ($b \neq a$) 对称, 则函数 $f(x)$ 是周期函数.

证 设 x 为任一实数, 按假设则有

$$\begin{aligned} f(a+x)-y_0 &= y_0-f(a-x), \\ f(b+x) &= f(b-x). \end{aligned} \quad (1)$$

在(1)中, 将 x 换成 $x+(b-a)$, 则得

$$f(b+x)=2y_0-f(2a-b-x),$$

即

$$f(b-x)=2y_0-f(2a-b-x). \quad (2)$$

在(2)中, 将 $b-x$ 换成 x , 则得

$$f(x)=2y_0-f(2a-2b+x). \quad (3)$$

在(3)中, 将 x 换成 $2b-2a+x$, 则得

$$f(2b-2a+x)=2y_0-f(x). \quad (4)$$

由(3)(4)得 $f(2a-2b+x)=f(2b-2a+x)$, 再将 x 换成 $2b-2a+x$, 即得

$$f(x)=f(4(b-a)+x).$$

此即证明 $f(x)$ 为一以 $4(b-a)$ 为周期的周期函数.

366. 设 $f(x+1)=2f(x)$ 及当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $f(x)=x(1-x)$, 作函数

$$y=f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形.

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 图形为一抛物线, 顶点为 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.
当 $1 \leq x \leq 2$ 时, 只要将纵标放大 2 倍, 余类推.
如图 1.197 所示.

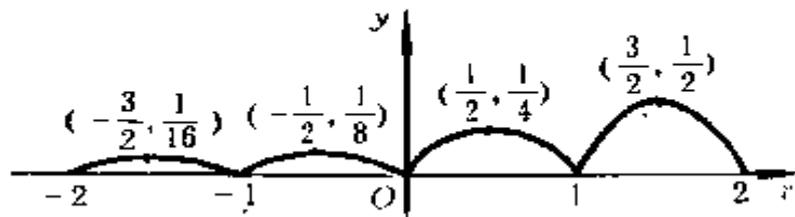


图 1.197

当 $x = \frac{2n+1}{2}$ 时, $y = \frac{2^n}{4} = 2^{n-2}$, 因而当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$; 当 $n \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

367. 设 $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$; 且当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x)=0$. 作函数

$$y=f(x) \quad (-\infty < x < +\infty)$$

的图形.

解 由题设知

当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $f(x)=0$;

当 $\pi < x \leq 2\pi$ 时, 设 $0 < x_1 \leq \pi$, 则有

$$f(x) = f(x_1 + \pi) = f(x_1) + \sin x_1 = \sin x_1;$$

当 $2\pi < x \leq 3\pi$ 时, 设 $\pi < x_2 \leq 2\pi$, 则有

$$f(x) = f(x_2 + \pi) = f(x_2) + \sin x_2 = 0;$$

余类推. 周期为 2π . 如图 1.198 所示.

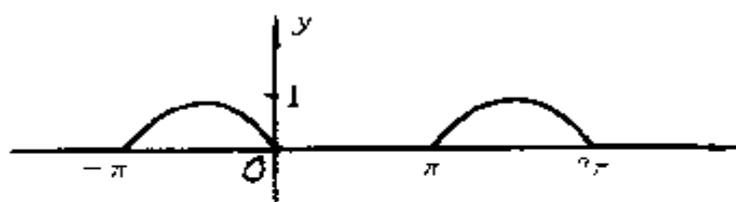


图 1.198

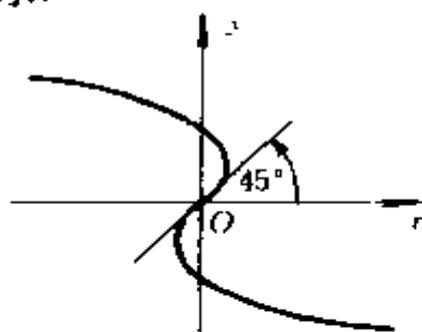


图 1.199

368. 作函数 $y = y(x)$ 的图形, 设:

(a) $x = y - y^3$; (b) $x = \frac{1-y}{1+y^2}$;

(B) $x = y - \ln y$; (r) $x^2 = \sin y$.

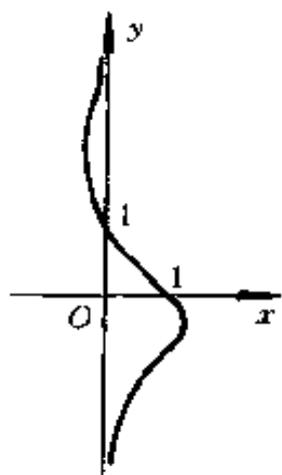


图 1.200

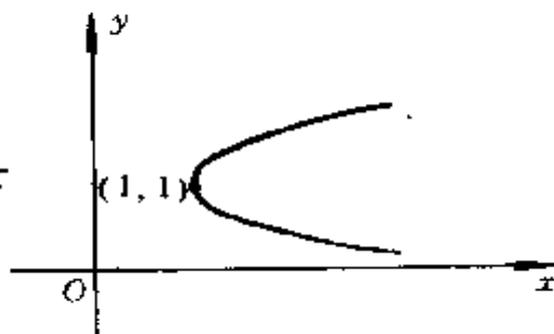


图 1.201

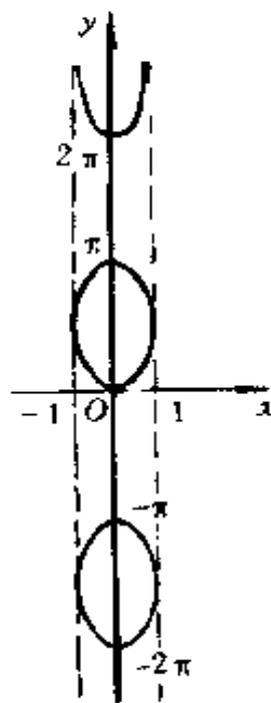


图 1.202

解 (a) 如图 1.199 所示.

(b) 如图 1.200 所示.

(B)如图 1.201 所示.

(r)如图 1.202 所示.

369. 作出下列用参数表示的各函数的图形, 设:

(a) $x=1-t, y=1-t^2$;

(б) $x=t+\frac{1}{t}, y=t+\frac{1}{t^2}$;

(B) $x=10\cos t, y=\sin t$

(椭圆);

(r) $x=\operatorname{ch} t, y=\operatorname{sh} t$

(双曲线);

(д) $x=5\cos^2 t, y=3\sin^2 t$;

(e) $x=2(t-\sin t), y=2(1-\cos t)$ (摆线);

(ж) $x=\sqrt[t+1]{t}, y=\sqrt{t+1} (t>0)$.

解 (a) $y-1=-(x-1)^2$. 如图 1.203 所示.

(б)如图 1.204 所示.

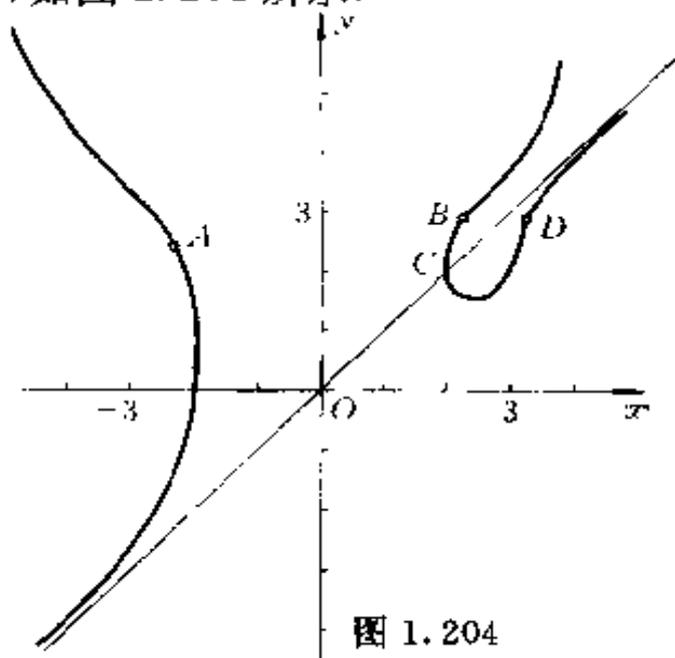


图 1.204

(B) $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$. 如图 1.205 所示.

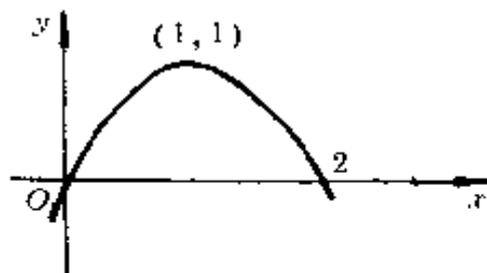


图 1.203

(г) $x^2 - y^2 = 1$. 如图 1.206 所示.

(д) $\frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$, 如图 1.207 所示.

(е) 如图 1.208 所示.

(ж) 如图 1.209 所示.

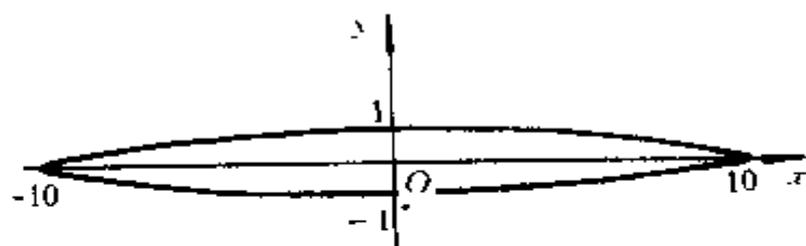


图 1.205

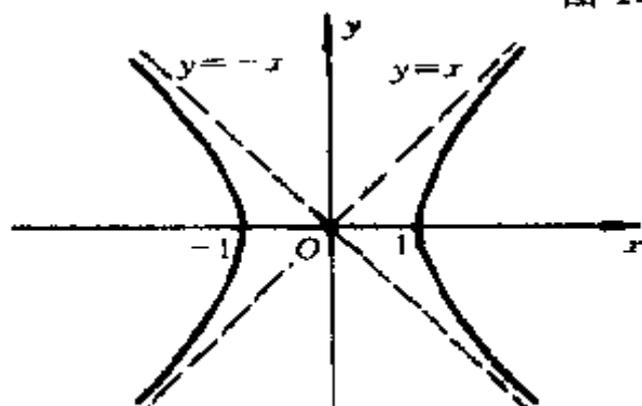


图 1.206

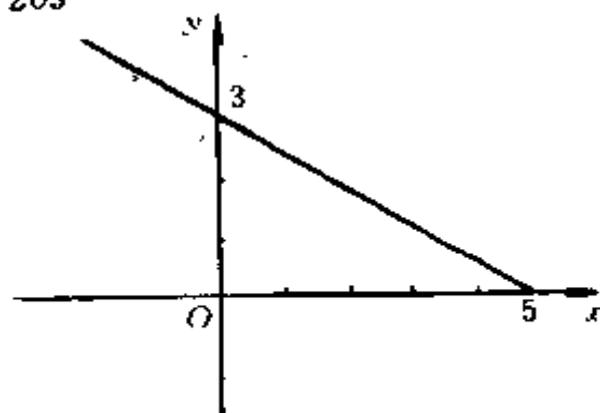


图 1.207

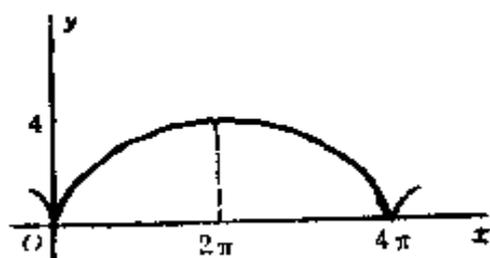


图 1.208

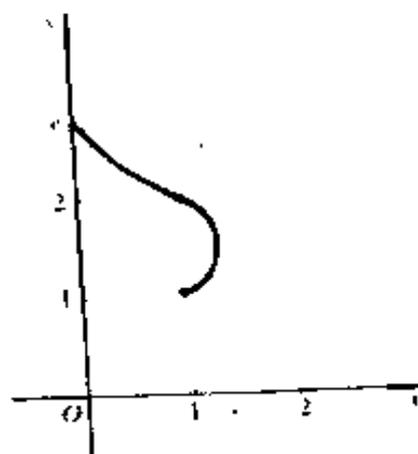


图 1.209

370. 作下列隐函数的图形:

(a) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (椭圆);

(б) $x^3 + y^3 - xy = 0$ (笛卡尔叶形线);

(в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (抛物线);

(г) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$ (内摆线);

(д) $\sin x = \sin y$;

(е) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

(ж) $x^y = y^x (x > 0, y > 0)$;

(з) $x - |x| = y - |y|$.

解 (a) 将坐标轴按正向绕原点旋转 45° , 得新坐标系 $Ox'y'$, 则由旋转公式得

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}},$$

$$y = \frac{x' + y'}{2}.$$

代入原式得

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{3} = 1.$$

如图 1.210 所示.

(б) 渐近线为 $x + y + 1 = 0$.

如图 1.211 所示.

(в) 如图 1.212 所示.

(г) 如图 1.213 所示.

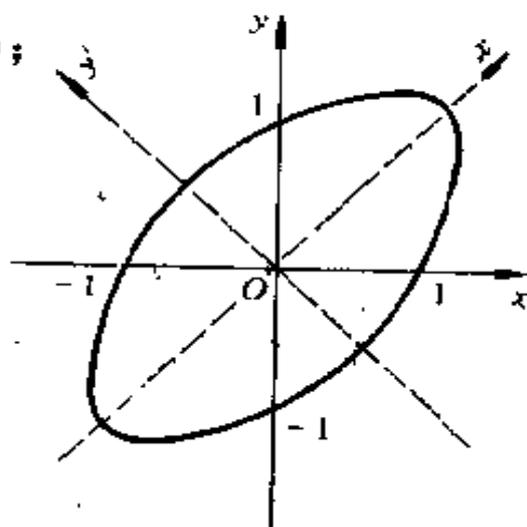


图 1.210

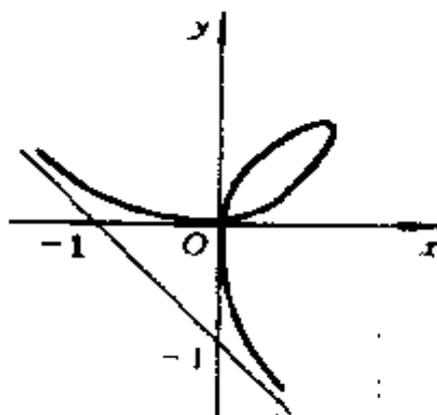


图 1.211

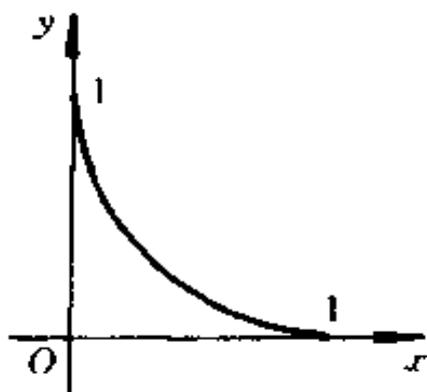


图 1.212

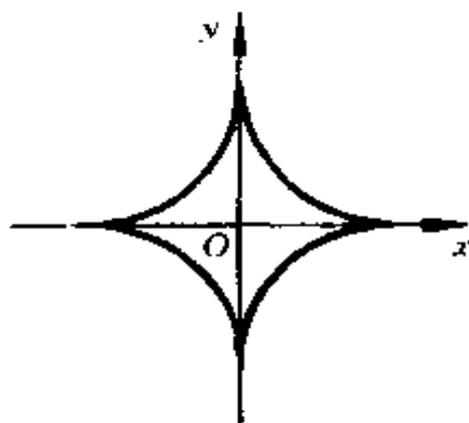


图 1.213

(д) $y = x + 2k\pi$ 或 $y = (2k + 1)\pi - x$
 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 如图 1.214 所示.

(e) $y = x^2 + 2k$ 或 $y = 2k - x^2$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

如图 1.215 所示.

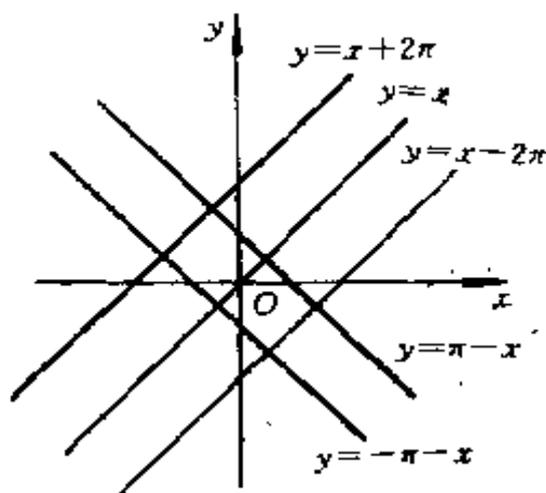


图 1.214

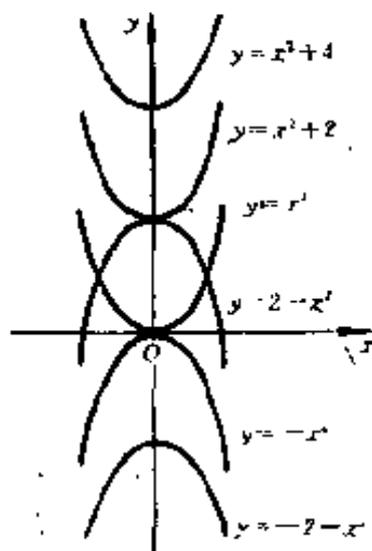


图 1.215

(ж) 如图 1.216 所示. 参看 1544 题的作图法.

(e) 如图 1.217 所示. 图形包括第一象限阴影部分 (连同边界): $x \geq 0, y \geq 0$ 以及第三象限的黑粗线部分: y

$$= x, x < 0, y < 0.$$

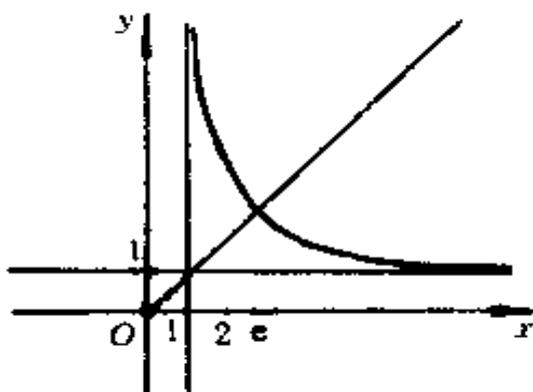


图 1.216

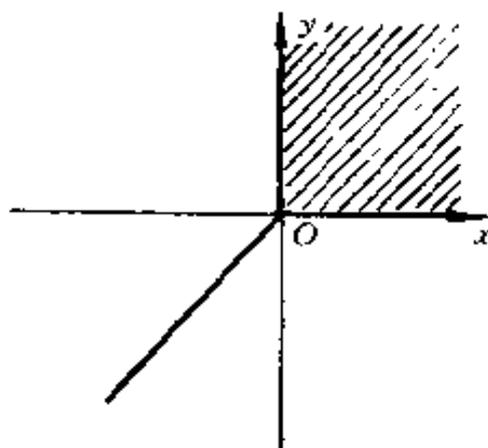


图 1.217

371. 在极坐标 (r, φ) 系中作出函数 $r = r(\varphi)$ 的图形.

设:

(a) $r = \varphi$ (阿基米得螺旋线); (б) $r = \frac{\pi}{\varphi}$ (双曲螺旋线);

(в) $r = \frac{\varphi}{\varphi + 1}$ ($0 \leq \varphi < +\infty$);

(г) $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$ (对数螺旋线);

(д) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (心脏形线);

(e) $r = 10 \sin 3\varphi$ (三瓣玫瑰线);

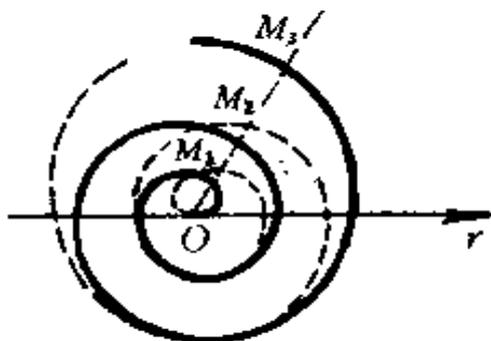


图 1.218

(ж) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (贝努里双纽线);

(a) $\varphi = \frac{r}{r-1} (r > 1)$; (н) $\varphi = 2\pi \sin r$.

解 (a) 如图 1.218 所示. $M_1M_2 = M_2M_3 = \dots = 2\pi$.

(б) 如图 1.219 所示.

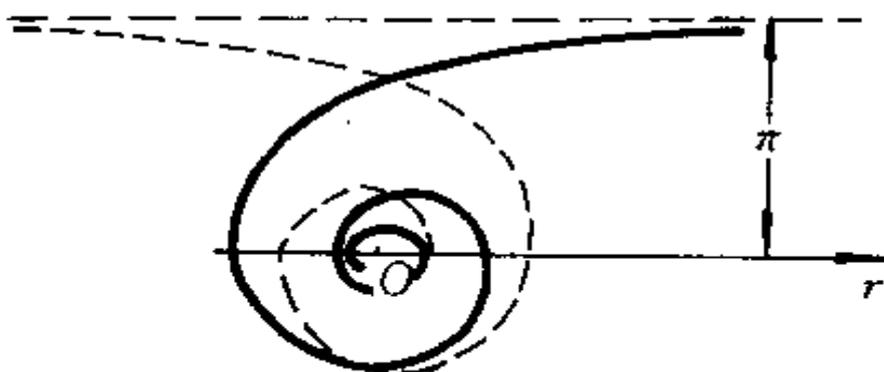


图 1.219

(в) 如图 1.220 所示.

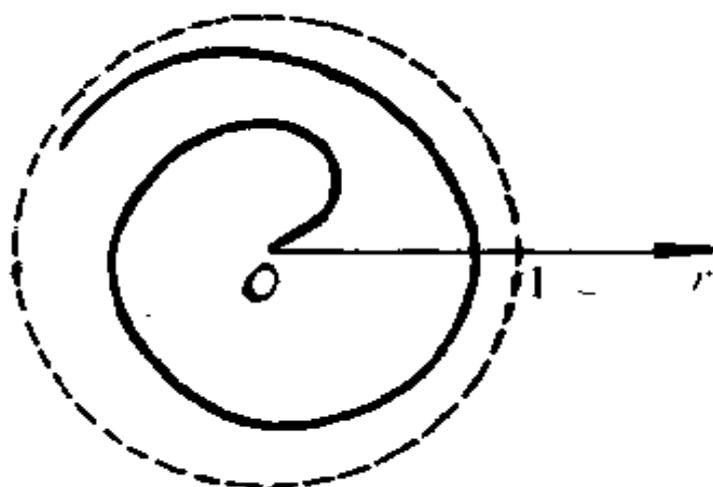


图 1.220

(г) 如图 1.221 所示.

(д) 如图 1.222 所示.

(e) 如图 1.223 所示.

(ж) 如图 1.224 所示.

(з) 如图 1.225 所示.

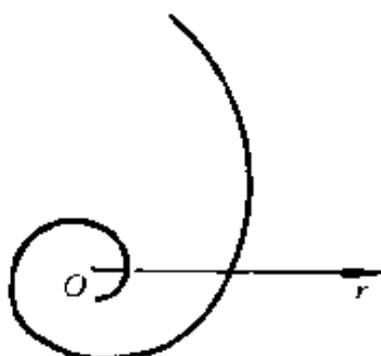


图 1.221

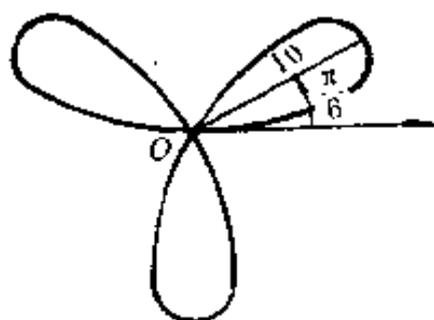


图 1.223

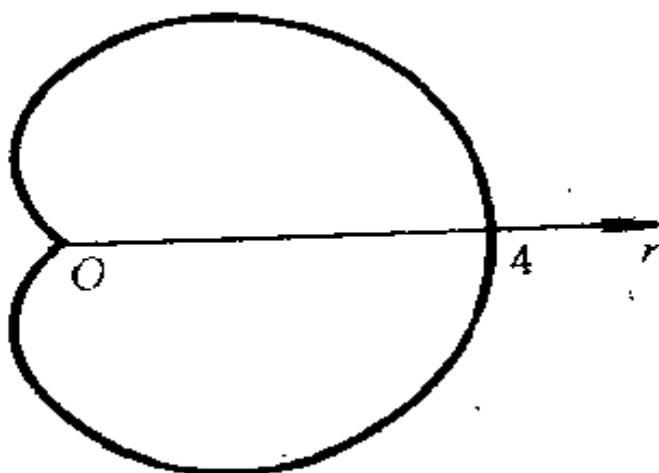


图 1.222

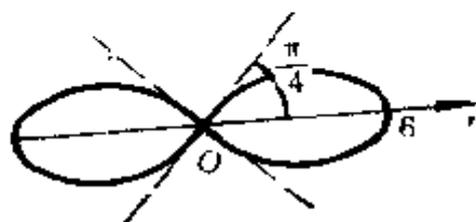


图 1.224

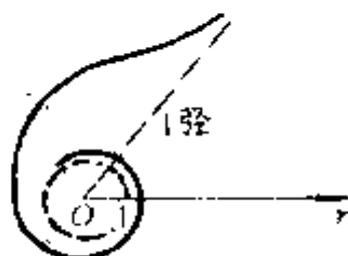


图 1.225

(H) 如图 1.226 所示.

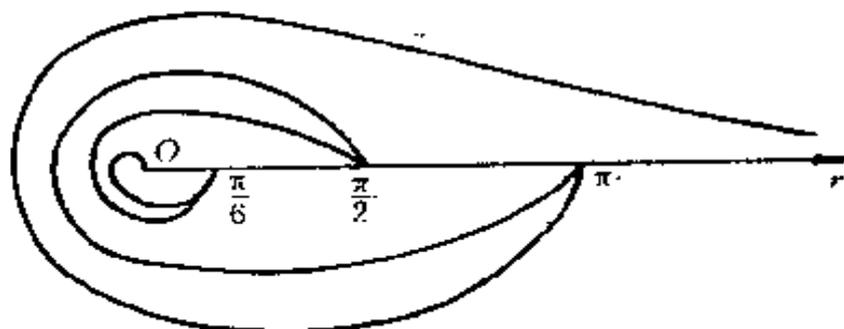


图 1.226

372. 作函数 $y = x^3 - 3x + 1$ 的图

形,以求方程式

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

的近似解.

解 如图 1.227 所示.

因 $y|_{x=0} = 1 > 0$,

$$y|_{x=0.4} = -0.136,$$

所以,在 0 与 0.4 之间有一实根,约为 0.35.

同法可求得其它二根为 1.53 及 -1.88.

用图解法解下列方程式:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$.

解 作函数 $y = x^3$ 及 $y = 4x + 1$ 的图形,它们的交点的横坐标即所求之根(图 1.228).

在图示的根 x_0 邻近研究函数 $f(x) = x^3 - 4x - 1$,若 $f(x_0 - \delta) \cdot f(x_0 + \delta) < 0$,则根 x_0 界于 $x_0 - \delta$ 及 $x_0 + \delta$ 之间,其中 δ 为很小的某个正数.下列各题同.

经判别,根的近似解为

$$-1.86; -0.25; 2.11.$$

374. $x^4 - 4x + 1 = 0$.

解 作函数 $y = x^4$ 及 $y = 4x - 1$ 的图形.如图 1.229 所示.

交点的横坐标即所求之根,其近

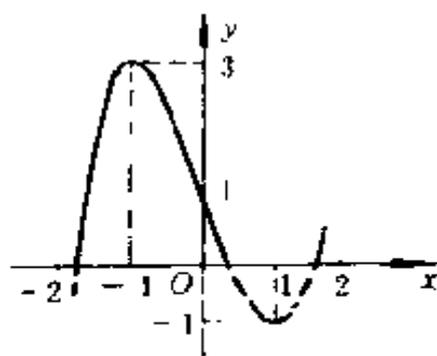


图 1.227

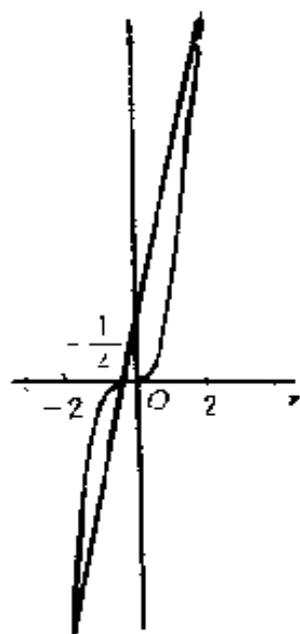


图 1.228

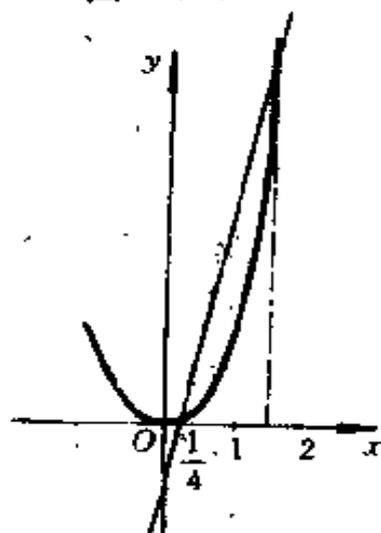


图 1.229

似值为 0.25; 1.49.

375. $x = 2^{-x}$.

解 作函数 $y = 2^{-x}$ 及 $y = x$ 的图形, 如图 1.230 所示. 交点的横坐标为 0.64, 此即所求之根的近似值.

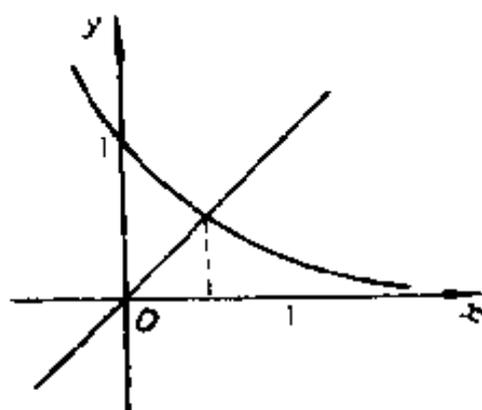


图 1.230

376. $\lg x = 0.1x$.

解 作函数 $y = \lg x$ 及 $y = 0.1x$ 的图形, 如图 1.231 所示:

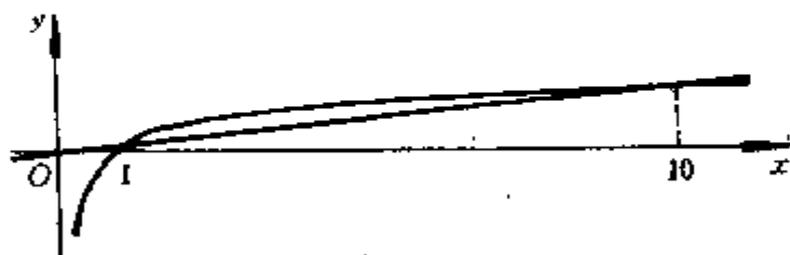


图 1.231

交点的横坐标为 1.37 及 10, 此即所求之根, 前者为近似值, 后者为精确值.

377. $10^x = x^2$.

解 作函数 $y = 10^x$ 及 $y = x^2$ 的图形, 如图 1.232 所示. 交点的横坐标为 -0.54, 此即所求之根的近似值.

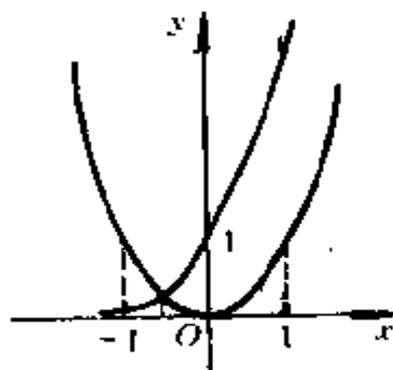


图 1.232

378. $\operatorname{tg} x = x (0 \leq x \leq 2\pi)$

解 作函数

$$y = \operatorname{tg}x \text{ 及 } y = x$$

的图形,如图 1.233 所示.

交点的横坐标为 0 及 4.49,此即所求之根,前者为精确值,后者为近似值.

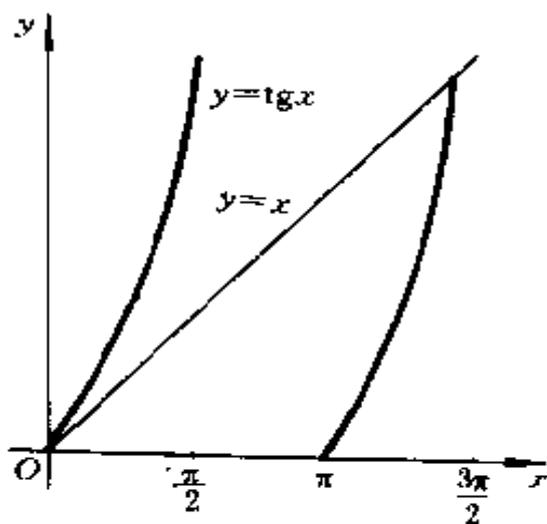


图 1.233

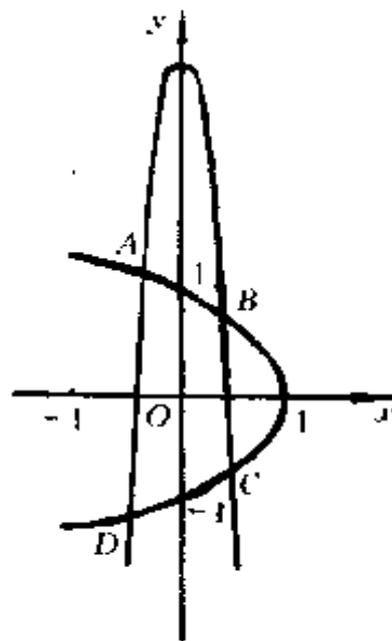


图 1.234

用图解法以解下列方程组:

379. $x + y^2 = 1, 16x^2 + y = 4.$

解 作函数

$$y^2 = 1 - x \text{ 及 } -y + 4 = 16x^2$$

的图表,如图 1.234 所示.

交点为点 A, B, C 及 D,它们的一对坐标即所求之解(近似值):

$$x_1 = -0.42, y_1 = 1.19 \text{ (A 点)}$$

$$x_2 = 0.45, y_2 = 0.74 \text{ (B 点)}$$

$$x_3 = 0.54, y_3 = -0.68 \text{ (C 点);}$$

$$x_4 = -0.57, y_4 = 1.25 \text{ (D 点).}$$

380. $x^2 + y^2 = 100, y = 10(x^2 - x - 2).$

解 作函数

$$x^2 + y^2 = 100$$

及 $y = 10(x^2 - x - 2)$

的图形,如图 1.235 所示.

交点为点 A, B, C 及 D ,
它们的一对坐标即所求之
解(近似值):

$$x_1 = -1.30;$$

$$y_1 = 9.92(A \text{ 点});$$

$$x_2 = 2.30,$$

$$y_2 = 9.73(B \text{ 点});$$

$$x_3 = 1.62,$$

$$y_3 = -9.87(C \text{ 点});$$

$$x_4 = -0.62, y_4 = -9.98(D \text{ 点}).$$

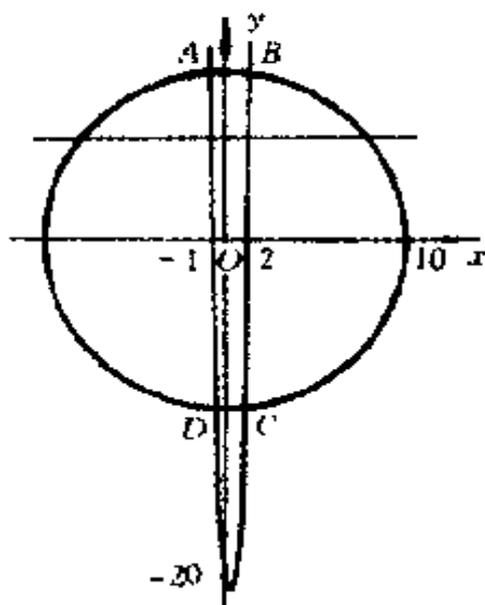


图 1.235

§ 5. 函数的极限

1° 函数的有界性 设存在有某两数 m 和 M , 使得

$$\text{当 } x \in (a, b) \text{ 时, } m < f(x) < M,$$

则称函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上为有界的.

数 $m_0 = \inf_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上的下确界,

而数 $M_0 = \sup_{x \in (a, b)} \{f(x)\}$ 称为函数 $f(x)$ 在这区间 (a, b) 上的上确界.

差 $M_0 - m_0$ 称为函数在区间 (a, b) 上的振幅.

2° 函数在某一点的极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$$

表示对于任一个数 $\epsilon > 0$, 都存在有数 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得对于满足条件式 $0 < |x - a| < \delta$, 并使 $f(x)$ 有意义的一切 x , 有下列不等式成立:

$$|f(x) - A| < \epsilon.$$

函数的极限(1)存在的必要而且充分的条件是: 对于每一个数列 $x_n \rightarrow a (n = 1, 2, \dots)$, 下面的等式都成立

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

有两个著名的极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

哥西判别法. 函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在, 当而且仅当, 对于每一个 $\epsilon > 0$, 都能找得着 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得, 只要是

$$0 < |x' - a| < \delta \text{ 和 } 0 < |x'' - a| < \delta,$$

就有 $|f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

式中 x' 和 x'' 是属于函数 $f(x)$ 的定义域内的.

3° 单侧的极限 若

$$\text{当 } 0 < a - x < \delta(\epsilon) \text{ 时, 有 } |A' - f(x)| < \epsilon,$$

则称数 A' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的左极限:

$$A' = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0).$$

同样, 若当 $0 < x - a < \delta(\epsilon)$ 时, 有 $|A'' - f(x)| < \epsilon$, 则称数 A'' 为函数 $f(x)$ 在 a 点的右极限:

$$A'' = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$$

函数 $f(x)$ 在 a 点的极限存在的必要而且充分的条件为:

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4° 无穷极限 符号

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

表示对于任何的 $E > 0$, 只要是

$$0 < |x - a| < \delta(E), \text{ 则有 } |f(x)| > E.$$

5° 子列极限 若对于某数列 $x_n \rightarrow a$ 有等式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B,$$

则称数(或符号 ∞) B 为函数 $f(x)$ 在 a 点的子列极限(有穷的或无穷的).

这些子列极限中最小的和最大的用

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) \text{ 和 } \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

来表示,分别称为函数 $f(x)$ 在 a 点的下极限和上极限.

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$$

为函数 $f(x)$ 在 a 点有极限(有穷的或无穷的)的必要而且充分的条件.

381. 函数 $f(x)$ 由下面的条件所定义:

若 $x = \frac{m}{n}$, 则 $f(x) = n$,

式中 m 和 n 为互质的整数,且 $n > 0$;

若 x 为无理数,则

$$f(x) = 0.$$

证明此函数在每一点 x 为有穷的,但并非有界的(即在这点的任何邻域中是无界的).

证 任给 $x_0 > 0$, 当 x_0 固定时, $f(x_0)$ 值确定. 由于有理数在数轴上处处稠密, 故在 x_0 的任何邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内总有无限多个有理数. 下面证明对于任给的 $\delta > 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是无界的. 若不然, 存在 $M > 0$, 使当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时,

$$|f(x)| \leq M.$$

于是, 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数只能表示成

$$\frac{k}{1}, \frac{k}{2}, \dots, \frac{k}{[M]},$$

其中 k 是与分母互质的整数, $[M]$ 为 M 的整数部分. 由

于这些有理数都在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中, 故有

$$(x_0 - \delta)[M] < k < (x_0 + \delta)[M],$$

上式表明在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中的有理数仅为有限个, 这与有理数在数轴上的处处稠密性相矛盾.

于是, 本题所定义的函数 $f(x)$ 在每一点 x (有穷) 的任何邻域中是无界的.

382. 若函数 $f(x)$ 在: (a) 开区间, (b) 闭区间内的每一点确定而有界, 则此函数在这给定的区间内或对应的闭区间内是否为有界的?

举出适当的例子.

解 (a) 一般地说, 不一定. 例如, 函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 内每一点确定而有界, 但它在 $(0, 1)$ 内无界.

(b) 是有界的. 事实上, 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 无界, 则存在 $x_n \in [a, b]$ 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$. 取子列 $x_{n_k} \rightarrow x_0 \in [a, b]$. 显然, $f(x)$ 在 x_0 无界 (即在 x_0 的任何邻域中无界), 矛盾.

383. 证明函数 $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$

在间隔 $-\infty < x < +\infty$ 中是有界的.

证 当 $|x| \leq 1$ 时, $|f(x)| < \frac{1+1}{1} = 2$.

当 $|x| > 1$ 时, $|f(x)| < \frac{1+x^2}{1+x^4} < 1$.

因而, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, $|f(x)| < 2$. 即函数 $f(x)$ 是有界的.

384. 证明函数

$$f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域内是无界的, 但当 $x \rightarrow 0$ 时不成为无穷大.

证 当 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ 时, $f(x) = 0$; 而当 $x = \frac{1}{k\pi}$ 时,

$f(x) = (-1)^k k\pi$. 于是当 $k \rightarrow \infty$ 时, 点 $\frac{2}{(2k+1)\pi}$ 及 $\frac{1}{k\pi}$

均在点 $x = 0$ 的任何邻域内. 由于 $|(-1)^k \cdot k\pi| \rightarrow +\infty (k \rightarrow +\infty)$, 故函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的任何邻域内是无界的. 然而当 $k \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 不断地与 Ox 轴相交, 即 $f(x) = 0$ (这样的数 x 的集合是无限的). 因而, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 又不成为无穷大.

385. 研究函数 $f(x) = \ln x \cdot \sin^2 \frac{\pi}{x}$ 在区间 $0 < x < \varepsilon$ 内的有界性.

解 上方有界, 它小于 $|\ln \varepsilon|$. 下方无界.

386. 证明函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

在域 $0 \leq x < +\infty$ 内有下确界 $m_0 = 0$ 和上确界 $M_0 = 1$.

证 $1 > f(x) \geq 0$, 且 $f(x)$ 单调上升趋近于 1, 所以,

$$m_0 = 0, M_0 = 1.$$

387. 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调上升, 则在此闭区间内函数的下确界和上确界等于什么?

解 $m_0 = f(a)$, $M_0 = f(b)$, 其中 m_0 及 M_0 代表下确界及上确界, 以下各题均采用此符号.

求函数的下确界和上确界:

388. $f(x) = x^2$ 在 $(-2, 5)$ 内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 25.$

389. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 1.$

390. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 由于 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 内为增函数, 而在 $(1, +\infty)$ 内为减函数, 且 $f(1)$ 存在, 所以,

$$m_0 = 0, M_0 = f(1) = 1.$$

391. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 由 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ 知 $m_0 = f(1) = 2, M_0 = +\infty.$

392. $f(x) = \sin x$ 在 $(0, +\infty)$ 内.

解 $m_0 = -1, M_0 = 1.$

393. $f(x) = \sin x + \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 内.

解 由 $f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ 知 $m_0 = -\sqrt{2}, M_0 = \sqrt{2}.$

394. $f(x) = 2^x$ 在 $(-1, 2)$ 内.

解 $m_0 = f(-1) = \frac{1}{2}, M_0 = f(2) = 4.$

395. $f(x) = [x]$; (a) 在 $(0, 2)$ 内, (b) 在 $[0, 2]$ 内.

解 (a) $m_0 = 0, M_0 = 1;$

(b) $m_0 = 0, M_0 = 2.$

396. $f(x) = x - [x]$ 在 $[0, 1]$ 内.

解 $m_0 = 0, M_0 = 1.$

397. 求函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间内的振幅:

(a) $(1, 3);$ (b) $(1.9, 2.1);$

(B)(1.99, 2.01) (Г)(1.999, 2.001).

解 (a) 振幅以 ω 表示之, $\omega = M_0 - m_0$

因为 $m_0 = 1, M_0 = 9$, 所以

$$\omega = 8.$$

$$(6)m_0 = (1.9)^2, M_0 = (2.1)^2,$$

$$\omega = (2.1)^2 - (1.9)^2 = 0.8.$$

$$(B)\omega = (2.01)^2 - (1.99)^2 = 0.08.$$

$$(Г)\omega = (2.001)^2 - (1.999)^2 = 0.008.$$

398. 求函数

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

在下列区间内的振幅:

$$(a)(-1, +1); (6)(-0.1, 0.1);$$

$$(B)(-0.01, 0.01); (Г)(-0.001, 0.001).$$

解 (a) $\omega = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi;$

$$(6)\omega = \pi;$$

$$(B)\omega = \pi;$$

$$(Г)\omega = \pi.$$

399. 设 $m[f]$ 和 $M[f]$ 分别为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内的下确界和上确界。

证明若 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 为定义于 (a, b) 内的函数,

则

$$m[f_1 + f_2] \geq m[f_1] + m[f_2]$$

及

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

举出函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的例子, 使它们在最后的二关

系中是：(a) 等式的情形，(6) 不等式的情形。

证 因为

$$m[f_1] \leq f_1 \leq M[f_1]$$

及

$$m[f_2] \leq f_2 \leq M[f_2],$$

所以，

$$m[f_1] + m[f_2] \leq f_1 + f_2,$$

从而有

$$m[f_1] + m[f_2] \leq m[f_1 + f_2].$$

又因

$$f_1 + f_2 \leq M[f_1] + M[f_2],$$

所以，

$$M[f_1 + f_2] \leq M[f_1] + M[f_2].$$

(a) 当 $f_1(x)$ 及 $f_2(x)$ 在 (a, b) 内具有相同的单调性，且 m 及 M 均为有限时，取等式。

(6) $f_1(x) = x^2, f_2(x) = -x^2$ 在区间 $(-1, 1)$ 内

$$m[f_1] = 0, M[f_1] = 1;$$

$$m[f_2] = -1, M[f_2] = 0.$$

又因为 $f_1 + f_2 = 0$ ，所以

$$m[f_1 + f_2] = M[f_1 + f_2] = 0.$$

此时

$$m[f_1 + f_2] > m[f_1] + m[f_2],$$

$$M[f_1 + f_2] < M[f_1] + M[f_2].$$

取不等式的符号。

400. 设函数 $f(x)$ 定义于域 $[a, +\infty)$ 内，并且在每一个闭区

间 $[a, b]$ 上是有界的. 假定

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} f(\xi)$$

及

$$M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} f(\xi).$$

作函数 $y = m(x)$ 和 $y = M(x)$ 的图形, 设

$$(a) f(x) = \sin x, \quad (b) f(x) = \cos x.$$

解 (a) 如图 1.236 所示. (b) 如图 1.236 所示

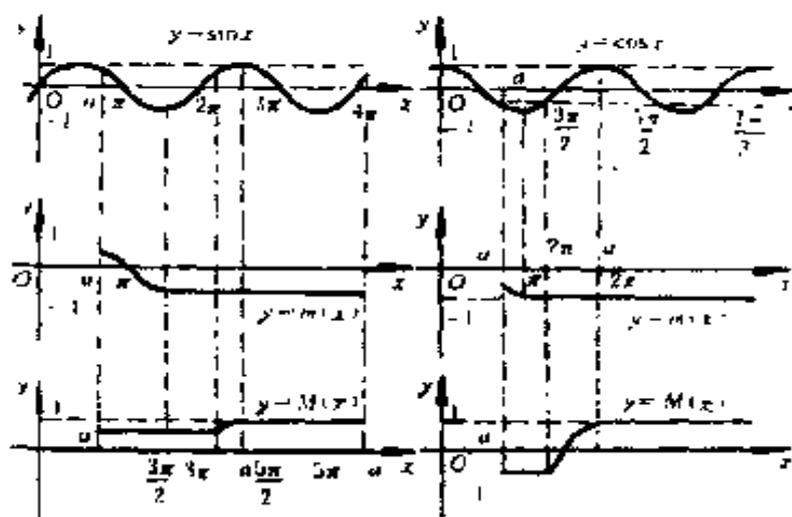


图 1.236

401. 利用 $\langle \epsilon - \delta \rangle$ 论证法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

填下表:

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
δ					

证 $|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2|.$

先限制 $|x - 2| < 1$, 即 $1 < x < 3$, 则

$$|x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < 5|x - 2|,$$

取 $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{5}\}$. 于是, 当 $0 < |x - 2| < \delta$ 时,

$$|x^2 - 4| < \epsilon,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

ϵ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...
δ	0.02	0.002	0.0002	0.00002	...

402. 以《 $E - \delta$ 》的说法, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

填下表:

E	10	100	1000	10000	...
δ					...

证 任给 $E > 0$,

要使 $\frac{1}{|1-x|^2} > E$,

只要 $0 < |x - 1| < \frac{1}{\sqrt{E}}$,

又只要 $0 < |x - 1| < \frac{1}{E} (E > 1)$,

取 $\delta = \min\{1, \frac{1}{E}\}$,

则当 $0 < |x - 1| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{1}{(1-x)^2} \right| > E,$$

所以 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$

ε	10	100	1000	10000	...
δ	0.1	0.01	0.001	0.0001	...

403. 利用不等式表示下列各式:

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b; \quad (6) \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b;$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$$

举出适当的例子.

解 (a) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

例如, $f(x) = x + 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$

(6) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b.$

例如,

$$\text{若 } f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{当 } x \leq 1; \\ 2, & \text{当 } x > 1, \end{cases}$$

则 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 2$

(B) 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b.$

例如本题(6)之例, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 2.$$

利用不等式表示下列各式,并举出适当的例子:

404. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$; (б) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$;

(в) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

解(a) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

(б) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

(в) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

例如, 对于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

405. (a) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$; (б) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$;

(в) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$; (г) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$;

(д) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty$; (e) $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty$;

(ж) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$; (з) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$;

(и) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$.

解(a) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty.$$

(6) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty.$

例如, $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty.$$

(B) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$f(x) > E.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty.$

例如, $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty.$$

(r) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty.$

例如, $f(x) = \frac{(-1)^{[\frac{1}{1-x}]}}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty.$$

(x) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = -\infty.$

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = -\infty.$$

(e) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty.$$

例如, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty.$$

(ж) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$|f(x)| > E.$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty.$$

例如, $f(x) = \frac{(-1)^{[\frac{1}{x-1}]}}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty.$$

(з) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty.$$

例如, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty.$$

(и) 任给 $E > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty.$$

例如, $f(x) = \frac{1}{x-1}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = +\infty.$$

406. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (б) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$;
 (в) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$; (г) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$;
 (д) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$; (е) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$;
 (ж) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$; (з) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;
 (и) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

解 (a) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = x^2$, 则有 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

(б) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = -x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty.$$

(в) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

(г) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = (-1)^{[x^2]}x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

(д) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

(e) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = -x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty.$$

(ж) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$|f(x)| > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$.

例如, $f(x) = (-1)^{[x]}x^2$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty.$$

(з) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$f(x) < -E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

例如, $f(x) = -x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

(и) 任给 $E > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$f(x) > E,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

例如, $f(x) = x$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

407. 命 $y = f(x)$. 利用不等式表示下列各情况:

(a) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(б) 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(в) 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(г) 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(д) 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(e) 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(ж) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(з) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(и) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$;

(к) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(л) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$;

(м) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +0$.

举出适当的例子.

解 (a) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x - a| < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b - 0$;

或

$$\text{当 } x \rightarrow a \text{ 时, } y \rightarrow b - 0.$$

例如, $y = -|x|$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(6) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b - 0$.

例如, $y = x$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 - 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(B) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -x$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 + 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(r) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < |a - x| < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = |x|$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

(d) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < a - x < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a - 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = -x$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 - 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

(e) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $\delta > 0$, 使当 $0 < x - a < \delta$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow a + 0$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = x$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow 0 + 0 \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

(ж) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -\frac{1}{|x|}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(з) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = \frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(и) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$0 < b - y < \varepsilon,$$

此即,当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b - 0$.

例如, $y = -\frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 - 0.$$

(к) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $|x| > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即,当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = \frac{1}{|x|}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

(л) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x < -N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即,当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = -\frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

(M) 任给 $\varepsilon > 0$, 存在数 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时,

$$0 < y - b < \varepsilon,$$

此即, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow b + 0$.

例如, $y = \frac{1}{x}$, 即有

$$\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } y \rightarrow 0 + 0.$$

408. 设

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n,$$

式中 $a_i (i = 0, 1, \cdots, n)$ 为实数.

证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty$.

证 不妨设 $a_0 \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} |p(x)| &\geq |a_0| \cdot |x|^n \cdot \left| 1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right|, \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x|^i} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$, 故存在 $E_1 > 0$, 使当 $|x| > E_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} &\left| 1 - \left(\frac{|a_1|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|} + \frac{|a_2|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_n|}{|a_0|} \cdot \frac{1}{|x|^n} \right) \right| \\ &> \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

从而有

$$|p(x)| > \frac{1}{2} |a_0| \cdot |x|^n.$$

任给 $M > 0$, 设

$$E_2 = \sqrt[n]{\frac{2M}{|a_0|}}.$$

取

$$E = \max(E_1, E_2),$$

则当 $|x| > E$ 时, 恒有

$$|p(x)| > M,$$

故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |p(x)| = +\infty.$$

409. 设:

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m},$$

式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

证明:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{若 } n > m; \\ \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } n = m; \\ 0, & \text{若 } n < m. \end{cases}$$

证 分子分母同除以 x^m , 得

$$R(x) = \frac{a_0 x^{n-m} + a_1 x^{n-m-1} + \cdots + a_n x^{-m}}{b_0 + b_1 x^{-1} + \cdots + b_m x^{-m}}.$$

当 $n > m$ 时, 分子趋于无穷, 分母趋于 b_0 , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \infty.$$

当 $n = m$ 时, 分子趋于 a_0 , 分母趋于 b_0 , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = \frac{a_0}{b_0}.$$

当 $n < m$ 时, 分子趋于 0, 分母趋于 b_0 , 所以,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0.$$

410. 设:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

式中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为 x 的多项式, 且

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

下式有什么可能的值

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}?$$

解 若 a 仅为 $P(x) = 0$ 及 $Q(x) = 0$ 的一重根, 则极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

为一确定值(不等于零).

若 a 为 $P(x) = 0$ 的 n 重根, 而为 $Q(x) = 0$ 的 m 重根, 则当 $n > m$ (n, m 均大于 1) 时, 此极限为 0; 当 $n < m$ 时, 此极限为 ∞ ; 当 $n = m$ 时, 此极限为一不等于零的值.

总之, 极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

为零, 或为 ∞ , 或为不等于零的值.

求下列各式之值:

411. (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$, (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

(B) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{-1}{-1} = 1.$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(2x+1)(x-1)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{2}{3}.$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

$$412. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x}.$$

解 $(1+x)(1+2x)(1+3x) = 1 + 6x + 11x^2 + 6x^3$,
于是,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x) - 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} (6 + 11x + 6x^2) = 6. \end{aligned}$$

$$413. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2}{x^2 + x^5} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 5x^2 + 10x + 10}{x^2 + 1} \\ = 10. \end{aligned}$$

$$414. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \quad (m \text{ 与 } n \text{ 为自然数}).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} \\ = \frac{(1 + nm x + \frac{1}{2!} n(n-1)m^2 x^2 + \dots + m^n x^n)}{x^2} \\ + \frac{-(1 + mn x + \frac{1}{2!} m(m-1)n^2 x^2 + \dots + n^m x^m)}{x^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{n}{2}(n-1)m^2 - \frac{m}{2}(m-1)n^2 + o(x)^{**}$$

$$= \frac{1}{2}mn(n-m) + o(x),$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \frac{1}{2}mn(n-m).$$

*) $o(x)$ 表示当 $x \rightarrow 0$ 时的无穷小量.

$$415. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}.$$

解 分子的最高次方为 5 次, 分母的最高次方也为 5 次, 因而当 $x \rightarrow \infty$ 时, 此分式的极限为分子与分母的最高次方系数之比, 于是

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5} = \frac{1}{5^5}.$$

$$416. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

解 分子与分母的最高次方相同, 故

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{2^{20} \cdot 3^{30}}{2^{50}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{30}.$$

$$417. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 分子的最高次方为

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},$$

它与分母的最高次方相同, 所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)(x^2+1)\cdots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}} = n^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

$$418. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-5)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-2}{x-5} = -\frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$419. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + 2x + 3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$420. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1} \quad *)$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - x^3 - x + 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2 + x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + x + 1} = 1.
 \end{aligned}$$

*) 原书 419 题与 420 题相同.

$$421. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^3 + 16}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^4 - 8x^3 + 16} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2(x+2)}{(x-2)^2(x+2)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$422. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x - 1)}{(x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 1}{x^4 - x^3 + x^2 - x - 1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

$$423. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^{20}(x+1)^{20}}{(x-2)^{20}(x+4)^{10}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)^{20}}{(x+4)^{10}} \\
&= \frac{3^{20}}{6^{10}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{10}.
\end{aligned}$$

$$424. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & x + x^2 + \cdots + x^n - n \\
&= (x-1) + (x^2-1) + \cdots + (x^n-1) \\
&= (x-1)[1 + (x+1) + \cdots \\
&\quad + (x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)] \\
&= (x-1)[n + (n-1)x + (n-2)x^2 \\
&\quad + \cdots + x^{n-1}].
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \cdots + x^n - n}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} [n + (n-1)x + (n-2)x^2 + \cdots + x^{n-1}] \\
&= n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

$$425. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \quad (m \text{ 和 } n \text{ 为自然数}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1}{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1} \\ &= \frac{m}{n}. \end{aligned}$$

$$426. \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

解 设 $x = a + y$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $y \rightarrow 0$.

代入, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^n - a^n) - na^{n-1}(x - a)}{(x - a)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(a + y)^n - a^n - na^{n-1}y}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{n}{2}(n-1)a^{n-2} + \frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)a^{n-3}y \right. \\ & \quad \left. + \cdots + y^{n-2} \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}. \end{aligned}$$

$$427. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \quad (n \text{ 表自然数}).$$

解 设 $x = 1 + y$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时, $y \rightarrow 0$. 代入, 得

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{n+1} - (n+1)x + n}{(x-1)^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{n+1} - (n+1)(1+y) + n}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)y + \cdots + y^{n-1} \right] \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

428. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right)$ (m 和 n 为自然数).

解 当 $m = n$ 时, 此极限显然为零.

当 $m \neq n$ 时, 不失一般性, 假设 $m < n$, 且

$$m + l = n.$$

此时

$$\begin{aligned} & \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \\ &= \frac{m(1+x+\cdots+x^{n-1}) - n(1+x+\cdots+x^{m-1})}{(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{n-1})} \\ &= \frac{-l-lx-\cdots-lx^{m-1}+mx^m+mx^{m+1}+\cdots+mx^{m+l-1}}{(1-x)(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})} \\ &= -\frac{mx^{m+l-2}+2mx^{m+l-3}+\cdots+mlx^{m-1}}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1-x+\cdots+x^{m+l-1})} \\ &\quad -\frac{l(m-1)x^{m-2}+l(m-2)x^{m-3}+\cdots+l}{(1+x+\cdots+x^{m-1})(1+x+\cdots+x^{m+l-1})}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) \\ &= -\frac{m[1+2+\cdots+(l-1)] + l[m+(m-1)+\cdots+1]}{mn} \\ &= -\frac{\frac{ml(l-1)}{2} + \frac{ml(m+1)}{2}}{mn} = -\frac{ml(m+l)}{2mn} \\ &= \frac{m-n}{2}. \end{aligned}$$

当 $m = n$ 时, 上述结果就等于零. 即上述结果对 $m = n$ 的情况仍然适用.

总之, 不论 m 及 n 为任何的自然数, 均有

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right) = \frac{m-n}{2}.$$

$$429. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right].$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right) + \left(x + \frac{2a}{n} \right) + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x + \frac{a}{n} (1+2+\cdots+(n-1)) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \left(x + \frac{a}{2} \right)$$

$$= x + \frac{a}{2}.$$

$$430. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right].$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(x + \frac{a}{n} \right)^2 + \left(x + \frac{2a}{n} \right)^2 + \cdots \right.$$

$$\left. + \left(x + \frac{(n-1)a}{n} \right)^2 \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{2ax}{n} (1+2+\cdots+(n-1)) \right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{n^2} (1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ (n-1)x^2 + \frac{n-1}{1} ax + \frac{(n-1)(2n-1)}{6n} a^2 \right\}$$

$$= x^2 + ax + \frac{a^2}{3}.$$

$$431. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}.$$

$$\text{解} \quad 1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n}{3} (4n^2 - 1),$$

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}.$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2(n+1)} = 1$$

$$432. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^3} - \frac{n}{4} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4n^3} - \frac{n}{4} \right)^{*)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

*) 利用 3 题及 1 题的结果.

$$433. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)]^2}$$

解 令

$$1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3 = x_n,$$

$$[1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)]^2 = y_n,$$

则 $y_{n+1} > y_n$, 且 $y_n \rightarrow +\infty$, 由于

$$\begin{aligned} & \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y} \\ &= \frac{(3n+1)^3}{[1 + 4 + 7 + \dots + (3n+1)]^2 - [1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)]^2} \\ &= \frac{(3n+1)^3}{\left[\frac{(1+n)(3n+2)}{2} + \frac{n(3n-1)}{2} \right] (3n+1)} \rightarrow 3 \\ & \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

利用 143 题的结果即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3}{[1 + 4 + 7 + \dots + (3n-2)]^2} = 3.$$

434. 把由抛物线 $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^2$, Ox 轴及直线 $x = a$ 所围成的曲边三角形 OAM (图 1. 237) 的面积, 当作以 $\frac{a}{n}$ 为底的各内接矩形面积之和当 $n \rightarrow \infty$ 的极限值, 求此面积.

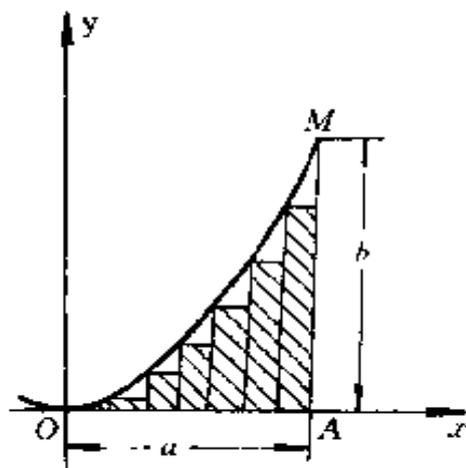


图 1 · 237

解 底的 n 个分点为

$$0, \frac{a}{n}, \frac{2a}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}a;$$

它们所对应的高为

$$0, b\left(\frac{1}{n}\right)^2, b\left(\frac{2}{n}\right)^2, \dots,$$

$$b\left(\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

于是, 得内接的 n 个矩形面积之和为

$$ab \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2 = \frac{ab(n-1)(2n-1)}{6n^2},$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它趋向于 $\frac{ab}{3}$, 即

$$\text{面积 } OAM = \frac{ab}{3}.$$

求极限:

435.
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}}.$$

解 分子分母同除以 \sqrt{x} , 得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x + 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$$436. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}}$$

解 分子分母同除以 \sqrt{x} , 得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x + 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}}}{\sqrt{2 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$437. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

解 分子分母同乘以它们的共轭因式, 得

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1 + 2x} - 3)(\sqrt{1 + 2x} + 3)(\sqrt{x} + 2)}{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{1 + 2x} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x - 4)(\sqrt{x} + 2)}{(x - 4)(\sqrt{1 + 2x} + 3)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{1 + 2x} + 3}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

$$438. \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(\sqrt{1-x} - 3)(\sqrt{1-x} + 3)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{(2 + \sqrt[3]{x})(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})(\sqrt{1-x} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -8} \frac{-(8+x)(4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x})}{(8+x)(\sqrt{1-x} + 3)}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow -8} \frac{4 + \sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x} + 3}$$

$$= -2.$$

$$439. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x^2 - a^2}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a}(\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a})}{\sqrt{x-a} \cdot \sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x-a} + \sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+a}(\sqrt{x} + \sqrt{a})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2a}} (a > 0).$$

$$440. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}{(x+3)(x-3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3(x-3)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\
&= -\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

$$441. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x^3 + 8} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(\sqrt[3]{x-6} + 2)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)}{(x^3 + 8)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{(x^2 - 2x + 4)(\sqrt[3]{(x-6)^2} - 2\sqrt[3]{x-6} + 4)} \\
&= \frac{1}{144}.
\end{aligned}$$

$$442. \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{\sqrt{x} - 4} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x} + 2} = \frac{1}{4}.$$

$$443. \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 8} \frac{(\sqrt{9+2x}-5)(\sqrt{9+2x}+5)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)(\sqrt{9+2x}+5)} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5} = \frac{12}{5}.
\end{aligned}$$

444. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$ (n 为整数).

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x} - 1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + 1)}{x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}} + \sqrt[n]{(1+x)^{n-2}} + \dots + \sqrt[n]{1+x} + 1} \\
&= \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

445. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x-x^2} - (1+x)}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1-2x-x^2} - 1 - x)(\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x)}{x(\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2(2+x)}{\sqrt{1-2x-x^2} + 1 + x} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

446. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2}{x+x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{8+3x-x^2} - 2)}{(x+x^2)}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)}{(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3-x}{(1+x)(\sqrt[3]{(8+3x-x^2)^2} + 2\sqrt[3]{8+3x-x^2} + 4)} \\
& = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

$$447. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x}}{x + 2\sqrt[3]{x^4}} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x})}{(x + 2\sqrt[3]{x^4})} \\
& \quad \cdot \frac{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})}{(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{(1 + 2\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(27+x)^2} + \sqrt[3]{27^2-x^2} + \sqrt[3]{(27-x)^2})} \\
& = \frac{2}{27}.
\end{aligned}$$

$$448. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\
& \quad \cdot \frac{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}{(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2})} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1-x^2} + \sqrt[3]{(1-x)^2}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}.$$

$$449. \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^3} - \sqrt[6]{(x+20)^2})(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[4]{x+9} - 2)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}$$

$$= \frac{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \dots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \dots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{[(x+2)^3 - (x+20)^2](\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \dots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x-7)(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(x-7)(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \dots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x^2 + 12x + 56)(\sqrt[4]{x+9} + 2)(\sqrt{x+9} + 4)}{(\sqrt[6]{(x+2)^{15}} + \sqrt[6]{(x+2)^{12}(x+20)^2} + \dots + \sqrt[6]{(x+20)^{10}})}$$

$$= \frac{189 \cdot 4 \cdot 8}{3^5 + 3^4 \cdot 3 + 3^3 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3^5}$$

$$= \frac{6048}{1458} = 4 \frac{4}{27}$$

$$450. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} - \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{x}{3}} + \sqrt[4]{1 + \frac{x}{4}}}{1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^4} - \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^3} \right] \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right]}{\left[1 - \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right] \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right]} \\
&= \frac{\left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \dots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right]}{\left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \dots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right]} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(\frac{7}{12} + \frac{23x}{48} + \frac{7x^2}{54} + \frac{x^3}{81} \right) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{x}{2}} \right]}{\frac{x}{2} \left[\sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{44}} + \dots + \sqrt[12]{\left(1 + \frac{x}{4}\right)^{33}} \right]} \\
&= \frac{7}{36}.
\end{aligned}$$

451. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1 + 5x} - (1 + x)}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt[5]{1 + 5x} - (1 + x)}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 (\sqrt[5]{(1 + 5x)^4} + \sqrt[5]{(1 + 5x)^3(1 + x)} + \dots + (1 + x)^4)}{(1 + 5x) - (1 + x)^5} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{(1 + 5x)^4} + \sqrt[5]{(1 + 5x)^3(1 + x)} + \dots + (1 + x)^4}{-10 - 10x - 5x^2 - x^3} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

452. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + ax} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x}$ (m 及 n 为整数).

解 如果 m 及 n 为正整数, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1 + ax} - \sqrt[n]{1 + \beta x}}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^n - (1+\beta x)^m}{x(\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} + \dots + \sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(na - m\beta) + (C_n^2 a^2 x + \dots + a^n x^{n-1} - C_m^2 \beta^2 x - \dots - \beta^m x^{m-1})}{\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} + \dots + \sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}}} \\
&= \frac{na - m\beta}{mn} = \frac{a}{m} - \frac{\beta}{n}.
\end{aligned}$$

如果 m 及 n 为负整数. 设 $m = -m'$, $n = -n'$, 其中 m' 及 n' 为正整数, 则

$$\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[m]{1+\beta x} = \frac{\sqrt[n']{1+\beta x} - \sqrt[m']{1+ax}}{\sqrt[n']{1+ax} \cdot \sqrt[m']{1+\beta x}}.$$

上式的分母趋于 1, 于是利用本题前半段的结果, 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n']{1+\beta x} - \sqrt[m']{1+ax}}{x} = \frac{\beta}{n'} - \frac{a}{m'} = \frac{a}{m} - \frac{\beta}{n}.$$

如果 m 及 n 中有一个为负整数, 另一个为正整数, 则同法可证上述结论仍然成立. 因此,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} - \sqrt[n]{1+\beta x}}{x} = \frac{a}{m} - \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

453. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \quad (m \text{ 及 } n \text{ 为整数}).$

解 与 452 题相同, 先设 m 及 n 为正整数.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+ax)^n (1+\beta x)^m - 1}{x(\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} \cdot \sqrt[mn]{(1+\beta x)^{m(mn-1)}} + \dots + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{na + m\beta + o(x)}{\sqrt[mn]{(1+ax)^{n(mn-1)}} (1+\beta x)^{m(mn-1)} + \dots + 1} \\
&= \frac{na + m\beta}{mn} \\
&= \frac{a}{m} + \frac{\beta}{n}.
\end{aligned}$$

若 m 及 n 为负整数, 则此结果仍然成立. 事实上, 只须设 $m = -m', n = -n'$, 其中 m' 及 n' 为正整数. 于是,

$$\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1 = \frac{1 - \sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{\sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}$$

再利用前半段结果, 即得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x}}{x(\sqrt[m']{1+ax} \cdot \sqrt[n']{1+\beta x})} = -\frac{a}{m'} - \frac{\beta}{n'} = \frac{a}{m} + \frac{\beta}{n}.$$

若 m 及 n 中只有一个为负整数, 则同法可证上述结论仍然成立. 因而, 当 m 及 n 为整数时, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+ax} \cdot \sqrt[n]{1+\beta x} - 1}{x} = \frac{a}{m} + \frac{\beta}{n} \quad (mn \neq 0).$$

454. 设 $P(x) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ 又 m 表整数, 求证:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

证

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[m]{1+P(x)} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{P(x)}{x(\sqrt[m]{1+P(x)}^{m-1} + \cdots + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}}{(1+P(x))^{\frac{m-1}{m}} + \cdots + 1} \\ &= \frac{a_1}{m}. \end{aligned}$$

求下列的极限:

455. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1}$ (m 及 n 表整数).

解 当 m 及 n 为正整数时, 我们有

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{x^{\frac{n-1}{n}} + x^{\frac{n-2}{n}} + \cdots + 1}{x^{\frac{m-1}{m}} + x^{\frac{m-2}{m}} + \cdots + 1} \rightarrow \frac{n}{m} (x \rightarrow 1).$$

若 m 及 n 为负整数时, 设 $m = -m'$, $n = -n'$, 其中 m' 及 n' 为正整数, 于是

$$\frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{1 - \sqrt[m']{x}}{1 - \sqrt[n']{x}} \cdot \frac{\sqrt[n']{x}}{\sqrt[m']{x}} \rightarrow \frac{n'}{m'} = \frac{n}{m} \quad (x \rightarrow$$

1).

当 m 及 n 中只有一个为负整数仍然成立. 因此

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{n}{m} \quad (m \neq 0).$$

456. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}}$

解 设 $x = t^n$, 则

$$\begin{aligned} & \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} \\ &= \frac{(1 - t^{3 \cdot 4 \cdots n})(1 - t^{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdots n}) \cdots (1 - t^{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (n-1)})}{(1 - t^n)^{n-1}} \\ &= \frac{(1 + t + t^2 + \cdots + t^{\frac{n!}{2} - 1})(1 + t + \cdots + t^{\frac{n!}{3} - 1}) \cdots (1 + t + \cdots + t^{\frac{n!}{n} - 1})}{(1 + t + \cdots + t^{n! - 1})^{n-1}} \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow 1$ 时, $t \rightarrow 1$, 于是上式趋向于

$$\frac{\frac{n!}{2} \cdot \frac{n!}{3} \cdots \frac{n!}{n}}{(n!)^{n-1}} = \frac{1}{n!},$$

即

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - \sqrt{x})(1 - \sqrt[3]{x}) \cdots (1 - \sqrt[n]{x})}{(1 - x)^{n-1}} = \frac{1}{n!}.$$

457. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x].$

$$\begin{aligned}
 & \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{(x+a)(x+b)} - x] \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a)(x+b) - x^2}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a+b + \frac{ab}{x}}{1 + \sqrt{\left(1 + \frac{a}{x}\right)\left(1 + \frac{b}{x}\right)}} = \frac{a+b}{2}.
 \end{aligned}$$

$$458. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

$$\begin{aligned}
 & \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}) - x}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$459. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x)$$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\begin{aligned}
 & x(\sqrt{x^2 + 2x} - 2\sqrt{x^2 + x} + x) \\
 &= \frac{\sqrt{1+2t} - 2\sqrt{1+t} + 1}{t^2} \\
 &= \frac{(\sqrt{1+2t} + 1)^2 - 4(1+t)}{t^2(\sqrt{1+2t} + 1 + 2\sqrt{1+t})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})} \\
&= \frac{2(\sqrt{1+2t}-1-t)(1+\sqrt{1+2t})^2}{t^2(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2} \\
&= \frac{-4}{(\sqrt{1+2t}+1+2\sqrt{1+t})(1+\sqrt{1+2t})^2}
\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $t \rightarrow 0$, 于是上式趋向于 $-\frac{1}{4}$,

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x) = -\frac{1}{4}.$$

460. $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right].$

解

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow +0} \left[\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right) - \left(\frac{1}{x} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{2\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}} + \sqrt{\frac{1}{x}}} - \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x}}}}
\end{aligned}$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 1^0} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{1 + \sqrt{x + x\sqrt{x}}} + \sqrt{1 - \sqrt{x + x\sqrt{x}}}}$$

$$= 1.$$

461. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - x^2 + 1})$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)^2} + \sqrt[3]{(x^3 + x^2 + 1)(x^3 - x^2 + 1)} + \sqrt[3]{(x^3 - x^2 + 1)^2}}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

462. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3 + 3x^2)^2 - (x^2 - 2x)^3}{\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^{10}} + \sqrt{(x^3 + 3x^2)^8(x^2 - 2x)^3} + \dots + \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^{15}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 \left(12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2} \right)}{\sqrt[6]{(x^3 + 3x^2)^{10}} + \dots + \sqrt[6]{(x^2 - 2x)^{15}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{12 - \frac{3}{x} + \frac{8}{x^2}}{\sqrt[6]{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{10}} + \dots + \sqrt[6]{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{15}}}$$

$$= 2.$$

463. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}].$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{3}} [(x+1)^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{2}{3}}] \cdot [(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^3-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}]}{(x+1)^{\frac{4}{3}} + (x^3-1)^{\frac{2}{3}} + (x-1)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}} - \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{4}{3}}}$$

$$= \frac{4}{3}.$$

464. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^2+2x-x-1})(\sqrt{x^2+2x+x+1})}{(\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x^2+2x+x+1})}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left[\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 2\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1\right] \left[\sqrt{1+\frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right]}$$

$$= -\frac{1}{4}.$$

465. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x]$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[n]{(x+a_1)\cdots(x+a_n)} - x]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+a_1)\cdots(x+a_n) - x^n}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n (x+a_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^n a_i \right) x^{n-1} + \cdots + \prod_{i=1}^n a_i}{\sum_{j=1}^n \left[\prod_{i=1}^n (x+a_i)^{\frac{n-j}{n}} \right] x^{j-1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i + o\left(\frac{1}{x}\right)}{\sum_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^j \left(1 + \frac{a_i}{x}\right)^{\frac{n-j}{j}} \right)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.
\end{aligned}$$

466. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$ (n 表自然数).

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})^n + (x + \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right)^n \right] \\
&= 2^n.
\end{aligned}$$

467. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$ (n 表自然数).

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x} \left[(x + \sqrt{1+x^2})^{n-1} + (x + \sqrt{1+x^2})^{n-2} \right. \\
&\quad \left. (\sqrt{1+x^2} - x) + \dots + (\sqrt{1+x^2} - x)^{n-1} \right] \\
&= 2n.
\end{aligned}$$

468. 设二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的系数 a 趋于零, 系数 b 与 c 为常数, 且 $b \neq 0$, 试研究此二次方程式之二根 x_1 及 x_2 的性质.

解 $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

不失一般性, 假设 $b > 0$, 于是, 有

$$\lim_{a \rightarrow 0} x_2 = \infty$$

及

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} x_1 &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{2a(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})} \\ &= -2c \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \\ &= -\frac{c}{b}. \end{aligned}$$

469. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$$

求常数 a 和 b .

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \\ &= \frac{(1 - a)x^2 - (a + b)x + (1 - b)}{x + 1}. \end{aligned}$$

按假设, 上式的极限为零的必要条件是

$$1 - a = 0 \quad \text{及} \quad a + b = 0,$$

解之, 得

$$a = 1, \quad b = -1.$$

470. 从条件:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_1x - b_1) = 0$$

$$\text{和} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - a_2x - b_2) = 0$$

求常数 a_i 和 b_i ($i = 1, 2$).

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \sqrt{x^2 - x + 1} - a_1x - b_1 \\ &= \frac{(1 - a_1^2)x^2 - (1 + 2a_1b_1)x + (1 - b_1^2)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + a_1x + b_1}, \end{aligned}$$

上式极限为零的必要条件是

$$1 - a_1^2 = 0 \quad \text{及} \quad 1 + 2a_1b_1 = 0,$$

解之,得

$$a_1 = \pm 1, \quad b_1 = \mp \frac{1}{2}.$$

同理可得

$$a_2 = \pm 1, \quad b_2 = \mp \frac{1}{2}.$$

求下列的极限:

471. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x}$
 $= 5 \cdot 1 = 5.$

472. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$.

解 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 为无穷小量, 而 $|\sin x| \leq 1$,

故 $\frac{\sin x}{x}$ 当 $x \rightarrow \infty$ 时为无穷小量, 即

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

473. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$ (m 及 n 为整数).

解 设 $x = \pi + y$, 则当 $x \rightarrow \pi$ 时, $y \rightarrow 0$. 于是,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(-1)^m \sin my}{(-1)^n \sin ny} \\ &= (-1)^{m-n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin my}{my} \cdot \frac{ny}{\sin ny} \cdot \frac{m}{n} \end{aligned}$$

$$= (-1)^{m-n} \frac{m}{n}.$$

$$474. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$475. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x} &\stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{\sin^3 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\cos x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2\cos^2 \frac{x}{2} \cos x} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$476. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos 4x \sin x}{\sin x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 2. \end{aligned}$$

$$477. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 2x \sin x}{x^2} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \cos x = 4. \end{aligned}$$

$$478. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin px - \cos px} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + \sin x}{2\sin^2 \frac{px}{2} + \sin px} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2} \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{px}{2} \left(\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{\frac{px}{2}}{\sin \frac{px}{2}} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{px}{2} + \cos \frac{px}{2}} \\ &= \frac{1}{p} \quad (p \neq 0). \end{aligned}$$

$$479. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\cos 2x \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 2y \sin y}{\sin 2y \cos y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos 2y}{2 \cos^2 y} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

其中 $x = \frac{\pi}{4} + y$.

480. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

解 设 $x = 1 - y$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} &= \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\pi y}{2}}{\sin \frac{\pi y}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \cos \frac{\pi y}{2} \right] = \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

481. 证明等式:

(a) $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$; (b) $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$;

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \operatorname{tga} (a \neq \frac{2n-1}{2}\pi; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

证 (a) $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x+a}{2} \right|$
 $\leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|.$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

只须 $|x-a| < \varepsilon$, 取 $\delta = \varepsilon$, 则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时,

$$|\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

此即 $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$.

$$(6) \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ = \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a.$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{tg} x = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} \sin x}{\lim_{x \rightarrow a} \cos x} = \frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tga}.$$

其中 $a \neq \frac{2n-1}{2}\pi$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

求下列的极限:

482. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$.

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{x-a}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$

483. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$.

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}$
 $= \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \cdot \sin \frac{x+a}{2}$
 $= -\sin a.$

484. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a}$.

解 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tga}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{(x-a)\cos x \cos a}$

$$= \frac{1}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$485. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} a}{x - a}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x-a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a}$$

$$= - \frac{1}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$486. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sec x - \sec a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{(x-a)\cos x \cos a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos x \cos a} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$= \frac{\sin a}{\cos^2 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$487. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cosec} a}{x - a}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin x \sin a}$$

$$= - \frac{\cos a}{\sin^2 a} \quad (a \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

*) 利用 482 题的结果.

$$488. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin(a+2x) - \sin(a+x)] - [\sin(a+x) - \sin a]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} - 2\cos\left(a + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{x}{2} \left[\cos\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{x}{2}\right) \right]}{x^2} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cdot \sin(a+x) \\
&= - \sin a.
\end{aligned}$$

489. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(a+2x) - 2\cos(a+x) + \cos a}{x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\cos(a+2x) - \cos(a+x)] - [\cos(a+x) - \cos a]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) \sin \frac{x}{2} + 2\sin\left(a + \frac{x}{2}\right) \sin \frac{x}{2}}{x^2} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin \frac{x}{2} \left[\sin\left(a + \frac{3x}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{x}{2}\right) \right]}{x^2} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 \cos(a+x) \\
&= - \cos a.
\end{aligned}$$

490. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tga}}{x^2}$.

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+2x) - 2\operatorname{tg}(a+x) + \operatorname{tga}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\operatorname{tg}(a+2x) - \operatorname{tg}(a+x)] - [\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tga}]}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\frac{\sin(a+2x)\cos(a+x) - \cos(a+2x)\sin(a+x)}{\cos(a+2x)\cos(a+x)}}{x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\frac{-\cos a \sin(a+x) - \cos(a+x)\sin a}{\cos(a+x)\cos a}}{x^2} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [\cos(a+x)\cos a - \cos(a+x)\cos(a+2x)]}{x^2 \cos a \cos(a+2x) \cos^2(a+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{2\sin(a+x)}{\cos a \cos(a+2x) \cos(a+x)} \\
&= \frac{2\sin a}{\cos^3 a} \quad (a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$491. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctga}}{x^2}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg}(a+2x) - 2\operatorname{ctg}(a+x) + \operatorname{ctga}}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x \sin(a+x) [\sin a - \sin(a+2x)]}{x^2 \sin a \sin^2(a+x) \sin(a+2x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \frac{2\cos(a+x)}{\sin a \cdot \sin(a+x) \sin(a+2x)} \\
&= \frac{2\cos a}{\sin^3 a} \quad (a \neq k\pi; k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$492. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(a+x)\sin(a+2x) - \sin^2 a}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} [\cos x - \cos(2a+3x)] - \sin^2 a}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos(2a + 3x) - (1 - \cos 2a)}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x} + \frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3 \sin \left(2a + \frac{3x}{2} \right)}{2} \right] \\
&= \frac{3}{2} \sin 2a.
\end{aligned}$$

493. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{(2\sin x - 1)(\sin x + 1)}{(2\sin x - 1)(\sin x - 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} = -3.
\end{aligned}$$

494. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$

解 因为

$$\begin{aligned}
&1 - \cos x \cos 2x \cos 3x \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x \\
&= 1 - \frac{1}{2}\cos 4x \cos 2x - \frac{1}{2}\cos^2 2x \\
&= 1 - \frac{1}{4}(\cos 6x + \cos 2x) - \frac{1}{4}(1 + \cos 4x) \\
&= \frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x).
\end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 - \cos x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x)}{2 \sin 2 \frac{x}{2}} \\
&= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin 2x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 + \left(\frac{\sin 3x}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4} (4 + 16 + 36) = 14.
\end{aligned}$$

495. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x}$.

解 设 $x = \frac{\pi}{3} + y$, 则

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 - 2\cos x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{1 - \cos y + \sqrt{3} \sin y} \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin y}{y}}{\frac{\sin \frac{y}{2}}{\frac{y}{2}} \sin \frac{y}{2} + \sqrt{3} \frac{\sin y}{y}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

496. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}^3 x - 3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \frac{\sin^2 x - 3\cos^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg}x(\sin x + \sqrt{3} \cos x)}{-\frac{1}{2} \cos^2 x} = -24.$$

$$497. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tg}x}{1 - \operatorname{tga}\operatorname{tg}x}\right) \left(\frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tg}x}{1 + \operatorname{tga}\operatorname{tg}x}\right) - \operatorname{tg}^2 a}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg}^4 a - 1)}{x^2 (1 - \operatorname{tg}^2 a \operatorname{tg}^2 x)} = \operatorname{tg}^4 a - 1 = \frac{-\cos 2a}{\cos^4 a}$$

$(a \neq \frac{2k+1}{2}\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$

$$498. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}^3 x}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \operatorname{ctg}^3 x}{2 - \operatorname{ctg}x - \operatorname{ctg}^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x - \cos^3 x}{2\sin^3 x - \sin^2 x \cos x - \cos^3 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x}{2\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x} = \frac{3}{4}.$$

$$499. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}.$$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x^3 (\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x (\sqrt{1 + \operatorname{tg}x} + \sqrt{1 + \sin x})}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \\
&\quad \frac{1}{\cos x (\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} + \sqrt{1 + \sin x})} \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

500. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x})}{\sqrt{1 + x\sin x} - \sqrt{\cos x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\frac{\sin x}{x} + \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

501. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x}(1 - \sqrt[6]{\cos x})}{\sin^2 x} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[6]{\cos x} + \dots + \sqrt[6]{\cos^5 x}} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{x^2}{\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{1 + \sqrt[6]{\cos x} + \cdots + \sqrt[6]{\cos^5 x}}$$

$$= \frac{1}{12}$$

502. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x^2}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}$

$$= \sqrt{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}} \cdot \left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right)^2 = \sqrt{2}.$$

503. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2} (1 + \sqrt{\cos x})}$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \left(\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}}{\sin \frac{\sqrt{x}}{2}} \right)^2 \frac{x}{1 + \sqrt{\cos x}} = 0.$$

504. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

解 不妨令 $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x} \sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \cos x (1 - \sqrt{\cos 2x} \cdot \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x} + \sqrt{\cos 2x}(1 - \sqrt[3]{\cos 3x})}{x^2} \\
&= \frac{1}{2} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2(1 + \sqrt{\cos 2x})} \\
&\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2(1 + \sqrt[3]{\cos 3x} + \sqrt[3]{\cos^2 3x})} = 3.
\end{aligned}$$

505. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$.

解 $\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}$

$$= 2 \sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \cos \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}$$

因为 $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} \rightarrow 0$

($x \rightarrow +\infty$), 所以,

$$\sin \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

又因 $\left| \cos \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2} \right| \leq 1$,

故 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$.

506. (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$.

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} = \frac{1}{2}$;

$$\begin{aligned}
&(b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = \sqrt{\frac{2}{3}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x} \right)^{\frac{1}{1+\sqrt{x}}} = 1^0 = 1, \end{aligned}$$

$$507. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2} = 0.$$

$$508. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}}.$$

解 因为当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \rightarrow \frac{3}{2}.$$

$$\text{及} \quad \frac{x^3}{1-x} = \frac{x^2}{\frac{1}{x} - 1} \rightarrow -\infty,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 1}{2x^2 + x + 1} \right)^{\frac{x^3}{1-x}} = 0.$$

$$509. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} \right).$$

解 因为 $\left| \sin \frac{2\pi n}{3n+1} \right| \leq 1$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{2\pi n}{3n+1} = 0.$$

$$510. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}+0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x}.$$

解 因为当 $x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0$ 时,

$$1 < \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) < +\infty$$

及 $\operatorname{tg} 2x \rightarrow -\infty$,

所以

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4} + 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{8} + x \right) \right]^{\operatorname{tg} 2x} = 0.$$

$$511. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}} = 1.$$

$$512. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x^2 - 1}{2}} \right)^{\frac{x^2 - 1}{2} \cdot 2 + 1} = e^2.$$

$$513. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{2x^2 - 3x - 2} \right)^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 1.$$

$$514. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (-2x)]^{\frac{1}{-2x} \cdot (-2)} = e^{-2}.$$

$$515. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x-a} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x-a}{2a}} \right)^{\frac{x-a}{2a} \cdot 2a + a} = e^{2a}.$$

$$516. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_2 x + b_2} \right)^x \quad (a_1 > 0, a_2 > 0).$$

解
$$\left(\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}\right)^x = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \cdot \left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}}\right)^x$$

$$= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x + \frac{b_2}{a_2}}\right)^{\frac{x + \frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}} \left(\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\right) - \frac{b_2}{a_2}}$$

$$\frac{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}}{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}}$$

(1) 当 $a_1 = a_2 = a$ 时,

$$\left(\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}\right)^x = \left(1 + \frac{1}{x + \frac{b_2}{a}}\right)^{\frac{x + \frac{b_2}{a}}{\frac{b_1}{a} - \frac{b_2}{a}} \cdot \frac{b_1 - b_2}{a} - \frac{b_2}{a}}$$

$$\frac{\frac{b_1 - b_2}{a}}{\frac{b_1 - b_2}{a}}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}\right)^x = e^{\frac{b_1 - b_2}{a_1}}.$$

(2) 当 $a_1 < a_2$ 时, $0 < \frac{a_1}{a_2} < 1$,

于是,

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty),$$

而
$$\left(\frac{x + \frac{b_1}{a_1}}{x + \frac{b_2}{a_2}}\right)^x \rightarrow e^{\frac{b_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}\right)^x = 0.$$

(3) 当 $a_1 > a_2$ 时, $\frac{a_1}{a_2} > 1$.

于是,

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^x \rightarrow +\infty,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_1x + b_1}{a_2x + b_2}\right)^x = +\infty.$$

517. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \cos^2 x} = e.$

518. $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\operatorname{ctg} \pi x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\frac{1}{\sin \pi x} \cdot \cos \pi x} = e^{-1}.$

519. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x}}\right]^{\frac{1 + \sin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 + \sin x)}} = e^0 = 1.$

520. $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow a} \left[1 + \frac{1}{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a}} \right]^{\frac{\sin a}{\sin x - \sin a} \cdot \frac{\sin x - \sin a}{x - a} \cdot \frac{1}{\sin a}} \\
&= e^{\operatorname{ctga}^*} (a \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)
\end{aligned}$$

*) 利用 482 题的结果.

521. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$

解 $\left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = \left[1 + \frac{1}{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x}} \right]^{\frac{\cos 2x}{\cos x - \cos 2x} \cdot \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \cos 2x}}$

因为

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} &= \frac{\cos x + 1 - 2\cos^2 x}{x^2} \\
&= \frac{1 - \cos x}{x^2} (1 + 2\cos x) = \frac{1 + 2\cos x}{2} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

($x \rightarrow 0$),

所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{3}{2}}.$$

522. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\frac{2\operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \operatorname{tg} x - 1)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x - 1} \cdot \frac{-2\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 1}} = e^{-1}.$$

523. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{ctg} x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{-\frac{\operatorname{tg} x}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} \cdot \frac{-\operatorname{ctg} x}{2}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$524. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right]^{\operatorname{ctg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} \right)^{\operatorname{ctg} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{-2 \operatorname{tg} x}} \right]^{\frac{1 + \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} x} \cdot \left(\frac{-2}{1 + \operatorname{tg} x} \right)} = e^{-2}. \end{aligned}$$

$$525. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x,$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x \\ = \left[1 + \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1} \cdot x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right)} \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} x \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} - 1 \right) &= \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} - \frac{2 \sin \frac{1}{2x} \sin \frac{1}{2x}}{\frac{1}{2x} \cdot 2} \\ &\rightarrow 1 \quad (x \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

$$526. \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \ln \cos \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} e^{\frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(\cos \sqrt{x} - 1 + 1)}{\cos \sqrt{x} - 1} (\cos \sqrt{x} - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} e^{-\frac{1}{x} \cdot 2 \sin^2 \frac{\sqrt{x}}{2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

*) 原题为 $x \rightarrow 0$, 应改为 $x \rightarrow +0$.

**) 利用 529 题的结果.

$$527. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n.$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+x}{n-1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{x+1}} \right)^{\frac{n-1}{x+1} \cdot (x+1) + 1} = e^{x+1}.$$

$$528. \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{x}{\sqrt{n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{-\frac{n}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}} \right)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{\sqrt{n}}} \cdot \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{n}}}{\frac{x}{\sqrt{n}}} \right)^2 \cdot \left(-\frac{n}{2} \right)} = e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{aligned}$$

$$529. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1.$$

$$530. \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - \ln x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \\ &= \ln e = 1. \end{aligned}$$

$$531. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln x - \ln a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \frac{x}{a}}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \ln \left[1 + \frac{1}{\frac{x-a}{a}} \right]^{\frac{a}{x-a} \cdot \frac{1}{a}} = \ln e^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{a}.$$

532. $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x].$

解 $\sin \ln(x+1) - \sin \ln x$
 $= 2 \cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2} \sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2}.$

因为

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$$

所以

$$\sin \frac{\ln(x+1) - \ln x}{2} \rightarrow 0;$$

又因 $\cos \frac{\ln(x+1) + \ln x}{2}$ 为有界函数, 所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sin \ln(x+1) - \sin \ln x] = 0.$$

533. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}.$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 - x + 1)}{\ln(x^{10} + x + 1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + \ln \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{10 \ln x + \ln \left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}} \right)}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)}{10 + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{10}} \right)} = \frac{1}{5}.$

534. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\lg \frac{100 + x^2}{1 + 100x^2} \right) = \lg \frac{1}{100} = -2.$

$$535. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{2x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \ln(2e^{-3x} + 1)}{2x + \ln(3e^{-2x} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{1}{x} \ln(2e^{-3x} + 1)}{2 + \frac{1}{x} \ln(3e^{-2x} + 1)} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$536. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\ln(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln x + \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3} \ln x + \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{2}} + 1 + x^{-\frac{1}{6}})}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(x^{-\frac{1}{3}} + 1 + x^{-\frac{1}{12}})} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$537. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2} \quad (x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) + \log(x-h) - 2\log x}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x^2 - h^2) - \log x^2}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2} \log \left(1 - \frac{h^2}{x^2} \right)^{-\frac{x^2}{h^2}} \right) = -\frac{1}{x^2} \log e. \end{aligned}$$

$$538. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Intg} \left(\frac{\pi}{4} + ax \right)}{\sin bx}$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sin bx} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) - 1 \right) \right]^{\frac{1}{\sin bx}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + ax\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \right]^{\frac{1}{\sin bx}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[1 + \frac{\sqrt{2} \sin ax}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \right]^{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)}{\sqrt{2} \sin ax} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + ax\right)} \cdot \frac{\sin ax}{ax} \cdot \frac{ax}{\sin bx} \cdot \frac{a}{b}} \\
&= \ln e^{\frac{2a}{b}} = \frac{2a}{b}.
\end{aligned}$$

$$539. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos ax}{\ln \cos bx} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln \cos ax}{\cos ax - 1} \cdot \frac{\cos bx - 1}{\ln \cos bx} \cdot \frac{\cos ax - 1}{\cos bx - 1} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{bx}{2}} = \frac{a^2}{b^2}.
\end{aligned}$$

$$540. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right].$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\ln \frac{nx + \sqrt{1 - n^2 x^2}}{x + \sqrt{1 - x^2}} \right] = \ln 1 = 0.$$

$$541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \quad (a > 0).$$

解 设 $a^x - 1 = y$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}} \\ &= \frac{1}{\log_a e} = \ln a.\end{aligned}$$

542. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} (a > 0).$

解
$$\begin{aligned}\frac{a^x - x^a}{x - a} &= \frac{a^a \left[a^{x-a} - \left(\frac{x}{a} \right)^a \right]}{x - a} \\ &= a^a \cdot \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \frac{\left(\frac{x}{a} \right)^a - 1}{x - a} \\ &= a^a \frac{a^{x-a} - 1}{x - a} - a^a \frac{e^{a \ln \frac{x}{a}} - 1}{a \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{a \ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{x - a},\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow a$ 时, 等式第一项趋向 $a^a \ln a$, 而第二项趋向 $a^a \cdot 1 \cdot 1 = a^a$, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = a^a \ln a - a^a = a^a \ln \frac{a}{e}.$$

543. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} (a > 0).$

解
$$\frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \cdot \frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \cdot \frac{x \ln x - a \ln a}{x - a}.$$

而当 $x \rightarrow a$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{x \ln x - a \ln a}{x - a} &= \frac{x \ln x - x \ln a}{x - a} + \ln a \\ &= \frac{x}{a} \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{x-a}{a} \right)}{\frac{x-a}{a}} + \ln a \rightarrow 1 + \ln a = \ln ea.\end{aligned}$$

又

$$\frac{e^{x \ln x - a \ln a} - 1}{x \ln x - a \ln a} \rightarrow 1 (x \rightarrow a),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a} = a^a \ln ea.$$

544. $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{e^x}\right)^{\frac{e^x}{x} \cdot e^{-x}} = e \cdot e = e^2.$

545. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 $\left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
 $= \left[1 + \frac{1}{\frac{1 + x \cdot 3^x}{x(2^x - 3^x)}}\right]^{\frac{1}{x^2}}$

因为

$$\begin{aligned} & \frac{2^x - 3^x}{x(1 + x \cdot 3^x)} \\ &= \frac{1}{1 + x \cdot 3^x} \cdot \left(\frac{2^x - 1}{x} - \frac{3^x - 1}{x}\right) \rightarrow \\ & \ln 2 - \ln 3^* = \ln \frac{2}{3} \quad (x \rightarrow 0), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x \cdot 2^x}{1 + x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\ln \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}.$$

*) 利用 541 题的结果.

546. $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right).$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right)^n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \right) \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{1}{n}} = e^2.
 \end{aligned}$$

$$547. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{\beta x}}{\sin ax - \sin \beta x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax} - e^{\beta x}}{\sin ax - \sin \beta x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} [e^{(a-\beta)x} - 1]}{2 \cos \frac{a+\beta}{2} x \sin \frac{a-\beta}{2} x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{(a-\beta)x} - 1}{(a-\beta)x} \cdot \frac{\frac{a-\beta}{2} x}{\sin \frac{a-\beta}{2} x} \cdot \frac{e^{\beta x}}{\cos \frac{a+\beta}{2} x} \\
 &= \ln e^{*}) = 1.
 \end{aligned}$$

*) 利用 541 题的结果.

$$548. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} &= a^{\alpha-\beta} \cdot \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta - 1} \\
 &= a^{\alpha-\beta} \cdot \frac{e^{\alpha \ln \frac{x}{a}} - 1}{\alpha \ln \frac{x}{a}} \cdot \frac{\beta \ln \frac{x}{a}}{e^{\beta \ln \frac{x}{a}} - 1} \cdot \frac{a}{\beta}.
 \end{aligned}$$

当 $x \rightarrow a$ 时, $\ln \frac{x}{a} \rightarrow 0$, 于是上式趋向 $\frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta}$,

即

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} a^{\alpha-\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

$$549. \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow b} \frac{a^x - a^b}{x - b} = \lim_{x \rightarrow b} a^b \cdot \frac{a^{x-b} - 1}{x - b} = a^b (\ln a^{a^*}).$$

*) 利用 541 题的结果.

$$550. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} + a^{x-h} - 2a^x}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} a^x \cdot \frac{a^h + a^{-h} - 2}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x}{a^h} \left(\frac{a^h - 1}{h} \right)^2 = a^x \ln^2 a^{a^*}. \end{aligned}$$

*) 利用 541 题的结果.

$$551. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{x+b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{2x+a+b}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a} + a} \left(1 + \frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b} + b}}{\left(1 + \frac{a+b}{x}\right)^{\frac{x}{a+b} \cdot [2(a+b)] + (a+b)}} \\ &= \frac{e^a \cdot e^b}{e^{2(a+b)}} = e^{-(a+b)}. \end{aligned}$$

$$552. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) \quad (x > 0).$$

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x^*$.

*) 利用 541 题的结果.

553. $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x}) \quad (x > 0)$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2(\sqrt[n]{x} - \sqrt[n+1]{x})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n+1}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1)}{\frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + n}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n(n+1)}} - 1}{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n(n+1)} + \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2 + n}\right)} = \ln x.$$

554. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a - 1 + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n \quad (a > 0, b > 0)$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a - 1 + \sqrt[n]{b}}{a} \right)^n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^{\frac{a}{b^{\frac{1}{n}} - 1} \cdot \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{a}} = e^{\frac{1}{a} \ln b}$$

$$= \sqrt[n]{b}.$$

555. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n \quad (a > 0, b > 0)$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2} \right)^n$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 1}{2} \right) \left(\frac{1}{\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 1}{2}} \right) \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} - 1}{2} \right)^n \\
&= e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab} \quad (a > 0, b > 0).
\end{aligned}$$

*) 利用 541 题的结果.

$$556. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

解 利用 555 题的方法:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3} \right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^x + b^x + c^x}{3} - 1} \cdot \frac{a^x - 1 + b^x - 1 + c^x - 1}{3x}} \\
&= \sqrt[3]{abc}.
\end{aligned}$$

$$557. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

解 利用 541 题的结果, 得

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1} - a - b - c}{x(a + b + c)} \\
&= \frac{1}{a + b + c} \lim_{x \rightarrow 0} \left(a \cdot \frac{a^x - 1}{x} + b \cdot \frac{b^x - 1}{x} + c \cdot \frac{c^x - 1}{x} \right) \\
&= \ln(a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}},
\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} \right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1 \right)^{\frac{1}{\frac{a^{x+1} + b^{x+1} + c^{x+1}}{a + b + c} - 1} \cdot \frac{1}{x}} \\
&= (a^a b^b c^c)^{\frac{1}{a+b+c}}.
\end{aligned}$$

$$558. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}{a^x + b^x}} \right)^{\frac{a^x + b^x}{a^{x^2} + b^{x^2} - a^x - b^x}} \\
&= \left[x \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) - \frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right] \cdot \frac{1}{a^x + b^x} \\
&= e^{-\frac{1}{2}(\ln a - \ln b)} = \frac{1}{\sqrt{ab}}.
\end{aligned}$$

$$559. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{x^2} - b^{x^2}}{(a^x - b^x)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^{x^2} - 1}{x^2} - \frac{b^{x^2} - 1}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{a^x - 1}{x} - \frac{b^x - 1}{x} \right)^2} \\
&= (\ln a - \ln b) \cdot \frac{1}{(\ln a - \ln b)^2} = \frac{1}{\ln a - \ln b} \\
&= \left(\ln \frac{a}{b} \right)^{-1}.
\end{aligned}$$

$$560. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a} = \lim_{x \rightarrow a} a^{x^a} \cdot \frac{a^{a^x - x^a} - 1}{a^x - x^a} = a^{a^a} \ln a.$$

$$561. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{\ln(1 + 2^x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 3^x)}{3^x} \cdot \frac{2^x}{\ln(1 + 2^x)} \cdot \left(\frac{2}{3} \right)^{-x}
\end{aligned}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 0^+ = 0.$$

*) 利用 529 题的结果.

$$\begin{aligned} (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln 3 + \ln(1+3^{-x})}{x \ln 2 + \ln(1+2^{-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 3 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+3^{-x})}{\ln 2 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1+2^{-x})} = \frac{\ln 3}{\ln 2}. \end{aligned}$$

$$562. \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2^x) \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}} \cdot \frac{x \ln 2 + \ln(2^{-x} + 1)}{\frac{x}{3}} \\ &= 3 \ln 2 = \ln 8. \end{aligned}$$

$$563. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2. \quad *$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \lg_x 2 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} \cdot \ln 2 \\ &= -\ln 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln[1+(x-1)]} = -\ln 2. \quad ** \end{aligned}$$

*) 利用 529 题的结果.

564. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \quad (a > 1, n > 0).$$

证 当 $x \geq 1$ 时, 存在唯一的正整数 k , 使

$$k \leq x < k+1.$$

于是当 $n > 0$ 时, 我们有

$$\frac{x^n}{a^x} < \frac{(k+1)^n}{a^k}$$

及

$$\frac{x^n}{a^x} > \frac{k^n}{a^{k+1}} = \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a}.$$

因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $k \rightarrow +\infty$, 所以有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^k} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(k+1)^n}{a^{k+1}} \cdot a = 0 \cdot a^{(*)} = 0$$

及

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^{k+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k^n}{a^k} \cdot \frac{1}{a} = 0 \cdot \frac{1}{a}^{(*)} = 0.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0.$$

*) 利用 60 题的结果.

565. 证明:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0 \quad (a > 1, \epsilon > 0).$$

证 设 $\log_a x = y$, 则 $x = a^y$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$. 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{y}{(a^y)^\epsilon} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{y^{\frac{1}{\epsilon}}}{a^y} \right)^\epsilon = 0^{(*)},$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a x}{x^\epsilon} = 0.$$

*) 利用 564 题的结果.

求下列的极限:

$$566. (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})}.$$

$$\text{解 } (a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \ln(1 + x^2 e^{-x})}{2x + \ln(1 + x^4 e^{-2x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x^2 e^{-x}} \cdot x e^{-x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x^4 e^{-2x}} \cdot x^3 e^{-2x}} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned} (6) \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + e^x)}{\ln(x^4 + e^{2x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{\ln(1 + x^2 e^{-x})}{x}}{2 + \frac{\ln(1 + x^4 e^{-2x})}{x}} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

其中利用了结果

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n a^{-x} = 0 \quad (n > 0, a > 1),$$

因而

$$x^2 e^{-x} \rightarrow 0 \text{ 及 } x^4 e^{-2x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +\infty).$$

$$567. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x e^x)}{\ln(x + \sqrt{1 + x^2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1 + x e^x)}{x e^x} \cdot x e^x}{\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\right)}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x e^x}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x \sqrt{1 + x^2} = 1. \end{aligned}$$

$$568. \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [(x + 2)\ln(x + 2) - 2(x + 1)\ln(x + 1) + x \ln x].$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} [(x + 2)\ln(x + 2) - 2(x + 1)\ln(x + 1) + x \ln x]$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{(x+2)^{x+2} \cdot x^x}{(x+1)^{2x+2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2 + 2}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{2x+2}} \\
&= \ln \frac{e^2}{e^2} = 0.
\end{aligned}$$

569. $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right] \quad (a > 1).$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} \left[\ln(x \ln a) \cdot \ln \left(\frac{\ln ax}{\ln \frac{x}{a}} \right) \right]$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(\frac{\ln a + \ln x}{\ln x - \ln a} \right)^{\ln x + \ln(\ln a)} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \ln \left(1 + \frac{2 \ln a}{\ln x - \ln a} \right)^{\frac{\ln x - \ln a}{2 \ln a} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{\ln x + \ln(\ln a)}{\ln x - \ln a}} \\
&= \ln e^{\ln a^2} = \ln a^2.
\end{aligned}$$

570. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x + 1}{x - 1} \right].$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \ln^{-2} \frac{x + 1}{x - 1} \right]$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \right)}{\ln^2 \left(1 + \frac{2}{x - 1} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \right)}{\ln^2 \left[\left(1 + \frac{2}{x - 1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]} \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{2}{(x + \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})} \right)}{\ln^2 \left[\left(1 + \frac{2}{x - 1} \right)^{\frac{x-1}{2}} \right]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{(\sqrt{x^2-1} + \sqrt{x^2-1})}{\sqrt{2}} \right\} \cdot \frac{2}{(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} \\
& \frac{2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2} \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2}{2(x + \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2}{2 \left[1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right] \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right]} \\
& = \frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

$$571. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x} - 1}{e^{x^2} - 1} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sin x}{(e^{x^2} - 1)(\sqrt{1+x\sin x} + 1)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} (1 + \sqrt{1+x\sin x})} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$572. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(xe^x) - \cos(xe^{-x})}{x^3} \\
& = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2} \sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{x^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \frac{x(e^x + e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x + e^{-x})}{2}} \cdot \frac{\sin \frac{x(e^x - e^{-x})}{2}}{\frac{x(e^x - e^{-x})}{2}} \cdot \frac{x^2(e^{4x} - 1)}{4x^3 e^{2x}} \right] \\
&= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} = -2.
\end{aligned}$$

573. $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} (2e^{\frac{x}{x+1}} - 1)^{\frac{x^2+1}{x}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ [1 + 2(e^{\frac{x}{x+1}} - 1)] 2e^{\frac{1}{x+1}-1} \right\}^{\frac{2(x^2+1)}{x+1} \cdot \frac{\frac{x}{x+1}-1}{\frac{x}{x+1}}} \\
&= e^2
\end{aligned}$$

574. $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$

解 $\lim_{x \rightarrow 1} (2-x)^{\sec \frac{\pi x}{2}}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} [1 + (-x+1)]^{\frac{1}{1-x} \cdot \frac{\frac{\pi(x-1)}{2}}{\sin \frac{\pi(x-1)}{2}} \cdot \frac{2}{\pi}} = e^{\frac{2}{\pi}}.$$

575. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^\alpha x)(1 - \sin^\beta x)}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^\alpha x)(1 - \sin^\beta x)}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{\sqrt{(1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x})(1 - e^{\beta \cdot \ln \sin x})}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - e^{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}}{(\alpha+\beta) \ln \sin x} \right) \cdot \left(\frac{\alpha \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\alpha \cdot \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\beta \cdot \ln \sin x}{1 - e^{\beta \ln \sin x}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{(\alpha+\beta) \cdot \ln \sin x}{\sqrt{\alpha\beta} \cdot \ln \sin x} \right) = \frac{\alpha+\beta}{\sqrt{\alpha\beta}}.
\end{aligned}$$

注 其中, x 在 $\frac{\pi}{2}$ 的附近变化, 故 $\sin x > 0$.

$$576^+ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} \quad (\text{参见 340 题}).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2x} - 1)^2}{4e^{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln \left[1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x} - 1}{2x} \right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \cdot e^x}{\ln \left[1 + \frac{1}{2} (e^{\frac{3}{2}x} - e^{-\frac{3}{2}x})^2 \right]} \\ &\quad \cdot \left(\frac{3x}{e^{3x} - 1} \right)^2 \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

$$577. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x}}{\operatorname{ch} x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \operatorname{sh} \sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2 - x} \\ &= 2\operatorname{sh} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}}{2}, \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} &= \frac{2x}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \end{aligned}$$

($x \rightarrow +\infty$),

$$\frac{\operatorname{ch} \frac{1}{2} (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 - x})}{\operatorname{ch} x}$$

$$= \frac{e^{\frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}} + e^{-\frac{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2-x}}{2}}}{e^x + e^{-x}} \rightarrow 1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x^2+x} - \operatorname{sh} \sqrt{x^2-x}}{\operatorname{ch} x} = 2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}.$$

578. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \operatorname{lnch} x)$

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \operatorname{lnch} x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \ln \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + \ln 2 - \ln(1 + e^{2x})]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln 2 - \ln(e^{-2x} + 1)] = \ln 2.$$

579. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin 2x} - e^{\sin x})(e^{2x} + 1)}{e^{2x} - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} - \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{2} \right) (e^{2x} + 1)}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \right) 2}{1} = 1.$$

580. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}.$

解 $\left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2} = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}}}{2 \cos \frac{\pi}{n}} \right)^{n^2}$

$$= \left[1 + \frac{1}{\frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n}}} \right]^{\frac{2\cos \frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{\pi^2 (e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n})}{2\cos \frac{\pi}{n}}}$$

因为

$$\begin{aligned} & n^2 \left(e^{\frac{\pi}{n}} + e^{-\frac{\pi}{n}} - 2\cos \frac{\pi}{n} \right) \\ &= n^2 \left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}} \right)^2 + 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \right] \\ &= n^2 \left[\left(e^{\frac{\pi}{2n}} - e^{-\frac{\pi}{2n}} \right)^2 + 4\sin^2 \frac{\pi}{2n} \right] \\ &= \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2n}} - 1}{\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{e^{-\frac{\pi}{2n}} - 1}{-\frac{\pi}{2n}} \cdot \frac{\pi}{2} \right]^2 + \pi^2 \left[\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}} \right]^2 \\ &\longrightarrow 2\pi^2 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]^{n^2} = e^{x^2}.$$

581. $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x} = \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

582. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos(\sqrt{x^2+x}-x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

$$583. \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{arctg} \frac{x-4}{(x-2)^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$584. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi.$$

$$585. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg}x}{h}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(x+h) - \operatorname{arctg}x}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{h}{1+x(x+h)}}{\frac{h}{1+x(x+h)}} \cdot \frac{1}{1+x(x+h)} \right]$$

$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

*) 其中利用了结果: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}x}{x} = 1$.

$$586. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x) - \operatorname{arctg}(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)}{\frac{2x}{1-x}} \cdot \frac{\frac{2x}{2-x^2}}{\operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}} \cdot \frac{2-x^2}{1-x} \right] = 2.$$

$$587. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right].$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \operatorname{arctg} \frac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2n} \right) \right] \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{n(x^2+1)+x}}{\frac{1}{n(x^2+1)+x}} \cdot \frac{n}{n(x^2+1)+x} \right. \\
 & \quad \cdot \left. \left(\frac{1 + \frac{1}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2n}} \right)^{\frac{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2n}} \cdot \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}} \cdot \frac{x}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2n}}} \right] = \frac{e^x}{1+x^2}.
 \end{aligned}$$

$$588. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } & \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{2x+1}} \cdot \frac{x}{2x+1} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$589. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsin} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{arcsin} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1^{*}).
 \end{aligned}$$

*) 其中利用了结果: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} x}{x} = 1$.

$$590. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\operatorname{cosec}(\pi \sqrt{1+n^2})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{(-1)^n}{\sin(\pi \sqrt{1+n^2})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{-1}{\sin(n\pi - \pi \sqrt{1+n^2})}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{n} \right]^{\frac{n}{(-1)^n} \cdot \frac{n\pi - \pi \sqrt{1+n^2}}{\sin(n\pi - \pi \sqrt{1+n^2})}} \\ & \quad \cdot \frac{1}{n(\pi \sqrt{1+n^2} - n\pi)} \\ &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\pi(n^2+1-n^2)}} \\ &= e^{\frac{2}{\pi}} \quad (n\pi - \pi \sqrt{1+n^2} \rightarrow 0). \end{aligned}$$

$$591. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}}$$

解 设 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^{100}} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{100}}{e^{y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{(y^2)^{50}}{e^{y^2}} = 0^*.$$

*) 利用 564 题的结果.

$$592. \lim_{x \rightarrow +0} x \ln x.$$

解 设 $y = \frac{1}{x}$, 则

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln y}{y} = 0^*.$$

*) 利用 565 题的结果.

$$593. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x); \quad (b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x).$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = +\infty;$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x} + x} = \frac{1}{2}.$$

$$594. (a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2});$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}).$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2} + \sqrt{1-x+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}}^{*)} = -1$$

*) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $x = -\sqrt{x^2}$.

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1}}^{*)} = 1.$$

*) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $x = \sqrt{x^2}$.

$$595. (a) \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x}.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \frac{\pi}{2};$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 1+0} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = -\frac{\pi}{2}.$$

$$596. (a) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 1;$

(b) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0.$

597. (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x};$ (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}.$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} \cdot \frac{e^x}{x} \right] = 0;$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{\ln(e^{-x}+1)}{x} \right] = 1.$

598. 证明:

(a) 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0;$

(b) 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0.$

证 (a) 当 $x < 0$ 时, 及当 $|x|$ 充分大以后,

$$\frac{2x}{1+x} > 2.$$

于是

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2+0;$

(b) 当 $x > 0$ 时,

$$0 < \frac{2x}{1+x} < 2.$$

于是,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{2x}{1+x} \rightarrow 2-0.$

599. 证明:

(a) 当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1-0;$

(b) 当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1+0.$

证 (a) 当 $x < 0$ 时,

$$0 < 2^x < 1.$$

于是,

当 $x \rightarrow -0$ 时, $2^x \rightarrow 1-0$;

(b) 当 $x > 0$ 时,

$$2^x > 1.$$

于是,

当 $x \rightarrow +0$ 时, $2^x \rightarrow 1+0$.

600. 设 $f(x) = x + [x^2]$, 求 $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$.

解 $f(1) = 2$;

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x + [x^2]) = 1 + 0 = 1;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + [x^2]) = 1 + 1 = 2.$$

601. 设 $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$, 求 $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ ($n = 0, \pm 1, \dots$).

解 $f(n) = 0$;

$$f(n-0) = \lim_{x \rightarrow n-0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^{n-1};$$

$$f(n+0) = \lim_{x \rightarrow n+0} \operatorname{sgn}(\sin \pi x) = (-1)^n.$$

求:

602. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}}$.

解 因为 $\sqrt{\cos \frac{1}{x}}$ 为有界函数, 所以,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sqrt{\cos \frac{1}{x}} = 0.$$

603. $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \right]$.

解 因为

$$\frac{1}{x} - 1 < \left[\frac{1}{x} \right] \leq \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

当 $x > 0$ 时

$$1 - x < x \left[\frac{1}{x} \right] \leq 1,$$

当 $x < 0$ 时,

$$1 - x > x \left[\frac{1}{x} \right] \geq 1,$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = 1.$$

604. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1} - n\pi)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{\pi \sqrt{n^2 + 1} + n\pi} = 0.$$

605. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$.

解 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n})$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} [1 - \cos(2\pi \sqrt{n^2 + n})]$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - \cos[2\pi(\sqrt{n^2 + n} - n)]\} = 1.$$

606. $\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin \sin \cdots \sin x}_n$.

解 先设 $0 \leq x \leq \pi$, 这时, $0 \leq \sin x \leq x$,

$$0 \leq \sin(\sin x) \leq \sin x,$$

依次类推. 用数学归纳法, 即可证得

$$0 \leq \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} \leq \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow},$$

这说明 $\overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow}$ 随着 n 的增大而单调减少, 于是由其有界性知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = \mu$$

存在有限, 且 $0 \leq \mu \leq 1$, 因此

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = \sin(\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow})$$

即

$$\sin \mu = \mu,$$

故

$$\mu = 0.$$

同法可证, 当 $\pi < x \leq 2\pi$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = 0.$$

再利用 $\sin x$ 的周期性(周期为 2π), 得知对任一 x 值, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overbrace{\sin \sin \cdots \sin x}^{n \uparrow} = 0.$$

607. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = A$ 及 $\lim_{x \rightarrow 4} \psi(x) = B$, 由此是否可推出

$$\lim_{x \rightarrow 2} \psi(\varphi(x)) = B?$$

研究这个例子: 当 $x = \frac{p}{q}$ (其中 p 和 q 是互质的整

数) 时, $\varphi(x) = \frac{1}{q}$; 当 x 为无理数时, $\varphi(x) = 0$; 当 $x \neq 0$ 时, $\psi(x) = 1$; 当 $x = 0$ 时, $\psi(x) = 0$; 并且 $x \rightarrow 0$.

解 不一定, 例如对于函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} \text{ (其中 } p \text{ 和 } q \text{ 互质) 时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

及

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 (= A)$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(x) = 1,$$

但是, 极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$$

却不存在. 事实上, 当 x 以一串无理数列 x_n 趋近于零时, 有 $\varphi(x_n) = 0$, 因此 $\psi(\varphi(x_n)) = 0 (n = 1, 2, \dots)$; 而当 x 以一串有理数列 x'_n 趋近于零时, $\varphi(x'_n) \neq 0$, 因此, $\psi(\varphi(x'_n)) = 1 (n = 1, 2, \dots)$. 由此可知, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \psi(\varphi(x))$$

不存在.

608. 证明哥西定理: 若函数 $f(x)$ 定义于区间 $(a, +\infty)$ 上, 且在每一个有穷的区间 (a, b) 内是有界的, 则

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)],$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} \quad (f(x) \geq c > 0),$$

假定在等式右端的极限都存在.

证 (a) 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = A$. 任给 $\varepsilon > 0$, 必存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$|f(x+1) - f(x) - A| < \frac{\epsilon}{3}.$$

现设 $x > X_0 + 1$. 于是, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 我们有

$$\frac{f(x)}{x} - A = \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] + \frac{f(X_0 + \tau)}{x} - \frac{(X_0 + \tau)A}{x}.$$

显然

$$\begin{aligned} & \left| \frac{n}{x} \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right] \right| \\ & \leq \left| \frac{f(X_0 + \tau + n) - f(X_0 + \tau)}{n} - A \right| \\ & = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A] \right| \\ & \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1) - A| \\ & < \frac{1}{n} \cdot \frac{n\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

由假定, $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故存在正数 X_1 , 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (0 \leq \tau < 1);$$

另外, 显然存在正数 X_2 , 使当 $x > X_2$ 时, 恒有

$$\left| \frac{(X_0 + 1)A}{x} \right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1, X_2\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 必有

$$\left| \frac{f(x)}{x} - A \right| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A.$$

故(a)获证.

(b)由假定, $f(x) \geq c > 0$. 记 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)} = A'$. 显然 $A' \geq 0$. 下证 $A' > 0$. 事实上, 若 $A' = 0$, 则存在正数 X_0 , 使当 $x \geq X_0$ 时, 必 $0 < \frac{f(x+1)}{f(x)} < \frac{1}{2}$. 于是

$$\begin{aligned} 0 < \frac{f(X_0+n)}{f(X_0)} &= \frac{f(X_0+n)}{f(X_0+n-1)} \cdot \frac{f(X_0+n-1)}{f(X_0+n-2)} \cdots \\ &\quad \cdot \frac{f(X_0+1)}{f(X_0)} < \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

由此可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(X_0+n) = 0$, 此显然与 $f(x) \geq c > 0$ 矛盾, 因此, 有 $A' > 0$.

由于 $f(x) \geq c > 0$ 且 $f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内有界, 故函数 $\ln f(x)$ 在每个有穷区间 (a, b) 内也有界, 并且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln f(x+1) - \ln f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{f(x+1)}{f(x)} = \ln A'.$$

于是, 将(a)的结果用于函数 $\ln f(x)$, 即知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln f(x)}{x} = \ln A'.$$

故有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)]^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{\ln f(x)}]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln f(x)}{x}} \\ &= e^{\ln A'} = A'. \end{aligned}$$

证毕.

609. 证明若: (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 内; (2) 在每一个有

限的域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ (或 $-\infty$), *) 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ (或 } -\infty \text{)}.$$

证 只要证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = +\infty$ 的情形, 这

时要证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ (对于 $-\infty$ 的情形, 只要考虑函数 $-f(x)$ 即可归结为 $+\infty$ 的情形). 任给 $G > 0$. 必存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$f(x+1) - f(x) > 4G.$$

现设 $x > 2(X_0 + 1)$. 仿 608 题(a)之证, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 满足 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 由于 $n + 1 > x - X_0 > X_0 + 2$, 故 $n > X_0 + 1 > X_0 + \tau$. 从而 $2n > x$, 即

$$\frac{n}{x} > \frac{1}{2}.$$

又, 我们有

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} + \frac{f(X_0 + \tau)}{x};$$

显然

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n [f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)] \\ &> \frac{1}{n} \cdot 4nG = 4G, \end{aligned}$$

故

$$\frac{n}{x} \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{n} > 2G.$$

由假定, $f(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故存在正数 X_1 , 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(X_0 + \tau)}{x} \right| < G.$$

令 $X = \max\{2(X_0 + 1), X_1\}$, 则当 $x > X$ 时, 恒有

$$\frac{f(x)}{x} > G.$$

由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

证毕.

*) 原题条件(3)误写为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$,

结论误写为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$. 例如, 按下式定义 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 2n, & \text{当 } 2n \leq x < 2n+1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 2n+1 \leq x < 2n+2 \text{ 时.} \end{cases} \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

则显然 $f(x)$ 满足原题的条件(1)和(2) (这时 $a=0$), 并且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$; 但显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq \infty$ (实

际 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 不存在, $\underline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$).

610. 证明, 若: (1) 函数 $f(x)$ 定义于域 $x > a$ 内; (2) 在每一个有限的域 $a < x < b$ 内是有界的; (3) 存在着有限的或无穷的 (带确定符号的无穷, 即 $+\infty$ 和 $-\infty$) *) 极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^2} = l,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

证 先证一条一般性的定理(Stolz 定理在函数情形的推广):若(1)函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都定义于域 $x > a$ 内;(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在每一个有限域 $a < x < b$ 内有界,并且 $g(x)$ 当 $x < a$ 时满足 $g(x+1) > g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$;(3)存在极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} = l$$

(l 为有限数或为 $+\infty$ 或为 $-\infty$);

则必

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

证如下:

先设 l 为有限数. 任给 $\epsilon > 0$. 存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

现设 $x > X_0 + 1$. 于是, 恰有一个正整数 n (依赖于 x), 使 $n \leq x - X_0 < n + 1$. 令 $\tau = x - X_0 - n$, 则 $0 \leq \tau < 1$, $x = X_0 + \tau + n$. 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ & \quad \cdot \left[\frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right], \end{aligned}$$

$$\text{而 } \left| \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} - l \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$(k=1, 2, \dots, n),$$

又由于

$$\begin{aligned} g(x) &= g(X_0 + \tau + n) > g(X_0 + \tau + n - 1) \\ &> g(X_0 + \tau + n - 2) > \dots > g(X_0 + \tau), \end{aligned}$$

从而

$$\frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} > 0$$

$$(k=1, 2, \dots, n);$$

由此可知

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

容易直接验证等式

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - l &= \left[1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \left[\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} - l \right] \\ &\quad + \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, 并且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上有界, 故必有正数 $X_1 > a$ 存在, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau) - lg(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| > \frac{\varepsilon}{4}.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 恒有

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - l \right| < \frac{3}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. l 为有限数时获证.

下设 $l = +\infty$ (若 $l = -\infty$, 则考虑函数 $-f(x)$ 即可化为 $l = +\infty$ 的情形). 任给 $G > 0$, 存在正数 $X_0 > a$, 使当 $x \geq X_0$ 时, 恒有

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} > 4G.$$

当 $x > X_0 + 1$ 时, 仿前一段之证, 有

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} &= \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &\cdot \frac{f(X_0 + \tau + k) - f(X_0 + \tau + k - 1)}{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)} \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &> 4G \sum_{k=1}^n \frac{g(X_0 + \tau + k) - g(X_0 + \tau + k - 1)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &= 4G. \end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \left[1 - \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right] \cdot \frac{f(x) - f(X_0 + \tau)}{g(x) - g(X_0 + \tau)} \\ &+ \frac{f(X_0 + \tau)}{g(x)}. \end{aligned}$$

根据 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ 以及 $f(x), g(x)$ 在 $X_0 \leq x < X_0 + 1$ 上的有界性, 可取正数 $X_1 > a$, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$\left| \frac{g(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{f(X_0 + \tau)}{g(x)} \right| < G.$$

令 $X = \max\{X_0 + 1, X_1\}$. 于是, 当 $x > X$ 时, 恒有

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \cdot 4G - G = G.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. 所述一般性定理获证.

现在我们应用此一般定理来证明本题, 在一般性定理中取 $g(x) = x^{n+1}$. 显然此 $g(x)$ 满足一般性定理的条件, 并且

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1)^{n+1} - x^{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(n+1)x^n + \frac{1}{2}(n+1)nx^{n-1} + \cdots + (n+1)x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} \\ &= \frac{1}{(x+1) + \frac{1}{2}(n+1)nx^{-1} + \cdots + (n+1)x^{-n+1} + x^{-n}} \\ &= \frac{l}{n+1}. \end{aligned}$$

由此, 根据此一般性定理, 即得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{n+1}.$$

证毕.

*) 原题所说的无穷, 必须是带确定符号的无穷, 即 $+\infty$ 或 $-\infty$; 参看 609 题末尾加的注.

注. 608 题的 (a) 和 609 题可直接从上述一般性定理推出. 实际上, 只需令 $g(x) = x$, 由

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{g(x+1) - g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{(x+1) - x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x+1) - f(x)] \end{aligned}$$

即知.

611. 证明: (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

证 (a) 当 $x=0$ 时是显然的; 当 $x \neq 0$ 时, 令 $y_n = \frac{n}{x}$, 由 71 题的结果, 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n \cdot x} = e^x;$$

(b) 当 $x=0$ 时是显然的, 我们先讨论 $x > 0$ 的情形.

由牛顿二项式定理知

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &\leq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}. \end{aligned}$$

另一方面, 当 $m > n$ 时有

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m > 1 + x + \frac{x^2}{2!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) + \dots \\ & \quad + \frac{x^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{m}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{m}\right), \end{aligned}$$

令 $m \rightarrow \infty$ (n 保持不变), 得

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}.$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) = e^x \quad (x > 0).$$

由于

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right)$$

$$= 1 + (-1)^n \left(\frac{x^n}{n!} \right)^2,$$

而由 61 题知, 对固定的 x 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0$. 于是, 对于 $x < 0$, 仍然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) = e^x \quad (x < 0).$$

612. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!) = 2\pi$.

证 由 72 题

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{\theta_k}{k! k},$$

其中 $0 < \theta_k < 1$, 因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n!)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \left[2\pi n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)! (n+1)} \right) \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right) \right]}{2\pi \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right)} \cdot 2\pi n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{\theta_{n+1}}{(n+1)^2} \right)$$

$$= 2\pi.$$

作下列函数的图形:

613. (a) $y = 1 - x^{100}$;

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2^n}) \quad (-1 \leq x \leq 1)$.

解 (a) 如图 1.238 所示. 它关于 y 轴对称.

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x^{2^n}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| < 1; \\ 0, & \text{若 } |x| = 1. \end{cases}$ 如图 1.239 所

示

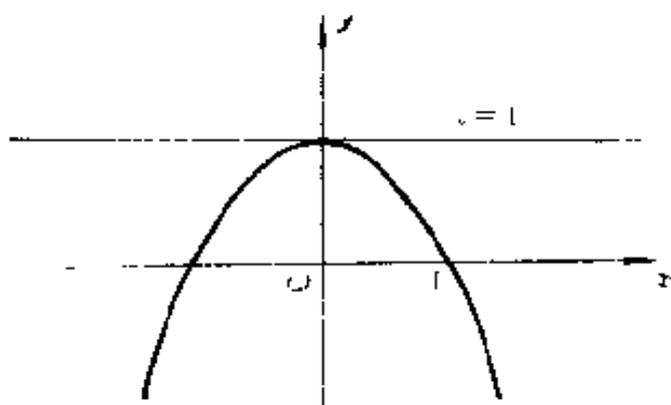


图 1.238

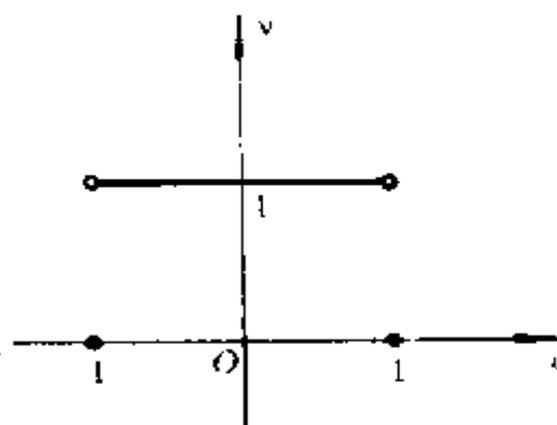


图 1.239

614. (a) $y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}} \quad (x \geq 0);$

(b) $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (x \geq 0).$

解 (a) 如图 1.240 所示.

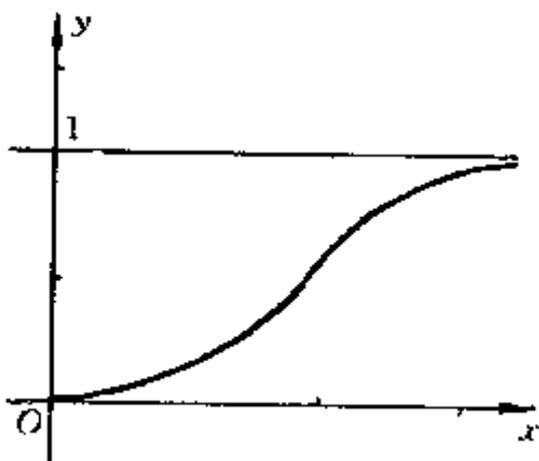


图 1.240

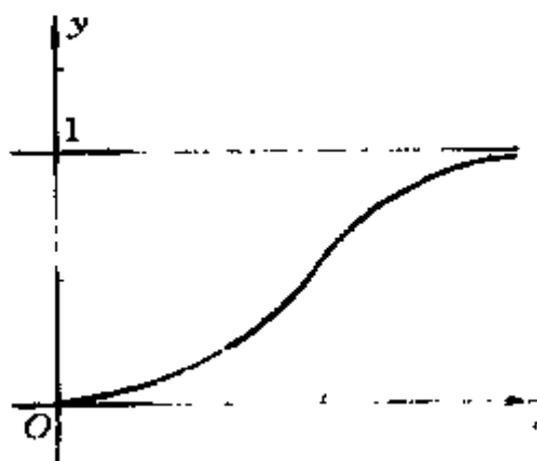


图 1.241

$$(b) y = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 1; \\ 1, & \text{若 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

如图 1.241 所示.

$$615. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \quad (x \neq 0).$$

解 因为 $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$, 所以,

$$y = \begin{cases} -1, & \text{若 } |x| < 1, x \neq 0; \\ 0, & \text{若 } |x| = 1; \\ 1, & \text{若 } |x| > 1. \end{cases}$$

如图 1.242 所示.

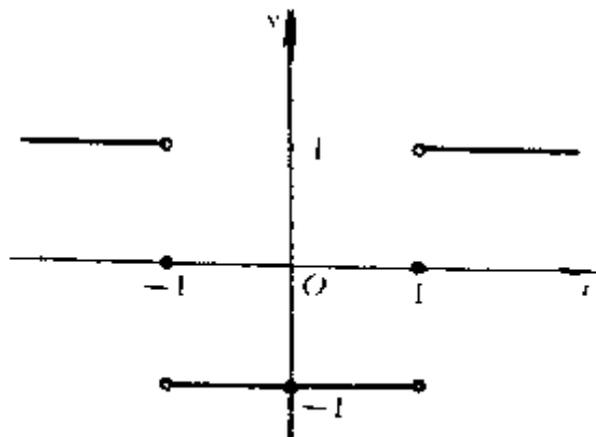


图 1.242

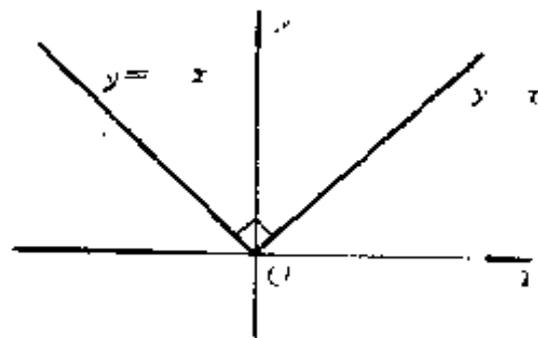


图 1.243

$$616. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}.$$

解 $y = \sqrt{x^2} = |x|.$

如图 1.243 所示.

$$617. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n} \quad (x \geq 0).$$

解 $y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{若 } x > 1. \end{cases}$

如图 1.244 所示.

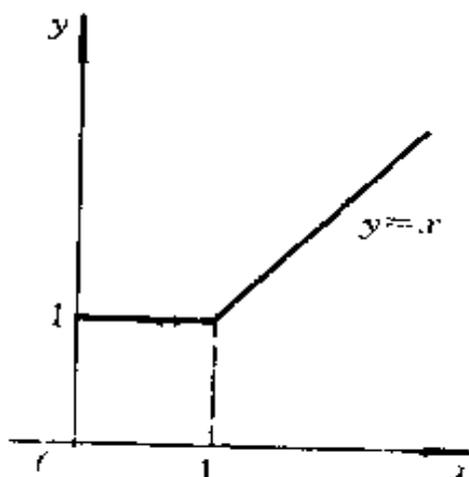


图 1.244

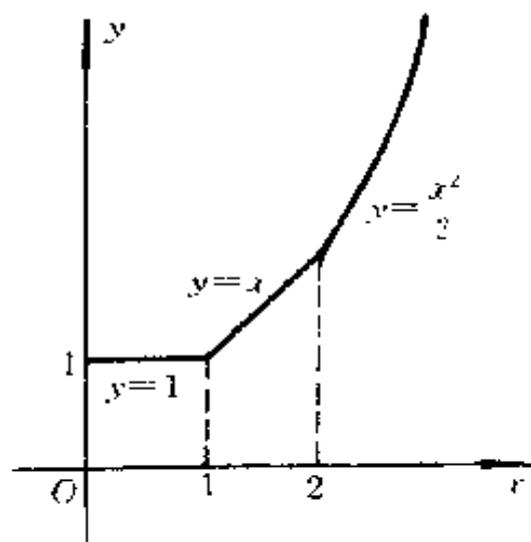


图 1.245

$$618. y = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0).$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ x, & \text{若 } 1 < x < 2; \\ \frac{x^2}{2}, & \text{若 } 2 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

如图 1.245 所示.

$$619. y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n} + x^{2n}}} \quad (x \geq 0).$$

解

$$y = \begin{cases} 0, & \text{若 } 0 \leq x < 2; \\ 2\sqrt{2}, & \text{若 } x = 2; \\ x^2, & \text{若 } x > 2. \end{cases}$$

如图 1.246 所示.

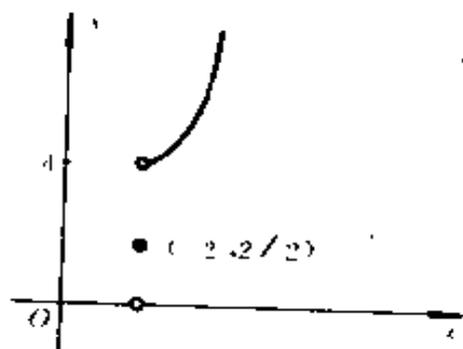


图 1.246

$$620. (a) y = \sin^{1000} x;$$

$$(6) y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^{2n} x.$$

解 (a) 如图 1.247 所示. 其图形始终在 Ox 轴上方.

$$(6) y = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 1, & \text{若 } x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

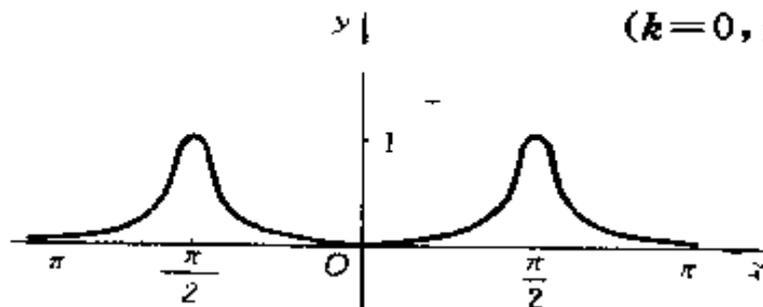


图 1.247

如图 1.248 所示

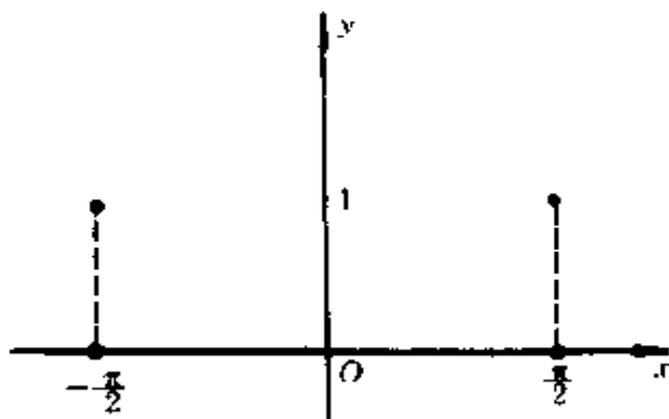


图 1.248

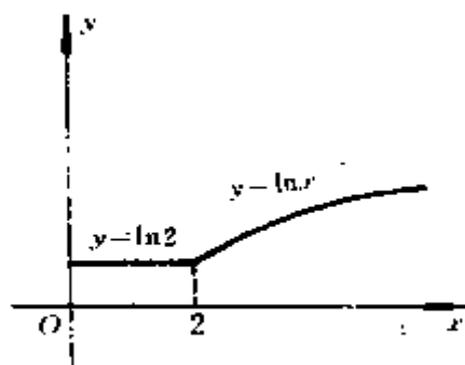


图 1.249

$$621. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^n + x^n)}{n} \quad (x \geq 0).$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} \ln 2, & \text{若 } 0 \leq x \leq 2; \\ \ln x, & \text{若 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

如图 1.249 所示.

$$622. y = \lim_{n \rightarrow \infty} (x-1) \operatorname{arctg} x^n.$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} 0, & \text{若 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{2}(x-1), & \text{若 } x > 1. \end{cases}$$

如图 1.250 所示.

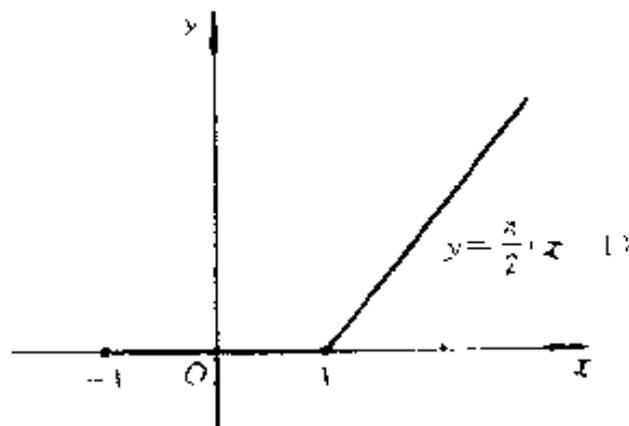


图 1.250

$$623. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+e^{n(x+1)}}.$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \leq -1; \\ e^{x-1}, & \text{若 } x > -1. \end{cases}$$

如图 1.251 所示.

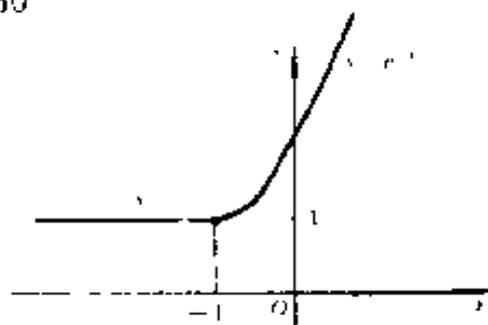


图 1.251

$$624. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x+e^t}{1+e^{tx}}.$$

解

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x = 0; \\ 1, & \text{若 } x > 0. \end{cases}$$

如图 1.252 所示.

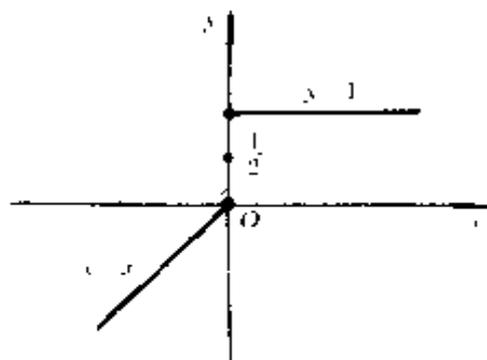


图 1.252

$$625. y = \lim_{t \rightarrow x} \frac{1}{t-x} \ln \frac{t}{x}$$

($x > 0$).

解

$$y = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{t-x}{x}\right)}{\frac{t-x}{x}} \\ = \frac{1}{x} = \frac{1}{x}.$$

如图 1.253 所示.

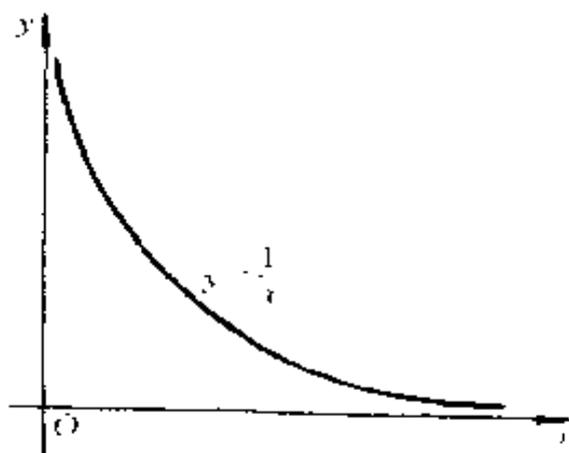


图 1.253

626. 若有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则直线 $y = kx + b$ 称为曲线 $y = f(x)$ 的(斜)渐近线. 利用这方程式推出渐近线存在的必要而且充分的条件.

解 先讨论渐近线从右边伸向无穷远的情形:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0. \quad (1)$$

而在 $x > 0$ 时,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - (kx + b)}{x} + k + \frac{b}{x},$$

可见

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k. \quad (2)$$

又由(1)式得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b, \quad (3)$$

即常数 k, b 可由(2)、(3)式确定. 反之, 若极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 且为有限数 k , 极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$ 存在且有限, 等于 b , 则(1)式成立, 即

$$y = kx + b$$

是一条渐近线。用完全类似的方法可以讨论 $x \rightarrow -\infty$ 的情形。

627. 求下列曲线的渐近线并作其图形：

(a) $y = \frac{x^2}{x^2 + x - 2}$; (б) $y > \sqrt{x^2 + x}$;

(в) $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$; (г) $y = \frac{xe^x}{e^x - 1}$;

(д) $y = \ln(1 + e^x)$; (e) $y = x + \arccos \frac{1}{x}$;

(ж) $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$.

解 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ 及 $\lim_{x \rightarrow -2} y = \infty$, 所以, 直线 $x=1$ 及 $x=-2$ 为曲线的垂直渐近线. 其次, 因为

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2 + x - 2)} = 0,$$

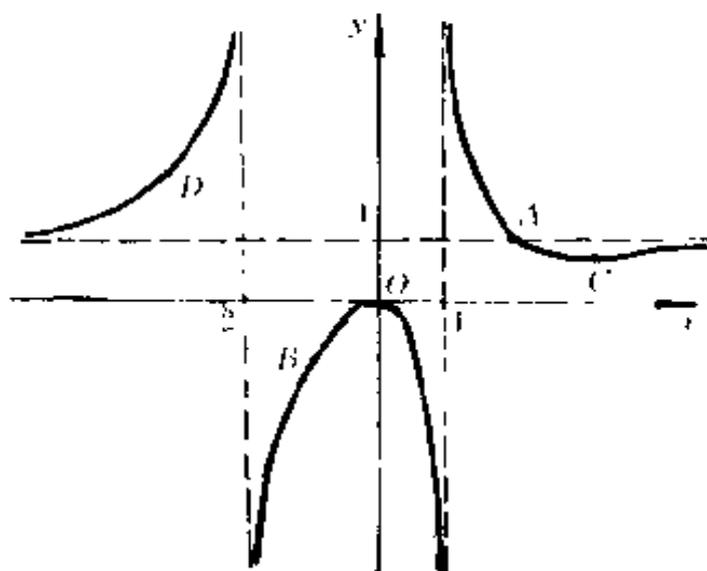


图 1.254

而

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + x - 2} = 1,$$

所以, $y=1$ 为曲线的水平渐近线.

曲线通过原点.

当 $-2 < x < 1$ 时, $y < 0$, 故曲线在 Ox 轴的下方;

当 $x > 1$ 或 $x < -2$ 时, $y > 0$, 故曲线在 Ox 轴的上方.

适当描若干点;

$A(2, 1), B(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), C\left(4, \frac{8}{9}\right), D\left(-3, \frac{9}{4}\right), \dots$,

并用光滑曲线联接, 即得图形(图 1.254).

$$(5) k_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = \frac{1}{2},$$

$$k_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x) = -\frac{1}{2},$$

于是, 直线 $y = x + \frac{1}{2}$ 及 $y = -x - \frac{1}{2}$ 为曲线的(斜)渐近线.

曲线 $y = \sqrt{x^2+x}$ 为双曲线

$$\frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1,$$

在 Ox 轴上方的部分.

如图 1.255 所示.

$$(6) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2-x^3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} = -1,$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^2 - x^3} + x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^2 - x^3)^2 - x} \sqrt[3]{x^2 - x^3} + x^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x} - 1\right)^2} - \sqrt[3]{\frac{1}{x} - 1} + 1} = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

斜渐近线为

$$y = -x + \frac{1}{3}.$$

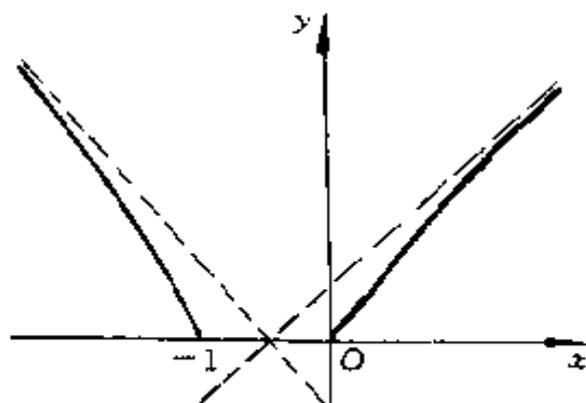


图 1.255

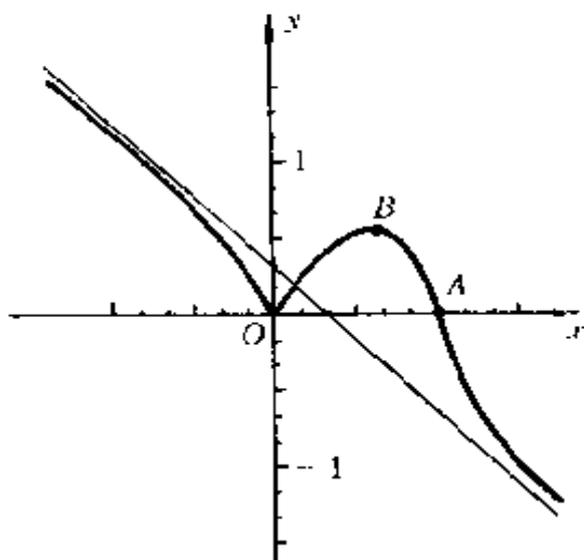


图 1.256

曲线通过原点及点 $A(1, 0)$.

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y > 0$; 而当 $x > 1$ 时, $y < 0$.

如图 1.256 所示.

(r) 当 $x > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{xe^x}{e^x - 1} - x \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} = 0,$$

故渐近线为

$$y=x;$$

当 $x < 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0,$$

故另一渐近线为

$$y=0.$$

曲线在 $x=0$ 处无定义(以后可以说明它是“可去的间断”).

因为 $y > 0$, 故图形始终在 Ox 轴的上方.

如图 1.257 所示.

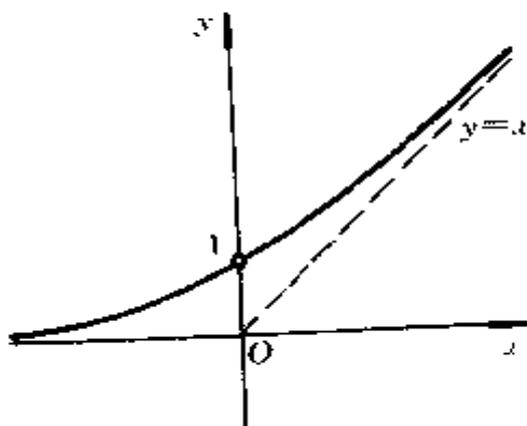


图 1.257

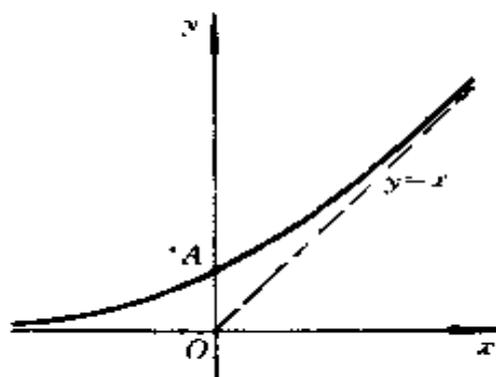


图 1.258

(d) 当 $x > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x + \ln(e^{-x} + 1)}{x} \right] = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(1+e^x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{-x} + 1) = 0,$$

故渐近线为

$$y=x$$

同法可求,当 $x < 0$ 时的渐近线为

$$y=0.$$

曲线通过点 $A(0, \ln 2)$.

如图 1.258 所示.

$$(e) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \arccos \frac{1}{x}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x + \arccos \frac{1}{x}) - x] = \frac{\pi}{2},$$

故渐近线为

$$y = x + \frac{\pi}{2}.$$

将函数 $y = x$ 及 $y = \arccos \frac{1}{x}$ (见 316 题) 的图形按相加法即得,如图 1.259 所示.

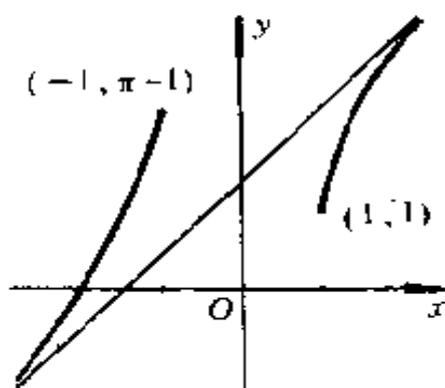


图 1.259

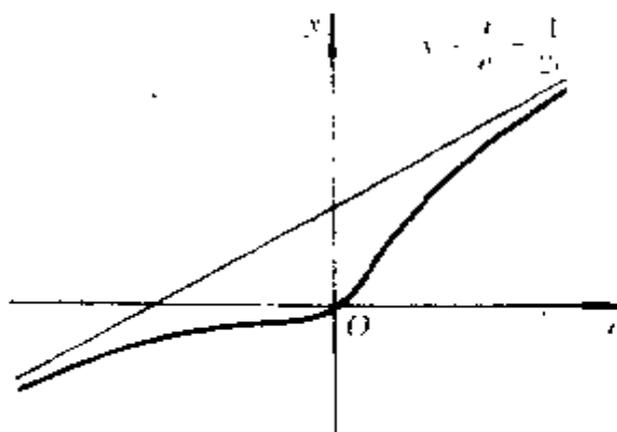


图 1.260

$$(ж) k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x}{(1+x)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x} - \frac{x}{e} \right] = \frac{1}{2e},$$

故渐近线为

$$y = \frac{x}{e} + \frac{1}{2e}.$$

曲线通过原点.

如图 1.260 所示.

求下列极限:

$$628. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right].$$

解 由于

$$\begin{aligned} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{|x|^{2n}}{(2n)!} \\ &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} (1 + |x| + \cdots + |x|^{n-1}). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 上式右端为 $\frac{n}{(n+1)!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$;

$$\begin{aligned} \text{当 } |x| \neq 1 \text{ 时, 此式为 } &\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|} \\ = \frac{1}{1 - |x|} \cdot &\left[\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{|x|}{n+1} \cdot \frac{(|x|^2)^n}{n!} \right]. \end{aligned}$$

由 61 题的结果知: $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0, \frac{(|x|^2)^n}{n!} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$,

故当 $n \rightarrow \infty$ 时有 $\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1 - |x|^n}{1 - |x|} \rightarrow 0$.

于是, 对于任意实数 x , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right] = 0.$$

$$629. \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})], \text{ 若 } |x| < 1.$$

解 因为

$$\begin{aligned} 1+x &= \frac{1-x^2}{1-x}, \\ 1+x^2 &= \frac{1-x^4}{1-x^2}, \end{aligned}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$1 + x^2 = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x^{2^n}}.$$

所以,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

又因 $|x| < 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $x^{2^{n+1}} \rightarrow 0$.

最后, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})] = \frac{1}{1-x}.$$

630. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right).$

解 因为

$$\begin{aligned} \sin x &= 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = 2^2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4} \\ &= \cdots = 2^n \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \sin \frac{x}{2^n}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\sin x}{2^n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{x}{2^n}} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{x}{2^n} \cdot \sin x}{\sin \frac{x}{2^n} \cdot x} \right] = \frac{\sin x}{x} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

631. 令 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$

其中 $\psi(x) > 0$ 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\alpha_m \rightarrow 0$ ($m = 1, 2, \dots, n$), 换言之, 当 $m = 1, 2, \dots, n$ 且 $n > N(\epsilon)$ 时 $|\alpha_m| < \epsilon$. 再假定

$a_{mn} \neq 0$.^{*})

证明:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(a_{1n}) + \varphi(a_{2n}) + \cdots + \varphi(a_{nn})] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(a_{1n}) + \psi(a_{2n}) + \cdots + \psi(a_{nn})], \end{aligned} \quad (1)$$

此处假定等式(1)右端的极限存在.

证 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $0 < |x| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} - 1 \right| < \varepsilon,$$

从而(注意到 $\psi(x) > 0$),

$$(1 - \varepsilon)\psi(x) < \varphi(x) < (1 + \varepsilon)\psi(x). \quad (2)$$

由 $a_{mn} \neq 0$ 以及 $a_{mn} \rightarrow 0 (m = 1, 2, \cdots, n)$ 知, 必有正整数 $N = N(\varepsilon)$ 存在, 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$0 < |a_{mn}| < \delta \quad (m = 1, 2, \cdots, n).$$

于是

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)\psi(a_{mn}) &< \varphi(a_{mn}) < (1 + \varepsilon)\psi(a_{mn}) \\ &(n > N, m = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

将这 n 个不等式相加, 得

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon) \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}) &< \sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn}) < (1 + \varepsilon) \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}) \\ &(n > N). \end{aligned}$$

即

$$1 - \varepsilon < \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})} < 1 + \varepsilon \quad (n > N).$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})} = 1.$$

由假定, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})$ 存在, 故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn}) &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn})}{\sum_{m=1}^n \psi(a_{mn})} \right] \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \psi(a_{mn}) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n \varphi(a_{mn}). \end{aligned}$$

证毕.

*) 编者注: 此题应加上条件 $a_{mn} \neq 0$ (原书没有), 因为 $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 都可能在 $x=0$ 处无定义. 另外, $m=1, 2, \dots, n$.

利用上边的定理, 求

$$632. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left[\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right].$$

解 设 $x = \frac{k}{n^2}$, 我们将首先说明它满足 631 题的条件.

首先,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{\frac{x}{3}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1}}{\frac{x}{3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1} = 1. \end{aligned}$$

其次, $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty; k = 1, 2, \dots, n$).

最后,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{3n^2} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{6}.$$

所以,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{6}.$$

633. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right).$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 而且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{ka}{n^2} \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

$$\text{又因 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{ka}{n^2} = \frac{a}{2},$$

故利用 631 题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{ka}{n^2} \right) = \frac{a}{2}.$$

634. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{\frac{k}{n^2}} - 1)$ ($a > 0$).

解 我们有 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a} \right) = 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$.

$\ln a \rightarrow 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \ln a = \frac{1}{2} \ln a$;

因而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (a^{\frac{k}{n^2}} - 1) = \frac{1}{2} \ln a.$$

635. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2} \right).$

解 设 $y = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$, $\ln y = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

我们考虑下列极限,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

又 $\frac{k}{n^2} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ 时, $k = 1, 2, \dots, n$), 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = \frac{1}{2},$$

即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right) = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

636. $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

解 设 $y = \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}}$, 当 n 充分大时, $\cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} > 0$, 此时,

$$\begin{aligned} \ln y &= \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \ln \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{ka}{n\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

因 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{x^2} = 1$, 又 $\frac{ka}{n\sqrt{n}} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$ 时, $k = 1, 2, \dots, n$), 且有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 a^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{6n^3} = \frac{a^2}{3},$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y = -\frac{a^2}{6},$$

即
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \cos \frac{ka}{n\sqrt{n}} = e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

637. 叙列 x_n 由以下的等式所给定:

$$x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, x_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots (a > 0).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先, 我们注意到此叙列显然是单调上升的. 其次,

由 $x_n = \sqrt{a + x_{n-1}}$, 得 $x_n^2 = a + x_{n-1}$,

即

$$x_n = \frac{a}{x_n} + \frac{x_{n-1}}{x_n}. \quad (1)$$

因为 $0 < x_{n-1} < x_n$, 即在(1)式右端第二项小于1, 所以,

$$x_n < \frac{a}{x_n} + 1. \quad (2)$$

又显然有 $x_n > \sqrt{a}$ ($n = 2, 3, \dots$). (3)

将(3)式代入(2)式右端, 即得

$$x_n < \sqrt{a} + 1,$$

故叙列 $\{x_n\}$ 是有界的.

根据极限存在的准则可知, 叙列 $\{x_n\}$ 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 设其值为 l .

利用等式 $x_n^2 = a + x_{n-1}$, 两端取极限, 得

$$l^2 = a + l,$$

解之,得

$$l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2} \quad (a > 0),$$

负根不适合(因为 $x_n > 0$),只取其正根,即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}.$$

638. 函数叙列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用以下的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 当 $x = 0$ 时, $y_n = 0, n = 1, 2, \dots$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0.$$

当 $0 < x \leq 1$ 时,用归纳法可证 $y_n > 0, n = 1, 2, \dots$;

$y_1 > 0$. 若 $y_k > 0$, 由 $x > y_{k-1}^2$, 可得

$$y_{k+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_k^2}{2} = \frac{4x - (x - y_{k-1}^2)^2}{8} \geq \frac{3x}{8} > 0.$$

因而有

$$y_1 - y_3 = \frac{y_2^2}{2} > 0,$$

$$y_2 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_1^2}{2} < 0,$$

.....

用归纳法可证

$$y_{2n} - y_{2n+2} < 0,$$

$$y_{2n-1} - y_{2n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$\text{即 } \frac{x}{2} = y_1 > y_3 > \cdots > 0,$$

$$0 < y_2 < y_4 < \cdots < \frac{x}{2}.$$

可见数列 y_1, y_3, \cdots 及数列 y_2, y_4, \cdots 都是收敛的. 设极限分别为 A_1, A_2 , 由

$$y_{2n} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n-1}^2}{2}$$

$$\text{及 } y_{2n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_{2n}^2}{2},$$

求极限得 $A_2 = \frac{x}{2} + \frac{A_1^2}{2}, A_1 = \frac{x}{2} - \frac{A_2^2}{2}$, 相减得

$$A_1 - A_2 = (A_1 - A_2) \frac{(A_1 + A_2)}{2}.$$

而 $0 \leq A_1 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}, 0 \leq A_2 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}$, 故

$$A_1 = A_2 = A.$$

用极限定义直接可以证明, 若 $\{y_n\}$ 的两个子数列 $\{y_{2n}\}$ 及 $\{y_{2n-1}\}$ ($n = 1, 2, \cdots$) 收敛于同一个极限, 则 $\{y_n\}$ 也收敛于这个极限, 由

$$A = \frac{x}{2} - \frac{A^2}{2}$$

解得

$$A = \sqrt{1+x} - 1,$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1.$$

639. 函数数列

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

用下面的方法来确定:

$$y_1 = \frac{x}{2}, y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \cdots).$$

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

解 显然, $y_2 \geq y_1$. 假设 $y_n \geq y_{n-1}$, 则由

$$y_{n+1} - y_n = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$

便可推出 $y_{n+1} \geq y_n$.

由数学归纳法便得知数列 $\{y_n\}$ 单调上升.

现在我们证明这个数列有界. 显然

$$0 \leq y_1 < 1.$$

设 $0 \leq y_k < 1$, 则 $0 \leq y_k^2 < 1$, 且 $0 \leq y_{k+1} < 1$.

由数学归纳法便得知数列 $\{y_n\}$ 有界.

这样, 我们就证明了此数列的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

存在. 设其值为 l (显然 $0 \leq l \leq 1$), 即得

$$l = \frac{x}{2} + \frac{l^2}{2},$$

解之, 得 $l = 1 \pm \sqrt{1-x}$. 由于 $0 \leq l \leq 1$, 故必

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l = 1 - \sqrt{1-x}.$$

640. 为了求克卜勒方程式 (\forall уравнение Кеплера)

$$x - \varepsilon \sin x = m \quad (0 < \varepsilon < 1) \quad (1)$$

的近似解, 假设

$$x_0 = m, x_1 = m + \varepsilon \sin x_0, \dots, x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1},$$

... (逐次逼近法).

证明有 $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, 且数 ξ 为方程式 (1) 的唯一的根.

证 首先考虑 $|x_n - x_{n-1}|$. 由于

$$x_2 - x_1 = \varepsilon(\sin x_1 - \sin x_0) = 2\varepsilon \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2},$$

所以

$$\begin{aligned} |x_2 - x_1| &\leq 2\varepsilon \left| \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \right| \leq 2\varepsilon \cdot \frac{|x_1 - x_0|}{2} \\ &= \varepsilon |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

同理可证

$$|x_3 - x_2| \leq \varepsilon^2 |x_1 - x_0|.$$

设

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|,$$

则有

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - x_n| &= 2\varepsilon \left| \sin \frac{x_n - x_{n-1}}{2} \right| \cdot \left| \cos \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right| \\ &\leq \varepsilon |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^n |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

由数学归纳法得知对于任意的自然数 n , 均有 $|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon^{n-1} |x_1 - x_0|$. 于是, 当 $m > n$ 时, 有

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &\leq |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \cdots \\ &\quad + |x_{n+1} - x_n| \\ &\leq (\varepsilon^{m-1} + \varepsilon^{m-2} + \cdots + \varepsilon^n) |x_1 - x_0| \\ &= \varepsilon^n \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} \cdot |x_1 - x_0|, \end{aligned}$$

而

$$|x_1 - x_0| = \varepsilon |\sin x_0| \leq \varepsilon,$$

所以,

$$|x_m - x_n| \leq \varepsilon^{n+1} \cdot \frac{1 - \varepsilon^{m-n}}{1 - \varepsilon} < \frac{\varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon}.$$

由此知

$$|x_m - x_n| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

按哥西判别法得知极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

存在. 设其值为 ξ , 由等式

$$x_n = m + \varepsilon \sin x_{n-1}$$

取极限即得

$$\xi = m + \varepsilon \sin \xi.$$

这就是说, 变量 x_n 的极限 ξ 是方程(1)的根.

最后, 证明此根的唯一性. 设 ξ_1 是另一根, 则

$$\xi_1 - \xi = \varepsilon(\sin \xi_1 - \sin \xi),$$

由此得

$$|\xi_1 - \xi| \leq \varepsilon |\xi_1 - \xi|.$$

因为 $0 < \varepsilon < 1$, 故 $\xi_1 = \xi$.

于是, 我们就证明了 ξ 是方程(1)的唯一的根.

641. 若 $\omega_k(f)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 $|x - \xi| \leq k$ ($k > 0$) 上的振幅, 则数

$$\omega_0(f) = \lim_{k \rightarrow 0} \omega_k(f)$$

称为函数 $f(x)$ 在 ξ 点的振幅.

求下列函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的振幅:

$$(a) f(x) = \sin \frac{1}{x}; \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2} \cos^2 \frac{1}{x};$$

$$(c) f(x) = x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right); \quad (r) f(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x};$$

$$(d) f(x) = \frac{|\sin x|}{x}; \quad (e) f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$(ж) f(x) = (1 + |x|)^{\frac{1}{x}}.$$

解 (a) $\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2;$

$$(b) \omega_k(f) = +\infty, \omega_0(f) = +\infty;$$

$$(c) \omega_k(f) = 3k - k = 2k, \omega_0(f) = 0;$$

$$\begin{aligned}(\Gamma)\omega_k(f) &= \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{(-k)} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{k},\end{aligned}$$

$$\omega_0(f) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$(\Delta)\omega_k(f) = 2, \omega_0(f) = 2;$$

$$(\epsilon)\omega_k(f) = \left| \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}} - \frac{1}{1+e^{-\frac{1}{k}}} \right|, \omega_0(f) = 1;$$

$$\begin{aligned}(\kappa)\omega_k(f) &= (1+k)^{\frac{1}{k}} - (1+k)^{-\frac{1}{k}}, \omega_0(f) \\ &= e - e^{-1} = 2\operatorname{sh}1.\end{aligned}$$

642. 命

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

证明: 对于满足条件 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 的任何数 α , 可以选出数列 $x_n \rightarrow 0 (n = 1, 2, \dots)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

证 对于确定的 $\alpha, |\alpha| \leq 1$, 总存在 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 使

$$\sin x_0 = \alpha.$$

令 $x_n = \frac{1}{2n\pi + x_0}$, 则显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

又因 $f(x_n) = \sin \frac{1}{x_n} = \sin(2n\pi + x_0) = \alpha$,

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \alpha.$$

643. 设: (a) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

(б) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$;

(в) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 \frac{1}{x}}$.

求

$l = \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$ 和 $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow 0} f(x)$.

解 由 l 及 L 的定义, 容易求得

(a) $l = -1, L = 2$;

(б) $l = -2, L = 2$;

(в) $l = 2, L = e$.

644. 设:

(a) $f(x) = \sin x$; (б) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

(в) $f(x) = 2^{\sin^2 x}$;

(г) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x} (x \geq 0)$.

求

$l = \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 和 $L = \overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

解 由 l 及 L 的定义, 容易求得

(a) $l = -1, L = 1$;

(б) $l = 0, L = +\infty$;

(в) $l = \frac{1}{2}, L = 2$;

(г) $l = 0, L = +\infty$.

§ 6. 函数无穷小和无穷大的阶

1° 符号

$$\varphi(x) = O^*(\psi(x))$$

表示函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 $x \rightarrow a$ 的已知过程中是狭义地同阶的无穷小或无穷大, 就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = k \quad (0 < |k| < +\infty).$$

特别是, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷小 x 是 n 阶无穷小.

仿此, 若当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\varphi(x) = O^*(x^n) \quad (n > 0),$$

则称 $\varphi(x)$ 为对于无穷大 x 是 n 阶无穷大.

2° 符号

$$\varphi(x) = o(\psi(x))$$

表示当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较高阶的无穷小, 或函数 $\varphi(x)$ 比函数 $\psi(x)$ 是较低阶的无穷大, 就是说

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3° 若当 $x \rightarrow a$ 时, 无穷小函数 $\varphi(x)$ 的阶(在广义的意义上)不低于某一正的函数 $\psi(x)$ 无穷小的阶(或无穷大函数 $\varphi(x)$ 的阶不高于函数 $\psi(x)$ 无穷大的阶), 即

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|\varphi(x)|}{\psi(x)} = k \quad (0 \leq k < +\infty),$$

则约定写为:

$$\varphi(x) = O(\psi(x)).$$

4° 若

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1,$$

则称函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时为等价的 [$\varphi(x) \sim \psi(x)$].

例如, 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有:

$$\sin x \sim x; \quad \operatorname{tg} x \sim x;$$

$$a^x - 1 \sim x \ln a (a > 0);$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}; \quad \ln(1+x) \sim x.$$

一般地说来, $\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x)$.

当求两个函数比的极限时, 已知函数可用其等价的函数来代换.

645.

把圆心角 $AOB = x$ (图

1.261) 当作 1 阶无穷小, 求

下列各量无穷小的阶:

(a) 弦 AB ;

(b) 矢 CD ;

(c) 扇形 AOB 的面积;

(d) 三角形 ABC 的面积;

(e) 梯形 ABB_1A_1 的面积;

(f) 弓形 ABC 的面积;

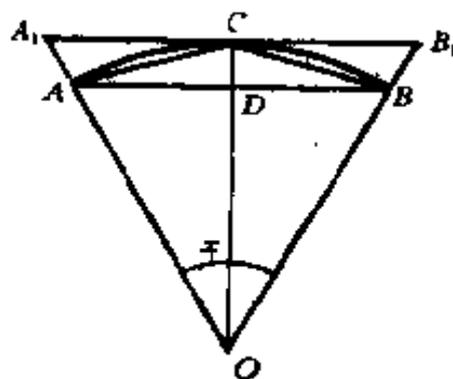


图 1.261

解 (a) $AB = 2R \sin \frac{x}{2}$, 式中 R 为圆的半径.

因为 $\frac{AB}{x} = \frac{2R \sin \frac{x}{2}}{x} \rightarrow R (x \rightarrow 0)$, 故弦 AB 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(b) CD = R - R \cos \frac{x}{2} = 2R \sin^2 \frac{x}{4}.$$

因为 $\frac{CD}{x^2} \rightarrow \frac{R}{8}$, 所以, 矢 CD 是关于 x 的二阶无穷小.

$$(B) \text{ 扇形 } AOB \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}R^2x.$$

因为 $\frac{S}{x} = \frac{1}{2}R^2$, 所以, S 是关于 x 的一阶无穷小.

$$(r) \Delta ABC = \frac{1}{2} |AB| \cdot |CD| = 2R^2 \sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4}.$$

因为 $\frac{\Delta ABC}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{16}$, 所以, ΔABC 的面积是关于 x 的三阶无穷小.

$$(d) A_1C = R \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

于是, 梯形 ABB_1A_1 的面积

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \cdot 2R \sin^2 \frac{x}{2} \left(2R \sin \frac{x}{2} + 2R \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \\ &= 2R^2 \sin^3 \frac{x}{2} + 2R^2 \sin^2 \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

因为 $\frac{A_0}{x^3} \rightarrow \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$, 所以, 面积 A_0 是关于 x 的三阶无穷小.

(e) 弓形 ABC 的面积

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2}R^2x - \frac{1}{2} \cdot 2R \sin \frac{x}{2} \cdot R \cos \frac{x}{2} \\ &= \frac{R^2}{2}(x - \sin x). \end{aligned}$$

由于 $x - \sin x$ 是奇函数, 故只需考虑 $x \rightarrow +0$ 时的情形.

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有

$$\begin{aligned} x - \sin x &\leq \operatorname{tg} x - \sin x = \frac{\sin x}{\cos x} (1 - \cos x) \\ &= \frac{\sin x \cdot 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos x} = O^*(x^3); \end{aligned}$$

而由 $x \geq 2\sin \frac{x}{2}$, 又有

$$\begin{aligned} x - \sin x &\geq 2\sin \frac{x}{2} - \sin x = 2\sin \frac{x}{2} \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) \\ &= 4\sin \frac{x}{2} \sin^2 \frac{x}{4} = O(x^3). \end{aligned}$$

于是, 当 x 大于 0 而充分小时, 存在两常数 $A > 0, B > 0$, 使

$$Ax^3 \leq x - \sin x \leq Bx^3,$$

即弓形面积 p 基本上是关于 x 的三阶无穷小. 实际上, 尔后将会看到, 有 $x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3$ (但要用到导数的概念).

646. 命 $o(f(x))$ 为当 $x \rightarrow a$ 时比函数 $f(x)$ 有较低阶的任意无穷大函数, 且 $O(f(x))$ 为 $x \rightarrow a$ 时与函数 $f(x)$ 同阶 (在广义的意义上) 的任意无穷大函数, 其中 $f(x) > 0$.

证明: (a) $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$;

$$(b) O\{o[f(x)]\} = o[f(x)];$$

$$(c) o\{O[f(x)]\} = o[f(x)];$$

$$(d) O\{O[f(x)]\} = O[f(x)];$$

$$(e) O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)];$$

$$(f) O[f(x)] \cdot O[g(x)] = O[f(x)g(x)].$$

证 (a) 因为

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o[f(x)]\}}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{o[f(x)]\}}{o\{f(x)\}} \cdot \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0,$$

故 $o\{o[f(x)]\} = o[f(x)]$.

(b) 由 133 题 (6) 的结果, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{|O\{o[f(x)]\}|}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{|O\{o[f(x)]\}|}{o\{f(x)\}} \\ &\cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{f(x)\}}{f(x)} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{O\{o[f(x)]\}}{f(x)}$ 存在且等于 0. 因此

$$O\{o[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(b) 仍由 133 题(6)的结果, 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o\{O[f(x)]\}}{f(x)} &= \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \left| \frac{o\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]} \right| \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{o\{O[f(x)]\}}{f(x)} = 0$, 即

$$o\{O[f(x)]\} = o[f(x)].$$

(r) 由 132 题(6)的结果, 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}}{f(x)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O\{O[f(x)]\}}{O[f(x)]} \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{O[f(x)]}{f(x)} < +\infty, \end{aligned}$$

故 $O\{O[f(x)]\} = O[f(x)]$.

(x) 由 131 题(6), 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)] + o[f(x)]|}{f(x)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} \\ &+ \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|o[f(x)]|}{f(x)} = \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} < +\infty, \end{aligned}$$

故 $O[f(x)] + o[f(x)] = O[f(x)]$.

(e) 由 132 题(6), 有

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]O[g(x)]|}{f(x)g(x)} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[f(x)]|}{f(x)} \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow a} \frac{|O[g(x)]|}{g(x)} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O[f(x)]O[g(x)] = O[f(x)g(x)].$$

647. 设 $x \rightarrow +0$ 和 $n > 0$. 证明

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$ (C 为常数);

(b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n < m$);

(c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (a) 由

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|CO(x^n)|}{x^n} = |C| \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty,$$

故

$$CO(x^n) = O(x^n).$$

(b) 由

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \\ &+ \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \left(\frac{|O(x^m)|}{x^m} \cdot x^{m-n} \right) = \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n < m).$$

(c) 由

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)O(x^m)|}{x^{n+m}} &\leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^n)|}{x^n} \\ &\cdot \overline{\lim}_{x \rightarrow +0} \frac{|O(x^m)|}{x^m} < +\infty, \end{aligned}$$

得知

$$O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m}).$$

648. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $n > 0$. 证明

(a) $CO(x^n) = O(x^n)$;

(b) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ ($n > m$).

(c) $O(x^n)O(x^m) = O(x^{n+m})$.

证 (a) 与 (c) 同 647 题 (a) 与 (c) 之证 (只要将 $x \rightarrow +0$ 换为 $x \rightarrow +\infty$). 下证 (b): 由于

$$\begin{aligned} & \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n) + O(x^m)|}{x^n} \\ & \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} + \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{|O(x^n)|}{x^n} \cdot \frac{1}{x^{n-m}} \right) \\ & = \overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} \frac{|O(x^n)|}{x^n} < +\infty, \end{aligned}$$

故

$$O(x^n) + O(x^m) = O(x^n) \quad (n > m).$$

649. 证明符号 \sim 具有下列性质: (1) 反射性: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; (2) 对称性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$; (3) 传递性: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$ 及 $\psi(x) \sim \chi(x)$, 则 $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

证 (1) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)} \equiv 1 \rightarrow 1$, 所以, $\varphi(x) \sim \varphi(x)$.

(2) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$, 所以, $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \rightarrow 1$.

即: 若 $\varphi(x) \sim \psi(x)$, 则 $\psi(x) \sim \varphi(x)$.

(3) 因为 $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \rightarrow 1$, $\frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1$, 所以,

$$\frac{\varphi(x)}{\chi(x)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{\psi(x)}{\chi(x)} \rightarrow 1,$$

即: $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. 设 $x \rightarrow +0$. 证明下列等式:

(a) $2x - x^2 = O^*(x)$; (б) $x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}})$;

(в) $x \sin \frac{1}{x} = O(|x|)$; (г) $\ln x = o\left(\frac{1}{x^\epsilon}\right)$ ($\epsilon > 0$);

(д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[3]{x}$;

(е) $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1)$; (ж) $(1+x)^n = 1 + nx + o(x)$.

证 由题设 $x \rightarrow +0$, 于是

(a) 因为 $\frac{2x - x^2}{x} \rightarrow 2$, 所以, $2x - x^2 = O^*(x)$.

(б) 因为 $\frac{x \sin \sqrt{x}}{x \sqrt{x}} \rightarrow 1$, 所以, $x \sin \sqrt{x} = O^*(x^{\frac{3}{2}})$.

(B) 因为 $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| (x \neq 0)$, 所以,

$$x \sin \frac{1}{x} = O(|x|).$$

(r) 因为 $\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = x^2 \ln x \rightarrow 0$, 所以, $\ln x = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

(r) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{x^{\frac{1}{8}}}$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x^{\frac{3}{4}} + \sqrt{x^{\frac{1}{2}} + 1}} = 1,$$

故 $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim x^{\frac{1}{8}}$.

(e) 因为 $\left| \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2} (x \neq 0)$, 所以, $\operatorname{arctg} \frac{1}{x} = O(1)$.

(ж) 因为 $\frac{(1+x)^n - 1 - nx}{x} = \frac{1}{2}n(n-1)x + \dots \rightarrow 0$,

所以 $(1+x)^n - 1 - nx = o(x)$, 即

$$(1+x)^n = 1 + nx + o(x).$$

651. 设 $x \rightarrow +\infty$. 证明下列等式:

(a) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^3)$;

(б) $\frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right)$;

$$(b) x + x^2 \sin x = O(x^2);$$

$$(r) \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(d) \ln x = o(x^\epsilon) \quad (\epsilon > 0);$$

$$(e) x^2 e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

$$(ж) \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x};$$

$$(з) x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2;$$

证 由题设 $x \rightarrow +\infty$, 于是

$$(a) \text{ 因为 } \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{x^3} \rightarrow 2, \text{ 所以}$$

$$2x^3 - 3x^2 + 1 = O^*(x^2).$$

$$(b) \text{ 因为 } \frac{\frac{x+1}{x^2+1}}{\frac{1}{x}} = \frac{x(x+1)}{x^2+1} \rightarrow 1, \text{ 所以,}$$

$$\frac{x+1}{x^2+1} = O^*\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(b) \text{ 因为 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x + x^2 \sin x|}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{x} + \sin x \right| \\ = 1 < +\infty, \text{ 所以, } x + x^2 \sin x = O(x^2).$$

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \text{ 所以,}$$

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} = O^*\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

$$(d) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{x^\epsilon} \rightarrow 0, \text{ 所以,}$$

$$\ln x = o(x^\epsilon).$$

(e) 因为 $\frac{x^p e^{-x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^{p+2}}{e^x} \rightarrow 0$, 所以,

$$x^p e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

(ж) 因为 $\frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} \rightarrow 1, \text{ 所以, } \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt{x}.$$

(з) 因为 $\frac{x^2 + x \ln^{100} x}{x^2} = 1 + \frac{\ln^{100} x}{x} \rightarrow 1$, 所以

$$x^2 + x \ln^{100} x \sim x^2.$$

652. 证明当 x 充分大时, 下边的不等式成立:

(a) $x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3$;

(б) $\ln^{1000} x < \sqrt{x}$; (в) $x^{10} e^x < e^{2x}$.

证 (a) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} \rightarrow 0$,

所以, 当 x 充分大以后, 有 $\frac{x^2 + 10x + 100}{0.001x^3} < 1$, 即

$$x^2 + 10x + 100 < 0.001x^3.$$

(б) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, 所以, 当 x 充分

大以后, 有 $\frac{\ln^{1000} x}{\sqrt{x}} < 1$, 即

$$\ln^{1000} x < \sqrt{x}.$$

(в) 因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^{10} e^x}{e^{2x}} = \frac{x^{10}}{e^x} \rightarrow 0$, 所以, 当 x

充分大后,有 $\frac{x^{10}e^x}{e^{2x}} < 1$, 即

$$x^{10}e^x < e^{2x}.$$

653. 设 $x \rightarrow 0$. 选出下列函数的形如 Cx^n (C 为常数) 的主部, 并求其对于无穷小变数 x 的阶:

(a) $2x - 3x^3 + x^5$; (b) $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$;

(c) $\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$; (r) $\operatorname{tg}x - \sin x$.

解 所谓函数 $f(x)$ 的主部 $g(x)$, 即满足

$$\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 1 \text{ 或 } f(x) = g(x) + o(x) \quad (x \rightarrow 0).$$

(a) 因为 $\frac{2x - 3x^3 + x^5}{2x} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$,

故其主部为 $2x$, 它对于无穷小 x 是一阶的.

(b) 因为 $\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0),$$

故其主部为 x , 它对于 x 是一阶的.

(c) 因为 $\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{3x^2 - 8x^3}$

$$= \frac{\sqrt{(1-2x)^6} + \sqrt{(1-2x)^3(1-3x)^2} + \dots + \sqrt[3]{(1-3x)^{10}}}{3x^2 - 8x^3}.$$

于是, $\frac{\sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}}{\frac{x^2}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$, 故其主部为

$\frac{x^2}{2}$, 它对于 x 是二阶的.

(r) 因为 $\operatorname{tg}x - \sin x = \frac{2}{\cos x} \sin x \sin^2 \frac{x}{2}$, 于是,

$\frac{\operatorname{tg}x - \sin x}{\frac{x^3}{2}} \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow 0)$, 故其主部为 $\frac{x^3}{2}$, 它对于 x 是三阶

的.

654. 设 $x \rightarrow +0$, 证明无穷小

$$(a) f(x) = \frac{1}{\ln x}; \quad (b) f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

无论对任何的 n , 也不能与无穷小 $x^n (n > 0)$ 相比较.

即: 对于如此的 n , 不能有等式 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{x^n} = k$, 式中 k 为异于零的有限量.

证 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} x^n \ln x = 0^{*}) (n > 0)$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\ln x} = \infty,$$

即 $\frac{1}{\ln x}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow +0$).

(b) 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n} = 0^{**}) (n > 0)$, 所以, $e^{-\frac{1}{x^2}}$ 不能与无穷小 x^n 相比较 ($x \rightarrow 0$).

*) 参看 592 题.

**) 参看 591 题.

655. 设 $x \rightarrow 1$. 选出下列函数的形如 $C(x-1)^n$ 的主部, 并求其对于无穷小 $(x-1)$ 的阶:

$$(a) x^3 - 3x + 2; \quad (b) \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}; \quad (B) \ln x;$$

$$(r) e^x - e; \quad (d) x^n - 1.$$

解 (a) 因为 $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$, 又

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{3(x-1)^2} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $3(x-1)^2$, 对于 $(x-1)$ 是二阶无穷小

$$(6) \text{ 因为 } \sqrt[3]{1 - \sqrt{x}} = -\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}}, \text{ 又}$$

$$\frac{\sqrt[3]{1 - \sqrt{x}}}{-\frac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{2}}} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $\frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{2}}$, 对于 $(x-1)$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶无穷小.

$$(B) \text{ 因为 } \frac{\ln x}{x-1} = \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

$$(r) \text{ 因为 } e^x - e = e(e^{x-1} - 1), \text{ 又}$$

$$\frac{e^{x-1} - 1}{x-1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1).$$

故其主部为 $e(x-1)$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

$$(D) \text{ 因 } x^x - 1 = e^{x \ln x} - 1, \text{ 又}$$

$$\frac{e^{x \ln x} - 1}{x-1} = \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot \frac{x \ln[1+(x-1)]}{x-1} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故其主部为 $x-1$, 对于 $(x-1)$ 是一阶无穷小.

656. 设 $x \rightarrow +\infty$. 选出下列函数的形如 Cx^n 的主部, 并求其对于无穷大 x 的阶:

$$(a) x^2 + 100x + 10000; \quad (6) \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1};$$

$$(B) \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}; \quad (r) \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}.$$

解 (a) 因为 $x^2 + 100x + 10000 \sim x^2 (x \rightarrow +\infty)$, 故主部为 x^2 , 它对于无穷大 x 是二阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{2x^5}{x^3 - 3x + 1} = \frac{2x^5}{2x^3 - 6x^3 + 2x^2},$$

$$\rightarrow 1(x \rightarrow +\infty)$$

故主部 $2x^2$, 它对于无穷大 x 是二阶的.

$$(B) \sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x} = x^{\frac{2}{3}} \left[\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[6]{\frac{1}{x}} \right],$$

于是,

$$\frac{\sqrt[3]{x^2 - x} + \sqrt{x}}{x^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x}\right)} + \sqrt[6]{\frac{1}{x}} \rightarrow 1(x \rightarrow +$$

$\infty)$,

故主部为 $x^{\frac{2}{3}}$, 它对于无穷大 x 是 $\frac{2}{3}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} \rightarrow 1(x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\sqrt[8]{x}$, 它对于无穷大 x 是 $\frac{1}{8}$ 阶的.

657. 设 $x \rightarrow +\infty$. 选出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x}\right)^n$ 的主部, 并求

其对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 的阶:

$$(a) \frac{x+1}{x^4+1}; \quad (b) \sqrt{x+1} - \sqrt{x};$$

$$(B) \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}; \quad (r) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}.$$

$$\text{解} \quad (a) \text{ 因为 } \frac{\frac{x+1}{x^4+1}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = \frac{x^3(x+1)}{x^4} \rightarrow 1(x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^3$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 3 阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的.

$$(8) \frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\frac{2\sqrt{x(x+2)} - 2(x+1)}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1}}}$$

$$= \frac{-2}{(\sqrt{x+2} + \sqrt{x} + 2\sqrt{x+1})(\sqrt{x(x+2)} + x + 1)}$$

于是, 由此得

$$\frac{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{8}{\left[\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right] \left[\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right]}$$

$$\rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $-\frac{1}{4}x^{\frac{3}{2}}$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 是 $\frac{3}{2}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \rightarrow 1 (x \rightarrow +\infty),$$

故主部为 $\left(\frac{1}{x}\right)^2$, 它对于无穷小 $\frac{1}{x}$ 为 2 阶的.

658. 设 $x \rightarrow 1$. 选出下列函数的形如 $C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ 的主部, 并求其对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 的阶:

$$(a) \frac{x^2}{x^2-1}; (6) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}; (B) \frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}};$$

$$(r) \frac{1}{\sin \pi x}; (\pi) \frac{\ln x}{(1-x)^2};$$

解 (a) $\frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2}{(x-1)(x+1)}$, 于是,

$$\frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{\frac{1}{2(x-1)}} = \frac{2x^2}{x+1} \rightarrow 1(x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{2(x-1)}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

$$(6) \text{ 因为 } \frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1-x}}} = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{2}} \rightarrow 1(x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\sqrt{2} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{1-x}$ 是 $\frac{1}{2}$ 阶的.

(B) 因为 $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{1-x}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1+x+x^3}}$, 于是,

$$\frac{\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\frac{1}{\sqrt[3]{3} \sqrt[3]{1-x}}} \rightarrow (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{1}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是 $\frac{1}{3}$ 阶的.

$$(r) \text{ 因为 } \frac{\frac{1}{\sin \pi x}}{\frac{1}{\pi(1-x)}} = \frac{\pi(1-x)}{\sin \pi(1-x)} \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{1-x} \right)$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

$$(n) \text{ 因为 } \frac{\frac{\ln x}{(1-x)^2}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{\ln[1+(x-1)]}{x-1} \\ \rightarrow 1 (x \rightarrow 1),$$

故主部为 $\frac{1}{x-1}$, 它对于无穷大 $\frac{1}{x-1}$ 是一阶的.

659. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $f_n(x) = x^n (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(1) $f_n(x)$ 中的每一个函数都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加较快;

(2) 函数 e^x 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较快.

证 (1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x \rightarrow +\infty$, 所以, $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加较快.

(2) 因为 $\frac{e^x}{x^n} \rightarrow +\infty (x \rightarrow +\infty, n \text{ 为任一固定的自然数})$, 所以 e^x 比 $f_n(x)$ 中的每一个都增加得较快.

660. 设 $x \rightarrow +\infty$ 和 $f_n(x) = \sqrt[n]{x} (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(1) 函数 $f_n(x)$ 中的每一个都比其前面的一个函数 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢;

(2) 函数 $f(x) = \ln x$ 比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较慢.

证 (1) 因为 $\frac{f_n(x)}{f_{n-1}(x)} = x^{-\frac{1}{n(n-1)}}$
 $\rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$

所以, $f_n(x)$ 比 $f_{n-1}(x)$ 增加得较慢.

(2) 因为 $\frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} \rightarrow 0 (x \rightarrow +\infty),$

所以, $\ln x$ 比 $f_n(x)$ 中的每一个增加得较慢.

*) 利用 565 题的结果.

661. 证明对于任意的函数叙列

$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots (x_0 < x < +\infty).$

可举出一函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时它比函数 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较快.

证 取正整数 $N > x_0$. 定义 $x_0 < x < +\infty$ 上的函数 $f(x)$ 如下:

$$f(x) = \begin{cases} n \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| + 1 \right), & \text{当 } n \leq x < n+1 \text{ 时,} \\ & (n = N, N+1, \dots); \\ 0, & \text{当 } x_0 < x < N \text{ 时.} \end{cases}$$

于是, 对任何正整数 n , 当 $x > \max\{N, n\}$ 时, 有

$$\left| \frac{f_n(x)}{f(x)} \right| = \frac{|f_n(x)|}{[x] \left(\sum_{k=1}^{[x]} |f_k(x)| + 1 \right)} < \frac{1}{[x]},$$

其中 $[x]$ 表 x 的整数部分. 由此可知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{f(x)} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 比 $f_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 中的每一个都增加得较快.

§ 7. 函数的连续性

1° 函数的连续性 设

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad (1)$$

即,若对于每一个 $\epsilon > 0$, 都有 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 对于 $f(x)$ 的有意义的一切值, 不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

都成立, 则称函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时 (或在点 x_0) 是连续的.

若函数 $f(x)$ 在集合 X 上的每一点都是连续的, 则称函数 $f(x)$ 在已知集合 $X = \{x\}$ (区间, 线段等等) 上是连续的.

若某值 $x = x_0$ 属于函数 $f(x)$ 的定义域 $X = \{x\}$ 或为此集合的聚点, 而当 $x = x_0$ 时, 等式(1)不成立 (即, (a) 数 $f(x_0)$ 不存在, 换言之, 函数在点 $x = x_0$ 没有定义; 或 (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 或 (c) 公式(1)的两端虽有意义, 但它们不相等), 则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的不连续点.

分为: (1) 第一类的不连续点 x_0 , 对于这些点存在有单侧有限的极限:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) \text{ 和 } f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x).$$

(2) 第二类的不连续点 —— 其余的一切不连续点.

差

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

称为函数在点 x_0 的跳跃.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$$

成立, 则不连续点 x_0 称为无变化的. 若极限 $f(x_0 - 0)$ 或 $f(x_0 + 0)$ 中至少有一个等于符号 ∞ , 则称 x_0 为无穷型不连续点.

若等式

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \text{ [或 } f(x_0 + 0) = f(x_0)]$$

成立, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 是左侧(或右侧)连续. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续的充分而且必要的条件为下面三个数相等:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2° 初等函数的连续性 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 连续, 则函数

$$(a) f(x) \pm g(x); \quad (b) f(x)g(x);$$

$$(B) \frac{f(x)}{g(x)} \text{ [} g(x_0) \neq 0 \text{]}$$

也在 $x = x_0$ 连续.

特殊情形: (a) 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

对任何的 x 值都是连续的; (b) 有理分式函数

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m}$$

对所有不使其分母为零的 x 值, 都是连续的.

一般地说, 基本初等函数: $x^n, \sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, a^x, \log_a x, \operatorname{arc} \sin x, \operatorname{arc} \cos x, \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, \dots$ 在一切使它们有意义的点都连续.

较普遍的结果如下: 若函数 $f(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续, 及函数 $g(y)$ 当 $y = f(x_0)$ 时连续, 则函数 $g(f(x))$ 当 $x = x_0$ 时连续.

3° 关于连续函数的基本定理 若函数 $f(x)$ 在有限的闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则: (1) 函数 $f(x)$ 在此闭区间内是有界的; (2) 达到其下确界 m 和上确界 M (外尔什特拉斯定理); (3) 在每一个区间 $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ 中, 函数具有介于 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 间的一切中介值 (哥西定理). 特例, 若 $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, 则可找到一个数值 $\gamma (\alpha < \gamma < \beta)$, 使得 $f(\gamma) = 0$.

662. 已给连续函数 $y = f(x)$ 的图形. 对于给定点 a 与 给定数 $\epsilon > 0$, 用几何方法表示出这样的数 $\delta > 0$, 使当 $|x - a|$

$< \delta$ 时, $|f(x) - f(a)|$
 $< \epsilon$.

解 如图 1.262
 所示, 如果 $\delta_1 < \delta_2$,
 我们只要取

$$\delta = \min(\delta_1, \delta_2),$$

即有

$$\delta = \delta_1.$$

于是, 当 $|x - a| < \delta$ 时,

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

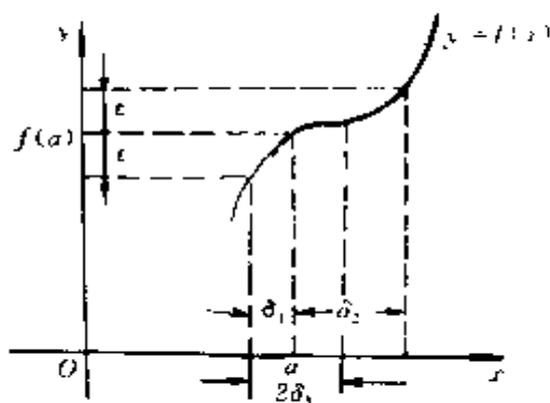


图 1.262

663. 要做一个金属的边长 $x_0 =$

10 厘米的正方形薄片. 若要其面积 $y = x^2$ 与预计的 $y_0 =$
 100 平方厘米的差不超过 (a) ± 1 平方厘米; (b) ± 0.1 平
 方厘米; (c) ± 0.01 平方厘米; (r) $\pm \epsilon$ 平方厘米, 问其边
 x 可以在什么范围内变更?

解 (a) 要 $|x^2 - 100| < 1$, 只要

$$99 < x^2 < 101.$$

解之, 得

$$9.95 < x < 10.05.$$

(b) 要 $|x^2 - 100| < 0.1$, 只要

$$\sqrt{100 - 0.1} < x < \sqrt{100 + 0.1}.$$

解之, 得

$$9.995 < x < 10.005.$$

(c) 要 $|x^2 - 100| < 0.01$, 只要

$$\sqrt{100 - 0.01} < x < \sqrt{100 + 0.01}.$$

解之, 得

$$9.9995 < x < 10.0005.$$

(r) 要 $|x^2 - 100| < \epsilon$, 只要

$$\sqrt{100 - \epsilon} < x < \sqrt{100 + \epsilon}. *$$

*) 本来, x 处应记成 $|x|$, 在此仅考虑点 $x = 10$ 处, 故在其近傍 x 值恒为正, 因此, 不必取绝对值了。

664. 立方体的边是在 2 米和 3 米之间, 为了使计算这立方体的体积时发生的绝对误差不超过 ϵ 立方米, 设 (a) $\epsilon = 0.1$ 立方米; (b) $\epsilon = 0.01$ 立方米; (B) $\epsilon = 0.001$ 立方米, 问测量此立方体的边 x 时可允许有怎样的绝对误差 Δ ?

解 要 $|x_1^3 - x_2^3| < \epsilon$, 只要

$$|x_1 - x_2|(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) < \epsilon,$$

即只要

$$|x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{3 \times 3^2} = \frac{\epsilon}{27},$$

故有

$$(a) \Delta < \frac{0.1}{27} (\text{米}) = 3.7 (\text{毫米});$$

$$(b) \Delta < \frac{0.01}{27} (\text{米}) = 0.37 (\text{毫米});$$

$$(B) \Delta < \frac{0.001}{27} (\text{米}) = 0.037 (\text{毫米}).$$

665. 问在 $x_0 = 100$ 的尽可能多大邻域内, 函数 $y = \sqrt{x}$ 图形的纵坐标与 $y_0 = 10$ 之差小于 $\epsilon = 10^{-n}$ ($n \geq 0$)? 求当 $n = 0, 1, 2, 3$ 时这个邻域的大小.

解 要 $|\sqrt{x} - 10| < 10^{-n}$, 只要

$$10[1 - 10^{-(n+1)}] < \sqrt{x} < 10[1 + 10^{-(n+1)}],$$

即只要

$$100[1 - 10^{-(n+1)}]^2 < x < 100[1 + 10^{-(n+1)}]^2,$$

故得

(a) 当 $n = 0$ 时, $81 < x < 121$;

(b) 当 $n = 1$ 时, $98.01 < x < 102.01$;

(c) 当 $n = 2$ 时, $98.8001 < x < 100.2001$;

(d) 当 $n = 3$ 时, $99.980001 < x < 100.020001$.

666. 利用《 $\epsilon - \delta$ 》论证法, 证明函数 $f(x) = x^2$ 当 $x = 5$ 时连续.

填下表:

ϵ	1	0.1	0.01	0.001	...
δ					

证 任给 $\epsilon > 0$,

$$\text{要 } |x^2 - 25| < \epsilon, \text{ 即 } |x - 5||x + 5| < \epsilon, \quad (1)$$

不妨只就 $x = 5$ 的某一邻域来考虑. 例如, 取

$$|x - 5| < 1 \text{ 或 } 4 < x < 6,$$

从而有

$$0 < x + 5 < 11.$$

于是, 只要

$$|x - 5| < \frac{\epsilon}{11}.$$

取 $\delta = \min\left(\frac{\epsilon}{11}, 1\right)$, 则当 $|x - 5| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^2 - 25| < \epsilon,$$

所以, 函数 $y = x^2$ 在 $x = 5$ 处连续.

填下表:

ε	1	0.1	0.01	0.001	ε	...
δ	0.09	0.009	0.0009	0.00009	$\min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)$...

667. 设 $f(x) = \frac{1}{x}$ 和 $\varepsilon = 0.001$. 对于数值 $x_0 = 0.1; 0.01; 0.001; \dots$ 求出充分大的正数 $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ 使得从不等式 $|x - x_0| < \delta$ 推出不等式

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

可否对于已知的 $\varepsilon = 0.001$ 选出 $\delta > 0$ 来, 使它对于区间 $(0, 1)$ 中的一切 x_0 值都适用, 换句话说, 对于任意的值 $x_0 \in (0, 1)$, 若 $|x - x_0| < \delta$, 则 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

解 $|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{|x||x_0|}.$ (1)

由于 $|x_0| - |x| \leq |x - x_0|$ 或 $|x| \geq |x_0| - |x - x_0|$, 故有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|}$$

(在此, 我们已假设了 $|x - x_0| \leq |x_0|$, 这一点是可以办到的).

于是要 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 只要

$$\frac{|x - x_0|}{|x_0|^2 - |x_0||x - x_0|} < \varepsilon,$$

即只要

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon |x_0|}.$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon |x_0|} > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

我们取近似值, $\delta = 0.001x_0^2$ ($\epsilon = 0.001$).

当 $x_0 = 0.1$ 时, $\delta = 10^{-5}$;

当 $x_0 = 0.01$ 时, $\delta = 10^{-7}$;

当 $x_0 = 0.001$ 时, $\delta = 10^{-9}$.

由表达式(1)可知,对于不论怎样小的正数 δ (固定),则当 $|x - x_0| < \delta$ 及 $x_0 \rightarrow 0$ 时, $|f(x) - f(x_0)|$ 可任意地大.因此,无法选出一个公共的正数 δ 来.

668. 简明的用《 $\epsilon - \delta$ 》的说法在肯定的意义上来表达下面的论断:函数 $f(x)$ 在点 x_0 有定义,而在这一点不连续.

解 存在一个 $\epsilon_0 > 0$,对于无论怎样小的 $\delta > 0$,都有某 x 满足 $|x - x_0| < \delta$,但

$$|f(x) - f(x_0)| \geq \epsilon_0.$$

669. 设对于某些数 $\epsilon > 0$,可找到对应的数 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$,使得,只要 $|x - x_0| < \delta$,则

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

设:(a) 诸数 ϵ 形成一有穷的集合;(b) 数 ϵ 形成分数 $\epsilon = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1, 2, \dots$) 的无穷集合.可否断定函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续?

解 (a) 不能.因为 ϵ 不能任意地小.

(b) 可以.事实上,对于任给的 $\epsilon > 0$,总可以取充分大的 n ,使 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.于是,存在 $\delta > 0$,使当 $|x - x_0| < \delta$ 时,恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

670. 设已知函数

$$f(x) = x + 0.001[x].$$

证明对于每一个 $\epsilon > 0.001$, 便可选出 $\delta = \delta(\epsilon, x) > 0$, 使得: 只要 $|x' - x| < \delta$, 则 $|f(x') - f(x)| < \epsilon$. 而对于 $0 < \epsilon \leq 0.001$, 这件事对于一切的值 x 都不行.

在怎样的点这个函数失去了连续性?

证 当 $\epsilon > 0.001$, 且 $|x' - x| < 1$ 时,

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &= |x - x' + 0.001([x] - [x'])| \\ &\leq |x - x'| + 0.001 \end{aligned}$$

此时只要取 $\delta = \min\{\epsilon - 0.001, 1\}$, 则当 $|x - x'| < \delta$ 时恒有 $|f(x) - f(x')| < \epsilon$.

当 $0 < \epsilon \leq 0.001$, 且 x_0 不为整数时, 有整数 n , 使得 $n < x_0 < n + 1$. 只要取

$$\delta = \min(x_0 - n, n + 1 - x_0, \epsilon) > 0,$$

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $[x] = [x_0]$, 从而

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta \leq \epsilon.$$

而当 $x_0 = n$ 为整数时, 则对于无论怎样选取正数 δ , 总有 x 满足

$$x < x_0 \text{ 及 } x_0 - x < \delta,$$

此时

$$|f(x) - f(x_0)| = (x_0 - x) + 0.001 > \epsilon.$$

于是, 函数 $f(x)$ 在 $x = n$ (整数) 的点失去了连续性.

671. 设对于每一个充分小的数 $\delta > 0$, 都有 $\epsilon = \epsilon(\delta, x_0) > 0$, 使得: 只要 $|x - x_0| < \delta$, 则不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ 成立. 从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续?

由已知的不等式说明了函数 $f(x)$ 的什么性质?

解 不能. 因为 ϵ 是由 δ 而确定的, 它不能任意小. 因此, 只能说明函数 $f(x)$ 在点 x_0 的近傍有界. 事实上, $|f(x)| < |f(x_0)| + \epsilon$.

672. 设对于每一个数 $\epsilon > 0$, 都有数 $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$.

从这里是否可得出函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 由这些不等式说明了函数的什么性质?

解 不对, 若函数 $f(x)$ 在有穷的区间 (a, b) 内有定义, 则只要取 $\delta = 2(b - a)$, 不等式 $|x - x_0| < \delta$ 恒成立. 若 (a, b) 为无穷区间, 例如, 设 $b = +\infty$, 则必然

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

事实上, 若不然, 则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = c < +\infty.$$

于是, 存在数列 $x_n > a (n = 1, 2, \dots)$, $x_n \rightarrow +\infty$ 使 $f(x_n) \rightarrow c$. 由此可知数列 $f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ 有界, 令

$$\epsilon_0 = \sup\{|f(x_n)| + |f(x_0)| + 1\} > 0.$$

显然

$$|f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon_0 (n = 1, 2, \dots),$$

但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_0| = +\infty,$$

故对此 $\epsilon_0 > 0$, 不存在对应的 $\delta = \delta(\epsilon_0, x_0) > 0$, 此与假定矛盾. 由此可知, 必有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| = +\infty.$$

673. 设对于每一个数 $\delta > 0$ 及每一个 $x = x_0$, 都有数 $\epsilon = \epsilon(\delta,$

$x_0) > 0$, 使得: 若 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, 则 $|x - x_0| < \delta$.
 从这里是否应得函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 连续? 由已知的不等式说明了函数的什么性质?

解 不能. 它只说明了反函数的连续性和单值性.

674. 利用《 $\epsilon - \delta$ 》论证法证明下列函数的连续性: (a) $ax + b$; (б) x^2 ; (в) x^3 ; (г) \sqrt{x} ; (д) $\sqrt[3]{x}$; (e) $\sin x$; (ж) $\cos x$; (з) $\text{arc tg } x$.

证 (a) 设 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

任给 $\epsilon > 0$, 要 $|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon$, 只要

$$|x - x_0| < \frac{\epsilon}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

取 $\delta = \frac{\epsilon}{|a|}$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|(ax + b) - (ax_0 + b)| < \epsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 所以, $f(x) = ax + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内点点连续.

$$(б) |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq |x - x_0| \cdot (|x - x_0| + 2|x_0|).$$

任给 $\epsilon > 0$, 要 $|x^2 - x_0^2| < \epsilon$, 只要

$$|x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0| - \epsilon < 0,$$

即只要 $|x - x_0| < \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0|$.

取 $\delta = \sqrt{x_0^2 + \epsilon} - |x_0| > 0$, 则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^2 - x_0^2| < \epsilon.$$

这就证明了 $f(x) = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

$$(B) \text{ 由于 } |x^3 - x_0^3| = |x - x_0| |x^2 + x_0x + x_0^2| \\ \leq |x - x_0| (|x^2| + |x||x_0| + |x_0|^2),$$

不妨设 $|x - x_0| < 1$, 则有 $|x| < 1 + |x_0|$ 及

$$|x^3 - x_0^3| < |x - x_0| (1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{1 + 3|x_0| + 3|x_0|^2}\right)$, 则

当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|x^3 - x_0^3| < \varepsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 这就证明了 x^3 在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续性.

$$(r) \text{ 由于 } |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$$

$$< \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} \quad (x_0 > 0).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon \sqrt{x_0}$, 即可得证.

若 $x_0 = 0$, 则取 $\delta = \varepsilon^2$.

(II) 由于

$$|\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{|x^{\frac{2}{3}} + (xx_0)^{\frac{1}{3}} + x_0^{\frac{2}{3}}|}$$

$$< \frac{|x - x_0|}{|\sqrt[3]{x_0^2}|} \quad (x_0 \neq 0, xx_0 > 0),$$

取 $\delta = \min\{|x_0|, \varepsilon \sqrt[3]{x_0^2}\}$ 即可得证.

若 $x_0 = 0$, 则取 $\delta = \varepsilon^2$.

(e) 由于

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right|$$

$$\leq |x - x_0|,$$

取 $\delta = \epsilon$, 即可得证.

(ж) 由于

$$\begin{aligned} |\cos x - \cos x_0| &= 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \sin \frac{x + x_0}{2} \right| \\ &\leq |x - x_0| \end{aligned}$$

取 $\epsilon = \delta$, 即可得证.

$$(з) \text{ 由 } |\arctg x - \arctg x_0| = \left| \arctg \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right|,$$

又因 $|y| < \frac{\pi}{2}$ 时, $|y| \leq |\operatorname{tg} y|$,

故有

$$|\arctg x - \arctg x_0| \leq \left| \frac{x - x_0}{1 + xx_0} \right|.$$

当 $x_0 > 0$ 时, 不妨就 $|x - x_0| < |x_0| = x_0$ 进行讨论, 此时

$$|1 + xx_0| > 1, \text{ 则}$$

$$|\arctg x - \arctg x_0| \leq |x - x_0|.$$

当 $x_0 < 0$ 时可同样讨论.

所以, 取 $\delta = \min(\epsilon, |x_0|)$ ($x_0 = 0$ 时, 取 $\delta = \epsilon$),

则当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|\arctg x - \arctg x_0| < \epsilon.$$

由于 x_0 的任意性, 所以 $\arctg x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

研究下列函数的连续性并绘出其图形:

675. $f(x) = |x|.$

解 $||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|,$

取 $\delta = \epsilon$, 即可证得在任一点的连续性, 如图 1.263

所示.

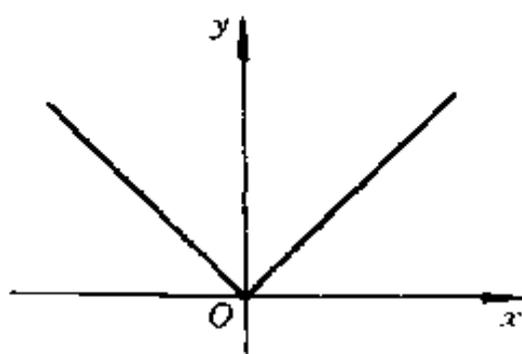


图 1.263

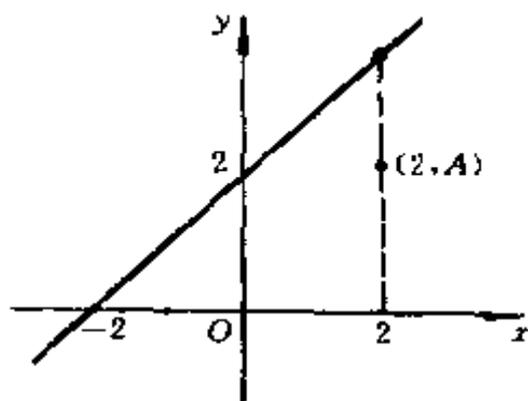


图 1.264

$$676. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{若 } x \neq 2; \\ A & \text{若 } x = 2. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4. \end{aligned}$$

因此,当 $A = 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处连续;而当 $A \neq 4$ 时, $f(x)$ 在点 $x = 2$ 处不连续. 至于在点 $x \neq 2$ 处显然是连续的,并且 $f(x) = x + 2 (x \neq 2)$.

如图 1.264 所示.

$$677. \text{若 } x \neq -1, f(x) = \frac{1}{(1+x)^2}, \text{ 而 } f(-1) \text{ 是任意的.}$$

$$\text{解 因为 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty,$$

故函数 $f(x)$ 在点 $x = -1$ 处不连续.

在点 $x \neq -1$ 处函数 $f(x)$ 显然是连续的.

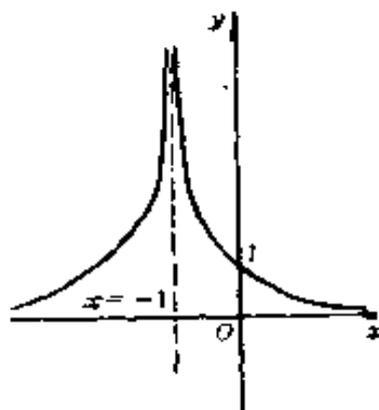


图 1.265

如图 1.265 所示.

678. (a) 若 $x \neq 0$,

$$f_1(x) = \left| \frac{\sin x}{x} \right|, \text{ 而 } f_1(0) = 1;$$

(6) 若 $x \neq 0$,

$$f_2(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \text{ 而 } f_2(0) = 1.$$

解 (a) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 1 = f_1(0)$, 故 $f_1(x)$ 点点连续.

(6) 因 $\lim_{x \rightarrow +0} f_2(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -0} f_2(x) = -1$, 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$ 不存在, 因此 $f_2(x)$ 在点 $x = 0$ 处不连续, 其余各点均连续.

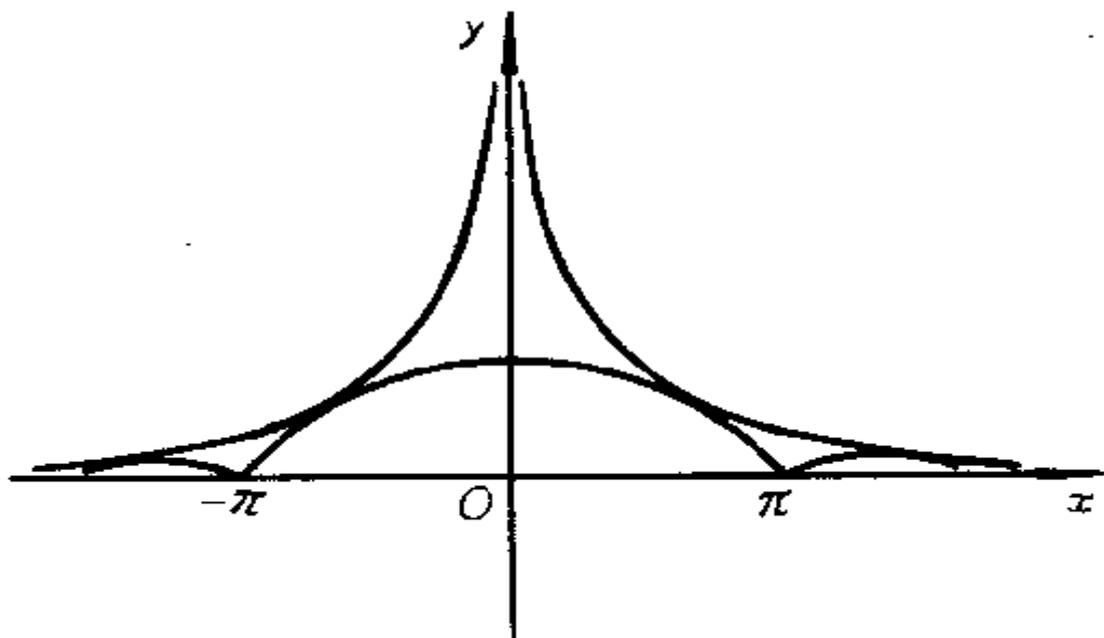


图 1.266

其中(a)的图形关于 Oy 轴对称(图 1.266), 而(6)的图形关于原点对称(图 1.267).

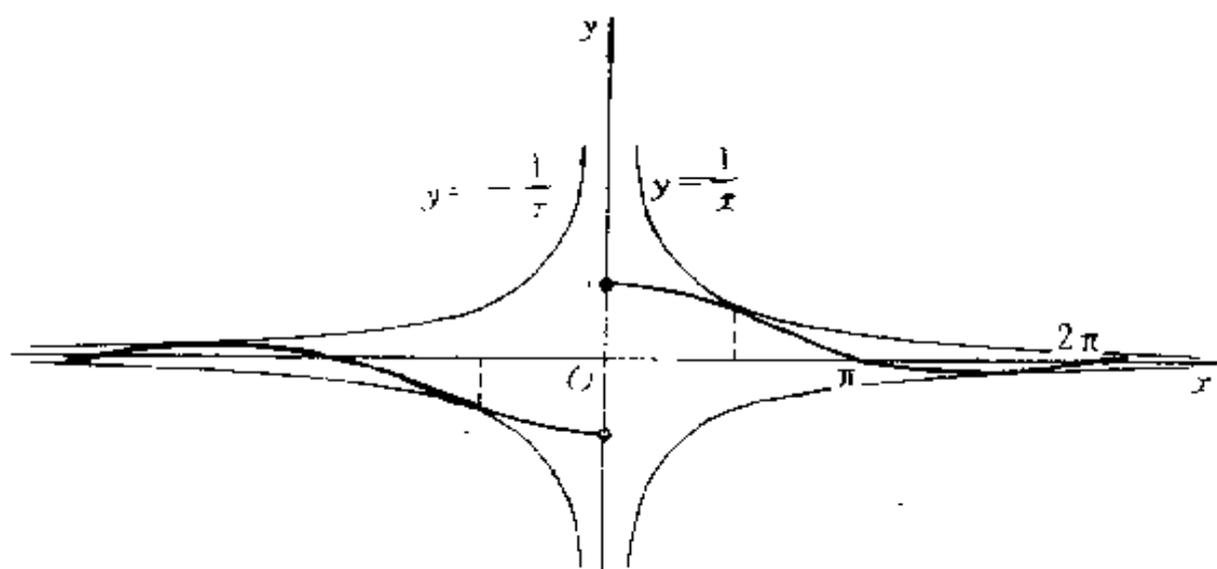


图 1.267

679. 若 $x \neq 0$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0)$ 是任意的.

解 在 $x \neq 0$ 的点 $f(x)$ 均为连续, 而在 $x = 0$ 不连续 (因为 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在). 图形关于原点对称, 图 1.268 仅为 $x > 0$ 的一部分.

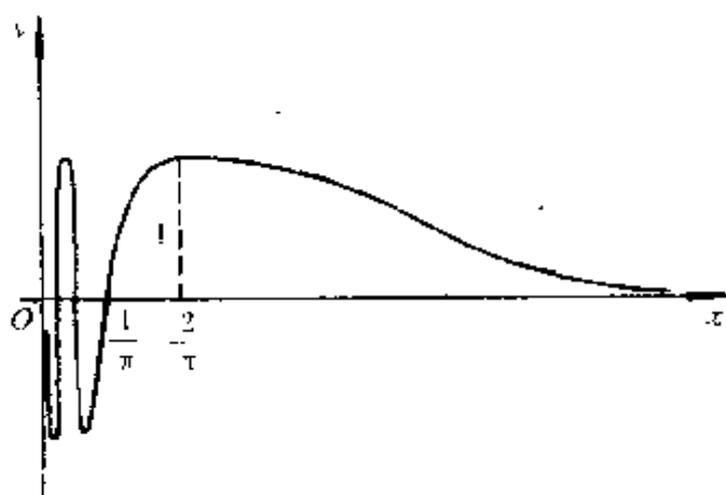


图 1.268

680. 若 $x \neq 0, f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 点点连续.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.269 所示.

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$, 且当 $|x| > \frac{2}{\pi}$ 时 $0 < y < 1$.

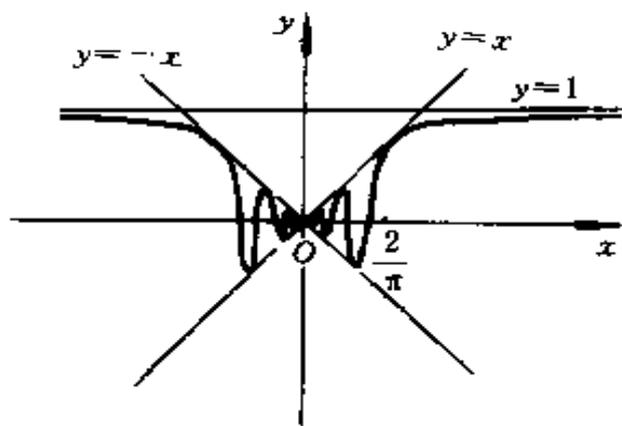


图 1.269

681. 若 $x \neq 0, f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, 而 $f(0) = 0$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$, 点点连续.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.270 所示.

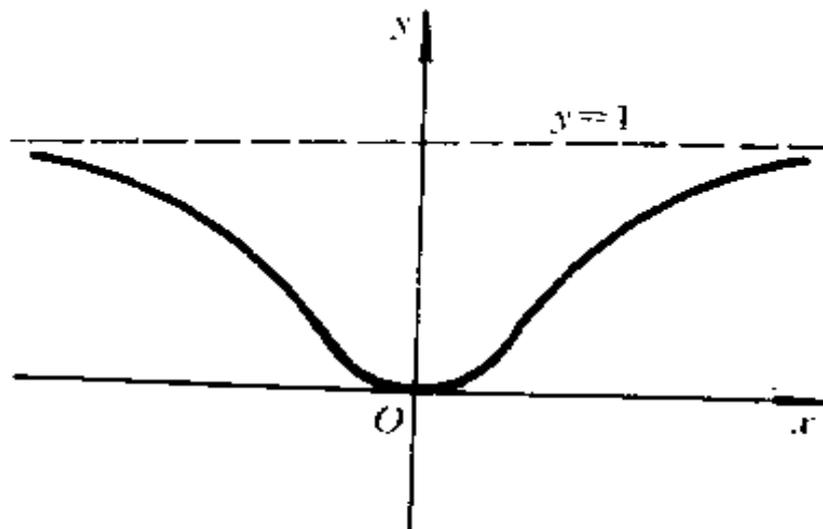


图 1.270

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 1$, 且 $0 < y < 1$.

682. 若 $x \neq 1, f(x) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x-1}}}$, 而 $f(1)$ 是任意的.

解 $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = 0,$

除点 $x = 1$ 外其余点点连续.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{2}$. 如图 1.271 所示.

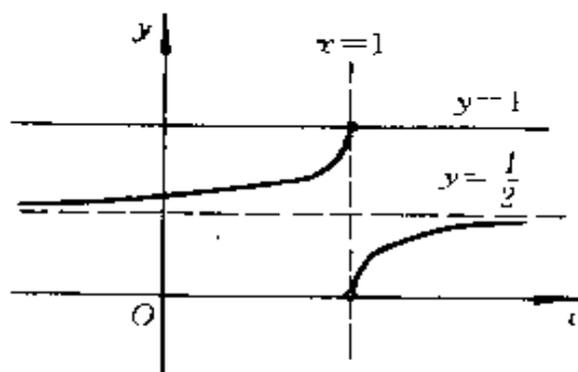


图 1.271

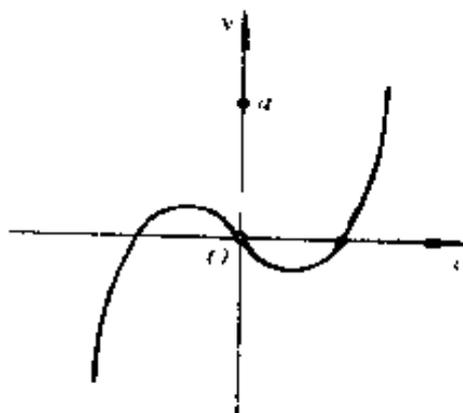


图 1.272

683. 若 $x \neq 0, f(x) = x \ln x^2$, 而 $f(0) = a$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x^2 = 0$

当 $a = 0$ 时, 点点连续; 而当 $a \neq 0$ 时, 除点 $x = 0$ 处不连续, 其余点点连续. 图形关于原点对称, 如图 1.272 所示.

684. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

解 当 $x < 0$ 时, $f(x) = -1$;

当 $x > 0$ 时, $f(x) = 1$;

当 $x = 0$ 时, $f(x) = 0$.

除点 0 外, 点点连续.

如图 1.273 所示.

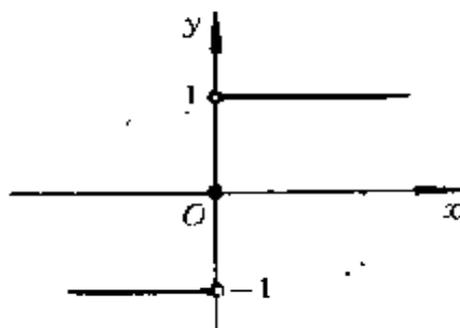


图 1.273

685. $f(x) = [x]$.

解 除当 $x = k$ (k 为整数) 外, 其余点点连续.

如图 1.274 所示.

686. $f(x) = \sqrt{x} - [\sqrt{x}]$.

解 当 $x = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$) 时不连续. 当 $k^2 \leq x < (k+1)^2$ 时,
 $f(x) = \sqrt{x} - k$. $f[(k+1)^2] = 0$.

如图 1.275 所示.

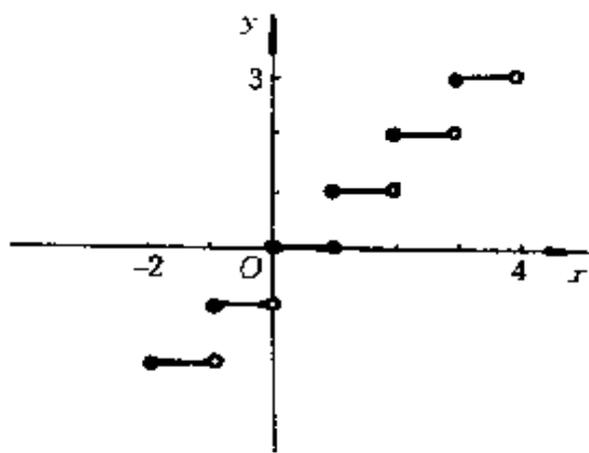


图 1.274

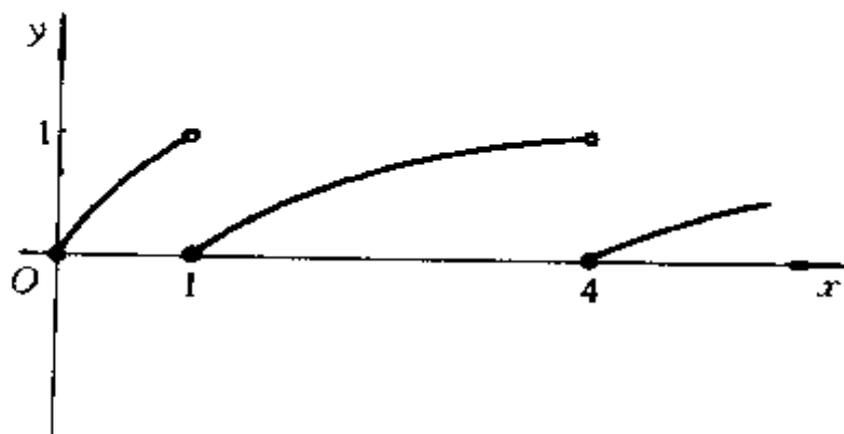


图 1.275

求出下列函数的不连续点, 并研究这些点的性质:

687. $y = \frac{x}{(1+x)^2}$.

解 $x = -1$ 为无穷型不连续点.

688. $y = \frac{1+x}{1+x^3}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1+x}{1+x^3} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1} = \frac{1}{3}$,

故 $x = -1$ 为“可移去”的不连续点.

$$689. y = \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2}$$

$$\text{解} \quad \frac{x^2 - 1}{x^3 - 3x + 2} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)^2(x + 2)},$$

$x = 1$ 及 $x = -2$ 均为无穷型不连续点.

$$690. y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow -1} y = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} y = -1$, 及 $\lim_{x \rightarrow 1} y = 0$,

所以, $x = -1$ 为无穷型不连续点, 而 $x = 0$ 及 $x = 1$ 为“可移去”的不连续点.

$$691. y = \frac{x}{\sin x}$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$ 及 $\lim_{x \rightarrow k\pi} y = \infty$ (k 为不等于零的整数),

所以, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

$$692. y = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi x}{4 - x^2}}$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 2} y = \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{2\pi \sin^2 \frac{\pi}{2}(2-x)}{\frac{\pi}{2}(2-x) \cdot 2(2+x)}} = 0.$$

同理, $\lim_{x \rightarrow -2} y = 0$,

所以, $x = 2$ 及 $x = -2$ 为“可移去”的不连续点.

$$693. y = \cos^2 \frac{1}{x}$$

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} y$ 不存在, 故 $x = 0$ 为第二类不连续点.

*) 左右极限均不存在.

$$694. y = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right).$$

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

因为 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k} - 0} y = (-1)^k$, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{k} + 0} y = (-1)^{k-1}$, 故 $x = \frac{1}{k}$

($k = \pm 1, \pm 2, \dots$)

为第一类不连续点.

$$695. y = \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{\cos \frac{\pi}{x}}.$$

解 $x = \frac{2}{2k+1}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为“可移去”的不连续点.

$$696. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

解 因 $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$,

故 $x = 0$ 为第一类不连续点.

$$697. y = \sqrt{x} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点.

$$698. y = e^{x + \frac{1}{x}}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} y = 0$,

所以, $x = 0$ 为第二类不连续点.

$$699. y = \frac{1}{\ln x}.$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = +\infty$,

所以, $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 而 $x = 1$ 为无

穷型不连续点.

$$700. y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$$

解 因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} y = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty$, 所以 $x = 1$ 为第一类不连续点, 而 $x = 0$,

为无穷型不连续点.

研究下列函数的连续性并绘出其大略图形.

$$701. y = \operatorname{sgn}(\sin x).$$

解 $x = k\pi (k = 0,$

$\pm 1, \pm 2, \dots)$.

为第一类不连续点.

如图 1.276 所示.

$$702. y = x - [x].$$

解 $x = k (k = 0, \pm 1,$

$\pm 2, \dots)$

为第一类不连续点.

如图 1.277 所示.

$$703. y = x[x].$$

解 $x = k (k = \pm 1, \pm 2,$

$\dots)$ 为第一类不连续点.

如图 1.278 所示.

$$704. y = [x] \sin \pi x.$$

解 处处连续.

当 $x = k (k = 0$

$, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时 $y = 0$.

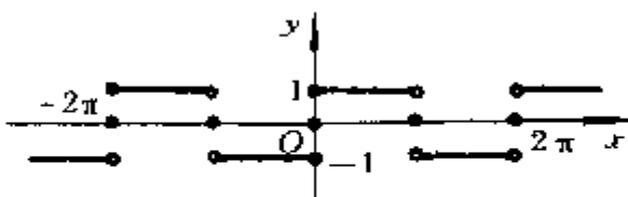


图 1.276

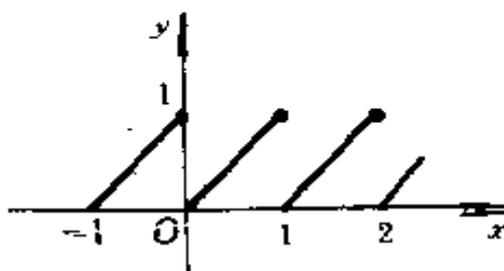


图 1.277

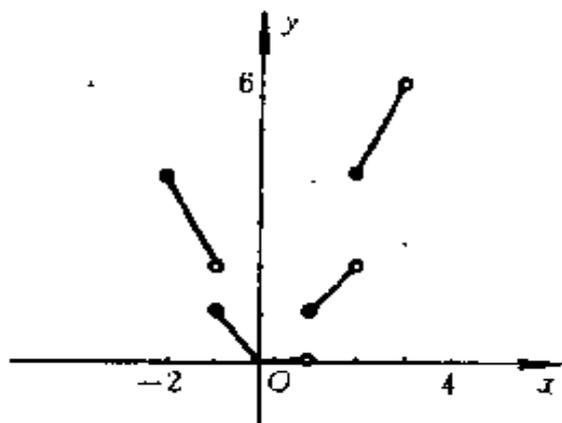


图 1.278

如图 1.279 所示.

705. $y = x^2 - [x^2]$.

解 $x = \pm \sqrt{k}$ ($k = 1, 2, \dots$) 为第一类不连续点.

如图 1.280 所示.

706. $y = [\frac{1}{x}]$.

解 $x = 0$ 为无穷型不连续点, $x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图 1.281 仅画了 $x > 0$ 的部分, 并且在图形中两轴比例不一致, 即已经过“压缩”变换.

707. $y = x[\frac{1}{x}]$.

解 $x = 0$ 为“可移去”的不连续点, 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$.

$x = \frac{1}{k}$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图 1.282 仅画了当 $x > 0$ 的部分, 并且两轴所取的单位不一致.

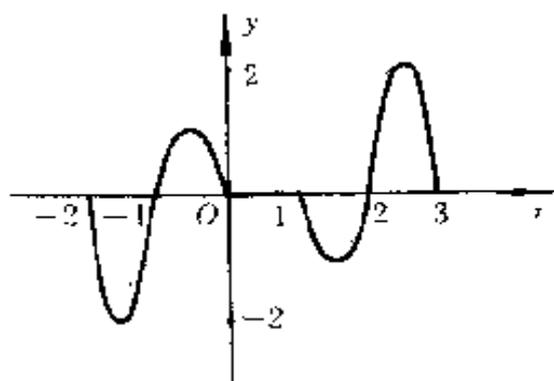


图 1.279

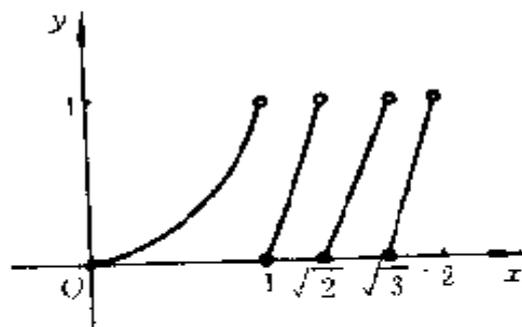


图 1.280

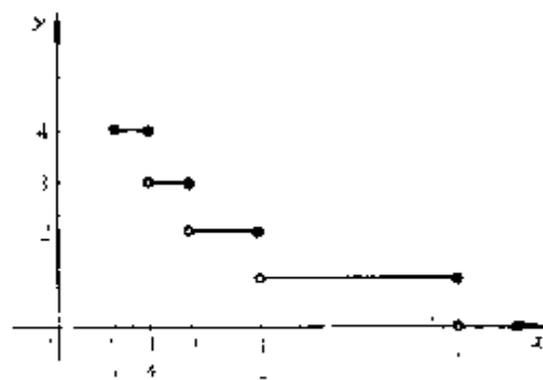


图 1.281

708. $y = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right)$.

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

凡使 $\cos \frac{1}{x} = 0$ 的点, 即 $x = \frac{2}{(2k-1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第一类不连续点.

图 1.283 仅画了当 $k = 0, \pm 1, \pm 2$ 时的情形, 图形关于 Oy 轴对称.

709. $y = \left[\frac{1}{x^2}\right] \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$.

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

$x = \pm \frac{1}{k}$ 及 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ ($k = 1, 2, \dots$)

为第一类不连续点.

图 1.284 仅画了 $x > 0$ 时的一部分. 又两轴所取的比例单位不同.

710. $y = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{x}$.

解 凡使 $\sin \frac{\pi}{x} = 0$, 即

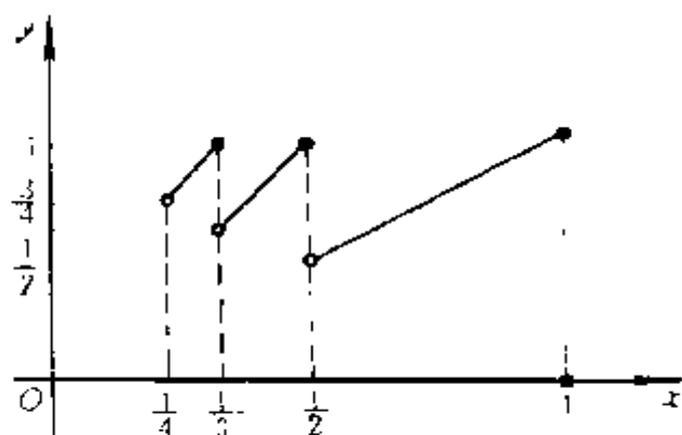


图 1.282

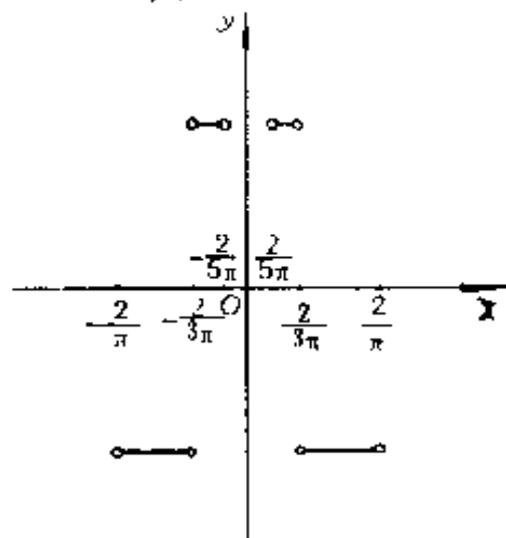


图 1.283

$$x = \frac{1}{k} (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

为无穷型不连续点. $x = 0$ 为第二类不连续点.

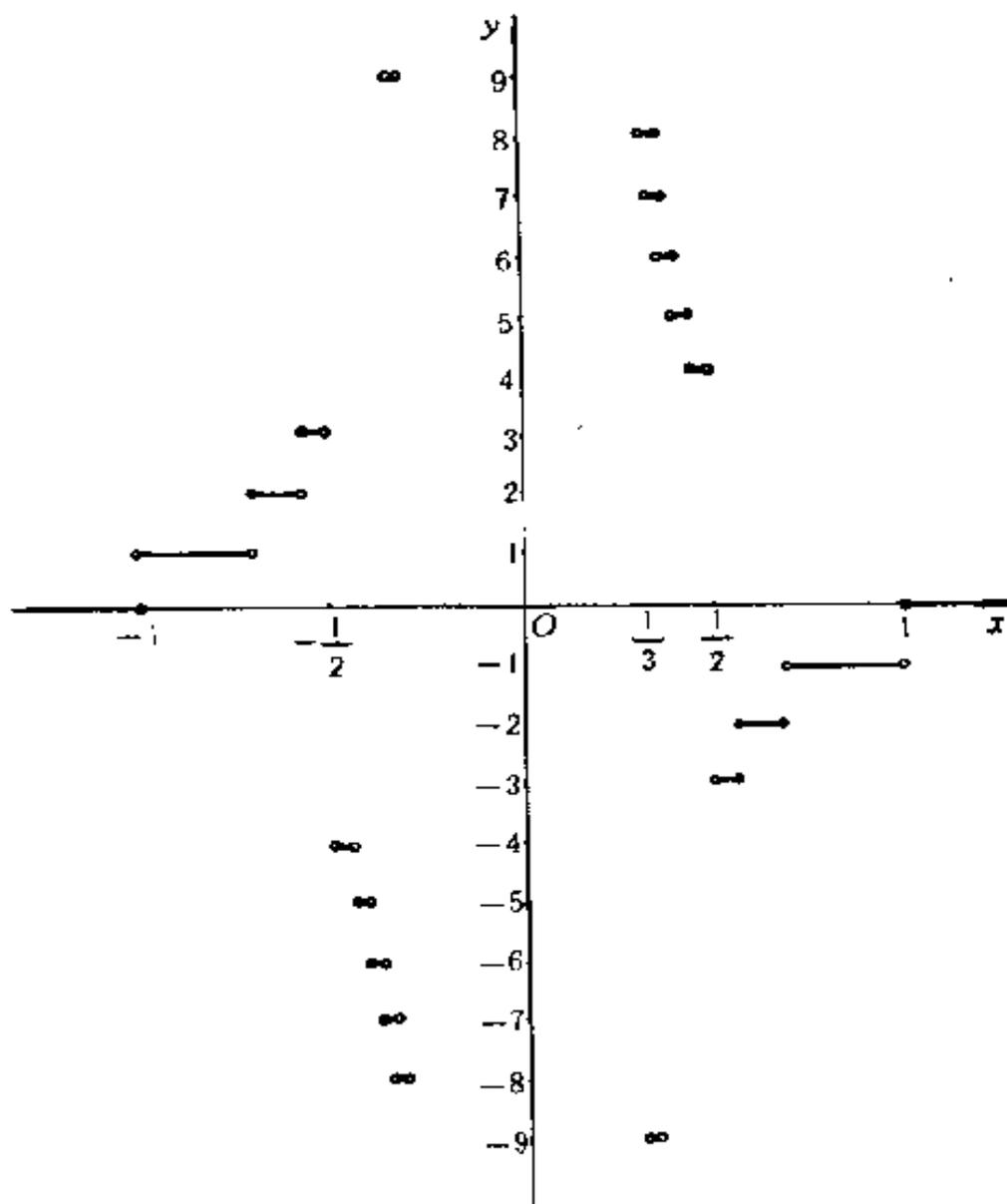


图 1.284

图形关于原点对称, 如图 1.285 所示.

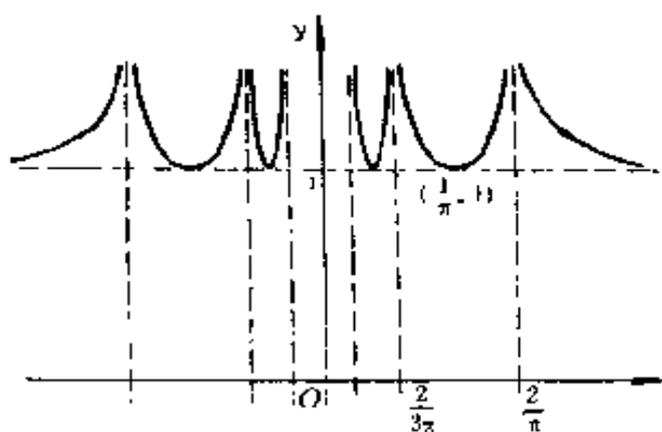


图 1.285

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow +\infty$.

711. $y = \sec^2 \frac{1}{x}$.

解 $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 为无穷型不连续点.

$x = 0$ 为第二类不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 1$.

如图 1.286 所示.

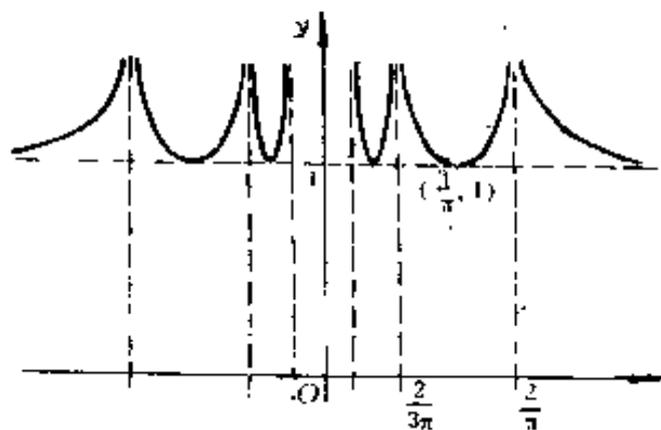


图 1.286

712. $y = (-1)^{x^2}$.

解 $x = \pm \sqrt{n} (n = 1, 2, \dots)$ 为第一类不连续点.

图形关于 Oy 轴对

称.

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}-0} y = (-1)^{n-1},$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{n}+0} y = (-1)^n.$$

如图 1.287 所示.

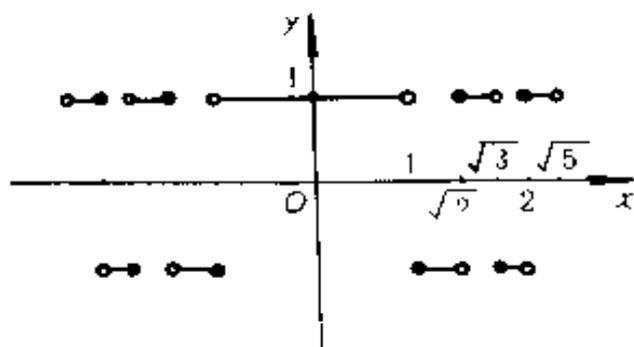


图 1.287

713. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2}\right)$.

解 $x = 0, x = 1$ 和 $x = 2$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} y = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} y = -\frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} y = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0.$$

如图 1.288 所示.

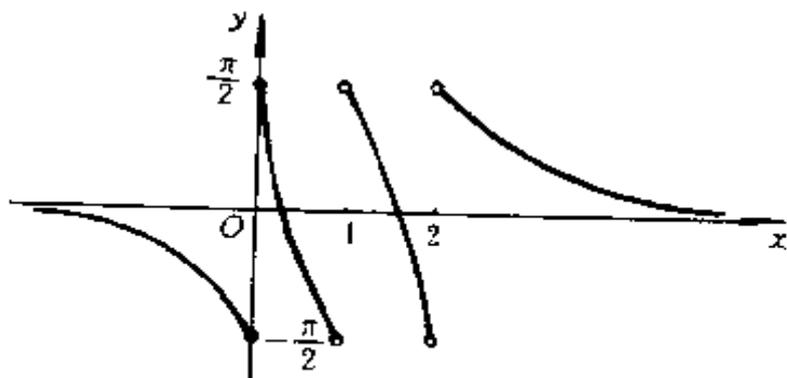


图 1.288

714. $y = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}$.

解 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.289 所示.

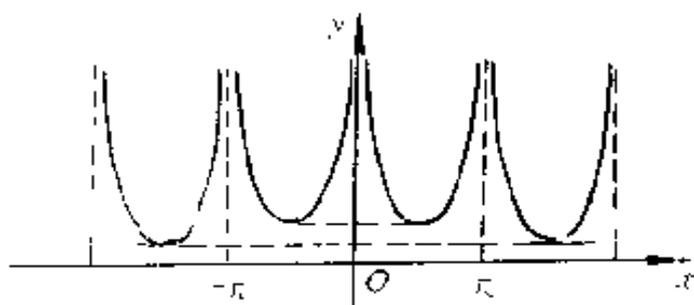


图 1.289

715. $y = \frac{1}{\sin(x^2)}$.

解 $x = \pm \sqrt{k\pi} (k = 0, 1, 2, \dots)$ 为无穷型不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.290 所示. 图中只画了 $x > 0$ 的一部分.

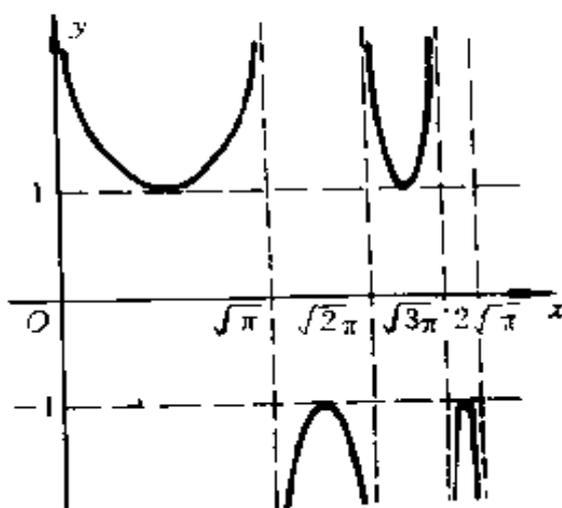


图 1.290

716. $y = \ln \frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$.

解 $x = -1$ 和 $x = 3$ 为无穷型不连续点.

定义域为 $x < -1$ 或 $x > 3$.

当 $x < \frac{-3}{2}$ 时, $0 < \frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} < 1$, 故

$$\ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} < 0.$$

当 $x > \frac{-3}{2}$ 时,

$$\frac{x^2}{x^2 - 2x - 3} > 1$$

$$\text{故 } \ln \frac{1}{(x+1)(x-3)} > 0.$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$.

如图 1.291 所示.

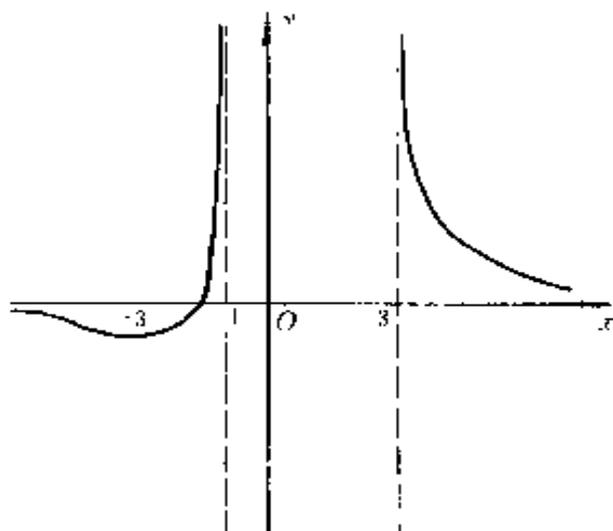


图 1.291

717. $y = e^{-\frac{1}{x}}$.

解 $x = 0$ 为第二类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -0} y = +\infty.$$

如图 1.292 所示.

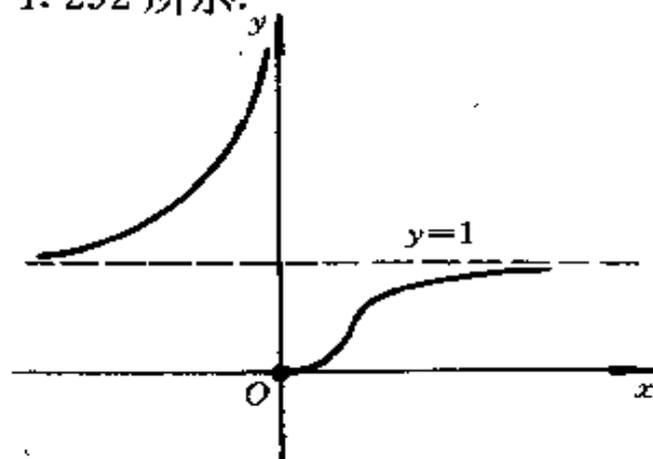


图 1.292

718. $y = 1 - e^{-\frac{1}{x^2}}$.

解 因 $\lim_{x \rightarrow 0} y = 1$,

故 $x = 0$ 为“可移去”的不连续点.

图形关于 Oy 轴对称, 如图 1.293 所示.

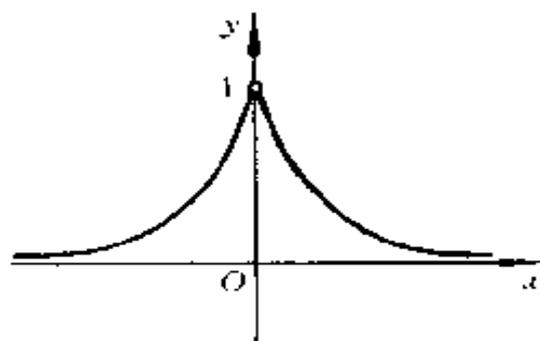


图 1.293

719. $y = \operatorname{th} \frac{2x}{1-x^2}$,

解 $x = \pm 1$ 为第一类不连续点.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} y = -1.$$

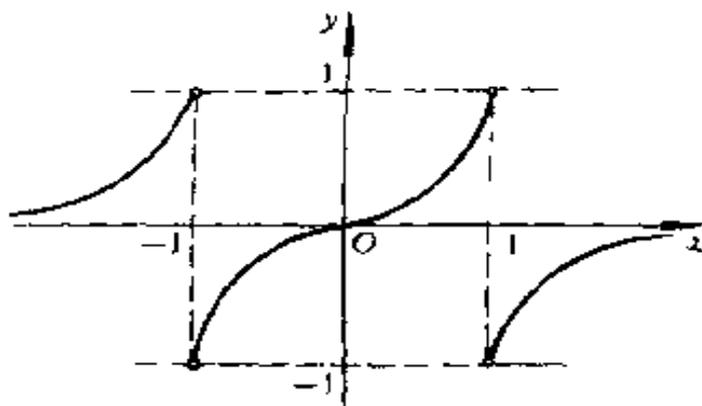


图 1.294

图形关于原点对称,

如图 1.294 所示.

研究下列函数的连续性并作出其图形:

720. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}$ ($x \geq 0$).

$$\text{解 } y = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{当 } x > 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

$x = 1$ 为第一类不连续点.

如图 1.295 所示.

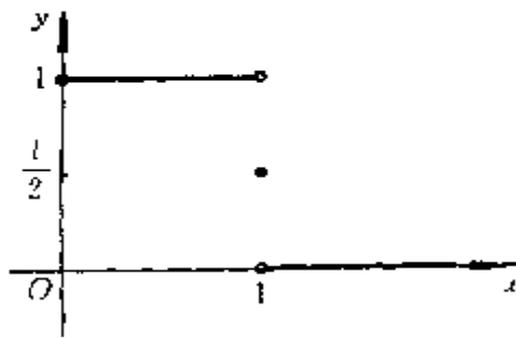


图 1.295

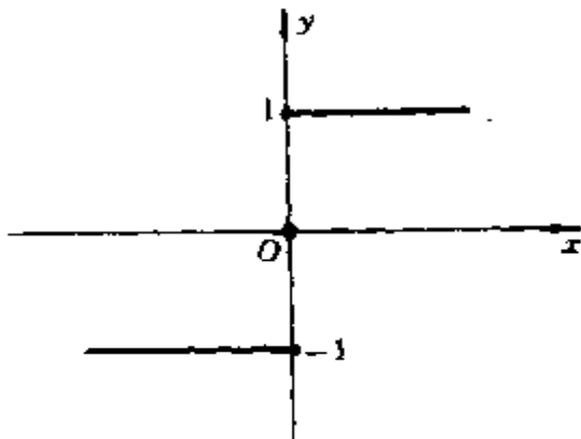


图 1.296

$$721. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

$$\text{即 } y = \operatorname{sgn} x.$$

$x=0$ 为第一类不连续点, 如图 1.296 所示.

$$722. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^{2n}}$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ x^2, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.297 所示.

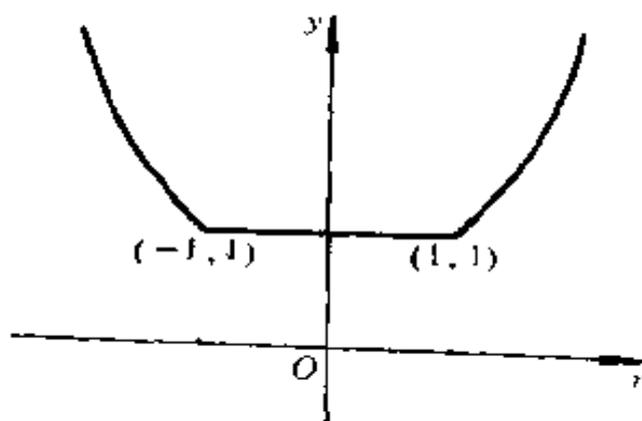


图 1.297

$$723. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$$

解

$$y = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = k\pi, \\ 0, & \text{当 } x \neq k\pi. \end{cases}$$

$$(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$x = k\pi$ 为第一类不连续点, 如图 1.298 所示.

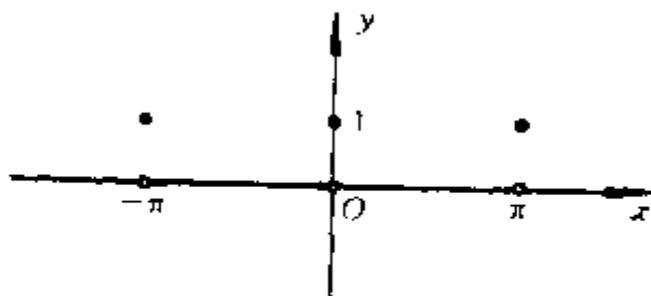


图 1.298

$$724. y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2\sin x)^{2n}}$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} x, & \text{当 } |x - k\pi| < \frac{\pi}{6}; \\ \frac{x}{2}, & \text{当 } x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}; \\ 0, & \text{当 } \frac{\pi}{6} < |x - k\pi| < \frac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ 为第一类不连续点.

如图 1.299 所示.

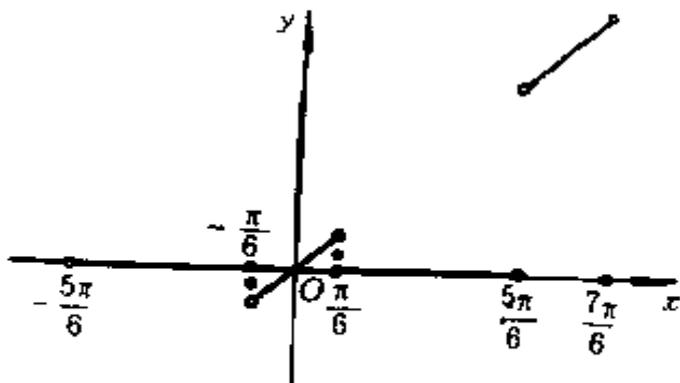


图 1.299

725. $y = \lim_{n \rightarrow \infty} [x \operatorname{arctg}(n \operatorname{ctg} x)].$

$$\text{解 } y = \begin{cases} \frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{2}; \\ -\frac{\pi}{2}x, & \text{当 } k\pi + \frac{\pi}{2} < x < k\pi + \pi; \\ 0, & \text{当 } x = k\pi + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

$x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \neq 0$) 为第一类不连续点, 如图 1.300 所示.

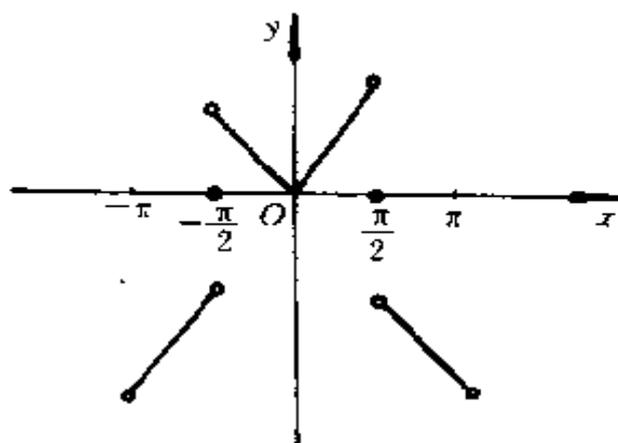


图 1.300

$$726. y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{x^2}}{1 + e^{x^2}}$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \leq 0; \\ x^2, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.301 所示.

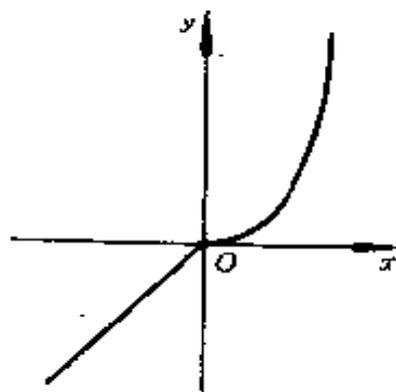


图 1.301

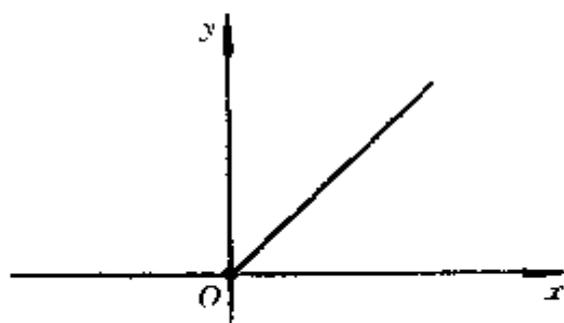


图 1.302

$$727. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{tx})}{\ln(1 + e^t)}$$

$$\text{解 } y = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \leq 0; \\ x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.302 所示.

$$728. y = \lim_{t \rightarrow +\infty} (1 + x) \operatorname{th} tx.$$

解

$$y = \begin{cases} -(1+x), & \text{当 } x < 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1+x, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

$x=0$ 为第一类不连续点.

如图 1.303 所示.

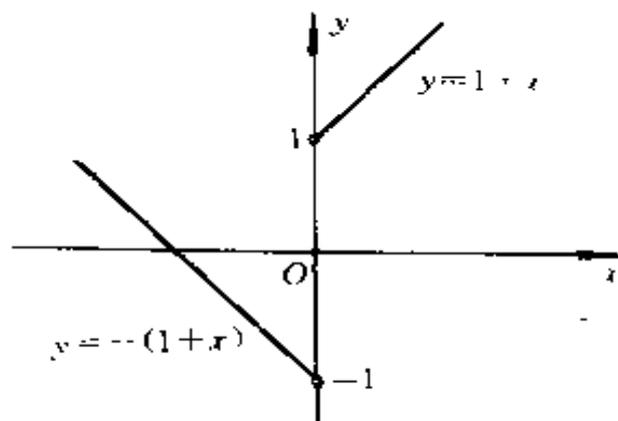


图 1.303

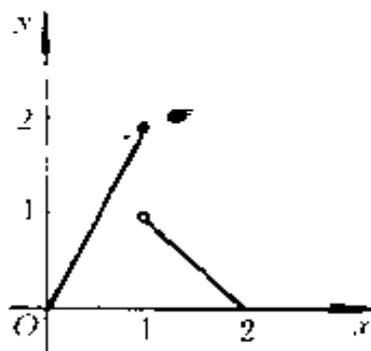


图 1.304

729. 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & \text{若 } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

是否为连续函数?

解 $x=1$ 为第一类不连续点, 在 $[0, 2]$ 上 $f(x)$ 不是连续函数.

如图 1.304 所示.

730. 设:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{若 } x < 0; \\ a+x, & \text{若 } x \geq 0. \end{cases}$$

当怎样选择数 a , 函数 $f(x)$ 方为连续的?

解 因 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = a$ 及 $\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = 1$,

而 $f(0) = a$, 故当 $a = 1$ 时,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0),$$

此即说明函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;至于当 $x \neq 0$ 时, $f(x)$ 显然连续.

于是,我们选择数 $a=1$,则函数 $f(x)$ 在整个数轴上为连续的,如图 1.305 所示.

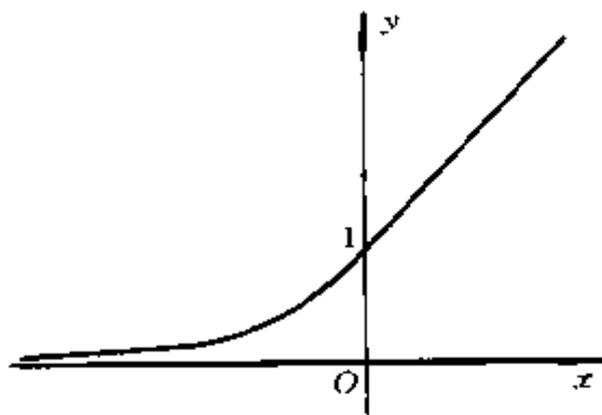


图 1.305

731. 研究下列函数的连续性并说明不连续点的性质, 设:

$$(a) f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$(b) f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ 1, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(B) f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2}, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ |x-1|, & \text{当 } |x| > 1; \end{cases}$$

$$(r) f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x, & \text{当 } x \text{ 为非整数}; \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为整数}; \end{cases}$$

$$(D) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{当 } x \text{ 为有理数}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数}. \end{cases}$$

解 (a) 连续函数.

(b) $x = -1$ 为第一类不连续点.

(B) $x = -1$ 为第一类不连续点.

(Г) $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为无穷型不连续点.

(П) $x \neq k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 为第二类不连续点.

732. 函数 $d = d(x)$ 是数轴 Ox 上的点 x 与由线 $0 \leq x \leq 1$ 及 $2 \leq x \leq 3$ 所构成点集间的最短距离. 求函数 d 的解析表示式, 作出其图形并研究其连续性.

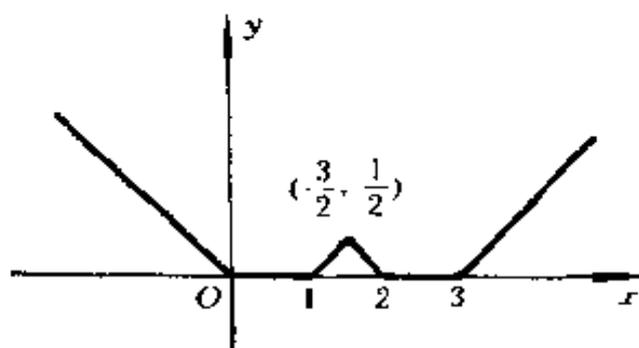


图 1.306

解

$$d = \begin{cases} -x, & -\infty < x < 0; \\ 0, & 0 \leq x \leq 1; \\ x-1, & 1 < x \leq \frac{3}{2}; \\ 2-x, & \frac{3}{2} < x < 2; \\ 0, & 2 \leq x \leq 3; \\ x-3, & 3 < x < +\infty. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.306 所示.

733. 图形 E 是由高为 1 底为 1 的等腰三角形及底为 1 高为 2 及 3 的二矩形所构成(图 1.307). 函数 $S = S(y) (0 \leq y < +\infty)$ 是图形 E 介于平行线 $Y = 0$ 及 $Y = y$ 之间的那一部分面积; 而函数 $b = b(y) (0 \leq y < +\infty)$ 是用平行线 $Y = y$

去截图形所得截痕之长. 求函数 S 及 b 的解析表示式, 作出它们的图形并研究其连续性.

解

$$S = \begin{cases} 3y - \frac{y^2}{2}, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1; \\ \frac{1}{2} + 2y, & \text{当 } 1 < y \leq 2; \\ \frac{5}{2} + y, & \text{当 } 2 < y \leq 3; \\ \frac{11}{2}, & \text{当 } 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

处处连续, 如图 1.308 所示.

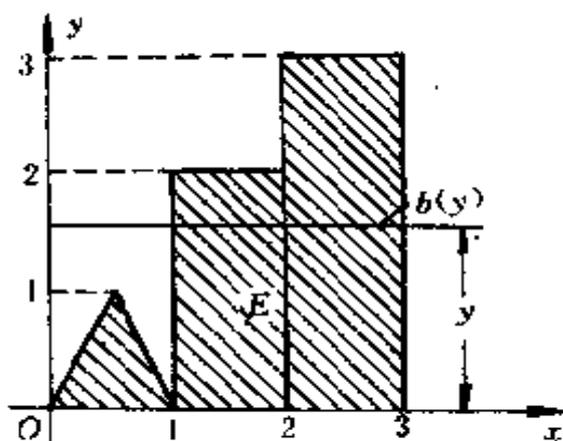


图 1.307

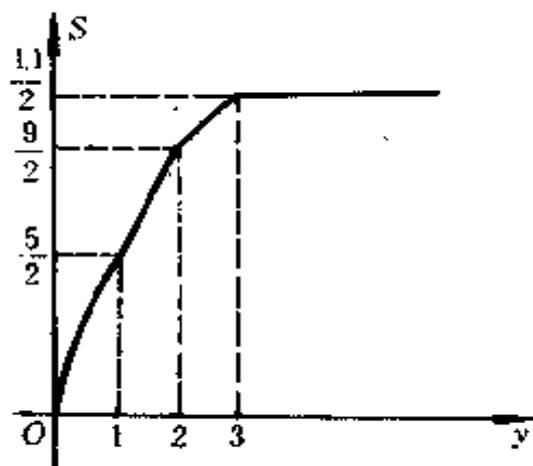


图 1.308

对于函数 $b=b(y)$ 根据假设, 则有如下解析表示式:

$$b = \begin{cases} 3-y, & \text{当 } 0 \leq y \leq 1; \\ 2, & \text{当 } 1 < y \leq 2; \\ 1, & \text{当 } 2 < y \leq 3; \\ 0, & \text{当 } 3 < y < +\infty. \end{cases}$$

$y=2$ 及 $y=3$ 为第一类不连续点, 如图 1.309 所示.

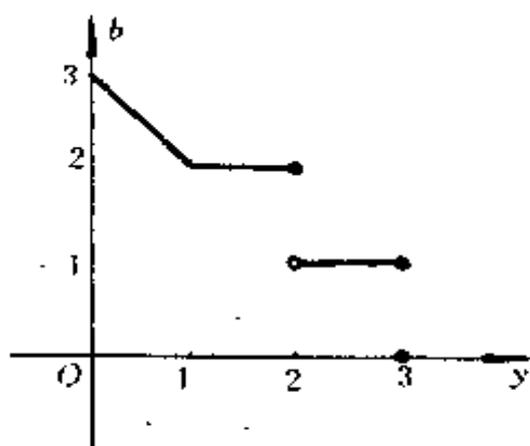


图 1.309

734. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) \}$$

当 x 取任一值时都是不连续的.

证 记 $f(m, n) = \cos^n(\pi m! x)$.

当 x 为有理数时, 总可认为 $m > p$, 其中 $x = \frac{q}{p}$ (p, q 为互质的整数), 于是 $f(m, n) = 1$, 故此时

$$\chi(x) = 1;$$

当 x 为无理数时, 则对任一固定的 m 而言, $|\cos(\pi m! x)| < 1$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(\pi m! x) = 0,$$

故此时 $\chi(x) = 0$.

总之,

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时.} \end{cases}$$

由实数的稠密性可知, 对于 x 的任意值在其任一邻域内均含有无限个有理数和无理数, 因而 $\chi(x)$ 的值总在

1 和 0 这两数中取一个. 这样, $\chi(x)$ 的极限就不存在. 于是, 当 x 取任一值时, $\chi(x)$ 都是不连续的.

735. 设有函数

$$f(x) = x \cdot \chi(x),$$

式中 $\chi(x)$ 为迪里黑里函数 (参阅上例), 研究此函数 $f(x)$ 的连续性. 作出这函数的略图.

解

$$x \cdot \chi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数时;} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数及 } 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

因此,

$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \chi(x) = 0$ 等于在 $x=0$ 处的函数值, 故当 $x \neq 0$ 时, $x \cdot \chi(x)$ 不连续, 而当 $x=0$ 时, $x \cdot \chi(x)$ 连续, 如图 1.310 所示.

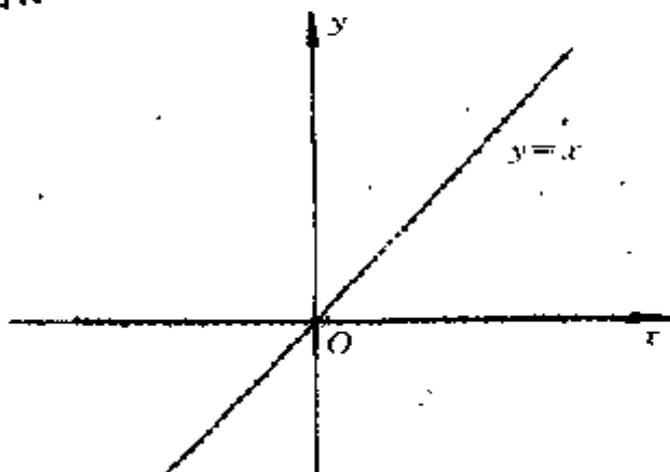


图 1.310

736. 证明黎曼函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \text{ 其中 } m \text{ 和 } n \text{ 为互质的整数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

当 x 取任一个有理值时是不连续的, 而当 x 取任一个无理值时是连续的. 作出这个函数的略图.

证 不失一般性,我们仅就区间 $[0,1]$ 讨论,图 1.311 为 $f(x)$ 在 $x \in [0,2]$ 时的略图.

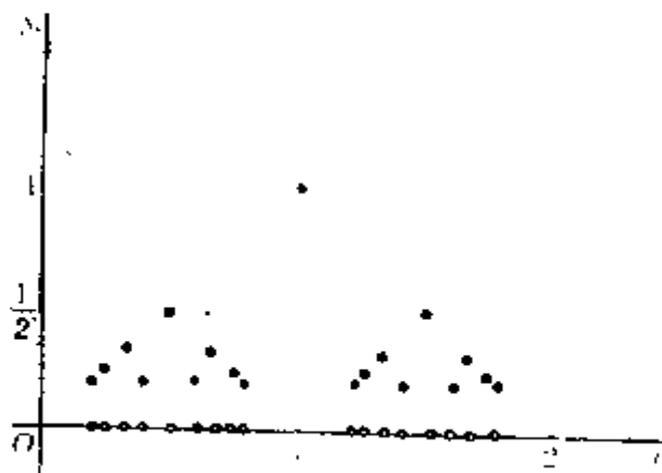


图 1.311

对于任意的 $x_0 \in [0,1]$ 来说,若任取 $\epsilon > 0$,则满足不等式 $n < \frac{1}{\epsilon}$ 的自然数 n 至多只有有限个,即在 $[0,1]$ 中至多只有有限个有理数 $\frac{m}{n}$,使得 $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} \geq \epsilon$. 因而我们可以取 $\delta > 0$,使得 x_0 的邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内不含有这样的有理数(若 x_0 为有理数,则可能除去 x_0). 于是,只要 $0 < |x - x_0| < \delta$,不论 x 是否为有理数,都成立 $|f(x)| < \epsilon$. 即证明了对于 $[0,1]$ 中任意点 x_0 ,都成立

$$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = 0.$$

若 x_0 为无理数,则 $f(x_0) = 0$,可见 $f(x)$ 在 x_0 连续;若 x_0 是有理数,则 $f(x_0) \neq 0$,函数 $f(x)$ 在 x_0 点有可移间断.

737. 若 x 是既约有理分数 $\frac{m}{n}$ ($n \geq 1$) 时, $f(x) = \frac{nx}{n+1}$; 若 x 是无理数时, $f(x) = |x|$.

试研究函数 $f(x)$ 的连续性并作出此函数的略图.

证 当 $x < 0$ 时, $f(x)$ 显然不连续, 而对于正有理数 $\xi = \frac{m}{n}$, $f(\xi) = \frac{m}{n+1}$. 若我们取一系列无理数 x_k 趋于 ξ , 则 $\lim_{x_k \rightarrow \xi} f(x_k) = \frac{m}{n} \neq \frac{m}{n+1}$, 故 $f(x)$ 在正有理数点也不连续. 当 ξ 为正无理数时, 由于对任意的 $\epsilon > 0$, 满足 $\frac{1}{q} > \epsilon$ 的自然数 q 至多只有有限个. 与 736 题类似可证 $f(x)$ 在点 $x = \xi$ 连续. 如图 1.312 所示.

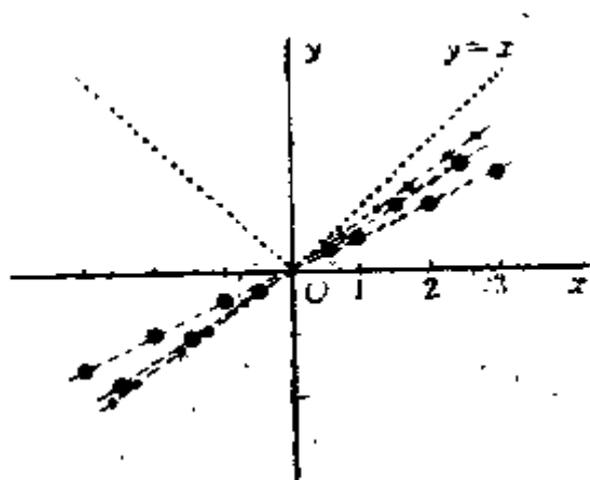


图 1.312

738. 函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}$ 除 $x=0$ 外, 对于自变数 x 的一切值都有定义. 为了使此函数当 $x=0$ 是连续的, 则在 $x=0$ 这一点应当以甚么数值作为函数的值?

解 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

所以, 应取 $f(0) = \frac{1}{2}$, 那么, $f(x)$ 当 $x=0$ 时是连续的.

739. 证明不管怎样选取数 $f(1)$, 函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 在 $x=1$ 是不连续的.

证 因为 $\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$, 所以, 我们无法选择 $f(1)$ 使之成为连续的.

740. 当 $x=0$ 时, 函数 $f(x)$ 失去意义, 定义 $f(0)$ 的数值, 使得 $f(x)$ 在点 $x=0$ 连续, 若:

$$(a) f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}; \quad (b) f(x) = \frac{\operatorname{tg} 2x}{x};$$

$$(в) f(x) = \sin x \sin \frac{1}{x}; \quad (r) f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}};$$

$$(д) f(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}}; \quad (e) f(x) = x^x (x > 0);$$

$$(ж) f(x) = x \ln^2 x.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt[3]{(1+x)^2} + \sqrt[3]{1+x} + 1)}{x(\sqrt{1+x} + 1)} = \frac{3}{2},$$

取 $f(0) = \frac{3}{2}$ 即行.

$$(b) f(0) = 2.$$

(в) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \sin \frac{1}{x} = 0$, 故取 $f(0) = 0$.

(r) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 故取 $f(0) = e$.

(д) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, 故取 $f(0) = 0$.

(e) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1$, 故取 $f(0) = 1$.

(ж) 因为 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln^2 x = 0$, 故取 $f(0) = 0$.

741. 设:(a)函数 $f(x)$ 当 $x=x_0$ 时是连续的,而函数 $g(x)$ 当 $x=x_0$ 时是不连续的;(b)当 $x=x_0$ 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的,则此二函数的和 $f(x)+g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续的? 举出适当的例子.

解 (a) $f(x)+g(x)$ 必为不连续的. 事实上,

$$\text{设 } F(x) = f(x) + g(x)$$

对于函数 $F(x) - f(x) = g(x)$, 如果 $F(x)$ 在 x_0 连续, 则有 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [F(x) - f(x)]$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F(x_0) - f(x_0) = g(x_0).$$

因此当 $g(x)$ 有意义的话, 那么 $g(x_0) = F(x_0) - f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, 这与假设是矛盾的, 故 $F(x)$ 在点 x_0 不连续; 若

$g(x_0)$ 没有意义, 那么当然它在 x_0 点不连续.

(b) 不. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0, \\ -1, & \text{当 } x < 0. \end{cases} \text{ 及 } g(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \geq 0, \\ 1, & \text{当 } x < 0. \end{cases}$$

它们在点 $x=0$ 处均不连续, 但其和 $f(x)+g(x) \equiv 0$ 却处处连续.

742. 设:(a)函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 而 $g(x)$ 在点 x_0 不连续;(b)当 $x=x_0$ 时 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都是不连续的. 则此二函数的乘积 $f(x)g(x)$ 在已知点 x_0 是否必为不连续? 举出适当的例子.

解 (a) 不. 例如,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases} \text{ 及 } f(x) = 0.$$

它们满足假设条件, 其中 $f(x)$ 处处连续, 而 $g(x)$ 在点 $x=0$ 不连续, 但 $f(x)g(x) \equiv 0$ 处处连续.

(6)不. 例如,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \geq 0 \\ -1, & \text{当 } x < 0 \end{cases}, \text{ 及 } g(x) = f(x).$$

它们均在点 $x=0$ 处不连续, 但其乘积 $f(x)g(x) \equiv 1$ 却处处连续.

743. 可否断定不连续函数平方后仍为不连续函数? 举出处处都有不连续点的函数, 而平方后是连续函数的例子.

解 不能. 例如 742 题(6)之例.

又对于函数

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 1, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

处处不连续, 但平方后所得函数 $f^2(x) \equiv 1$ 却处处连续.

744. 研究函数 $f[g(x)]$ 及 $g[f(x)]$ 的连续性, 设:

(a) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = 1 + x^2$;

(b) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = x(1 - x^2)$;

(c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 及 $g(x) = 1 + x - [x]$.

解 (a) $f[g(x)] \equiv 1$ 处处连续;

$$\text{而 } g[f(x)] = \begin{cases} 2, & x \neq 0; \\ 1, & \text{当 } x = 0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 点不连续.

(b) 因为 $g(x) = x(1 - x^2)$ 当 $x < -1$ 或 $0 < x < 1$ 时为正, 而当 $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$ 时为负, 故

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < -1; \\ 0, & \text{当 } x = -1; \\ -1, & \text{当 } -1 < x < 0; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1, & \text{当 } 0 < x < 1; \\ 0, & \text{当 } x = 1; \\ -1, & \text{当 } x > 1. \end{cases}$$

在点 $x = -1, x = 0, x = 1$ 处不连续.

而 $g[f(x)] = 0$ 却处处连续.

(B) $f[g(x)] = 1$ 处处连续.

$g[f(x)] = 1$ 也处处连续.

745. 设

$$f(u) = \begin{cases} u, & 0 < u \leq 1; \\ 2-u, & \text{当 } 1 < u < 2, \end{cases}$$

$$\text{及 } \varphi(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } x \text{ 为有理数;} \\ 2-x, & \text{当 } x \text{ 为无理数.} \end{cases} \quad (0 < x < 1)$$

研究复合函数 $y = f(u)$ 的连续性, 其中 $u = \varphi(x)$.

解 当 x 为有理数时, $u = x$, 且 $0 < u < 1$, 故 $f(u) = x$;
当 x 为无理数时, $u = 2 - x$ 且 $1 < u < 2$, 故 $f(u) = 2 - u = x$. 从而 $f[\varphi(x)] = x$ 处处连续.

746. 证明若 $f(x)$ 为连续函数, 则下列函数也是连续的:

$$F(x) = |f(x)|.$$

证 设 x_0 为任一连续点, 则对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在一个正数 δ , 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

由 $||f(x) - |f(x_0)|| \leq |f(x) - f(x_0)|$, 知

$$||f(x)| - |f(x_0)|| < \epsilon,$$

故 $F(x)$ 在点 x_0 也连续.

747. 证明若函数 $f(x)$ 是连续的, 则函数

$$f_c(x) = \begin{cases} -c, & \text{若 } f(x) < -c, \\ f(x), & \text{若 } |f(x)| \leq c, \\ c, & \text{若 } f(x) > c, \end{cases}$$

(式中 c 为任意的正数) 也是连续函数.

证 易知

$$f_c(x) = \frac{1}{2} (|c + f(x)| - |c - f(x)|).$$

于是, 利用 746 题的结果, 即知 $f_c(x)$ 是连续函数.

748. 证明若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则函数

$$m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \text{ 和 } M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在 $[a, b]$ 上也是连续的.

证 只证 $m(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. $M(x)$ 连续性之证完全类似. 设 $x_0 \in [a, b]$. 先证 $m(x)$ 在点 x_0 右连续. 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 故存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

于是, 当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有

$$f(x) > f(x_0) - \varepsilon \geq m(x_0) - \varepsilon.$$

而当 $a \leq x \leq x_0$ 时, $f(x) \geq m(x_0) > m(x_0) - \varepsilon$. 由此可知当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, $m(x) \geq m(x_0) - \varepsilon$. 又因 $m(x)$ 显然是递减的, 故

$$m(x_0) \geq m(x) \geq m(x_0) - \varepsilon \text{ (当 } x_0 < x < x_0 + \delta \text{ 时)}.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} m(x) = m(x_0)$, 即 $m(x)$ 在 x_0 右连续. 下证左连续, 不妨设 $f(x)$ 在 $[a, x_0]$ 的最小值在点 $x = x_0$ 达到, 即 $m(x_0) = f(x_0)$ (否则, 若 $m(x_0) = f(x_1)$, $a \leq x_1 <$

x_0 . 则显然知, 当 $x_0 < x < x_0$ 时 $m(x) \equiv m(x_0)$, 从而左连续). 任给 $\varepsilon > 0$. 仿上述, 存在 $\delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 恒有

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon = m(x_0) + \varepsilon,$$

因此 $m(x) < m(x_0) + \varepsilon$, 从而

$$m(x_0) \leq m(x) < m(x_0) + \varepsilon \text{ (当 } x_0 - \delta < x < x_0 \text{ 时)}.$$

由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} m(x) = m(x_0)$, 即 $m(x)$ 在 x_0 左连续.

证毕.

749. 证明 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是连续的, 则函数 $\varphi(x) = \min[f(x), g(x)]$ 和 $\psi(x) = \max[f(x), g(x)]$ 也是连续的.

证 由 $\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|]$$

利用 746 题的结果, 即知 $\varphi(x), \psi(x)$ 为连续的.

750. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并有界, 证明函数 $m(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$ 和 $M(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$ 在闭区间 $[a, b]$ 是左方连续的. 而函数

$$\bar{m}(x) = \inf_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\} \text{ 和 } \bar{M}(x) = \sup_{a \leq \xi \leq x} \{f(\xi)\}$$

在闭区间 $[a, b]$ 是右方连续的*).

证 设 $x_0 \in (a, b]$, 要证 $m(x)$ 在 x_0 左方连续. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界, 故 $m(x)$ 恒为有限, 任给 $\varepsilon > 0$, 必存在一点 $\xi_0 \in [a, x_0)$, 使得

$$f(\xi_0) < m(x_0) + \varepsilon.$$

于是, 当 $\xi_0 < x < x_0$ 时, 必有 $m(x_0) \leq m(x) \leq f(\xi_0) < m$

$(x_0) + \varepsilon$, 由此可知 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} m(x) = m(x_0)$. 故 $m(x)$ 在 x_0 点左方连续.

同法可证 $M(x)$ 在 $[a, b]$ 也为左方连续.

*) $\bar{m}(x)$ 和 $\bar{M}(x)$ 在 $[a, b]$ 右方连续的结论是错误的, 今举反例以明之, 例如, 对于有界函数

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } a \leq x \leq p; \\ 0, & \text{当 } p < x \leq b. \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} -1, & \text{当 } a \leq x \leq p; \\ 0, & \text{当 } p < x \leq b. \end{cases}$$

分别有

$$\bar{m}(x) = f_1(x), \bar{M}(x) = f_2(x),$$

显然它们在点 p 不是右方连续的.

若定义 $\bar{m}(x) = \inf_{x < \xi \leq b} \{f(\xi)\}$, $\bar{M}(x) = \sup_{x < \xi \leq b} \{f(\xi)\}$, 则可证明 $\bar{m}(x)$ 与 $\bar{M}(x)$ 在 $[a, b]$ 右方连续.

751. 证明若函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 且有有限的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 则此函数在已知区间上是有界的.

证. 记 $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, 取 $\varepsilon = 1$, 则存在 $X > a$, 使当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - A| < 1$, 又因 $f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 因而有界, 即存在常数 M_1 , 使当 $x \in [a, X]$ 时, 恒有 $|f(x)| < M_1$, 取 $M = \max(|A| + 1, M_1)$, 则 $x \in [a, +\infty)$ 时, 恒有

$$|f(x)| < M.$$

752. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上连续并有界, 证明对于任何数 T , 可求得数列 $x_n \rightarrow +\infty$, 使

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

证 不妨设 $T > 0$, 记 $g(y) = f(x_0 + (y+1)T) - f(x_0 + yT)$, $y \geq 1$. 取一数列 $\{\varepsilon_n\}$ ($n = 1, 2, \dots$), 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\varepsilon_n \rightarrow 0$. 易见, $g(y)$ 是 $[1, +\infty)$ 上连续且有界的函数, 今按下法取 $x_1 = x_0 + k_1 T$, 使 $|g(k_1)| < \varepsilon_1$. 如果 $g(1), g(2)$ 异号, 则由连续函数介值定理, 存在 k_1 , 且 $1 < k_1 < 2$, 使得 $|g(k_1)| = 0 < \varepsilon_1$, 这时取 $x_1 = x_0 + k_1 T$. 若 $g(1)$ 与 $g(2)$ 同号, 且 $g(1), g(2), g(3), g(4) \dots$ 都是同号的, 不妨设它们均大于 0, 那么我们可以证明, 必存在一个自然数 $k_1 \geq 1$, 使 $g(k_1) < \varepsilon_1$. 因为, 若对一切自然数 $n, g(n) \geq \varepsilon_1$, 则由 $g(y)$ 的定义,

$$f(x_0 + 2T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + T),$$

$$f(x_0 + 3T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + 2T),$$

$$f(x_0 + 4T) \geq \varepsilon_1 + f(x_0 + 3T),$$

.....

$$f(x_0 + nT) \geq \varepsilon_1 + f[x_0 + (n-1)T].$$

则 $f(x_0 + nT) \geq (n-1)\varepsilon_1 + f(x_0 + T)$, 这与 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 内有界矛盾, 故必存在自然数 k_1 , 使得 $|g(k_1)| < \varepsilon_1$, 取 $x_1 = x_0 + k_1 T$. 然后, 取自然数 $p_2 > k_1 + 1$. 通过考虑 $g(p_2), g(p_2+1), \dots$ 的符号; 仿上, 可取 $x_2 = x_0 + k_2 T, k_2 > k_1 + 1$, 值 $|g(k_2)| < \varepsilon_2$. 依此类推, 我们就可得到一数列 $\{x_n\}$ 适合要求.

753. 若 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 为连续周期函数, 当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 有定义且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$$

证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

证 先证明 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 的周期相同, 设 $\varphi(x)$ 的周期为

p , 则 $\varphi(x+p) = \varphi(x)$, 由于当 $x \rightarrow \infty$ 时, $\varphi(x+p) - \psi(x+p) \rightarrow 0$ 即得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] = 0$$

以及

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} [\psi(x) - \psi(x+p)] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x+p)] - \lim_{x \rightarrow \infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0. \quad (1) \end{aligned}$$

我们再来证明 $\psi(x)$ 的周期也是 p , 若不然, 则至少存在一个 x_0 , 使 $\psi(x_0) \neq \psi(x_0+p)$. 且设 $\psi(x)$ 周期为 q , N 为任意正整数, $x = x_0 + Nq$, 以及 $a = |\psi(x_0) - \psi(x_0+p)| > 0$, 此时恒有 $|\psi(x) - \psi(x+p)| = a$. 但由(1)式, 对充分大的 x , 必成立 $|\psi(x) - \psi(x+p)| < a$, 这显然是矛盾的.

最后证明 $\varphi(x) \equiv \psi(x)$, 若结论不成立, 则至少存在一个 x_1 , 使 $\varphi(x_1) \neq \psi(x_1)$. 记 $\beta = |\varphi(x_1) - \psi(x_1)| > 0$, 则对任意 $x = x_1 + Np$, 恒有 $|\varphi(x) - \psi(x)| = \beta$, 这与 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0$ 矛盾. 于是, $\varphi(x) \equiv \psi(x)$. 证毕.

754. 证明单调有界函数的一切不连续点皆为第一类的不连续点.

证 不妨设 $f(x)$ 为单调增函数, 取其定义域 A 中的任意点 x_0 , 且设 x_0 不是 A 的左端点, 由于 $x < x_0$ 时显然有 $f(x) \leq f(x_0)$. 由关于单调函数的极限定理知 $f(x_0-0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) \leq f(x_0)$. 可见若 $f(x)$ 在 x_0 点不连续, 则函数在该点只可能有跃度, 即第一类间断点.

755. 证明若函数 $f(x)$ 具有下列诸性质: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义且单调, (2) 取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间所有的数作

为其函数值,则此函数在 $[a, b]$ 上连续.

证 用反证法,不妨设单调函数 $f(x)$ 为递增的且在 x_0 间断 ($x_0 \in [a, b]$), 由 754 题知 x_0 只能是第一类间断点, 则 $f(x_0) - f(x_0 - 0)$ 及 $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ 中至少有一个大于零, 例如 $f(x_0) - f(x_0 - 0) > 0$. 于是, 由函数 $f(x)$ 的单调性知, $f(x)$ 无法取到 $f(x_0 - 0)$ 和 $f(x_0)$ 之间的数值.

这与题设函数 $f(x)$ 的性质(2)矛盾, 从而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

756. 证明: 函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x-a}, \text{ 若 } x \neq a \text{ 及 } f(a) = 0,$$

在任意闭区间 $[a, b]$ 上取介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一切中介值, 但在 $[a, b]$ 上并不连续.

证 事实上, 只要 $a < b$, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取 $[-1, 1]$ 之间的一切值, 当然更取 $f(a) = 0$ 与 $f(b)$ ($|f(b)| \leq 1$) 之间的一切值. 但显然有 $f(x)$ 在 $x = a$ 处不连续.

757. 证明: 若函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内连续, 且 x_1, x_2, \dots, x_n 为此区间中的任意值, 则在它们之间可找到一个数值 ξ , 值得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} [f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)]$$

证 不妨设 $a < x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n < b$, 此时设 $x_1 \neq x_n$, 当 $x_1 = x_n$ 结论显然成立.

由于 $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上连续, 于是, $f(x)$ 在 $[x_1, x_n]$ 上取得最大值和最小值:

$$m \leq f(x) \leq M, \quad x \in [x_1, x_n].$$

从而有

$$m \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \leq M.$$

由连续函数的性质,总存在 $\xi \in [x_1, x_n]$, 使

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i).$$

758. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上连续, 且

$$l = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 及 } L = \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} f(x).$$

证明对于任意的数 λ , 此处 $l \leq \lambda \leq L$, 则有数列 $x_n \rightarrow a+0$ ($n=1, 2, \dots$), 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda.$$

证 当 $\lambda=l$ 或 $\lambda=L$ 时结论都是显然的. 因此设

$$l < \lambda < L.$$

由条件有 $\{a_n\}$ 及 $\{b_n\}$, $a_n \rightarrow a+0, b_n \rightarrow a+0$,

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = l, \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = L$.

于是, 存在自然数 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$f(a_n) < \lambda \text{ 及 } f(b_n) > \lambda.$$

再由 $f(x)$ 的连续性知, 在 a_n 及 b_n 之间存在 x_n , 使

$$f(x_n) = \lambda (n > N).$$

这样选取的 $\{x_n\}$, 由于 $a_n \rightarrow a+0, b_n \rightarrow a+0$, 故 $x_n \rightarrow a+0$, 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lambda$$

§ 8. 反函数. 用参数表示的函数

1° 反函数的存在及其连续性 若函数 $y=f(x)$ 具有下列性质, (1)

在区间 (a, b) 上有定义并连续; (2) 在严格的意义上说来, 于此区间上是单调的, 则有单值的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 此函数在区间 (A, B) 上有定义并连续, 而且在严格的意义上说来, 是相应地单调的, 其中

$$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \text{ 和 } B = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x).$$

任何一个单值连续函数 $x = g(y)$, 它在具有定义的最大区域上适合方程 $f(g(y)) = y$, 则被了解为已知连续函数 $y = f(x)$ 的多值反函数的一个单值连续分枝。

2° 以参数表示的函数的连续性 若函数 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在区间 (a, β) 上有定义并且是连续的, 且函数 $\varphi(t)$ 在此区间上是严格地单调的, 则方程组

$$x = \varphi(t), y = \psi(t)$$

在区间 (a, b) 上把 y 定义成 x 的单值连续函数:

$$y = \psi[\varphi^{-1}(x)],$$

其中 $a = \lim_{t \rightarrow a+0} \varphi(t)$ 及 $b = \lim_{t \rightarrow \beta-0} \varphi(t)$.

759. 求线性分式函数

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0)$$

的反函数. 在怎样的情形下, 反函数与已知函数相同?

解 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解之得反函数为

$$y = \frac{-dx+b}{cx-a} \text{ 或写成 } x = \frac{-yd+b}{yc-a}.$$

欲反函数与已知函数相同, 只须

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{-xd+b}{cx-a}.$$

解之得 $a+d=0$,

此即所求的条件.

760. 设

$$y = x + [x],$$

求反函数 $x=x(y)$.

解 若当 $k \leq x < k+1$, 即当

$$2k \leq y < 2k+1$$

时, $[x]=k (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, 此时 $y=x+k$, 即反函数为 $x=y-k$.

761. 证明: 有唯一的连续函数 $y=y(x) (-\infty < x < +\infty)$ 满足于克卜勒方程

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

证 由 640 题知叙列

$$y_0 = x,$$

$$y_1 = x + \varepsilon \sin y_0,$$

$$y_2 = x + \varepsilon \sin y_1,$$

.....

$$y_n = x + \varepsilon \sin y_{n-1},$$

.....

的极限 $y(x)$ 为克卜勒方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ 的唯一的程. 现在证明 $y=y(x)$ 是连续的. 我们只须证明当 $x \rightarrow x_0$ 时, $y(x) \rightarrow y(x_0)$. 为此, 我们考虑

$$\begin{aligned} & |y_n(x) - y_n(x_0)| \\ &= |(x - x_0) + \varepsilon [\sin y_{n-1}(x) - \sin y_{n-1}(x_0)]| \\ &\leq |x - x_0| + \varepsilon |y_{n-1}(x) - y_{n-1}(x_0)|. \end{aligned}$$

逐次应用此不等式, 即得

$$\begin{aligned} & |y_n(x) - y_n(x_0)| \\ &\leq |x - x_0| (1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \dots + \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^n) \\ &= |x - x_0| \cdot \frac{1 - \varepsilon^{n+1}}{1 - \varepsilon} \leq \frac{1}{1 - \varepsilon} |x - x_0|. \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 便有

$$|y(x) - y(x_0)| \leq \frac{1}{1-\varepsilon} |x - x_0| \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

于是, 显然有 $\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y(x_0)$. 这就证明了 $y(x)$ 的连续性.

762. 证明: 方程

$$\operatorname{ctg} x = kx$$

对于每一个实数 k ($-\infty < k < +\infty$) 在区间 $0 < x < \pi$ 中有唯一连续的根 $x = x(k)$.

证 令 $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$. 显然, 在 $(0, \pi)$ 上 $\operatorname{ctg} x$ 和 $\frac{1}{x}$ 都是连续的严格减函数, 从而 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上也是连续的严格减函数, 并且, 很明显

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) = -\infty.$$

由此可知, 对每一实数 k ($-\infty < k < +\infty$), 恰有一个 $x \in (0, \pi)$, 使 $f(x) = k$, 即 $\operatorname{ctg} x = kx$. 另外, 由于 $f(x) = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$ 在 $(0, \pi)$ 上是连续的严格减函数, 故 $k = f(x)$ 的反函数 $x = x(k) = f^{-1}(k)$ 存在而且是 $-\infty < k < +\infty$ 上的连续的严格减函数. 此 $x = x(k)$ 即方程 $\operatorname{ctg} x = kx$ 的根.

綜上述, 可知: 对任何 $-\infty < k < +\infty$, 方程 $\operatorname{ctg} x = kx$ 在 $(0, \pi)$ 上具有唯一的根 $x = x(k)$, 而且 $x(k)$ 是 k ($-\infty < k < +\infty$) 的连续的严格减函数. 证毕.

763. 非单调的函数 $y = f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 可否有单值的反函数?

解 可以, 例如函数

$$y = \begin{cases} x, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ -x, & \text{若 } x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上为单值的,但不是单调的函数,而其反函数仍为此函数本身.

764. 在甚么情形下,函数 $y=f(x)$ 和反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一的函数?

解 为统一坐标起见,我们把 $y=f(x)$ 的反函数记成为 $y=f^{-1}(x)$.

按题设应有

$$f^{-1}(x) \equiv f(x),$$

即 $x=f(f(x))$, 这就是所求的条件.

765. 证明不连续函数

$$y=(1+x^2)\operatorname{sgn}x$$

的反函数是连续函数.

证 易见 $\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}x$ 及 $\operatorname{sgn}^2x = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$, 则

$y\operatorname{sgn}y=(1+x^2)\operatorname{sgn}^2x$. 于是反函数在 $|y| \geq 1$ 及 $y=0$ 有定义:

$$x = \begin{cases} \sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & \text{当 } y \geq 1 \text{ 时;} \\ -\sqrt{y\operatorname{sgn}y-1}, & \text{当 } y \leq -1 \text{ 时;} \\ 0 & \text{当 } y=0 \text{ 时.} \end{cases}$$

易见上述函数在其定义域内连续.

766. 证明:若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是严格地单调的,且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \quad (a \leq x_n \leq b),$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

证 不妨设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格单调下降. 如果结论不真, 则在 (a, b) 内总存在一个 a_1 及数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使

$$x_{n_k} > a_1.$$

由于 $f(x)$ 严格单调下降, 故有

$$f(x_{n_k}) < f(a_1) < f(a).$$

于是, $f(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) \leq f(a_1)$, 得出矛盾,

因此, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

求下列函数的反函数的连续的单值枝:

767. $y = x^2$.

解 反函数的单值连续分枝为

$$x = \sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty)$$

及 $x = -\sqrt{y} \quad (0 \leq y < +\infty)$.

768. $y = 2x - x^2$.

解 由于 $x^2 - 2x + y = 0$, 故

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4y}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - y}.$$

于是单值连续分枝为

$$x = 1 - \sqrt{1 - y} \quad \text{及} \quad x = 1 + \sqrt{1 - y} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

769. $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

解 由于 $x^2 y + 2x + y = 0$, 故

$$x = \begin{cases} \frac{1 \pm \sqrt{1 - y^2}}{y}, & \text{当 } y \neq 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

又由于

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2}{y(1 + \sqrt{1 - y^2})} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} = \infty,$$

故反函数的连续分支为

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (-1 \leq y \leq 1)$$

及 $x = \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{y} \quad (0 < |y| \leq 1).$

770. $y = \sin x.$

解 单值连续分枝为

$$x = (-1)^k \arcsin y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(|y| \leq 1).$$

771. $y = \cos x.$

解 单值连续分枝为

$$x = 2k\pi \pm \arccos y \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (|y| \leq 1).$$

772. $y = \operatorname{tg} x.$

解 单值连续分枝为

$$x = \operatorname{arctg} y + k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$(-\infty < y < +\infty).$$

773. 证明连续函数 $y = 1 + \sin x$ 对应于区间 $0 < x < 2\pi$ 的值的集合是一线段.

证 显然, 当 $x \in (0, 2\pi)$ 时, $-1 \leq \sin x \leq 1$, 从而 $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$. 而由于 $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 2, y|_{x=\frac{3\pi}{2}} = 0$. 而 $y = 1 + \sin x$ 是

$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 上的连续函数, 故由介值定理知当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 变到

$\frac{3\pi}{2}$ 时, y 取 0 到 2 之间的一切数值. 由此可知当 $0 < x <$

2π 时, y 的值的集合是线段 $[0, 2]$.

774. 证明等式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

证 令 $\varphi = \arcsin x$, 则得 $\sin \varphi = x$, 从而

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin \varphi = x.$$

因为 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $0 \leq \frac{\pi}{2} - \varphi \leq \pi$, 而在 $[0, \pi]$ 内有唯一的数, 它的余弦等于 x . 因此, 得

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \arccos x,$$

即

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. 证明等式

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \quad (x \neq 0).$$

证 当 $x > 0$ 时, 令 $\varphi = \operatorname{arctg} x$, 则得 $\operatorname{tg} \varphi = x$, 且 $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$. 又 $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg} \varphi = x$, 故

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{1}{x}.$$

因为 $0 < \frac{\pi}{2} - \varphi < \frac{\pi}{2}$, 而在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内仅有唯一的数, 使其正切等于 $\frac{1}{x}$, 故

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

即当 $x > 0$ 时, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.

当 $x < 0$ 时, 令 $\varphi = \operatorname{arctg} x$, 则得 $\operatorname{tg} \varphi = x$, 且 $-\frac{\pi}{2} < \varphi <$

0. 又

$$\operatorname{ctg} \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \operatorname{tg} \varphi = x, \text{ 即 } \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \frac{1}{x},$$

因为 $-\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{2} - \varphi < 0$, 而在 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0 \right)$ 内有唯一的

数, 使其正切等于 $\frac{1}{x}$, 故

$$-\frac{\pi}{2} - \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$$

即当 $x < 0$ 时, $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

总之, 当 $x \neq 0$ 时,

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x.$$

776. 证明反正切相加的定理:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon \pi,$$

式中 $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ 为取值: 0, 1, -1 三者之一的函数.

当已知 x 的值时, 对于怎样的 y 值, 函数 ε 可能不连续? 在 Oxy 平面上作出函数 ε 连续的对应域, 并求此函数在所求得的域内的数值.

证 由于

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2} \text{ 及 } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},$$

故有

$$-\pi < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi.$$

若 x 和 y 的符号相反, 则

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2}.$$

若 $x > 0$ 和 $y > 0$, 则

$$0 < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \pi.$$

再看这个和是位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 还是 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. 条件

$$0 < \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y < \frac{\pi}{2},$$

即

$$\operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y,$$

它相当于 $x < \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y) = \frac{1}{y}$,

也即 $xy < 1$.

因此, 当 $x > 0, y > 0, xy < 1$ 时, 此和位于 $(0, \frac{\pi}{2})$. 同法可证, 当 $x > 0, y > 0, xy > 1$ 时, 此和位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$.

仿此, 又可证得: 当 $x < 0, y < 0, xy < 1$ 时, 此和位于 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$; 当 $x < 0, y < 0, xy > 1$ 时, 此和位于 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$.

总之, 若 $xy < 1$, 则此和位于 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; 若 $x > 0, xy > 1$, 则此和位于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$; 若 $x < 0, xy > 1$, 则此和位于 $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$.

其次, 我们考虑此和的正切

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y) = \frac{x+y}{1-xy}.$$

现今 $u = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y, v = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$, 则得

$$\operatorname{tgu} = \operatorname{tgv}.$$

因为 $-\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$, 故当 $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$ 时, $u = v$; 当 $\frac{\pi}{2} < u < \pi$ 时, $v + \pi = u$; 当 $-\pi < u < -\frac{\pi}{2}$ 时, $u = -\pi + v$. 因此, 我们证得:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } xy < 1; \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x > 0, xy > 1; \\ -\pi + \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & \text{若 } x > 0, xy > 1; \end{cases}$$

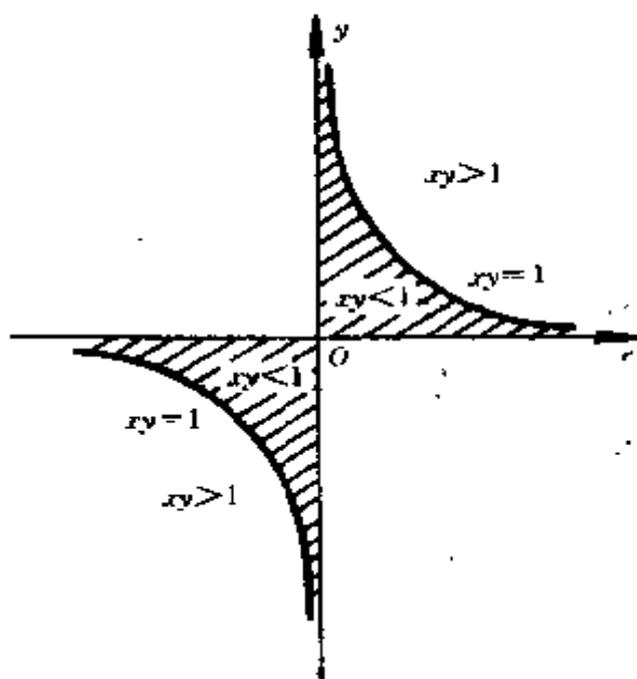


图 1.313

当 x 固定时, 若 $y = \frac{1}{x}$, 则 ϵ 不连续, 因为此时 (例如设 $x > 0$), 当 $y > \frac{1}{x}$ 时 $\epsilon \equiv 1$, 而当 $y < \frac{1}{x}$ 时 $\epsilon \equiv 0$.

如图 1.313 所示, 曲线 $xy=1$ 为函数 $\varepsilon=\varepsilon(x, y)$ 的不连续域.

当 $xy < 1$ 时, $\varepsilon=0$; 当 $x > 0, xy > 1$ 时, $\varepsilon=1$; 当 $x < 0, xy > 1$ 时, $\varepsilon=-1$.

777. 证明反正弦相加的定理:

$$\arcsin x + \arcsin y = (-)^{\varepsilon} \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}) + \varepsilon\pi$$

$$(|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

式中, 若 $xy \leq 0$ 或 $x^2 + y^2 \leq 1$, $\varepsilon=0$; 若 $xy > 0$ 及 $x^2 + y^2 > 1$, $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$.

证 令 $u = \arcsin x + \arcsin y$ ($|x| \leq 1, |y| \leq 1$),

即得

$$\sin u = x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}.$$

由此, 还不能断定

$$u = \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}).$$

事实上, u 及 $v = \arcsin(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2})$ 可以位在不同的区间内, 其中 v 始终位在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内, 而 u 可有三种情形:

$$\text{情形 I: } -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}.$$

若 $xy \leq 0$, 则不是 $0 \leq x \leq 1$ 及 $-1 \leq y \leq 0$ 就是 $-1 \leq x \leq 0$ 及 $0 \leq y \leq 1$, 不论哪一种情况, 总有

$$0 \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 及 } -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin y \leq 0 \text{ (或交换)}$$

因而

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x + \arcsin y = u \leq \frac{\pi}{2}.$$

若 $x > 0, y > 0$ 时, 显然有 $u \geq 0$. 条件 $u \leq \frac{\pi}{2}$

即

$$u = \arcsin x + \arcsin y \leq \frac{\pi}{2},$$

相当于

$$\arcsin x \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin y = \arccos y.$$

由于正弦在第一象限内是增函数, 故这又相当于

$$\sin(\arcsin x) \leq \sin(\arccos y),$$

或 $x \leq \sqrt{1-y^2}$, 即 $x^2 + y^2 \leq 1$.

同法可证, 若 $x < 0, y < 0$ 时, 必 $u \leq 0$. 且条件 $-\frac{\pi}{2} \leq u$ 相当于 $x^2 + y^2 \leq 1$.

情形 I: $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$.

在 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$ 时, 必 $x > 0, y > 0$. 条件

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leq \pi,$$

即

$$\arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y,$$

两端取正弦, 即得 $x^2 + y^2 > 1$.

情形 II: $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$,

在这种情形下必 $x < 0, y < 0$. 条件

$$-\pi \leq \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2},$$

即

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin(-x) + \arcsin(-y) \leq \pi,$$

因此,即 $x^2+y^2>1$.

总之,当 $xy \leq 0$ 或 $xy > 0$ 但 $x^2+y^2 \leq 1$ 时,必有 $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$; 当 $x > 0, y > 0, x^2+y^2 > 1$ 时,必 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$; 当 $x < 0, y < 0, x^2+y^2 > 1$ 时,必 $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$.

但当 $-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $u = v$; 当 $\frac{\pi}{2} < u \leq \pi$ 时, $u = \pi - v$; 当 $-\pi \leq u < -\frac{\pi}{2}$ 时, $u = -\pi - v$.

因此,最后得

$$\begin{aligned} & \text{arc sin } x + \text{arc sin } y \\ &= \begin{cases} \text{arc sin}(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}), & \text{若 } xy \leq 0 \text{ 或 } x^2+y^2 \leq 1; \\ \pi - \text{arc sin}(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}), & \text{若 } x > 0, y > 0, x^2+y^2 > 1; \\ -\pi - \text{arc sin}(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}), & \text{其 } x < 0, y < 0, x^2+y^2 > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \text{arc sin } x + \text{arc sin } y \\ &= (-1)^\epsilon \text{arc sin}(x \sqrt{1-y^2} + y \sqrt{1-x^2}) + \epsilon\pi, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{若 } xy \leq 0 \text{ 或 } x^2+y^2 \leq 1; \\ \text{sgn } x, & \text{若 } xy > 0 \text{ 及 } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$

($|x| \leq 1, |y| \leq 1$).

778. 证明反余弦相加的定理:

$$\begin{aligned} & \text{arc cos } x + \text{arc cos } y \\ &= (-1)^\epsilon \text{arc cos}(xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2}) + 2\epsilon\pi \end{aligned}$$

$$(|x| \leq 1, |y| \leq 1),$$

其中,若 $x+y \geq 0, \epsilon=0$; 若 $x+y < 0, \epsilon=1$.

证 由基本的不等式

$$0 \leq \arccos x \leq \pi \quad \text{及} \quad 0 \leq \arccos y \leq \pi,$$

有 $0 \leq \arccos x + \arccos y \leq 2\pi$.

$$\text{若} \quad 0 \leq \arccos x + \arccos y \leq \pi,$$

则 $\arccos x \leq \pi - \arccos y$.

由于 $\arccos x$ 及 $\pi - \arccos y$ 都含在 $[0, \pi]$ 内, 而在此区间内余弦是减函数, 故有

$$x \geq \cos(\pi - \arccos y) = -y,$$

即

$$x + y \geq 0$$

同法可证得, 若

$$\pi < \arccos x + \arccos y \leq 2\pi,$$

则

$$x + y < 0.$$

又由于

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-y^2},$$

故知

$$u = \arccos x + \arccos y$$

$$\text{及} \quad v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2})$$

有同一的余弦. 因 v 始终在 0 与 π 之间, 故知:

$$\text{若} \quad 0 \leq u \leq \pi, \text{ 则 } u = v; \text{ 若 } \pi < u \leq 2\pi, \text{ 则 } u = 2\pi - v.$$

因此, 最后得

$$\arccos x + \arccos y$$

$$= \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad \text{若 } x+y \geq 0; \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), \\ \quad \text{若 } x+y < 0, \end{cases}$$

此即所欲证明的公式.

779. 作函数的图形:

$$(a) y = \arcsin x - \arcsin \sqrt{1-x^2};$$

$$(b) y = \arcsin 2x \sqrt{1-x^2} - 2\arcsin x.$$

解 (a) 利用 777 题的结果得知:

由于 $x^2 + (-\sqrt{1-x^2})^2 = 1$, 故

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x + \arcsin(-\sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x \sqrt{1-(1-x^2)} - \sqrt{1-x^2} \sqrt{1-x^2}) \\ &= \arcsin(x|x| - 1 + x^2). \end{aligned}$$

当 $-1 \leq x \leq 0$ 时, $y = -\frac{\pi}{2}$; 当 $0 < x \leq 1$ 时, $y = \arcsin(2x^2 - 1)$. 可以证明,

$$\arcsin(2x^2 - 1) - 2\arcsin x = -\frac{\pi}{2}, \text{ 故有}$$

$$y = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, \text{ 当 } -1 \leq x \leq 0 \text{ 时,} \\ 2\arcsin x - \frac{\pi}{2}, \text{ 当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时,} \end{cases}$$

如图 1·314 所示.

(b) 由于

$$2\arcsin x = \arcsin x + \arcsin x$$

$$= \begin{cases} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \pi \operatorname{sgn} x - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}), & \text{若 } |x| > \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

故当 $-1 \leq x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y = -(\pi + 4\arcsin x)$;

当 $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y = 0$;

当 $\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1$ 时, $y = \pi - 4\arcsin x$.

如图 1·315 所示。

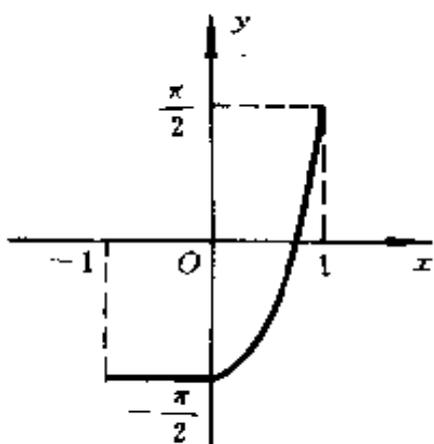


图 1·314

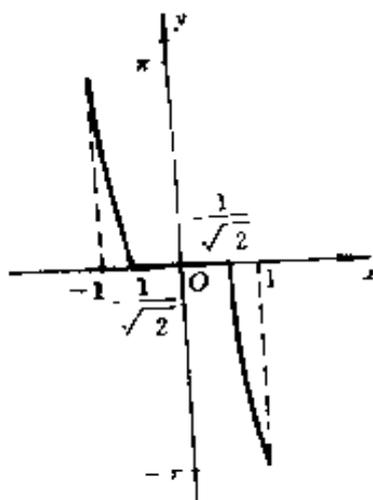


图 1·315

780. 函数 $y = y(x)$ 由下面的方程给出:

$$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} t, y = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} t \quad (-\infty < t < +\infty),$$

求此函数. 在怎样的域上此函数才有定义?

解 由条件 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \pi$ 且

$$\operatorname{tg} x = t, \operatorname{ctg} y = t,$$

即得

$$\operatorname{ctg} y = \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right),$$

从而当 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$y = \frac{\pi}{2} - x.$$

781. 设

$$x = \operatorname{cht}, y = \operatorname{sht} \quad (-\infty < t < +\infty).$$

参数 t 变化的域怎样, 即可视变数 y 为变数 x 的单值函数? 求在各个域上 y 的表示式.

解 由于 $x = \operatorname{cht}$, $y = \operatorname{sht}$, 故

$$x^2 - y^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1.$$

当 $\operatorname{sht} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \geq 0$ 时, 即 $e^t \geq e^{-t}$ 或 $e^{2t} \geq 1$ 或 $t \geq 0$ 时,

$$y = \sqrt{x^2 - 1};$$

当 $t \leq 0$ 时, $y = -\sqrt{x^2 - 1}$.

不论 t 为何值, $x \geq 1$, 故 $\sqrt{x^2 - 1}$ 有意义. $t = 0$ 是函数 $y = y(x)$ 单值区域的分界值.

782. 要值方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

把 y 定义为 x 的单值函数的必要而且充分的条件是甚么?

解 其必要而且充分的条件为, 值 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值, 函数 $\psi(t)$ 应有同一的值. 下面加以证明. 先证必要性. 若不然, 则存在 x^* 及 $t_1 \neq t_2$, 使

$$\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = x^* \text{ 且 } \psi(t_1) \neq \psi(t_2).$$

于是, 对于这样的 x^* , 一方面有 $y_1 = \psi(t_1)$ 及 $y_2 = \psi(t_2)$,

另一方面又有 $y_1 \neq y_2$, 这样 y 就不定义为 x 的单值函数. 因此, 使 $\varphi(t) = x$ 的一切 t 值, $\psi(t)$ 应有同一的值.

再证充分性. 设所述条件满足, 则对于任一 $x^* \in \{\varphi(t)\}$, 有 t^* 使

$$\varphi(t^*) = x^*, \quad \psi(t^*) = y^*$$

有意义, 这样定义的函数 $y = y(x)$ 不因 t^* 的不同选取而不同, 因此它由 x^* 唯一确定, 从而 y 定义为 x 的单值函数.

783. 在怎样的条件下, 二方程组

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (a < t < b)$$

$$\text{及 } x = \varphi[\chi(\tau)], \quad y = \psi[\chi(\tau)] \quad (a < \tau < \beta)$$

定义出同一的函数 $y = y(x)$?

解 当 $a < \tau < \beta$ 时, 函数 $\chi(\tau)$ 的值的集应为区间 (a, b) .

784. 设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义并且是连续的, 且

$$A = \inf_{a < x < b} \varphi(x), \quad B = \sup_{a < x < b} \varphi(x).$$

在怎样的场合下, 有定义在区间 (A, B) 上的单值函数 $f(x)$, 使得

$$\text{当 } a < x < b \text{ 时, } \psi(x) = f[\varphi(x)]?$$

解 显然, 要求对于使 $\varphi(x) = u$ 的一切 x 值 (其中 u 为区间 (A, B) 中的任一给定的数), 函数 $\psi(x)$ 应取同一的值. 满足了这个条件就可以了. 这时, 对 $u \in (A, B)$ 可定义

$$f(u) = \psi(x),$$

其中 x 为满足 $\varphi(x) = u$ ($a < x < b$) 的任何数. 上述条件

保证了这样定义的 $f(u)$ 是单值的.

§ 9. 函数的一致连续性

1° 一致连续性的定义 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 且对于使 $f(x)$ 有意义的任何数值 $x', x'' \in X$, 由不等式

$$|x' - x''| < \delta$$

可得不等式

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

则称函数 $f(x)$ 在已知集合(区间、线段等) $X = \{x\}$ 上为一致连续的.

2° 康托尔定理 在有界的闭区间 $[a, b]$ 上有定义的连续函数 $f(x)$ 在此闭区间上一致连续.

785. 某工厂的车间制造正方形薄板, 其边 x 可取由 1 厘米到 10 厘米之间的值. 为了使不论何种边长(在上述的范围内)的薄板的面积 y 与原设计的面积差皆小于 ε , 问可以多大的公差 δ 对这些薄板的边长加工, 设 (a) $\varepsilon = 1$ 平方厘米; (b) $\varepsilon = 0.01$ 平方厘米; (c) $\varepsilon = 0.0001$ 平方厘米, 计算 δ 的值.

解 $y = x^2$. 由于,

$|x'^2 - x''^2| = |x' - x''| |x' + x''| \leq 20 |x' - x''|$,
于是对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要 $|x'^2 - x''^2| < \varepsilon$ 时, 只要 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon}{20}$ 即可.

于是, 在加工薄板边长时, 只要取公差 $\delta \leq \frac{\varepsilon}{20}$, 当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 即可满足要求.

(a) 当 $\varepsilon = 1$ 厘米² 时, $\delta \leq \frac{1}{20} = 0.05$ 厘米 = 0.5 毫米;

(6) 当 $\varepsilon = 0.01$ 厘米² 时, $\delta \leq \frac{0.01}{20} = 0.0005$ 厘米
= 0.005 毫米;

(B) 当 $\varepsilon = 0.0001$ 厘米² 时, $\delta \leq \frac{0.0001}{20}$
= 0.000005 厘米 = 0.00005 毫米.

786⁺ 圆柱形鞘筒之宽度为 ε , 长度为 δ , 将鞘筒套在曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 上且沿此曲线滑动, 但筒之轴须保持平行于 Ox 轴. 为了使此筒顺利地经过此曲线上由不等式 $-10 \leq x \leq 10$ 所限定的部分, 问 δ 应等于甚么? 设 (a) $\varepsilon = 1$; (6) $\varepsilon = 0.1$; (B) $\varepsilon = 0.001$; (r) ε 为任意小数.

解 $y = \sqrt[3]{x}$. 对于 $y' \neq y''$, 由于

$$\begin{aligned} |y' - y''| &= \left| \frac{y'^3 - y''^3}{y'^2 + y'y'' + y''^2} \right| \\ &= \left| \frac{y'^3 - y''^3}{\frac{3}{4}(y' + y'')^2 + \frac{1}{4}(y' - y'')^2} \right| \\ &\leq \frac{|y'^3 - y''^3|}{\frac{1}{4}|y' - y''|^2} \end{aligned}$$

即

$\frac{1}{4}|y' - y''|^3 \leq |y'^3 - y''^3| = |x' - x''|$ 或 $|y' - y''| \leq \sqrt[3]{4|x' - x''|}$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 要 $|y' - y''| < \varepsilon$, 只要 $4|x' - x''| < \varepsilon^3$, 或 $|x' - x''| < \frac{\varepsilon^3}{4}$ 即可.

取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon^3}{4}$, 则当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|\sqrt[3]{x'} - \sqrt[3]{x''}| < \epsilon.$$

(a) 当 $\epsilon = 1$ 时, $\delta < \frac{1}{4}$;

(b) 当 $\epsilon = 0.1$ 时, $\delta < 2.5 \times 10^{-4}$;

(c) 当 $\epsilon = 0.001$ 时, $\delta < 2.5 \times 10^{-10}$;

(r) 当 ϵ 为任意小数时, $\delta < \frac{\epsilon^3}{4}$ ($\epsilon \leq 1$).

787. 以《 $\epsilon - \delta$ 》的说法在肯定的意义上表达下面论断的意义: 函数 $f(x)$ 在某集合(区间, 线段)上连续, 但在此集合上并不一致连续.

解 设集合为 E . 所需论断的《 $\epsilon - \delta$ 》说明如下: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 及 $x_0 \in E$, 总存在一个数 $\delta(\epsilon, x_0) > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta(\epsilon, x_0)$ 时, 恒有

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

同时, 至少存在一个 $\epsilon_0 > 0$, 使对于任意给定的 $\delta > 0$, 都可找到 $x_1, x_2 \in E$, 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 但是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \epsilon_0.$$

788. 证明: 函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上是连续的, 但在此区间上并非一致连续的.

证 连续性是显然的, 现证其不一致连续. 考虑 $(0, 1)$ 上的两串点

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad x_n' = \frac{1}{n+1}.$$

则当 $0 < \epsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 取得充分大, 总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n(n+1)} < \delta.$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \epsilon_0.$$

因而, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

789. 证明: 函数

$$f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$$

在区间 $(0, 1)$ 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

证 当 $x \neq 0$ 时, 由基本初等函数在其定义域的连续性可知, $f(x)$ 是连续的, 同时, 由于 $|f(x)| \leq 1$, 因而它也是有界的.

现考虑 $(0, 1)$ 上的两串点 $x_n = \frac{2}{n}, x_n' = \frac{2}{n+1}$, 则当 $0 < \epsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 充分大, 总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{2}{n(n+1)} < \delta,$$

但是

$$|f(x_n) - f(x_n')| = 1 > \epsilon_0.$$

因而, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上并非一致连续.

790. 证明: 函数

$$f(x) = \sin x^2$$

在无穷区间 $-\infty < x < +\infty$ 上是连续的并且有界, 但在此区间上并非一致连续的.

证 函数 $f(x)$ 的连续性及其有界性是显然的. 现证其

不一致连续性.

考虑 $(-\infty, +\infty)$ 上的两串点

$$x_n = \sqrt{\frac{n\pi}{2}}, \quad x'_n = \sqrt{\frac{(n+1)\pi}{2}}.$$

则当 $0 < \varepsilon_0 < 1$ 时, 不论 $\delta > 0$ 如何选取, 只要 n 充分大, 总可以使

$$|x_n - x'_n| = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{n\pi}{2}} + \sqrt{\frac{n+1}{2}\pi}} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = 1 > \varepsilon_0.$$

因而, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上并非一致连续.

791. 证明: 若函数 $f(x)$ 在域 $a \leq x < +\infty$ 上有定义并且是连续的, 而且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

存在, 则 $f(x)$ 在此域上是一致连续的.

证 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 故必存在 $X > a$, 使当 $x' > X, x'' > X$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, X+1]$ 连续, 故一致连续, 从而必有正数 δ' 存在, 使当 $x' \in [a, X+1], x'' \in [a, X+1], |x' - x''| < \delta'$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

令 $\delta = \min\{\delta', 1\}$. 现设 x', x'' 为满足 $a \leq x' < +\infty, a \leq x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$ 的任何两点. 由于 $|x' - x''|$

$< \delta$, 故 x' 与 x'' 或同时属于 $[a, X+1]$, 或同时满足 $x' > X, x'' > X$. 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上一致连续. 证毕.

792. 证明: 无界函数

$$f(x) = x + \sin x$$

于全轴 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

证 $|f(x') - f(x'')| = |(x' - x'') + (\sin x' - \sin x'')|$

$$\leq |x' - x''| + |\sin x' - \sin x''| \leq 2|x' - x''|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, 则当 $-\infty < x' < +\infty, -\infty < x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致连续.

793. 函数 $f(x) = x^2$ 在下列区间中是否为一致连续的: (a) $(-l, l)$, 这里 l 为随便多大的正数; (b) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上?

解 当 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq 2l|x_1 - x_2|.$$

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2l}$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, 且 $x_1, x_2 \in (-l, l)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon,$$

故 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致连续.

(b) 取 $\varepsilon_0 = 1$, 不论 $\delta > 0$ 取得多小, 只要 n 充分大, 我们总可以使 $x'_n = n + \frac{1}{n}, x''_n = n$ 的距离 $|x'_n - x''_n|$

$= \frac{1}{n} < \delta$, 但是,

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = 2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2 > \epsilon_0.$$

可见 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上非一致连续.

研究下列函数在已知域上的一致连续性:

794. $f(x) = \frac{x}{4-x^2} (-1 \leq x \leq 1)$.

解 $|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{x_1}{4-x_1^2} - \frac{x_2}{4-x_2^2} \right|$
 $= \left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| |x_1 - x_2|.$

由于 $\left| \frac{4+x_1x_2}{(4-x_1^2)(4-x_2^2)} \right| < \frac{4+1}{3 \cdot 3} = \frac{5}{9} < 1,$

故对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \epsilon$, 则对满足 $|x_1 - x_2| < \delta$ 的 x_1, x_2 (x_1, x_2 属于 $[-1, 1]$) 值, 均有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上一致连续.

795. $f(x) = \ln x (0 < x < 1)$.

解 考虑 $x_n = \frac{1}{n}, x_n' = \frac{1}{2n}$, 则当 $0 < \epsilon_0 < \ln 2$ 时, 不论 δ 如何选取, 只要 n 充分大, 我们总可以使

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{2n} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x_n')| = \ln 2 > \epsilon.$$

因而 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内并非一致连续.

796. $f(x) = \frac{\sin x}{x} (0 < x < \pi)$.

解 由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 我们定义函数

$$F(x) = \begin{cases} 1 & , x = 0, \\ \frac{\sin x}{x} & 0 < x < \pi; \\ 0 & x = \pi. \end{cases}$$

易见 $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 根据康托尔定理便知, $F(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上一致连续, 从而 $f(x)$ 也在 $(0, \pi)$ 上一致连续.

797. $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x} (0 < x < 1)$.

解 取 $\varepsilon_0 = 1$, 令 $x_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $x'_n = \frac{1}{n\pi}$ (n 为正整数), 显然 x_n, x'_n 均属于 $(0, 1)$. 不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 只要 n 充分大, 总有

$$|x_n - x'_n| = \frac{1}{(2n+1)n\pi} < \delta,$$

但是,

$$|f(x_n) - f(x'_n)| = e^{\frac{1}{n\pi}} > 1 = \varepsilon_0.$$

因而 $f(x) = e^x \cos \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上非一致连续.

798. $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x (-\infty < x < +\infty)$.

解 由于 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 1]$, $[0, +\infty)$ 上连续, 且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = -\frac{\pi}{2},$$

由 791 题知 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 及 $(-\infty, 1]$ 上均一致连续.

于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1(\varepsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$, $|x_1 - x_2| < \delta_1(\varepsilon)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

成立.

又存在 $\delta_2(\epsilon) > 0$, 当 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta_2(\epsilon)$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

成立.

今取 $\delta(\epsilon) = \min\{1, \delta_1(\epsilon), \delta_2(\epsilon)\}$, 则当 $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $|x_1 - x_2| < \delta(\epsilon)$ 时, x_1 与 x_2 必或同时属于 $(-\infty, 1]$, 或同时属于 $[0, +\infty)$, 故恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon,$$

即 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

799. $f(x) = \sqrt{x}$ ($1 \leq x < +\infty$).

解 考虑 $[1, +\infty)$ 内任意两点 x_1, x_2 .

$$\left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right| = \left| \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right| \leq \frac{|x_1 - x_2|}{2}.$$

于是, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = 2\epsilon$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta$, $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ 时, 恒有

$$\left| \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right| < \frac{1}{2} \cdot 2\epsilon = \epsilon.$$

因而 $f(x) = \sqrt{x}$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上一致连续.

800. $f(x) = x \sin x$ ($0 \leq x < +\infty$).

解 考虑点 $x_n = 2n\pi + \frac{1}{n}$, $x_n' = 2n\pi$, 则

$$|x_n - x_n'| = \frac{1}{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } |f(x_n) - f(x_n')| &= \left(2n\pi + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{1}{n} \\ &= 2n\pi \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n} = 0,$$

$$\text{及 } \lim_{n \rightarrow \infty} 2n\pi \sin \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \right) = 2\pi,$$

所以,

$$|f(x_n) - f(x_n')| \rightarrow 2\pi \quad (n \rightarrow \infty).$$

现取 $\varepsilon_0 = 2\pi - 1$. 于是, 不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 只要 n 充分大, 总有 $|x_n - x_n'| < \delta$, 并且

$$|f(x_n) - f(x_n')| > \varepsilon_0 = 2\pi - 1.$$

因而 $f(x) = x \sin x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上非一致连续.

801. 证明: 函数 $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$ 在每个区间

$$J_1 = (-1 < x < 0) \text{ 及 } J_2 = (0 < x < 1)$$

上是一致连续的, 但在它们的和

$$J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$$

上并非一致连续的.

证 在 $J_1 = (-1 < x < 0)$ 上 $f(x) = -\frac{\sin x}{x}$, 在 $J_2 =$

$(0 < x < 1)$ 上 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 它们的一致连续性由 796 题可知.

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = -\lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sin x}{x} = -1,$$

故必存在 $\eta > 0$ ($\eta < 1$), 使当 $0 < x_1 < \eta$, $-\eta < x_2 < 0$

时恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| > 1$. 现取 $\varepsilon_0 = 1$, 则不论 $\delta > 0$ 取得多么小, 都可取两点 x_1' 和 x_2' , 使 $0 < x_1' < \min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\}$, $-\min\left\{\eta, \frac{\delta}{2}\right\} < x_2' < 0$. 于是 $|x_1' - x_2'| < \delta$, 但是,

$$|f(x_1') - f(x_2')| > \varepsilon_0 = 1.$$

由此可知 $f(x)$ 在 $J_1 + J_2 = \{0 < |x| < 1\}$ 上非一致连续.

802. 对于 $\varepsilon > 0$, 求使函数 $f(x)$ 在已知区间上满足一致连续的条件, 的 $\delta = \delta(\varepsilon)$ (任何的!) 设:

(a) $f(x) = 5x - 3 \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(б) $f(x) = x^2 - 2x - 1 \quad (-2 \leq x \leq 5)$;

(в) $f(x) = \frac{1}{x} \quad (0.1 \leq x \leq 1)$;

(г) $f(x) = \sqrt{x} \quad (0 \leq x < +\infty)$;

(д) $f(x) = 2\sin x - \cos x \quad (-\infty < x < +\infty)$;

(e) $f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$ 及 $f(0) = 0 \quad (0 \leq x \leq \pi)$.

解 (a) $|f(x_1) - f(x_2)| = 5|x_1 - x_2|$.

只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ 即行.

(б) $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \cdot |x_1 + x_2 - 2|$.

由于 $-2 \leq x \leq 5$, 故 $|x_1 + x_2 - 2| \leq 8$, 于是只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$ 即行.

(в) $|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{|x_1 - x_2|}{x_1 x_2} \leq \frac{|x_1 - x_2|}{0.01}$.

只需取 $\delta = 0.01\varepsilon$.

(r) 对于 $a \geq 0, b \geq 0$, 显然有不等式

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

成立.

对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \varepsilon^2$, 则当 $|x_1 - x_2| < \delta, x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ 时,

$$\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2 + \delta} \leq \sqrt{x_2} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_2} + \varepsilon;$$

同理可有

$$\sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 + \delta} \leq \sqrt{x_1} + \sqrt{\delta} = \sqrt{x_1} + \varepsilon.$$

则恒有

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| < \varepsilon.$$

$$(n) |f(x_1) - f(x_2)| \leq 2|\sin x_1 - \sin x_2| + |\cos x_1 - \cos x_2|$$

$$\leq 2|x_1 - x_2| + \left| \left(\frac{\pi}{2} - x_1 \right) - \left(\frac{\pi}{2} - x_2 \right) \right| = 3|x_1 - x_2|$$

只需取 $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

(e) 任给 $\varepsilon > 0$. 当 $x_1, x_2 \in \left[\frac{\varepsilon}{3}, \pi \right]$ 时, 有

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_1 \sin \frac{1}{x_2} + x_1 \sin \frac{1}{x_2} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_1} - \sin \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \cdot \left| \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| \cdot \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right| + |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{1}{x_2} + 1 \right) \cdot |x_1 - x_2| \leq \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} |x_1 - x_2|.$$

取 $\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{3}, \frac{\varepsilon^2}{3 + \varepsilon} \right\}$. 现设 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$ 满足 $|x_1 - x_2| < \delta$, 下证必有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

不妨设 $x_1 < x_2$. 若 $x_1 \geq \frac{\varepsilon}{3}$, 则 x_1, x_2 均属于 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, \pi \right]$, 故由上述, 知

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot |x_1 - x_2| < \frac{3 + \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \frac{\varepsilon}{3 + \varepsilon} = \varepsilon.$$

若 $0 \leq x_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, 则 $x_2 = x_2 - x_1 + x_1 < \delta + \frac{\varepsilon}{3} \leq \frac{2\varepsilon}{3}$. 于是

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| x_1 \sin \frac{1}{x_1} - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_1| + |x_2| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad (\text{当 } x_1 > 0 \text{ 时}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= \left| 0 - x_2 \sin \frac{1}{x_2} \right| \\ &\leq |x_2| < \frac{2\varepsilon}{3} < \varepsilon, \end{aligned}$$

(当 $x_1 = 0$ 时)

总上述, 只要 $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, $|x_1 - x_2| < \delta$, 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

803. 需要尽量地把闭区间 $[1, 10]$ 划分为几个彼此相等的线段, 才能使得函数 $f(x) = x^2$ 在这些线段中的每一段上的振幅是小于 0.0001?

解 设分为相等的 n 段, 则对于每段中的任意两点均有

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{9}{n}. \text{ 于是,}$$

$$\begin{aligned} |x_1^2 - x_2^2| &= |x_1 + x_2| |x_1 - x_2| \leq \frac{(10 + 10)9}{n} \\ &= \frac{180}{n}. \end{aligned}$$

按题设,我们只需 $\frac{180}{n} < 0.0001$,也即
 $n > 1800000$.

因此,应把 $[1, 10]$ 等分成至少为 1800000 个的等长的线段,就能满足要求.

804. 证明: 在区间 (a, b) 上有无穷个一致连续函数的和与它们的乘积在此区间内仍是一致连续的.

证 由于有无穷个函数相加或相乘可逐次分解成两个函数相加或相乘,故我们只需考虑两个函数的情况.

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在有限区间 (a, b) 上一致连续,要证 $f(x) + g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 也在 (a, b) 上一致连续. 任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续,故有 $\delta_1 > 0$ 存在,使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' ,只要 $|x' - x''| < \delta_1$,就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 又由于 $g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续,故又有 $\delta_2 > 0$ 存在,使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' ,只要 $|x' - x''| < \delta_2$,就有 $|g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,则当 $|x' - x''| < \delta$ (x', x'' 为 (a, b) 中任何两点) 时,恒有

$$\begin{aligned} |[f(x') + g(x')] - [f(x'') + g(x'')]| &\leq |f(x') - f(x'')| \\ &\quad + |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

故 $f(x) + g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 下证 $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 为此先证一个结论: 若函数 $F(x)$ 在

有限区间 (a, b) 上一致连续, 则 $F(x)$ 在 (a, b) 上必有界. 事实上, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta > 0$ 存在, 使对于 (a, b) 中任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$. 特别, 当 $a < x' < a + \delta, a < x'' < a + \delta$ 时, 必有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$; 当 $b - \delta < x' < b, b - \delta < x'' < b$ 时, 也必有 $|F(x') - F(x'')| < \varepsilon$. 因此, 根据柯西收敛准则, 知 $F(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a+0} F(x)$ 与 $F(b - 0) = \lim_{x \rightarrow b-0} F(x)$ 都存在(有限). 现在 $[a, b]$ 上定义函数 $F^*(x)$;

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ F(a + 0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ F(b - 0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然, $F^*(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 从而有界, 由此可知 $F(x)$ 在 (a, b) 上有界.

根据刚才已证的结论, 存在常数 $L > 0$ 与 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq L, |g(x)| \leq M (a < x < b)$.

任给 $\varepsilon > 0$, 根据 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 (a, b) 上的一致连续性, 可取 $\delta > 0$, 使对于 (a, b) 中任何两点 x' 与 x'' , 只要 $|x' - x''| < \delta$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2M}, |g(x') - g(x'')| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

由此可知,

$$\begin{aligned} & |f(x')g(x') - f(x'')g(x'')| \\ &= |[f(x') - f(x'')] \\ & \quad g(x') + f(x'')[g(x') - g(x'')]| \\ &< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{2L} \cdot L = \varepsilon. \end{aligned}$$

故得知 $f(x)g(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

注. 当 (a, b) 是无穷区间时, (a, b) 上一致连续函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的和 $f(x) + g(x)$ 必也一致连续, 但乘积 $f(x)g(x)$ 不一定一致连续. 例如, 设 $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, 函数 $f(x) = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续, 则函数 $[f(x)]^2 = x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不一致连续(参看 793 题(6)).

805. 证明: 若单调有界的函数 $f(x)$ 在有穷或无穷的区间 (a, b) 上是连续的, 则此函数在区间 (a, b) 上是一致连续的.

证 分三种情形论之.

(i) 设 (a, b) 是有限区间. 由于 $f(x)$ 在 (a, b) 上单调有界, 故极限 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ 与 $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 都存在(有限). 按下式定义 $[a, b]$ 上的函数 $f^*(x)$:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然 $f^*(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而一致连续, 当然在 (a, b) 上也一致连续, 故 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续.

(ii) a 为有限数, $b = +\infty$. 此时, 令

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < +\infty \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时.} \end{cases}$$

则 $f^*(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^*(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在(有限), 故根据 791 题的结果知 $f^*(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 一致连续, 从而 $f(x)$ 在 $a < x < +\infty$ 一致连续.

若 $a = -\infty, b$ 为有限数. 考虑函数 $g(x) = f(-x)$, ($-b < x < +\infty$) 即化成刚才证明了的左端点是有限数右端点是 $+\infty$ 的情形.

(iii) $a = -\infty, b = +\infty$. 任给 $\varepsilon > 0$. 利用(ii) 已证的结果, $f(x)$ 在 $0 < x < +\infty$ 上一致连续, 故存在 $\delta_1 > 0$, 使当 x' 与 x'' 都属于 $(0, +\infty)$ 且 $|x' - x''| < \delta_1$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

同样利用(ii) 已证的结果, $f(x)$ 在 $-\infty < x < 1$ 上一致连续, 故对于同一个 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 x' 与 x'' 都属于 $(-\infty, 1)$ 且 $|x' - x''| < \delta_2$ 时, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

现令 $\delta = \min\{1, \delta_1, \delta_2\}$, 则当 $-\infty < x' < +\infty, -\infty < x'' < +\infty, |x' - x''| < \delta$ 时, x' 与 x'' 必或是同属于区间 $(0, +\infty)$, 或是同属于区间 $(-\infty, 1)$. 因此, 恒有

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

由此可知, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. 证毕.

806. 证明: 在有穷区间 (a, b) 上有定义而且是连续的函数 $f(x)$, 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 其必要且充分的条件是函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的.
证 必要性: 若 $f(x)$ 可用连续的方法延拓到闭区间 $[a, b]$ 上, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 从而一致连续, 当然在 (a, b) 上也是一致连续的.

充分性: 若 $f(x)$ 在 (a, b) 上一致连续. 根据 804 题的证明过程, 知 $f(a+0) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ 与 $f(b-0) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ 都存在(有限). 按下式定义 $[a, b]$ 上的函数:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } a < x < b \text{ 时;} \\ f(a+0), & \text{当 } x = a \text{ 时;} \\ f(b-0), & \text{当 } x = b \text{ 时.} \end{cases}$$

显然, $f^*(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 上 $f^*(x) \equiv f(x)$.
故 $f^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的连续延拓. 证毕.

807. 函数

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|$$

(式中 x_1 和 x_2 为 (a, b) 中受条件 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 限制的任意两点) 称为函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的连续模数.

证明: 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上是一致连续的必要且充分的条件是

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

证 必要性: 设 $f(x)$ 在 (a, b) 一致连续. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使 (a, b) 中任何两点 x_1, x_2 , 只要 $|x_1 - x_2| < \delta'$ 就有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 现设 $0 < \delta < \delta'$, 则当 $|x_1 - x_2| \leq \delta$ 时, 必 $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$, 从而

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

由此可知, $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0$.

充分性: 设

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta) = 0.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta' > 0$, 使当 $0 < \delta < \delta'$ 时, 恒有

$$\omega_f(\delta) < \varepsilon.$$

现设 x_1 与 x_2 是 (a, b) 中满足 $|x_1 - x_2| < \delta'$ 的任何两点.

若 $x_1 = x_2$, 则显然

$$|f(x_1) - f(x_2)| = 0 < \varepsilon;$$

若 $x_1 \neq x_2$. 令 $|x_1 - x_2| = \delta'$, 则 $0 < \delta^* < \delta'$, 于是

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \omega_f(\delta^*) < \varepsilon.$$

由此可知, $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续. 证毕.

808. 设:

(a) $f(x) = x^3 (0 \leq x \leq 1)$;

(b) $f(x) = \sqrt{x} (0 \leq x < a)$ 及 $(a < x < +\infty)$;

(B) $f(x) = \sin x + \cos x (0 \leq x \leq 2\pi)$.

对函数 $f(x)$ 的连续模数 $\omega_f(\delta)$ (参阅前题) 作下形的估价

$$\omega_f(\delta) \leq C\delta^a,$$

式中 C 和 a 为常数.

解 (a) $|x_1^3 - x_2^3| = |x_1 - x_2| |x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2| \leq 3\delta$,
于是,

$$\omega_f(\delta) \leq 3\delta.$$

(b) 当 $0 \leq x \leq a$ 时 [参看 802 题(Г) 的证明过程]

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| \leq \sqrt{|x_1 - x_2|} \leq \sqrt{\delta},$$

于是,

$$\omega_f(\delta) \leq \sqrt{\delta};$$

当 $a < x < +\infty$ 时

$$|\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}| = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}},$$

于是,

$$\omega_f(\delta) \leq \frac{\delta}{2\sqrt{a}}.$$

$$(B) f(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{故 } \left| \sqrt{2} \sin\left(x_1 + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \sin\left(x_2 + \frac{\pi}{4}\right) \right|$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2 \left| \cos \frac{x_1 + x_2 + \frac{\pi}{2}}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right|$$

$$\leq \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \frac{|x_1 - x_2|}{2} = \sqrt{2} \delta,$$

于是

$$\omega_f(\delta) \leq \sqrt{2} \delta.$$

§ 10. 函数方程

809. 证明: 对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (1)$$

的唯一的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是齐次线性函数:

$$f(x) = ax,$$

式中 $a = f(1)$ 是任意的常数.

证 先证: 若 $f(x)$ 满足(1), 则对任何有理数 c , 必有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

事实上, 当 m 与 n 为正整数时, 有

$$\begin{aligned} f(mx) &= f(x + (m-1)x) = f(x) + f((m-1)x) \\ &= f(x) + f(x) + f((m-2)x) = \dots \\ &= f(x) + f(x) + \dots + f(x) = mf(x); \\ f(x) &= f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \text{ 故 } f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n}f(x). \end{aligned}$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{m}{n}f(x).$$

又在(1)中令 $y = 0$, 得 $f(x) = f(x) + f(0)$, 故 $f(0) = 0$; 又在(1)中令 $y = -x$, 并注意已证的结果 $f(0) = 0$, 得 $f(-x) = -f(x)$.

于是

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = -f\left(\frac{m}{n}x\right) = -\frac{m}{n}f(x).$$

故对任何有理数 c , 有 $f(cx) = cf(x)$ ($-\infty < x < +\infty$). 下面, 我们利用 $f(x)$ 的连续性证明对任何无理数 c , 此式也成立. 事实上, 设 c 为无理数. 取一串有理数 c_n , 使 $c_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$). 于是

$$f(c_n x) = c_n f(x), (n = 1, 2, \dots).$$

在此式两端令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 并注意到函数 f 在点 cx 连续, 即得 $f(cx) = cf(x)$. 于是, 对任何实数 x 和 c , 有 $f(cx) = cf(x)$. 由此可知, 对任何实数 x , 有

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax,$$

其中 $a = f(1)$. 证毕.

810. 证明: 满足方程(1)的单调函数 $f(x)$ 是齐次线性的.

证 由 809 题之证明过程, 知: 对任何有理数 c , 有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面, 我们利用 $f(x)$ 的单调性证明此式对任何无理数 c 成立. 为确定起见, 设 $f(x)$ 是单调递增的, 设 c 是无理数, 要证 $f(cx) = cf(x)$ ($-\infty < x < +\infty$). 只就 $x > 0$ 讨论之 ($x \leq 0$ 时可类似讨论). 取两串有理数 $\{c_n\}$

与 $\{c_n'\}$ 使:

$$c_1 < c_2 < c_3 < \cdots < c < \cdots < c_3' < c_2' < c_1',$$

并且 $c_n \rightarrow c, c_n' \rightarrow c (n \rightarrow \infty)$. 由于 $x > 0$, 故

$$c_1x < c_2x < c_3x < \cdots < cx < \cdots < c_3'x < c_2'x < c_1'x,$$

并且 $c_nx \rightarrow cx, c_n'x \rightarrow cx (n \rightarrow \infty)$. 另外, 我们有

$$f(c_nx) = c_nx, f(c_n'x) = c_n'x (n = 1, 2, \cdots).$$

由于 $f(x)$ 是单调递增的, 故在点 cx 的左、右极限均存在有限, 并且满足

$$f(cx - 0) \leq f(cx) \leq f(cx + 0).$$

在前面两个等式中令 $n \rightarrow \infty$ 取极限, 得

$$f(cx - 0) = cx, f(cx + 0) = cx.$$

由此可知 $f(cx) = cx$.

以下证明同 809 题, 不再重复.

811. 证明: 满足方程(1) 且在某小区间 $(-\epsilon, \epsilon)$ 中为有界的函数 $f(x)$, 是线性齐次函数.

证 由 809 题的证明过程, 知: 对任何有理数 c , 有

$$f(cx) = cf(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

下面, 我们利用 $f(x)$ 在 $(-\epsilon, \epsilon)$ 中的有界性来证明对于任何无理数 c , 此式也成立. 用反证法, 假定对于某无理数 c_0 以及某实数 x_0 , 有 $f(c_0x_0) \neq c_0f(x_0)$. 令 $f(c_0x_0) - c_0f(x_0) = \alpha$, 则 $\alpha \neq 0$. 今取一串有理数 $\{c_n\}$, 使 $c_n \rightarrow c_0 (n \rightarrow \infty)$. 于是, 对于任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} f[m(c_0 - c_n)x_0] &= mf[(c_0 - c_n)x_0] \\ &= m[f(c_0x_0) - f(c_nx_0)] \\ &= m(c_0 - c_n)f(x_0) + m\alpha, \end{aligned}$$

$$(n = 1, 2, 3, \cdots; m = 1, 2, 3, \cdots).$$

任给 $G > 0$. 先取定一个正整数 m , 使 $m > \frac{2G}{|\alpha|}$. 对此 m , 再取定一个正整数 n , 使

$$|m(c_0 - c_n)|x_0| < \varepsilon, |m(c_0 - c_n)f(x_0)| < G.$$

令 $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$. 于是 $\bar{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, 并且

$$|f(\bar{x})| \geq |m\alpha| - |m(c_0 - c_n)f(x_0)| > 2G - G = G.$$

由所给 $G > 0$ 的任意性, 即知 $f(x)$ 在 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾. 于是, 对任何无理数 c , 也有

$$f(cx) = cf(x).$$

以下证明同 809 题, 不再重复.

812. 证明: 对 x 和 y 的一切值满足方程

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad (2)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数:

$$f(x) = a^x,$$

式中 $a = f(1)$ 为正的常数.

证 先证必 $f(x) > 0$ ($-\infty < x < +\infty$). 事实上, 由 $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$, 知 $f(x) \geq 0$. 由于 $f(x) \not\equiv 0$, 故存在 x_0 使 $f(x_0) > 0$. 在 (2) 中令 $x = x_0, y = 0$, 得 $f(x_0) = f(x_0)f(0)$, 故 $f(0) = 1$; 又在 (2) 中令 $y = -x$, 得 $1 = f(0) = f(x)f(-x)$, 故 $f(x) \neq 0$, 由此可知 $f(x) > 0$ ($-\infty < x < +\infty$).

当 m 与 n 为正整数时,

$$\begin{aligned} f(mx) &= f((m-1)x + x) = f((m-1)x) \cdot f(x) \\ &= f((m-2)x) \cdot f(x) \cdot f(x) = \cdots = [f(x)]^m; \\ f(x) &= f\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^n, \text{ 即 } f\left(\frac{x}{n}\right) = \end{aligned}$$

$$[f(x)]^{\frac{1}{n}},$$

于是

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \left[f\left(\frac{x}{n}\right)\right]^m = [f(x)]^{\frac{m}{n}}.$$

又有

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right) = [f(-x)]^{\frac{m}{n}} = [f(x)]^{-\frac{m}{n}}.$$

由此可知,对任何有理数 c ,有

$$f(cx) = [f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

根据 $f(x)$ 的连续性,仿 809 之证易知此式对任何无理数也成立. 因此,对于任何实数 c 与 x ,有

$$f(cx) = [f(x)]^c,$$

从而 $f(x) = f(x \cdot 1) = [f(1)]^x = a^x, a = f(1) > 0$.

注. 也可利用 809 题的结果来证. 前面已证 $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$. 令 $F(x) = \log_a f(x)$, 这里 $a = f(1) > 0$. 于是 $F(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 满足(1)式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= \log_a f(x+y) = \log_a f(x)f(y) \\ &= \log_a f(x) + \log_a f(y) = F(x) + F(y). \end{aligned}$$

故由 809 题的结果,知 $F(x) = a^* x$, 这里

$a^* = F(1) = \log_a f(1) = \log_a a = 1$, 从而 $F(x) = x$. 由此可知 $f(x) = a^x$.

813. 证明:在区间 $(0, \varepsilon)$ 中有界并满足方程(2)的不恒等于零的函数 $f(x)$ 是指数函数.

证 由 812 的证明知: $f(x) > 0 (-\infty < x < +\infty)$, 并且对任何有理数 c , 有 $f(cx) = [f(x)]^c$.

下证对任何无理数 c , 也有

$$f(cx) = [f(x)]^c \quad (-\infty < x < +\infty).$$

用反证法. 假定对某无理数 c_0 , 及某实数 x_0 , 有 $f(c_0x_0) \neq [f(x_0)]_{c_0}$. 显然 $x_0 \neq 0$ (因为 $f(0) = 1$). 不妨设 $x_0 > 0$. 我们有 $f(c_0x_0) = \beta[f(x_0)]^{c_0}$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$. 不妨设 $\beta > 1$. 取一串有理数 c_n , 使 $c_1 < c_2 < c_3 < \dots < c_0$, 且 $c_n \rightarrow c_0$ ($n \rightarrow \infty$). 于是, 对任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} f[m(c_0 - c_n)x_0] &= \{f[(c_0 - c_n)x_0]\}^m \\ &= f(c_0x_0)^m \cdot f(-c_nx_0)^m = \beta^m \cdot [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)}. \end{aligned}$$

现任给 $G > 0$. 先取定一个正整数 m , 使 $\beta^m > 2G$. 然后, 再取一个 n , 使

$$0 < m(c_0 - c_n)x_0 < \varepsilon, [f(x_0)]^{m(c_0 - c_n)} > \frac{1}{2}.$$

于是, 令 $\bar{x} = m(c_0 - c_n)x_0$, 则 $\bar{x} \in (0, \varepsilon)$, 且 $f(\bar{x}) > 2G \cdot \frac{1}{2} = G$, 故 $f(x)$ 在 $(0, \varepsilon)$ 无界, 此与假定矛盾. 注意, 若 $\beta < 1$, 则需取 $c_1 > c_2 > c_3 > \dots > c_0$, $c_n \rightarrow c_0$ 并考虑 $f[-m(c_0 - c_n)x_0] = \beta^{-m}[f(x_0)]^{-m(c_0 - c_n)}$. 由此可知, 对任何无理数 c , $f(cx) = [f(x)]^c$ 也成立.

以下证明同于 812 题, 不再重复.

814. 证明: 对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x)$ ($0 < x < +\infty$) 是对数函数:

$$f(x) = \log_a x,$$

式中 a 为正的常数.

证 在 $f(xy) = f(x) + f(y)$ 中令 $y = 1$, 得 $f(1) = 0$.

由于 $f(x) \neq 0$, 故存在 $x_0 > 0$ 使 $f(x_0) \neq 0$. 先设 $f(x_0) > 0$.

由于 $f(x_0^2) = f(x_0) + f(x_0) = 2f(x_0)$, $f(x_0^4) = 2f(x_0^2) = 4f(x_0)$, \dots , 利用归纳法, 易知 $f(x_0^{2^n}) = 2nf(x_0) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$. 故可取某正整数 n , 使 $f(x_0^{2^n}) > 1$. 于是, 根据连续函数性质知, 在 1 与 $x_0^{2^n}$ 之间必存在某 a (显然 $a > 0$) 使 $f(a) = 1$. 现考虑函数 $F(x) = f(a^x) (-\infty < x < +\infty)$. 显然 $F(x)$ 连续且满足(1)式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(a^{x+y}) = f(a^x \cdot a^y) = f(a^x) + f(a^y) \\ &= F(x) + F(y) \end{aligned}$$

于是, 根据 809 题的结果知 $F(x) = a^* x (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $a^* = F(1) = f(a) = 1$. 于是 $F(x) = x$, 即

$$f(a^x) = x;$$

令 $a^x = y$, 则 $x = \log_a y$, 于是

$$f(y) = \log_a y (0 < y < +\infty).$$

若 $f(x_0) < 0$, 则可考虑函数 $g(x) = -f(x)$.

于是 $g(x_0) > 0$ 且 $g(x)$ 也满足 $g(xy) = g(x) + g(y)$, 故根据刚才已证的结果, 知 $g(y) = \log_a y (0 < y < +\infty)$, 其中 $a > 0$. 即 $-f(y) = \log_a y$, 或 $f(y) = -\log_a y$.

令 $a^* = \frac{1}{a}$, 则 $a^* > 0$ 且 $-\log_a y = \log_{a^*} y$, 故

$$f(y) = \log_{a^*} y \quad (0 < y < +\infty),$$

其中 $a^* > 0$. 证毕.

815. 证明: 对于 x 和 y 的一切正值满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y) \tag{3}$$

的唯一不恒等于零的连续函数 $f(x) (0 < x < +\infty)$ 是

幂函数:

$$f(x) = x^a,$$

式中 a 为常数.

证 考察函数 $F(x) = f(e^x) (-\infty < x < +\infty)$, 则 $F(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 连续不恒为零, 且满足(2)式:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x)f(e^y) \\ &= F(x)F(y). \end{aligned}$$

于是, 根据 812 题的结果知

$$F(x) = b^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

其中 $b > 0$, 即 $f(e^x) = b^x (-\infty < x < +\infty)$.

令 $e^x = y$, 则 $y > 0$; 显然, 存在唯一的 $a (-\infty < a < +\infty)$, 使 $e^a = b$. 于是

$$f(y) = b^x = e^{ax} = y^a \quad (0 < y < +\infty).$$

证毕.

816. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程(3)的一切连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$.

证 因为 $f(xy) = f(x)f(y)$, 所以 $f(1) = f(1)f(1)$, 于是 $f(1) = 0$ 或 $f(1) = 1$.

当 $f(1) = 0$ 时, 对于任意实数 x , 均有

$$f(x) = f(1)f(x) \equiv 0.$$

当 $f(1) = 1$ 时, 由于 $f(1) = f((-1) \cdot (-1)) = f(-1)f(-1) = 1$, 所以 $f(-1) = \pm 1$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $f(-1) = 1$ 时, 由于

$$f(-x) = f(-1)f(x) = f(x),$$

所以在这种情形下就可把问题归结为对 $0 < x < +\infty$ 中

的 x 进行讨论. 而对于 $x > 0$, 我们已证得 $f(x) = x^a$, 式中 a 为常数^{*}). 然后再利用 $f(-x) = f(x)$, 即得

$$f(x) = |x|^a,$$

为保证 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 中连续, 需 $a \geq 0$.

2° 当 $f(-1) = -1$ 时, 同 1° 可得

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a \quad (a \geq 0).$$

综上所述, 所求的函数为 (1) $f(x) \equiv 0$; 或 (2) $f(x) = |x|^a (a \geq 0)$; 或 (3) $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot |x|^a (a \geq 0)$.

*) 利用 815 题的结果.

817. 证明: 不连续函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x$$

满足方程 (3).

证 由 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 知, $f(xy) = \operatorname{sgn}(xy)$.

分三种情况讨论:

1° 当 $xy > 0$ 时, x 与 y 同号, 此时

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 1;$$

2° 当 $xy < 0$ 时, x 与 y 异号, 此时

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = -1;$$

3° 当 $xy = 0$ 时, 在实数域内, x 与 y 中至少有一个为 0, 于是

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = 0.$$

总之, 不论哪一种情形, 均有

$$\operatorname{sgn}(xy) = \operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y,$$

也即函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 满足方程

$$f(xy) = f(x)f(y).$$

818. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

的一切连续函数 $f(x) (-\infty < x < +\infty)$.

解 显见函数

$$f(x) = \cos ax \text{ 或 } f(x) = \cosh ax$$

满足所给方程. 下面我们将指出满足所给方程的函数具有上述形式. 为此, 在方程中令 $y = 0$, 得

$$2f(x) = 2f(x)f(0),$$

则当 $f(x) \neq 0$ 时 $f(0) = 1$. 又令 $x = 0$ 得

$$f(y) + f(-y) = 2f(y),$$

所以

$$f(-y) = f(y).$$

由 $f(x)$ 的连续性, 故知存在 $c > 0$, 使当 $x \in [0, c]$ 时, $f(x) > 0$. 设 $f(c) = a$. 下面分两种情况讨论:

1° 当 $0 < a \leq 1$ 时,

于是存在 $\theta: 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$, 使得

$$f(c) = \cos \theta. \quad (1')$$

从而

$$\begin{aligned} f(2c) &= 2[f(c)]^2 - f(0) = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta, \\ f(3c) &= 2f(2c)f(c) - f(c) = 2\cos 2\theta \cos \theta - \cos \theta \\ &= \cos 3\theta. \end{aligned}$$

利用数学归纳法易证, 对于一切正整数 n , 均有

$$f(nc) = \cos n\theta. \quad (2')$$

又

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right) \right]^2 = \frac{1}{2}[f(0) + f(c)] = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$$

$$= \cos^2 \frac{\theta}{2},$$

由于 $f(x) > 0$, 故取正根, 则得

$$f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos \frac{\theta}{2}. \quad (3')$$

同样, 利用数学归纳法可得, 对于一切正整数 n , 均有

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right). \quad (4')$$

重复应用(1')到(2')的推理过程于(4'), 可知对于一切正整数 m , 均有

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}\theta\right). \quad (5')$$

因此, 对于 $\frac{m}{2^n}$ 型的正实数 x_n , 有

$$f(cx_n) = \cos(\theta x_n).$$

又因任一正实数 x 皆可表成 $\frac{m}{2^n}$ 型数列的极限, 所以利用极限过程易得

$$f(cx) = \cos(\theta x) \quad (6')$$

由于 $f(-y) = f(y)$, 故(6')式对 $x < 0$ 也成立. 至于当 $x = 0$ 时, $f(cx) = \cos(\theta x)$ 显然成立. 因此, 对于 $-\infty < x < +\infty$ 的一切实数, 均有

$f(cx) = \cos(\theta x)$. 把 cx 换成 x , 并令 $\frac{\theta}{c} = a$, 则得

$$f(x) = \cos ax.$$

2° 当 $a > 1$ 时, 于是存在这样的 θ , 使得

$$f(c) = a = \operatorname{ch}\theta.$$

根据双曲余弦的关系式, 再重复上面的推理过程, 可得

$$f(x) = \operatorname{ch} ax.$$

当 $a = 0$ 时, $f(x) \equiv 1$.

综上所述, 所求的函数为

$$f(x) = \cos ax \text{ 或 } f(x) = \operatorname{ch} ax.$$

819. 求对于 x 和 y 的一切实数值满足方程组:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$$

$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x)$$

及

$$f(0) = 1 \text{ 和 } g(0) = 0$$

的一切有界连续函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ ($-\infty < x < +\infty$).

解 考虑函数

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x),$$

则

$$\begin{aligned} F(x+y) &= f^2(x+y) + g^2(x+y) = [f(x)f(y) \\ &\quad - g(x)g(y)]^2 + [f(x)g(y) + f(y)g(x)]^2 \\ &= F(x)F(y), \end{aligned}$$

由于 $F(0) = 1$ 及 $F(x) \neq 0$, 故

$$F(x) = a^x \quad (-\infty < x < +\infty),$$

式中 $a = F(1)$ 为正的常数*).

由于 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有界, 故只能有 $a = 1$. 因此, 对于一切实数 x , 有 $f^2(x) + g^2(x) = 1$.

因为

$$0 = g(0) = g(x-x) = f(x)g(-x) + f(-x)g(x)$$

及

$$\begin{aligned} 1 = f(0) &= f(x-x) \\ &= f(x)f(-x) - g(-x)g(x). \end{aligned}$$

上面二式分别乘以 $g(-x)$ 及 $f(-x)$, 然后相加, 得
 $f(-x) = f(x) \cdot [f^2(-x) + g^2(-x)] = f(x)$;
 如果上面二式分别乘以 $f(-x)$ 及 $g(-x)$, 然后相减, 得
 $g(-x) = -g(x)[g^2(-x) + f^2(-x)] = -g(x)$.
 从而可得

$$\begin{aligned} f(x+y) + f(x-y) &= f(x)f(y) - g(x)g(y) \\ &+ f(x)f(-y) - g(x)g(-y) = 2f(x)f(y). \end{aligned}$$

于是, 考虑到 $f(x)$ 的有界性, 可得

$$f(x) = \cos ax^{**}),$$

再由 $f^2(x) + g^2(x) = 1$ 可得

$$g(x) = \pm \sin ax,$$

*) 利用 812 题的结果.

**) 利用 818 题的结果.

820. 设

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$$

及

$$\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$$

分别为函数 $f(x)$ 的一阶、二阶有限差.

证明: 若函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是连续的且

$$\Delta^2 f(x) \equiv 0,$$

则此函数是线性函数, 即

$$f(x) = ax + b,$$

式中 a 和 b 为常数.

证 由 $\Delta^2 f(x) \equiv 0$ 得

$$\begin{aligned} f(x + \Delta_1 x + \Delta_2 x) - f(x + \Delta_2 x) \\ \equiv f(x + \Delta_1 x) - f(x). \end{aligned}$$

令 $x = 0$, 得

$$f(\Delta_1 + \Delta_2) - f(\Delta_2) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

令 $\Delta_2 = n\Delta_1$, 得

$$f[(n+1)\Delta_1] - f(n\Delta_1) \equiv f(\Delta_1) - f(0).$$

利用数学归纳法, 可得

$$f[(n+1)\Delta_1] - f(0) \equiv (n+1)[f(\Delta_1) - f(0)]. \quad (1')$$

关系式(1')可写成

$$f(\Delta_1) - f(0) = \frac{1}{n}[f(n\Delta_1) - f(0)].$$

在上式中令 $n\Delta_1 = m$, 再利用(1')即得

$$f\left(\frac{m}{n}\right) - f(0) = \frac{m}{n}[f(1) - f(0)],$$

所以

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = a \cdot \frac{m}{n} + b,$$

式中 $a = f(1) - f(0)$ 及 $b = f(0)$ 均为常数.

于是, 对于有理数 x , 均有

$$f(x) = ax + b.$$

对于无理数 x , 利用 $f(x)$ 的连续性, 即可证得上式仍成立. 事实上, 取有理数列 $x_n \rightarrow x$, 则

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = f(x).$$

另一方面

$$\lim_{x_n \rightarrow x} f(x_n) = \lim_{x_n \rightarrow x} (ax_n + b) = ax + b.$$

因此, 对于一切实数 x , 均有

$$f(x) = ax + b.$$

目 录

第二章 单变量函数的微分学	1
§ 1. 显函数的导函数	1
§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示的函数的导函数. 隐函数的导函数	111
§ 3. 导函数的几何意义	123
§ 4. 函数的微分	143
§ 5. 高阶的导函数和微分	158
§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理	228
§ 7. 函数的增大与减小. 不等式	260
§ 8. 凹凸性. 拐点	290
§ 9. 未定形的求值法	307
§ 10. 台劳公式	336
§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值	363
§ 12. 依据函数的特征点作函数图形	401
§ 13. 函数的极大值与极小值问题	500
§ 14. 曲线的相切. 曲率圆. 渐屈线	525
§ 15. 方程的近似解法	541

第二章 单变量函数的微分学

§ 1. 显函数的导函数

1° 导函数的定义 若 x 及 $x_1 = x + \Delta x$ 为自变量的值, 则差

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

称为函数 $y = f(x)$ 的增量.

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (1)$$

有意义, 则称为导函数, 而函数 $f(x)$ 本身在此情形下称为可微分的函数.

函数 $f'(x)$ 在几何上是函数 $y = f(x)$ 的图形在 x 点切线的斜率 ($\operatorname{tg} \alpha = f'(x)$) (图 2.1).

2° 求导函数的基本法则 若 c 为常数且函数 $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ 都有导函数, 则

$$(1) c' = 0; (2) (cu)' = cu';$$

$$(3) (u \pm v \pm w)' = u' \pm v' \pm w';$$

$$(4) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$(5) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} (v \neq 0);$$

$$(6) (u^n)' = nu^{n-1}u' (n \text{ 为常数});$$

(7) 若函数 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$ 都有导函数, 则

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

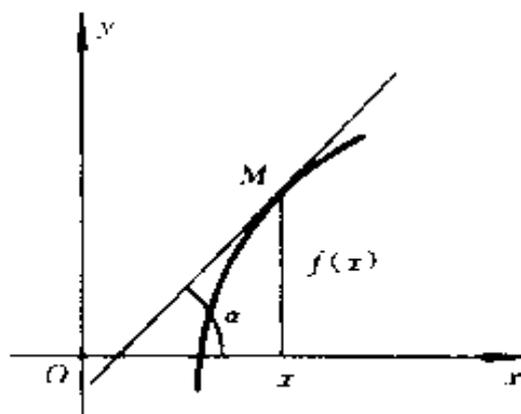


图 2.1

3° 基本公式 若 x 为自变数^{*}, 则

$$I. (x^n)' = nx^{n-1} (n \text{ 为常数});$$

$$II. (\sin x)' = \cos x; \quad III. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$IV. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad V. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$VI. (\operatorname{arc} \sin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$VII. (\operatorname{arc} \cos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$VIII. (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$IX. (\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2};$$

$$X. (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0); \quad (e^x)' = e^x;$$

$$XI. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1);$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$XII. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x; \quad XIII. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x;$$

$$XIV. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}; \quad XV. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

4° 单侧的导函数 表示式

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

及

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

分别称为函数 $f(x)$ 在 x 点的左导函数或右导函数.

导函数 $f'(x)$ 存在的充分且必要的条件是

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

* 在本章基本公式及习题解答的叙述过程中, 一些明显的定义域要求, 例如本节公式 V 中要求 $x \neq k\pi$ (k 整数), VI 中要求 $|x| < 1$ 等等, 以及例如尔后 §5 中相应的限制, 一般地就不再一一声明.

5° 无穷的导函数 若在某一点 x 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

则称函数 $f(x)$ 在 x 点有无穷的导函数. 在此种情形下, 函数 $y = f(x)$ 的图形上在 x 点的切线与 Ox 轴垂直.

821. 若 x 由 1 变到 1000, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \lg x$ 的对应的增量 Δy .

解 $\Delta x = 1000 - 1 = 999;$

$$\Delta y = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

822. 若 x 由 0.01 变到 0.001, 求自变量 x 的增量 Δx 和函数 $y = \frac{1}{x^2}$ 的对应的增量 Δy .

解 $\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009;$

$$\Delta y = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 990000.$$

823. 设:

(a) $y = ax + b$; (b) $y = ax^2 + bx + c$; (c) $y = a^x$.

若变量 x 得到增量 Δx , 求增量 Δy .

解 (a) $\Delta y = [(ax + a\Delta x) + b] - [ax + b] = a\Delta x;$

$$(b) \Delta y = [a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c]$$

$$- [ax^2 + bx + c]$$

$$= (2ax + b)\Delta x + a(\Delta x)^2;$$

$$(c) \Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

824. 证明:

$$(a)\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(b)\Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

证 (a) $\Delta[f(x) + g(x)]$
 $= [f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]$
 $= [f(x + \Delta x) - f(x)] + [g(x + \Delta x) - g(x)]$
 $= \Delta f(x) + \Delta g(x),$

于是,

$$\Delta[f(x) + g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x);$$

$$(b)\Delta[f(x)g(x)] \\ = [f(x + \Delta x)g(x + \Delta x)] - [f(x)g(x)] \\ = [f(x + \Delta x) - f(x)]g(x + \Delta x) \\ + [g(x + \Delta x) - g(x)]f(x) \\ = \Delta f(x)g(x + \Delta x) + \Delta g(x)f(x),$$

于是,

$$\Delta[f(x)g(x)] \\ = g(x + \Delta x)\Delta f(x) + f(x)\Delta g(x).$$

同样,我们还可将(b)的结果写成

$$\Delta[f(x)g(x)] = f(x + \Delta x)\Delta g(x) + g(x)\Delta f(x).$$

825. 过曲线 $y = x^2$ 上的二点 $A(2, 4)$ 和 $A'(2 + \Delta x, 4 + \Delta y)$ 引割线 AA' , 求此割线的斜率, 设:

(a) $\Delta x = 1$; (b) $\Delta x = 0.1$; (c) $\Delta x = 0.01$;

(d) Δx 为任意小.

在已知曲线上 A 点的切线的斜率等于甚么?

解 割线 AA' 的斜率 $k_{AA'} = \frac{(2 + \Delta x)^2 - 4}{\Delta x} = 4 + \Delta x$,

(a) $k_{AA'} = 5$; (b) $k_{AA'} = 4.1$;

(c) $k_{AA'} = 4.01$; (d) $k_{AA'} = 4 + \Delta x$.

于是, 在 A 点的切线斜率为

$$k_A = \lim_{A' \rightarrow A} k_{AA'} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4 + \Delta x) = 4.$$

826. 把 Ox 轴上的线段 $1 \leq x \leq 1 + h$ 利用函数关系 $y = x^3$ 映变到 Oy 轴上. 求其平均的伸长系数. 设:

(a) $h = 0.1$; (b) $h = 0.01$; (c) $h = 0.001$, 计算此系数的值.

当 $x = 1$ 时伸长的系数等于甚么?

解 平均伸长系数 $\bar{l} = \frac{(1 + h)^3 - 1^3}{h} = 3 + 3h + h^2$,

(a) $\bar{l} = 3 + 3(0.1) + (0.1)^2 = 3.31$;

(b) $\bar{l} = 3 + 3(0.01) + (0.01)^2 = 3.0301$;

(c) $\bar{l} = 3 + 3(0.001) + (0.001)^2 = 3.003001$.

于是,

$$l|_{x=1} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{l} = 3.$$

827. 动点沿 Ox 轴运动的规律由下式表出

$$x = 10t + 5t^2$$

式中 t 以秒计的时间, x 为以米计的距离. 求在 $20 \leq t \leq 20 + \Delta t$ 时间内运动的平均速度. 设: (a) $\Delta t = 1$; (б) $\Delta t = 0.1$; (в) $\Delta t = 0.01$, 计算此速度的值. 当 $t = 20$ 时运动的速度等于甚么?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{平均速度 } \bar{v} &= \{[10(20 + \Delta t) + 5(20 + \Delta t)^2] \\ &\quad - [10 \times 20 + 5 \times 20^2]\} \div \Delta t \\ &= 210 + 5\Delta t (\text{米/秒}), \end{aligned}$$

$$(a) \bar{v} = 210 + 5 \times 1 = 215 (\text{米/秒});$$

$$(б) \bar{v} = 210.5 (\text{米/秒});$$

$$(в) \bar{v} = 210.05 (\text{米/秒}).$$

于是,

$$v|_{t=20} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (210 + 5\Delta t) = 210 (\text{米/秒}).$$

828. 根据导函数的定义, 直接求下列函数的导函数:

$$(a) x^2; (б) x^3; (в) \frac{1}{x}; (г) \sqrt{x}; (д) \sqrt[3]{x};$$

$$(e) \operatorname{tg} x; (ж) \operatorname{ctg} x; (з) \operatorname{arc} \sin x; (и) \operatorname{arc} \cos x;$$

$$(к) \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

$$\text{解} \quad (a) y = x^2,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

$$(6) y = x^3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2) = 3x^2. \end{aligned}$$

$$(B) y = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = -\frac{1}{x(\Delta x + x)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x(\Delta x + x)} \right) \\ &= -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

$$(r) y = \sqrt{x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}. \end{aligned}$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (x > 0).$$

$$(d) y = \sqrt[3]{x},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{x + \Delta x} - \sqrt[3]{x}}{\Delta x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(x + \Delta x)^2} + \sqrt[3]{x(x + \Delta x)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x \neq 0).$$

$$(e) y = \operatorname{tg} x,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \Delta x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x} - \operatorname{tg} x}{\Delta x}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \Delta x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}$$

$$= \frac{\operatorname{tg} \Delta x \operatorname{sec}^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}.$$

于是,

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \Delta x \operatorname{sec}^2 x}{\Delta x (1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \Delta x)}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}}{\Delta x} \\
& = \frac{\arcsin t}{t} \\
& \cdot \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是,

$$\begin{aligned}
y' & = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\
& = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x+\Delta x}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}} \\
& \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},
\end{aligned}$$

其中 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sin u} = 1$;

(ii) $y = \arcsin x$,

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} & = \frac{\arcsin(x+\Delta x) - \arcsin x}{\Delta x} \\
& = \frac{\arcsin[(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}]}{\Delta x} \\
& = \frac{\arcsin t}{t} \\
& \cdot \frac{-(2x+2\Delta x)}{(x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} + x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}},
\end{aligned}$$

式中 $t = (x+\Delta x) \sqrt{1-x^2} - x \sqrt{1-(x+\Delta x)^2}$,

从而 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} t = 0$.

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(2x + \Delta x)}{(x + \Delta x) \sqrt{1 - x^2} + x \sqrt{1 - (x + \Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\arcsin t}{t} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

(κ) $y = \arcsin \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\arcsin \operatorname{tg}(x + \Delta x) - \arcsin \operatorname{tg} x}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\Delta x} \\ &= \frac{\arcsin \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{1 + x(x + \Delta x)}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\arcsin \operatorname{tg} \frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}}{\frac{\Delta x}{1 + x(x + \Delta x)}} \right] \end{aligned}$$

$$\left. \frac{1}{1+x(x+\Delta x)} \right\} = \frac{1}{1+x^2},$$

其中利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} t}{t} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\operatorname{tg} u} = 1$.

829. 设:

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3,$$

求 $f'(1)$, $f'(2)$ 和 $f'(3)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f'(x) &= (x-2)^2(x-3)^3 \\ &\quad + 2(x-1)(x-2)(x-3)^3 \\ &\quad + 3(x-1)(x-2)^2(x-3)^2 \\ &= 2(x-2)(x-3)^2(3x^2-11x+9). \end{aligned}$$

于是,

$$f'(1) = -8; f'(2) = f'(3) = 0.$$

830. 设:

$$f(x) = x^2 \sin(x-2),$$

求 $f'(2)$.

$$\text{解 } f'(x) = 2x \sin(x-2) + x^2 \cos(x-2).$$

于是,

$$f'(2) = 4.$$

831. 设:

$$f(x) = x + (x-1) \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x}{x+1}},$$

求 $f'(1)$.

解 方法一:

若用复合函数求导法,可得

$$f'(x) = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x-1}{2(x+1)\sqrt{x}}.$$

于是,

$$f'(1) = 1 + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \frac{\pi}{4}.$$

方法二:

若按定义作,注意到当 $x = 1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 + \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta x}},$$

即得

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \arcsin \sqrt{\frac{1 + \Delta x}{2 + \Delta x}} \right) \\ &= 1 + \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

832. 设函数 $f(x)$ 在 a 点可微分,求

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

解 设 $\Delta x = x - a$, 则当 $x \rightarrow a$ 时, $\Delta x \rightarrow 0$. 于是,

$$\begin{aligned} \text{得} \quad & \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a). \end{aligned}$$

833. 证明:若函数 $f(x)$ 可微分及 n 为自然数,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] = f'(x). \quad (1)$$

反之,若对于函数 $f(x)$ 有极限(1)存在,则可否断定这个函数有导函数?研究迪里黑里函数的例子(参阅第一章第 734 题).

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = f'(x). \end{aligned}$$

反之,就不一定对了.例如,对于迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

在任一有理点是不连续的,当然其导数也不存在.但由于 $x + \frac{1}{n}$ 仍为有理数,故当 x 为有理数时,

$$\chi \left(x + \frac{1}{n} \right) - \chi(x) = 1 - 1 = 0,$$

从而,极限(1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\chi \left(x + \frac{1}{n} \right) - \chi(x) \right] = 0$$

存在.

利用导函数表,求下列函数的导函数:

834. $y = 2 + x - x^2$. 问 $y'(0)$; $y' \left(\frac{1}{2} \right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$ 等于甚么?

解 由于 $y'(x) = 1 - 2x$, 故得

$$y'(0) = 1; y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0; y'(1) = -1;$$

$$y'(-10) = 21.$$

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. 当 x 为何值时:

(a) $y'(x) = 0$; (b) $y'(x) = -2$; (c) $y'(x) = 10$?

解 $y'(x) = x^2 + x - 2$.

(a) 令 $y'(x) = 0$, 得 $x^2 + x - 2 = 0$. 于是, $x = -2$ 或 $x = 1$;

(b) 令 $y'(x) = -2$, 得 $x^2 + x = 0$. 于是, $x = -1$ 或 $x = 0$;

(c) 令 $y'(x) = 10$; 得 $x^2 + x - 12 = 0$. 于是, $x = -4$ 或 $x = 3$.

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$.

解 $y' = 10a^3x - 5x^4$.

837. $y = \frac{ax + b}{a + b}$.

解 $y' = \frac{a}{a + b}$.

838. $y = (x - a)(x - b)$.

解 $y' = x - a + x - b = 2x - a - b$.

839. $y = (x + 1)(x + 2)^2(x + 3)^3$.

解 $y' = (x+2)^2(x+3)^3 + 2(x+1)(x+2)(x+3)^3$
 $+ 3(x+1)(x+2)^2(x+3)^2$

$$\begin{aligned}
&= (x+2)(x+3)^2[(x+2)(x+3) \\
&\quad + 2(x+1)(x+3) + 3(x+1)(x+2)] \\
&= 2(x+2)(x+3)^2(3x^2+11x+9).
\end{aligned}$$

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

解 $y' = \sin\alpha(x\cos\alpha - \sin\alpha)$
 $+ \cos\alpha(x\sin\alpha + \cos\alpha)$
 $= x\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$.

841. $y = (1 + nx^m)(1 + mx^n)$.

解 $y' = mnx^{m-1}(1 + mx^n) + mnx^{n-1}(1 + nx^m)$
 $= mn[x^{m-1} + x^{n-1} + (m+n)x^{m+n-1}]$.

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

解 $y' = -(1-x^2)^2(1-x^3)^3$
 $- 4x(1-x)(1-x^2)(1-x^3)^3$
 $- 9x^2(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^2$
 $= -(1-x)^2(1-x^2)(1-x^3)^2(1+6x$
 $+ 15x^2 + 14x^3)$
 $= -(1-x)^5(1+x)(1+2x)(1+4x$
 $+ 7x^2)(1+x+x^2)^2$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

解 $y' = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} + \frac{9}{x^4}\right) (x \neq 0)$.

844. 证明公式

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

证 $\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2}$

$$= \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$$

这里已暗设 $cx+d \neq 0$.

求下列函数之导函数:

845. $y = \frac{2x}{1-x^2}$

解 $y' = \frac{2(1-x^2) + 4x^2}{(1-x^2)^2}$
 $= \frac{2(1+x^2)}{(1-x^2)^2} (|x| \neq 1)$

846. $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

解 由于 $y = \frac{2}{1-x+x^2} - 1$, 故

$$y' = \frac{2(1-2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

847. $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2(1+x)^3 - x[3(1+x)^2(1-x)^2 - 2(1-x)(1+x)^3]}{(1-x)^4(1+x)^6}$$

$$= \frac{1-x+4x^2}{(1-x)^3(1+x)^4}, (|x| \neq 1).$$

$$848. y = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^2}.$$

解 $y' =$

$$\frac{(1-x)^2[-2x(3-x^3)-3x^3(2-x^2)]+2(1-x)(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x)^4}$$

$$= \frac{12-6x-6x^2+2x^3+5x^4-3x^5}{(1-x)^3} (x \neq 1).$$

$$849. y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{-p(1-x)^{p-1}(1+x)^q - q(1+x)^{q-1}(1-x)^p}{(1+x)^{2q}}$$

$$= \frac{(1-x)^{p-1}[(p+q) + (p-q)x]}{(1+x)^{q+1}}$$

$(x \neq -1).$

$$850. y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}.$$

解

$$y' = \frac{[px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}](1+x) - x^p(1-x)^q}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(1+x)^2} [p - (q+1)x - (p+q-1)x^2]$$

$(x \neq -1).$

$$851. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}.$$

$$\text{解 } y' = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} (x > 0).$$

$$852. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}}{a^2 - x^2} \\ &= \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}} (|x| < |a|). \end{aligned}$$

$$858. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{3 \sqrt[3]{\left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^2}} \\ &= \frac{3x^2(1-x^3) + 3x^2(1+x^3)}{(1-x^3)^2} \\ &= \frac{2x^2}{1-x^6} \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}} (|x| \neq 1). \end{aligned}$$

$$859. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{(1+x^2)(x + \sqrt{1+x^2})^2} \\ &\quad \left[\sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} + 2x \right] \\ &= -\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

$$860. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2 \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] \\
& = \frac{1 + 2\sqrt{x} + 4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \\
& \quad (x > 0).
\end{aligned}$$

$$861. y = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y &= \frac{1}{3\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}\right)^2}} \\
& \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(1 + \sqrt[3]{x})^2}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \\
& = \frac{1}{27\sqrt[3]{x^2(1 + \sqrt[3]{x})^2} \cdot \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}\right)^2}} \\
& \quad (x \neq 0, x \neq -1, x \neq -8).
\end{aligned}$$

$$862. y = \cos 2x - 2\sin x.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= -2\sin 2x - 2\cos x \\
&= -2\cos x(1 + 2\sin x).
\end{aligned}$$

$$863. y = (2 - x^2)\cos x + 2x\sin x.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= -2x\cos x - (2 - x^2)\sin x + 2\sin x \\
& \quad + 2x\cos x \\
&= x^2\sin x.
\end{aligned}$$

$$864. y = \sin(\cos^2 x)\cos(\sin^2 x).$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= -2\sin x \cos x \cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\
&\quad - 2\sin x \cos x \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x) \\
&= -\sin 2x [\cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) \\
&\quad + \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x)] \\
&= -\sin 2x \cos(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= -\sin 2x \cos(\cos 2x).
\end{aligned}$$

$$865. y = \sin^n x \cos nx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= n\sin^{n-1} x \cos x \cos nx - n\sin^n x \sin nx \\
&= n\sin^{n-1} x (\cos x \cos nx - \sin x \sin nx) \\
&= n\sin^{n-1} x \cos(n+1)x.
\end{aligned}$$

$$866. y = \sin(\sin(\sin x)).$$

$$\text{解 } y' = \cos x \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos[\sin(\sin x)].$$

$$867. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{2\sin x (\cos x \sin x^2 - x \sin x \cos x^2)}{\sin^4 x^2} \\
&\quad (x^2 \neq k\pi; k = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$868. y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{-2\sin^3 x - 4\sin x \cos^2 x}{4\sin^4 x} \\
&= -\frac{1 + \cos^2 x}{2\sin^3 x} (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).
\end{aligned}$$

$$869. y = \frac{1}{\cos^n x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{\cos^{2n}x}(-n\cos^{n-1}x\sin x) \\ &= \frac{n\sin x}{\cos^{n+1}x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$870. y = \frac{\sin x - x\cos x}{\cos x + x\sin x}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{(\cos x + x\sin x)^2} [(x\sin x - \cos x \\ &\quad + \cos x)(\cos x + x\sin x) - (\sin x - \sin x \\ &\quad + x\cos x)(\sin x - x\cos x)] \\ &= \frac{x^2}{(\cos x + x\sin x)^2} \end{aligned}$$

$$871. y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2}\sec^2 \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\csc^2 \frac{x}{2} \\ &= \frac{2}{\sin^2 x} \quad (x \neq k\pi; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$872. y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sec^2 x + \operatorname{tg}^4 x \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^6 x \\ &\quad (x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$873. y = 4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x} + \sqrt[3]{\operatorname{ctg}^5 x}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{8}{3}(\operatorname{ctg} x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 x) \\ &\quad + \frac{8}{3}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{5}{3}}(-\csc^2 x) \\ &= -\frac{8}{3\sin^4 x \sqrt[3]{\operatorname{ctg} x}} \end{aligned}$$

$$(x \neq k\pi; x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

$$874. y = \sec^2 \frac{x}{a} + \csc^2 \frac{x}{a}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{2}{a} \sec^2 \frac{x}{a} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{2}{a} \csc^2 \frac{x}{a} \operatorname{ctg} \frac{x}{a} \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{\sin \frac{x}{a}}{\cos^3 \frac{x}{a}} - \frac{\cos \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a}} \right) \\ &= \frac{2}{a} \cdot \frac{\sin^4 \frac{x}{a} - \cos^4 \frac{x}{a}}{\sin^3 \frac{x}{a} \cos^3 \frac{x}{a}} \\ &= \frac{16 \left(\sin^2 \frac{x}{a} - \cos^2 \frac{x}{a} \right)}{a \left(2 \sin \frac{x}{a} \cos \frac{x}{a} \right)^3} = \frac{-16 \cos \frac{2x}{a}}{a \sin^3 \frac{2x}{a}} \\ &(x \neq \frac{k\pi a}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$875. y = \sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)].$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \\ &\quad \cdot \{-2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\sin(\operatorname{tg}^3 x)\} \\ &\quad \cdot [3\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x] \\ &= -3\operatorname{tg}^2 x \sec^2 x \cdot \sin(2\operatorname{tg}^3 x) \\ &\quad \cdot \cos[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)] \\ &(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$876. y = e^{-x^2}.$$

解 $y' = -2xe^{-x^2}$.

877. $y = 2^{\frac{1}{x}}$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2} \sec^2 \frac{1}{x} \cdot 2^{\frac{1}{x}} \ln 2 \quad (x \neq 0)$.

878. $y = e^x(x^2 - 2x + 2)$.

解 $y' = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = x^2e^x$.

879. $y = \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right] e^{-x}$.

解 $y' = -e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \sin x - \frac{(1+x)^2}{2} \cos x \right]$
 $+ e^{-x} \left[\frac{1-x^2}{2} \cos x - x \sin x \right]$
 $+ \frac{(1+x)^2}{2} \sin x - (1+x) \cos x$
 $= x^2 e^{-x} \sin x$.

880. $y = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)$.

解 $y' = e^x \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) - \frac{1}{2} e^x \operatorname{csc}^2 \frac{x}{2}$
 $= \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad (x \neq 2k\pi; k \text{ 为整数})$.

881. $y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$.

解

$$y' = \frac{3^x (\ln 3 \cdot \cos x - \sin x) - 3^x \ln 3 (\ln 3 \cdot \sin x + \cos x)}{3^{2x}}$$

$$= -\frac{(1 + \ln^2 3) \sin x}{3^x}$$

$$882. y = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{ax} [a(a \sin bx - b \cos bx) \\ &\quad + (ab \cos bx + b^2 \sin bx)] \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin bx. \end{aligned}$$

$$883. y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}.$$

$$\text{解 } y' = e^x [1 + e^{e^x} (1 + e^{e^{e^x}})].$$

$$884. y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0).$$

解 两边取对数,得

$$\ln y = x \ln \frac{a}{b} + a(\ln b - \ln x) + b(\ln x - \ln a).$$

两端同时对 x 求导数,得

$$\frac{y'}{y} = \ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x}.$$

于是,

$$\begin{aligned} y' &= y \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \\ &= \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \left(\frac{b}{x}\right)^a \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^b \left(\ln \frac{a}{b} - \frac{a}{x} + \frac{b}{x} \right) \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$885. y = x^{a^x} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0).$$

$$\text{解 } y' = a^a x^{a^a-1} + a x^{a-1} a^{x^a} \ln a + a^x \cdot a^{a^x} \ln^2 a.$$

$$886. y = \lg^3 x^2.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= 3 \lg^2 x^2 \cdot \frac{1}{x^2} 2x \lg e \\ &= \frac{6}{x} \lg e \cdot \lg^2 x^2 \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

或按 $y = (\lg e \cdot \ln x^2)^3 = 8 \lg^3 e \cdot \ln^3 |x|$ 求导数, 有

$$y' = 24 \lg^3 e \cdot \left(\frac{1}{x} \ln^2 |x| \right)' (x \neq 0).$$

*) $(\ln |x|)' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x}$, 以后不再说明.

887. $y = \ln[\ln(\ln x)].$

解 $y' = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)} (x > e),$

888. $y = \ln[\ln^2(\ln^3 x)].$

解 $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2 \ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x}$
 $\quad \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$
 $\quad = \frac{6}{x \ln x \cdot \ln(\ln^3 x)} (x > e).$

889. $y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}.$

解 $y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2(1+x)^2}$
 $\quad = \frac{1}{(1+x)^2(1+x^2)} (x > -1).$

890. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}.$

解 $y' = \frac{1}{4} [\ln(x^2-1) - \ln(x^2+1)]'$
 $\quad = \frac{1}{4} \left(\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2x}{x^2+1} \right) = \frac{x}{x^4-1} (|x| > 1).$

891. $y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}.$

$$\text{解 } y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \ln|x| - \frac{1}{4}\ln(1+x^4),$$

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{4x^3}{4(1+x^4)^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 4x^3 \\ &= \frac{1}{x(1+x^4)^2} (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$892. y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{1}{2\sqrt{6}} [\ln|x\sqrt{3} - \sqrt{2}| \\ &\quad - \ln|x\sqrt{3} + \sqrt{2}|] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \left(\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{3x^2 - 2} \left(|x| > \sqrt{\frac{2}{3}} \right). \end{aligned}$$

$$893. y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$$

($0 < k < 1$).

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{1-k} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \\ &\quad - \frac{\sqrt{k}}{1-k} \left(\frac{\sqrt{k}}{1+x\sqrt{k}} + \frac{\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \right) \\ &= \frac{2}{(1-x^2)(1-kx^2)} (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$894. y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1}).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{2 \sqrt{x^2 + a^2}} \\ &+ \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + a^2}. \end{aligned}$$

$$899. y = \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x \sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2 \sqrt{ab}} \left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + x \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x \sqrt{b}} \right) \\ &= \frac{1}{a - bx^2} \left(|x| < \sqrt{\frac{a}{b}} \right). \end{aligned}$$

$$900. y = \frac{2 + 3x^2}{x^4} \sqrt{1 - x^2} + 3 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{6x^5 - 4x^3(2 + 3x^2)}{x^8} \sqrt{1 - x^2} \\ &- \frac{x(2 + 3x^2)}{x^4 \sqrt{1 - x^2}} + \frac{3}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \\ &\cdot \left(-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \right) - \frac{3}{x} \\ &= -\frac{8}{x^5 \sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

$$901. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x} \quad (0 < x - 2k\pi < \pi, k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$902. y = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} \end{aligned}$$

$$\left(|x - 2k\pi| < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}\right).$$

$$903. y = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\operatorname{ctg} x \cdot \csc^2 x + \frac{\cos x}{\sin x} \\ &= -\operatorname{ctg}^3 x \quad (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

$$904. y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\cos x}{1 - \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right) \\ &= -\frac{1}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}\right). \end{aligned}$$

$$905. y = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sin^3 x + 2\sin x \cos^2 x}{2\sin^4 x} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1 + \cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} (0 < x - 2k\pi < \pi; k \text{ 为整数}).$$

$$906. y = \ln \frac{b + a\cos x + \sqrt{b^2 - a^2}\sin x}{a + b\cos x} (0 \leq |a| < |b|).$$

解 当 $a = 0$ 时, $y = \ln \frac{1 + \sin x}{\cos x}$. 由于 $1 + \sin x$ 非负, 为使对数有意义, 必须有

$$\begin{cases} 1 + \sin x > 0, \\ \cos x > 0. \end{cases}$$

当 $\left(2k - \frac{1}{2}\right)\pi < x < \left(2k + \frac{1}{2}\right)\pi$ (k 为整数) 时, 上述不等式成立. 在此域内, 得

$$y' = \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x}.$$

当 $a \neq 0$ 时, 记 $y = \ln u(x)$, 而

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1 + \frac{a}{b}\cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}\sin x}{\frac{a}{b} + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos\varphi_0\cos x + \sin\varphi_0\sin x}{\cos\varphi_0 + \cos x} \\ &= \frac{1 + \cos(x - \varphi_0)}{\cos x + \cos\varphi_0} = \frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \end{aligned}$$

其中 $\varphi_0 = \arctg \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 显然 $v_1(x) \geq 0$. 为保证 y 可导, 首先必须有 $u(x) > 0$, 故应有 $v_1(x) \neq 0$ (从而 $v_1(x) > 0$), 进而应有 $v_2(x) > 0$. 于是, y 的存在域 R 为满足不等式

$$\begin{cases} v_1(x) \neq 0, \\ v_2(x) > 0 \end{cases}$$

的一切 x 值, 记成

$$R = \{x | v_1(x) \neq 0, v_2(x) > 0\},$$

则

$$R = \{x | \cos x + \cos \varphi_0 > 0 \text{ 且 } x \neq (2k + 1)\pi + \varphi_0; \\ k \text{ 为整数}\}.$$

在此域内, 得

$$\begin{aligned} y' &= \frac{-\sin(x - \varphi_0)}{1 + \cos(x - \varphi_0)} + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\sin x \cos \varphi_0 + \cos x \sin \varphi_0}{1 + \cos x \cos \varphi_0 + \sin x \sin \varphi_0} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \cos \varphi_0} \\ &= \frac{-\frac{a}{b} \sin x + \cos x \cdot \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}}{1 + \frac{a}{b} \cos x + \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \sin x} \\ &\quad + \frac{\sin x}{\cos x + \frac{a}{b}} \\ &= \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a + b \cos x}, \end{aligned}$$

其实此结果也包含了 $a = 0$ 时的情形.

907. $y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6).$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^2}(\ln^3 x + 3\ln^2 x + 6\ln x + 6) \\
 &\quad + \frac{1}{x}\left(\frac{3}{x}\ln^2 x + \frac{6}{x}\ln x + \frac{6}{x}\right) \\
 &= -\frac{\ln^3 x}{x^2} \quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

$$908. y = \frac{1}{4x^4}\ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{x^5}\ln \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^5} + \frac{1}{4x^5} \\
 &= \frac{1}{x^5}\ln x \quad (x > 0).
 \end{aligned}$$

$$909. y = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{1+x^2})^2 + 3\ln(1 + \sqrt[3]{1+x^2}).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{3}{2} \cdot 2(1 - \sqrt[3]{1+x^2}) \left(-\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \right) \\
 &\quad + \frac{3}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}} \cdot \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^2}} \\
 &= \frac{2x}{1 + \sqrt[3]{1+x^2}}.
 \end{aligned}$$

$$910. y = \ln\left(\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)\right).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln\left(\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}\right)} \left[-\frac{1}{x^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\frac{1}{x} + \ln \frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1+x+\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}}{\left(1+x\ln\frac{1}{x}\right)\left[1+x\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]}$$

($x > 0$).

911. $y = x[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$.

解 $y' = [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)]$
 $+ x\left[\frac{1}{x}\cos(\ln x) + \frac{1}{x}\sin(\ln x)\right]$
 $= 2\sin(\ln x) \quad (x > 0)$.

912⁺. $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x$.

解 $y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \sec^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} + \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x$
 $- \cos x \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \sec^2 x$
 $= \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} x \quad (0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数})$.

913. $y = \arcsin \frac{x}{2}$.

解 $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}} \quad (|x| < 2)$.

914. $y = \arcsin \frac{1-x}{\sqrt{2}}$.

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} \quad (|x-1| < \sqrt{2}).$$

915. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2}{a}.$

解 $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2}{a}\right)^2} \cdot \frac{2x}{a} = \frac{2ax}{a^2 + x^4} (a \neq 0).$

916. $y = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{2}}{x}.$

解 $y' = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{x^2}\right)$
 $= \frac{1}{x^2 + 2} \quad (x \neq 0).$

917. $y = \sqrt{x} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}.$

解 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
 $= \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \quad (x \geq 0).$

918. $y = x + \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \cos x.$

解 $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \cos x$
 $- \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \sqrt{1-x^2}$
 $= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \cos x \quad (|x| < 1).$

919. $y = x \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \frac{x}{\sqrt{1 - \frac{x}{1+x}}} \\
 &\cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1+x}}} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
 &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \quad (x \geq 0).
 \end{aligned}$$

$$920. y = \arccos \frac{1}{x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{x}\right)^2}} \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}} \quad (|x| > 1).
 \end{aligned}$$

$$921. y = \arcsin(\sin x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \operatorname{sgn}(\cos x) \\
 &\quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).
 \end{aligned}$$

$$922. y = \arccos(\cos^2 x).$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos^4 x}} = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x(1 + \cos^2 x)}} \\
 &= \frac{2\operatorname{sgn}(\sin x) \cdot \cos x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} \quad (x \neq k\pi; k \text{ 为整数}).
 \end{aligned}$$

923. $y = \arcsin(\sin x - \cos x)$.

解
$$y' = \frac{\cos x + \sin x}{\sqrt{1 - (\sin x - \cos x)^2}}$$

$$= \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$(0 < x - k\pi < \frac{\pi}{2}; k \text{ 为整数}).$

924. $y = \arccos \sqrt{1 - x^2}$.

解
$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (1 - x^2)}} \cdot \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (0 < |x| < 1).$$

925. $y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$.

解
$$y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{(1-x) + (1+x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2} \quad (x \neq 1).$$

926. $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)$.

解

$$y' = \frac{-1}{1 + \left(\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \right)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\cos x + \sin x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= 1 \quad (x \neq k\pi + \frac{\pi}{4}; k \text{ 为整数}).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} - 2\cos x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x) \\ &= \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x} \\ &= -2\cos x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x). \end{aligned}$$

$$932. y = \ln \left(\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{\operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^{-1}}} \cdot \frac{-1}{2x\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2x\sqrt{x} - \operatorname{arc} \cos \frac{1}{\sqrt{x}}} \quad (x > 1). \end{aligned}$$

$$933. y = \ln \frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}} + \frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{b}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{x+a} - \frac{x}{x^2+b^2} + \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{b \left(1 + \frac{x^2}{b^2} \right)} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{(x+a)(b^2 + x^2)} \quad (x > -a). \end{aligned}$$

$$934. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ &= \sqrt{a^2 - x^2}. \end{aligned}$$

$$935. y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x-1}{x^2-x+1} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
 &= \frac{1}{1+x^3} \quad (x \neq -1).
 \end{aligned}$$

$$936. \quad y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2x - \sqrt{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}\right)^2} \\
 &\quad \cdot \frac{\sqrt{2}(x^2 - 1) - 2x^2\sqrt{2}}{(x^2 - 1)^2} \\
 &= \frac{1}{1+x^4} \quad (|x| \neq 1).
 \end{aligned}$$

$$937. \quad y = x(\operatorname{arc} \sin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x - 2x.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= (\operatorname{arc} \sin x)^2 + \frac{2x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} \\
 &\quad - \frac{2x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 - 2 \\
 &= (\operatorname{arc} \sin x)^2 \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$938. \quad y = \frac{\operatorname{arc} \cos x}{x} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos x}{x^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 - \sqrt{1-x^2}} + \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \right) \\
 &= -\frac{\arccos x}{x^2} \quad (0 < |x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$939. y = \arctg \sqrt{x^2 - 1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1 + (x^2 - 1)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &\quad + \frac{x \ln x}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 - 1}} \\
 &= \frac{x \ln x}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \quad (x > 1).
 \end{aligned}$$

$$940. y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } y' &= \frac{1}{1-x^2} + \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) \\
 &= \frac{x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

$$941. y = \frac{1}{12} \ln \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \arctg \frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{12} \left(\frac{4x^3 - 2x}{x^4 - x^2 + 1} - \frac{4x}{x^2 + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2x^2 - 1}\right)^2} \left[\frac{-4\sqrt{3}x}{(2x^2 - 1)^2} \right]$$

$$= \frac{x^5}{1 + x^6} \left(|x| \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

942. $y = \frac{x^6}{1 + x^{12}} - \text{arc ctg} x^6.$

解 $y' = \frac{6x^5(1 + x^{12}) - 12x^{17}}{(1 + x^{12})^2} + \frac{6x^5}{1 + x^{12}}$

$$= \frac{12x^5}{(1 + x^{12})^2}.$$

943⁺. $y = \ln \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}} + \sqrt{3} \text{arc tg} \frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

解 $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2} \cdot (1 - \sqrt[3]{x})}$

$$- \frac{1}{2(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt{x^2})} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \right)$$

$$+ \sqrt{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{1 + 2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{3\sqrt{3}\sqrt{x^2}}$$

$$= -\frac{1}{(1 - x)\sqrt[3]{x}} \quad (-\infty < x < 1, x \neq 0).$$

944. $y = \text{arc tg} \frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}.$

解 $y' = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{1 + \sqrt{1 - x^2}}\right)^2}$

$$\begin{aligned} & \cdot \frac{1 + \sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1 + \sqrt{1-x^2})^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

945. $y = \text{arc ctg} \frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}} \quad (a > 0).$

解 $y' = -\frac{1}{1 + \frac{(a-2x)^2}{4(ax-x^2)}} \cdot \frac{1}{2}$

$$\cdot \frac{-2\sqrt{ax-x^2} - \frac{(a-2x)^2}{2\sqrt{ax-x^2}}}{ax-x^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ax-x^2}} \quad (0 < x < a).$$

946. $y = \frac{3-x}{2} \sqrt{1-2x-x^2} + 2\text{arc sin} \frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

解 $y' = -\frac{1}{2} \sqrt{1-2x-x^2} - \frac{3-x}{2} \cdot \frac{1+x}{\sqrt{1-2x-x^2}}$

$$+ 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1+x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$$

$$= \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}} \quad (|x+1| < \sqrt{2}).$$

947. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[4]{1+x^4} + x}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} - \frac{1}{2} \text{arc tg} \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

解 $y' = \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} + x} \cdot \left[1 + \frac{x^3}{\sqrt{(1+x^4)^3}} \right] \right.$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4} - x} \left(\frac{x^3}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} - 1 \right) \Bigg\} \\
& - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} \right)^2} \\
& \cdot \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^4}{\sqrt[4]{(1+x^4)^3}} - \sqrt[4]{1+x^4} \right) \\
& = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} \quad (x \neq 0).
\end{aligned}$$

948. $y = \arctg(\operatorname{tg}^2 x)$.

解 $y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 x} \cdot 2 \operatorname{tg} x \sec^2 x$

$$= \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \quad (x \neq \frac{2k-1}{2}\pi; k \text{ 为整数}).$$

949. $y = \sqrt{1-x^2} \cdot \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$$+ \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

解 $y' = - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{1-x^2} \left(- \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{x}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} \right.$$

$$\left. + \frac{x}{(1+\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} \right]$$

$$- \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$(0 < |x| < 1).$$

950. $y = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2.$

解 $y' = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2}$

$$- \frac{1}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$$

$$= \frac{x^2}{1+x^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x.$$

951. $y = \ln(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}).$

解 $y' = \frac{1}{e^x + \sqrt{1+e^{2x}}} \left(e^x + \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}} \right)$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

952. $y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x + \sqrt{1+x^2}).$

解 $y' = \frac{1}{1+(x+\sqrt{1+x^2})^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)}.$$

953. $y = \operatorname{arc} \sin \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right).$

解

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x} \right)^2}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sin\alpha\cos x(1 - \cos\alpha\cos x) - \sin\alpha\cos\alpha\sin^2 x}{(1 - \cos\alpha\cos x)^2} \\
&= \frac{1 - \cos\alpha\cos x}{\sqrt{(\cos x - \cos\alpha)^2}} \cdot \frac{\sin\alpha \cdot (\cos x - \cos\alpha)}{(1 - \cos\alpha\cos x)^2} \\
&= \frac{\sin\alpha \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \cos\alpha)}{1 - \cos\alpha\cos x}
\end{aligned}$$

($\cos x \neq \cos\alpha$, 即 $x \neq \alpha + 2k\pi, k$ 为整数).

$$954. y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}} \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{3} \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2}} + \sqrt{3} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{x^2+2}{x^2}} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} - \sqrt{x^2+2}}{x^2} \\
&= \frac{1}{(x^4-1)\sqrt{x^2+2}} \quad (0 < |x| < 1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
955. y &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2x^2}{1+x^4}}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+x^4} - \frac{2\sqrt{2}x^4}{\sqrt{1+x^4}}}{1+x^4} \\
& - \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}} \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} \right. \right. \\
& \left. \left. - \sqrt{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}} \right. \\
& \left. \left(\frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}} + \sqrt{2} \right) \right\} \\
& = \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4} \quad (|x| \neq 1).
\end{aligned}$$

$$956. \quad y = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y' &= \frac{1}{(1+x^2)^2} \left\{ \left(\sqrt{1-x^2} \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) (1+x^2) - 2x^2 \sqrt{1-x^2} \right\} \\
& + \frac{3}{\sqrt{2} \left(1 + \frac{2x^2}{1-x^2} \right)} \\
& \cdot \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{\sqrt{2}x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} \\
& = \frac{4}{(x^2+1)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

$$957^+ . y = \operatorname{arc} \cos(\sin x^2 - \cos x^2).$$

$$(|x| < 1).$$

$$960. y = \operatorname{arc\,tg} e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{e^x}{1 + e^{2x}} - \frac{1}{2} \left(2 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} + 1} \right) \\ &= \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1}. \end{aligned}$$

$$961. y = x + x^x + x^{x^x} (x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^{x^x}(x^x \ln x)' \\ &= 1 + x^x(1 + \ln x) + x^x \cdot x^{x^x} \left(\frac{1}{x} + \ln x + \ln^2 x \right). \end{aligned}$$

$$962. y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x} (a > 0, x > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= x^{x^a} \left(ax^{a-1} \ln x + \frac{x^a}{x} \right) \\ &\quad + x^{a^x} \left(a^x \ln a \cdot \ln x + \frac{a^x}{x} \right) \\ &\quad + a^{x^x} \cdot \ln a \cdot x^x (1 + \ln x) \\ &= x^{a-1} x^{x^a} (1 + a \ln x) + a^x x^{a^x} \left(\frac{1}{x} + \ln a \ln x \right) \\ &\quad + x^x \cdot a^{x^x} \ln a (1 + \ln x). \end{aligned}$$

$$963. y = \sqrt[x]{x} \quad (x > 0).$$

$$\text{解 } y' = \left(e^{\frac{1}{x} \ln x} \right)' = x^{\frac{1}{x}-2} (1 - \ln x).$$

$$964. y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= (\sin x)^{\cos x} \left[-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right] \\ &\quad + (\cos x)^{\sin x} \left[\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right] \\ &= (\sin x)^{\cos x + 1} [\operatorname{ctg}^2 x - \ln(\sin x)] \\ &\quad - (\cos x)^{\sin x + 1} [\operatorname{tg}^2 x - \ln(\cos x)] \\ &\quad \left(0 < x - 2k\pi < \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right). \end{aligned}$$

$$965^{+*}. y = (\ln x)^x : x^{\ln x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{e^{x \ln(\ln x)}}{e^{\ln^2 x}} = e^{x \ln(\ln x) - \ln^2 x}. \\ y' &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \{ [x \ln(\ln x)]' - (\ln^2 x)' \} \\ &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}} \left\{ \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} - \frac{2 \ln x}{x} \right\} \\ &= \frac{(\ln x)^{x-1}}{x^{\ln x + 1}} \{ x \ln x \cdot \ln(\ln x) + x - 2 \ln^2 x \}. \end{aligned}$$

$$966. y = \lg_x e.$$

$$\text{解 由 } y = \lg_x e \quad \text{推得 } y = \frac{1}{\ln x}.$$

于是,

$$y' = -\frac{1}{x \ln^2 x} = -\frac{1}{x} (\lg_x e)^2 (x > 0, x \neq 1).$$

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致,以后不再说明,中译本基本是按俄文第二版翻译的,俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正。

$$967. y = \ln(\operatorname{ch}x) + \frac{1}{2\operatorname{ch}^2x}.$$

$$\text{解 } y' = \operatorname{th}x - \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^3x} = \operatorname{th}^3x.$$

$$968. y = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}^2x} - \ln\left(\operatorname{cth}\frac{x}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{\operatorname{sh}^3x - 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}^2x}{\operatorname{sh}^4x} + \frac{1}{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2} \cdot \operatorname{cth}\frac{x}{2}} \\ &= -\frac{2}{\operatorname{sh}^3x} (x > 0). \end{aligned}$$

$$969. y = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{th}x).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{1 + \operatorname{th}^2x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2x} = \frac{1}{\operatorname{ch}2x}.$$

$$970. y = \operatorname{arc} \cos\left(\frac{1}{\operatorname{ch}x}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2x}}} \left(-\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{sh}x)}{\operatorname{ch}x} \quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 971. y &= \frac{b}{a}x + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{th}\frac{x}{2}\right) \\ &\quad (0 \leq |b| < a). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= \frac{b}{a} + \frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a-b}{a+b} \operatorname{th}^2\frac{x}{2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \cdot \frac{1}{2\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a(b + a\operatorname{ch}x)} = \frac{a + b\operatorname{ch}x}{b + a\operatorname{ch}x}. \end{aligned}$$

972. 引入中间变量 $u = \cos^2 x$ 求函数

$$y = \ln(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x})$$

的导函数.

解 $u = \cos^2 x, y = \ln(u + \sqrt{1 + u^2}),$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x,$$

而

$$y'_u = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^4 x}},$$

$$u'_x = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$$

于是,

$$y'_x = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{1 + \cos^4 x}}.$$

利用 972 题所示的方法, 求下列函数的导函数:

973⁺. $y = (\arccos x)^2 [\ln^2(\arccos x) - \ln(\arccos x) + \frac{1}{2}]$.

解 设 $u = \arccos x$, 则 $y = u^2 \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right)$.

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= 2u \left(\ln^2 u - \ln u + \frac{1}{2} \right) + u^2 \left(\frac{2 \ln u}{u} - \frac{1}{u} \right) \\ &= 2u \ln^2 u = 2 \arccos x \cdot \ln^2(\arccos x), \end{aligned}$$

$$u'_x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

于是,

$$\begin{aligned} y'_x &= y'_u \cdot u'_x = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arccos x \\ &\quad \cdot \ln^2(\arccos x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$974^+. y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt[3]{1+x^4}) + \frac{1}{4} \ln \frac{\sqrt[3]{1+x^4} + 1}{\sqrt[3]{1+x^4} - 1}.$$

解 设 $u = \sqrt[3]{1+x^4}$, 则

$$y = \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tgu} + \frac{1}{4} \ln \frac{u+1}{u-1}.$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{1}{2(1+u^2)} + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) \\ &= \frac{1}{1-u^4} = -\frac{1}{x^4}, \end{aligned}$$

$$u'_x = \frac{x^3}{\sqrt[3]{(1+x^4)^3}},$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = -\frac{1}{x \sqrt[3]{(1+x^4)^3}} \quad (x \neq 0).$$

$$975. y = \frac{e^{-x^2} \operatorname{arc} \sin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}} + \frac{1}{2} \ln(1-e^{-2x^2}).$$

解 设 $u = e^{-x^2}$, 则

$$y = \frac{u \operatorname{arc} \sin u}{\sqrt{1-u^2}} + \frac{1}{2} \ln(1-u^2).$$

由于

$$y'_u = \frac{\left(\operatorname{arc} \sin u + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right) \sqrt{1-u^2} + \frac{u^2 \operatorname{arc} \sin u}{\sqrt{1-u^2}}}{1-u^2}$$

$$= \frac{u}{1-u^2}$$

$$= \frac{\operatorname{arc} \sin u}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\operatorname{arc} \sin(e^{-x^2})}{(1-e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}},$$

$$u'_x = -2xe^{-x^2},$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{-2xe^{-x^2} \arcsin(e^{-x^2})}{(1 - e^{-2x^2})^{\frac{3}{2}}}$$

$(x \neq 0).$

976. $y = \frac{a^x}{1 + a^{2x}} - \frac{1 - a^{2x}}{1 + a^{2x}} \arcsin(a^{-x}).$

解 设 $u = a^x$, 则

$$y = \frac{u}{1 + u^2} - \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \arcsin(u^{-1}).$$

由于

$$\begin{aligned} y'_u &= \frac{(1 + u^2) - 2u^2}{(1 + u^2)^2} \\ &\quad - \frac{-2u(1 + u^2) - 2u(1 - u^2)}{(1 + u^2)^2} \arcsin(u^{-1}) \\ &\quad - \frac{1 - u^2}{1 + u^2} \cdot \frac{1}{u^2 \left(1 + \frac{1}{u^2}\right)} \\ &= \frac{4u \arcsin(u^{-1})}{(1 + u^2)^2} = \frac{4a^x \cdot \arcsin(a^{-x})}{(1 + a^{2x})^2}, \end{aligned}$$

$$u'_x = a^x \ln a,$$

于是,

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{4a^{2x} \ln a}{(1 + a^{2x})^2} \arcsin(a^{-x})$$

$(a > 0).$

977. 求函数的导函数并作函数及导函数的图形, 设:

(a) $y = |x|$; (b) $y = x|x|$; (c) $y = \ln|x|$.

解 (a) $y = \begin{cases} x, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时.} \end{cases}$ (图 2.2).

$$y' = \begin{cases} 1, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \text{或写成 } y' = \frac{|x|}{x}.$$

在 $x = 0$ 时 y' 不存在(图 2.3).

$$(6) y = \begin{cases} x^2, & \text{当 } x \geq 0 \text{ 时,} \\ -x^2, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad (\text{图 2.4}).$$

$$y' = \begin{cases} 2x, & \text{当 } x > 0 \text{ 时,} \\ -2x, & \text{当 } x < 0 \text{ 时,} \end{cases} \quad \text{而且易见有 } y'|_{x=0} = 0,$$

故 $y' = 2|x|$ (图 2.5).

*) 以下各题,对于分界点的导数,不再单独讨论.

$$(8) y = \ln|x| \quad (\text{图 2.6}).$$

$$y' = \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \quad (\text{图 2.7}).$$

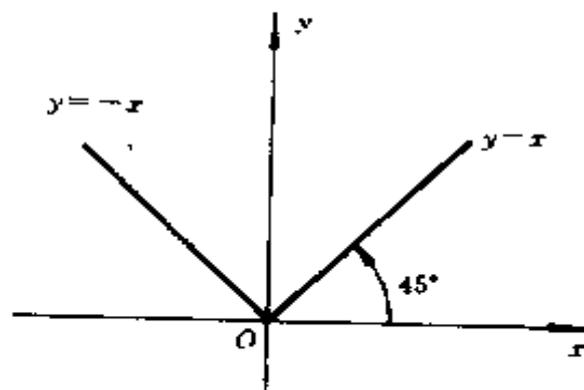


图 2.2

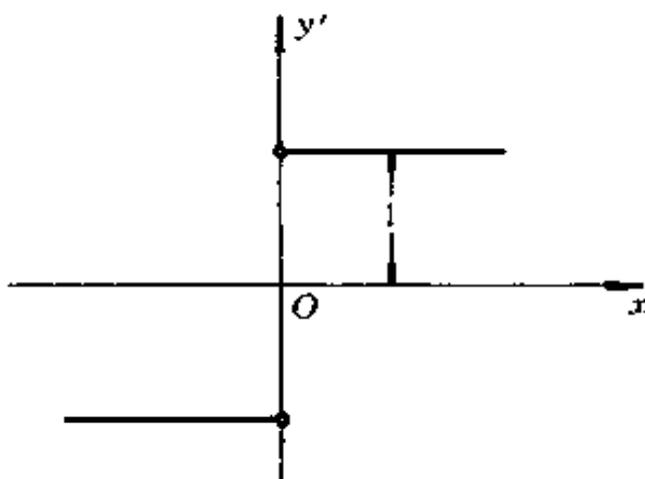


图 2.3

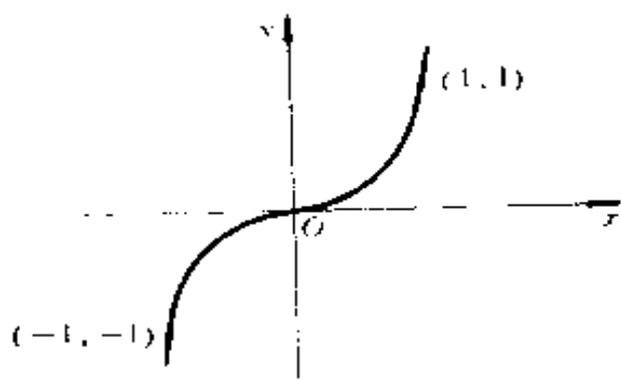


图 2.4

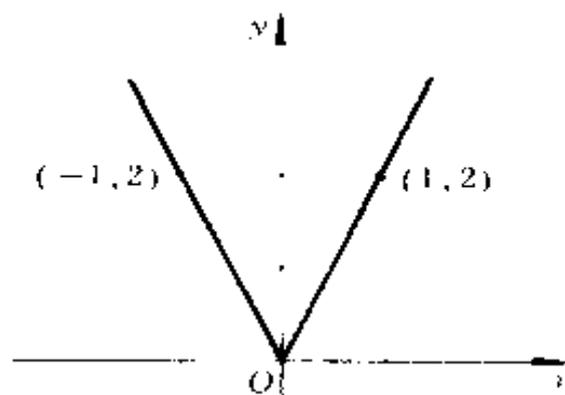


图 2.5

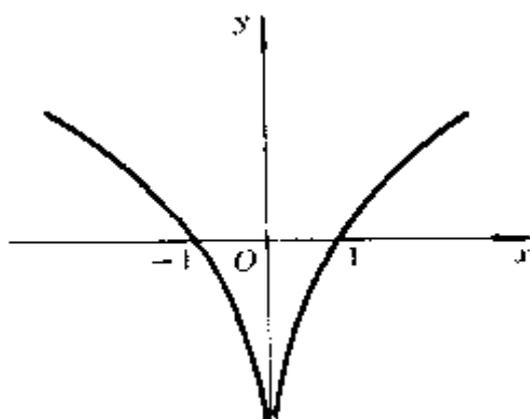


图 2.6

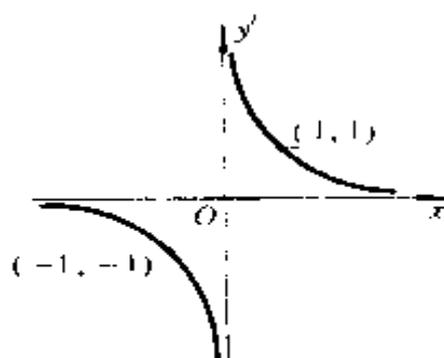


图 2.7

978. 求下列函数的导函数:

(a) $y = |(x - 1)^2(x + 1)^3|$; (6) $y = |\sin^3 x|$;

(b) $y = \arccos \frac{1}{|x|}$; (r) $y = [x] \sin^2 \pi x$.

解 (a) $y' = \frac{|(x-1)^2(x+1)|}{(x-1)^2(x+1)^3} [2(x-1)(x+1)^3 + 3(x-1)^2(x+1)^2]$
 $= (x-1)(x+1)^2(5x-1)\operatorname{sgn}(x+1)$
 $(|x| \neq 1);$

(b) $y' = \frac{|\sin^3 x|}{\sin^3 x} 3\sin^2 x \cos x$
 $= \frac{3}{2} \sin 2x |\sin x| \quad (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$

(c) $y' = \left[-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \right] \cdot \left(-\left(\frac{|x|}{x \cdot x^2} \right) \right)$
 $= \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$

(d) 对于 $y = [x]$ 有 $y' = 0$
 $(x \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$

于是, 当 $x \neq k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 有

$$\{[x] \sin^2 \pi x\}' = 2\pi \sin \pi x \cos \pi x \cdot [x]$$

$$= \pi [x] \sin 2\pi x.$$

容易直接验证当 $x = k (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时上式也成立.

求导函数并作出函数及其导函数的图形:

$$979. y = \begin{cases} 1-x & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ (1-x)(2-x) & \text{当 } 1 \leq x \leq 2; \quad (\text{图 2.8}) \\ -(2-x) & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

解 显然 $y' = \begin{cases} -1 & \text{当 } -\infty < x < 1; \\ 2x-3 & \text{当 } 1 < x < 2; \\ 1 & \text{当 } 2 < x < +\infty. \end{cases}$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 2(x-a)(x-b)(2x-a-b), & \text{当 } x \in [a, b]; \\ 0, & \text{当 } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

(图 2.11)

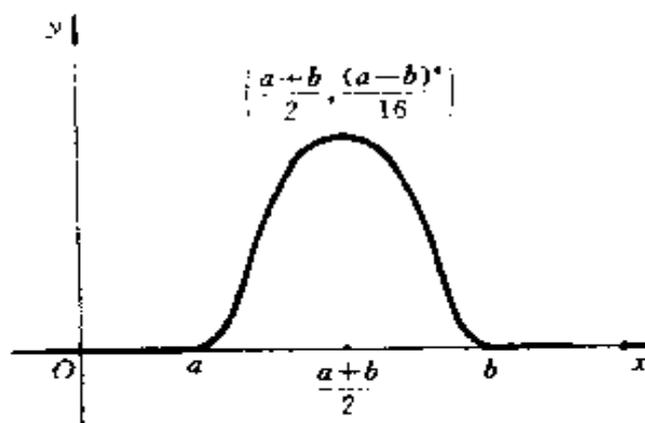


图 2.10

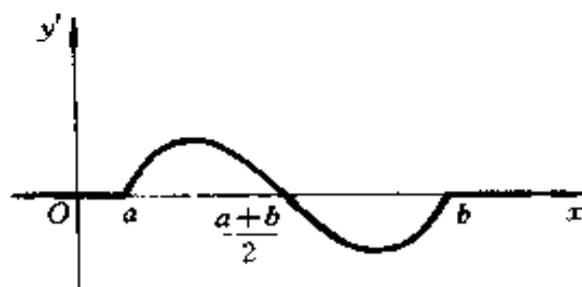


图 2.11

$$981. y = \begin{cases} x & \text{当 } x < 0; \\ \ln(1+x) & \text{当 } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.12})$$

$$\text{解 } y' = \begin{cases} 1 & \text{当 } x < 0; \\ \frac{1}{1+x} & \text{当 } x \geq 0. \end{cases} \quad (\text{图 2.13})$$

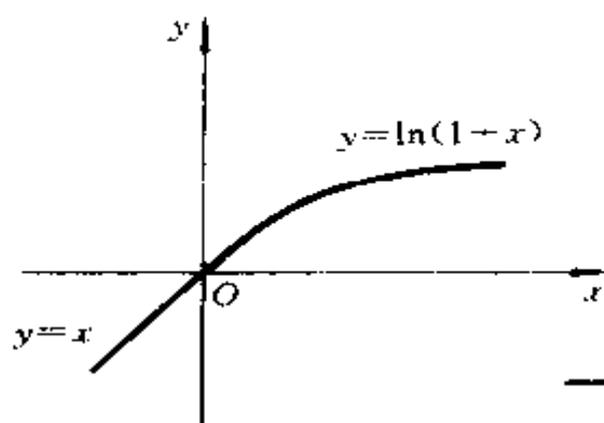


图 2.12

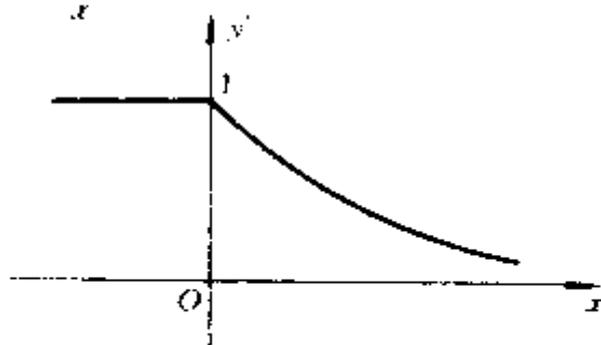


图 2.13

$$982. y = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 2.14})$$

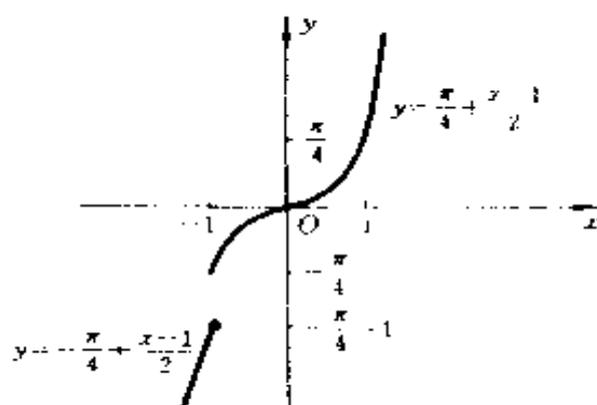


图 2.14

解 $y = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2} & \text{当 } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$ (图 2.15)

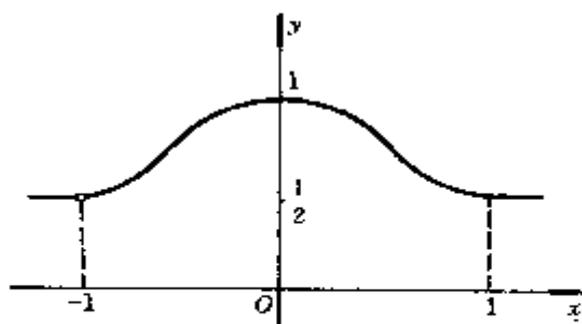


图 2.15

983. $y = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{当 } |x| \leq 1; \\ \frac{1}{e} & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$ (图 2.16)

解 $y = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2) & \text{当 } |x| \leq 1; \\ 0 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$ (图 2.17)

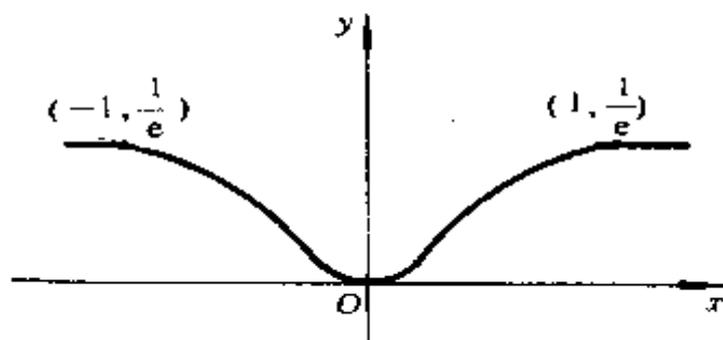


图 2.16

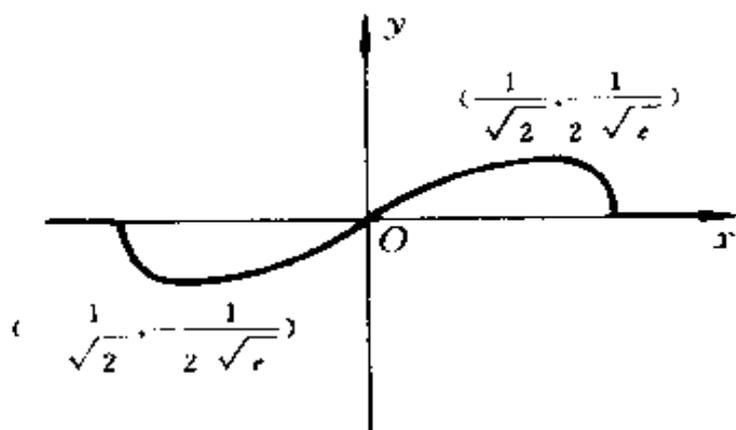


图 2.17

984. 由已知函数的对数得来的导函数称为此函数的对数的导函数:

$$\frac{d}{dx} \ln f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

已知函数 y , 求其对数的导函数:

(a) $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; (b) $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

(c) $y = (x - a_1)^{\alpha_1} (x - a_2)^{\alpha_2} \cdots (x - a_n)^{\alpha_n}$;

(d) $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$.

解 (a) 由 $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ 得

$$\ln y = \ln |x| + \frac{1}{2} \ln |1-x| - \frac{1}{2} \ln |1+x|,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln y &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1-x)} - \frac{1}{2(1+x)} \\ &= \frac{1-x-x^2}{x(1-x^2)} \quad (0 < |x| < 1); \end{aligned}$$

(6) 由 $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$ 得

$$\ln y = 2\ln|x| - \ln|1-x| + \frac{1}{3}\ln|3-x|$$

$$- \frac{2}{3}\ln|3+x|,$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{3(3-x)} - \frac{2}{3(3+x)}$$

$$= \frac{54 - 36x + 4x^2 + 2x^3}{3x(1-x)(9-x^2)}$$

($x \neq 0, x \neq 1, |x| \neq 3$);

(6) 由于 $y = \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i}$ 及 y 在对数符号内, 故应设

$\prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} > 0$, 从而有

$$\ln y = \ln \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln|x - a_i|,$$

得

$$\frac{d}{dx}\ln y = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x - a_i} \quad (x \in R),$$

其中 $R = \left\{ x \mid \prod_{i=1}^n (x - a_i)^{\alpha_i} > 0 \right\}$;

(7) 由 $y = (x + \sqrt{1+x^2})^n$ 得

$$\ln y = n \ln(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{n}{\sqrt{1+x^2}}.$$

985. 设 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 为 x 的可微分函数. 求函数 y 的导函数,

若:

$$(a) y = \sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}; (b) y = \arctg \frac{\varphi(x)}{\psi(x)};$$

$$(n) y = \sqrt[n]{\psi(x)} \quad [\varphi(x) \neq 0, \psi(x) > 0];$$

$$(r) y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x) \quad [\varphi(x) > 0, \psi(x) > 0].$$

解 (a) $y' = \frac{\varphi(x)\varphi'(x) + \psi(x)\psi'(x)}{\sqrt{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}}$
($\varphi^2(x) + \psi^2(x) \neq 0$).

$$(b) y' = \frac{1}{1 + \frac{\varphi^2(x)}{\psi^2(x)}} \cdot \frac{\psi'(x)\psi(x) - \psi^2(x)\varphi'(x)}{\psi^2(x)}$$
$$= \frac{\psi'(x)\psi(x) - \varphi'(x)\varphi(x)}{\varphi^2(x) + \psi^2(x)}$$

($\psi(x) \neq 0$).

(n) 由 $y = \sqrt[n]{\psi(x)}$ 得

$$\ln y = \frac{1}{n} \ln \psi(x).$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \varphi(x) - \varphi'(x) \ln \psi(x)}{\varphi^2(x)}$$

于是,

$$y' = \sqrt[n]{\psi(x)} \left\{ \frac{1}{\varphi(x)} \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)} \ln \psi(x) \right\}.$$

(r) 由 $y = \lg_{\varphi(x)} \psi(x)$ 得

$$y = \frac{\ln \psi(x)}{\ln \varphi(x)},$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \frac{\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \ln \varphi(x) - \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)} \ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)} \\
 &= \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \cdot \frac{1}{\ln \varphi(x)} \\
 &\quad - \frac{\psi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{\ln \psi(x)}{\ln^2 \varphi(x)}.
 \end{aligned}$$

986. 求 y' , 设:

(a) $y = f(x^2)$; (b) $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$;

(c) $y = f(e^x) \cdot e^{f(x)}$; (r) $y = f\{f[f(x)]\}$,

其中 $f(u)$ 表示可微分的函数.

解 (a) $y' = 2x f'(x^2)$;

$$\begin{aligned}
 (b) y' &= 2 \sin x \cos x f'(\sin^2 x) \\
 &\quad - 2 \sin x \cos x f'(\cos^2 x) \\
 &= \sin 2x [f'(\sin^2 x) - f'(\cos^2 x)];
 \end{aligned}$$

(c) $y' = e^{f(x)} [f'(x) f(e^x) + e^x f'(e^x)]$;

(r) $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)] \cdot f'\{f[f(x)]\}$.

987. 证明 n 阶行列式微分法:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \frac{d}{dx} f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}. \quad (1)$$

证 证法一：从行列式的定义出发予以证明。

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \cdots & f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \frac{d}{dx} [f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \cdot f_{nj_n}(x)] \\ &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} \sum_{i=1}^n f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} f_{1j_1}(x) f_{2j_2}(x) \cdots \\ & \quad \frac{d}{dx} f_{ij_i}(x) \cdots f_{nj_n}(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} \begin{vmatrix} f_{1j_1}(x) & f_{1j_2}(x) & \cdots & f_{1j_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{1j_1}(x) & \frac{d}{dx} f_{1j_2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{1j_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{nj_1}(x) & f_{nj_2}(x) & \cdots & f_{nj_n}(x) \end{vmatrix}.$$

*) 其中 $N(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 表示排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数.

$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对 $1, 2, \dots, n$ 的所有排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和.

证法二: 利用数学归纳法予以证明.

由于

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\ &= \frac{d}{dx} [f_{11}(x)f_{22}(x) - f_{12}(x)f_{21}(x)] \\ &= \left[\frac{d}{dx} f_{11}(x) \cdot f_{22}(x) - \frac{d}{dx} f_{12}(x) \cdot f_{21}(x) \right] \\ & \quad + \left[\frac{d}{dx} f_{22}(x) \cdot f_{11}(x) - \frac{d}{dx} f_{21}(x) \cdot f_{12}(x) \right] \\ &= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} f_{11}(x) & \frac{d}{dx} f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} \\ & \quad + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ \frac{d}{dx} f_{21}(x) & \frac{d}{dx} f_{22}(x) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

知等式(1) 对于 $n = 2$ 时成立.

今假定等式(1) 对于 $n = k$ 时成立, 即

$$= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \frac{d}{dx}$$

$$\left[\begin{array}{c} f_{1j}(x) \cdots f_{1j-1}(x) f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ f_{k+1j}(x) f_{i1}(x) \cdots f_{ij-1}(x) f_{ij+1}(x) \cdots f_{ik+1}(x) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{k+j+1} \cdot$$

$$\left[\begin{array}{c} f_{11}(x) \cdots f_{1j-1}(x) f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{k+1j}(x) f_{i1}(x) \cdots f_{ij-1}(x) f_{ij+1}(x) \cdots f_{ik+1}(x) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right]$$

$$+ f_{k+1j}(x) \cdot \frac{d}{dx}$$

$$\left[\begin{array}{c} f_{11}(x) \cdots f_{1j-1}(x) f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ f_{i1}(x) \cdots f_{ij-1}(x) f_{ij+1}(x) \cdots f_{ik+1}(x) \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{ccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x) \end{array} \right] + \\
&+ \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} f_{k+1j}(x) \cdot \sum_{i=1}^k \left[\begin{array}{cccc} f_{11}(x) \cdots f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) \cdots \frac{d}{dx}f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx}f_{ij+1}(x) \cdots \frac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx}f_{k+11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{k+1k+1}(x) \end{array} \right] + \\
&+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{k-j+1} f_{k+1j}(x) \\
&\cdot \left[\begin{array}{cccc} f_{11}(x) \cdots f_{1j-1}(x) & f_{1j+1}(x) \cdots f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) \cdots \frac{d}{dx}f_{ij-1}(x) & \frac{d}{dx}f_{ij+1}(x) \cdots \frac{d}{dx}f_{ik+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k1}(x) \cdots f_{kj-1}(x) & f_{kj+1}(x) \cdots f_{kk+1}(x) \end{array} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d}{dx} f_{k-11}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{k-1k+1}(x) \end{vmatrix} + \\
&+ \sum_{i=1}^k \begin{vmatrix} \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{i(k+1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k+11}(x) & \cdots & f_{k+1k+1}(x) \\ f_{11}(x) & \cdots & f_{1k+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx} f_{i1}(x) & \cdots & \frac{d}{dx} f_{i(k+1)}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{k-11}(x) & \cdots & f_{k-1k+1}(x) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

故等式(1)对于 $n = k + 1$ 时也成立.

于是,由数学归纳法知,等式(1)对于一切自然数 n 均成立.

988. 设:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

解 用上题结果,有

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \\
 &\quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix} + \\
 &\quad \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= (x^2 + x + 9) + (x^2 - 1 + 4) + (x^3 - x + 3) \\
 &= 3(x^2 + 5).
 \end{aligned}$$

989. 设:

$$F(x) = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix},$$

求 $F'(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } F'(x) &= \begin{vmatrix} 1 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 0 & 2 & 6x \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} + \\
 &\quad \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \\
 &= 0 + 0 + 6(2x^2 - x^2) = 6x^2.
 \end{aligned}$$

990. 已知函数的图形, 近似地作出其导函数的图形.

解 先由给定曲线 $y = f(x)$ 上一点 M , 作出曲线 $y' = f'(x)$ 上的对应点 M' . 为清楚起见, 作两个坐标系 Oxy 及 $O'x'y'$, 取相同的单位, x 轴与 x' 轴平行, y 轴及 y' 轴平行且在一条直线上(如图 2.18).

在 Oxy 系内画出曲线 $y = f(x)$, 在曲线上任取一点 $M(x, f(x))$, 并作曲线在点 M 处的切线 MN . 过 $O'x'y'$ 系内的点 $P(-1, 0)$ 作平行 MN 的直线 PQ 交 y' 轴于点 Q , 于是

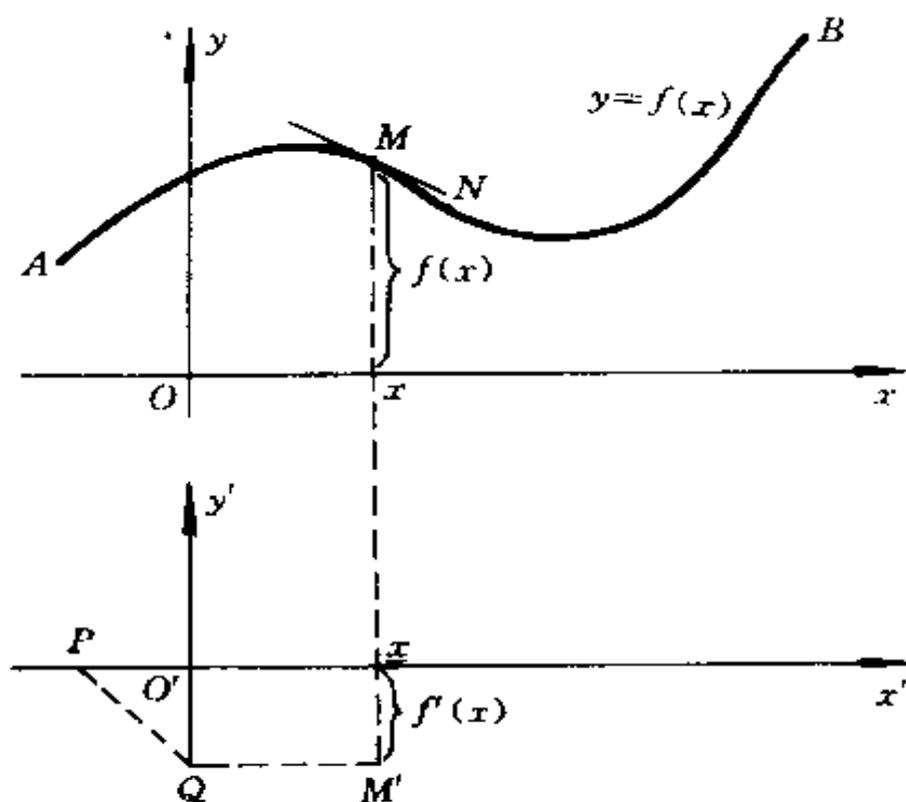


图 2.18

$$O'Q = \operatorname{tg} \alpha = f'(x),$$

即线段 $O'Q$ 是对应于在点 x 的导函数 $f'(x)$. 再过点 Q 引平行 x 轴的直线, 交过点 $(x, 0)$ 且垂直于 x 轴的直线于点 M' , 则点 M' 就是曲线 $y' = f'(x)$ 上对应于曲线 $y = f(x)$ 上点 M 的点.

由此, 我们就可由已给曲线 $y = f(x)$ 作出曲线 $y' = f'(x)$, 按上述方法, 在曲线 $y = f(x)$ 上取若干点:

$$M_i(x_i, f(x_i)) (i = 1, 2, \dots, n),$$

且在 Oxy' 系 (相当于 $O'x'y'$ 系, 这是为了方便起见, 分开画) 内作出对应点:

$$M'_i(x_i, f'(x_i)) (i = 1, 2, \dots, n).$$

最后用光滑曲线连接 M'_1, M'_2, \dots, M'_n 各点, 此即已给曲线 $y = f(x)$ 对应的导函数 $y' = f'(x)$ 的图形, 如图 2.19 所示.

991. 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{当 } x \neq 0; \\ 0 & \text{当 } x = 0. \end{cases}$$

有不连续的导函数.

证 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

而

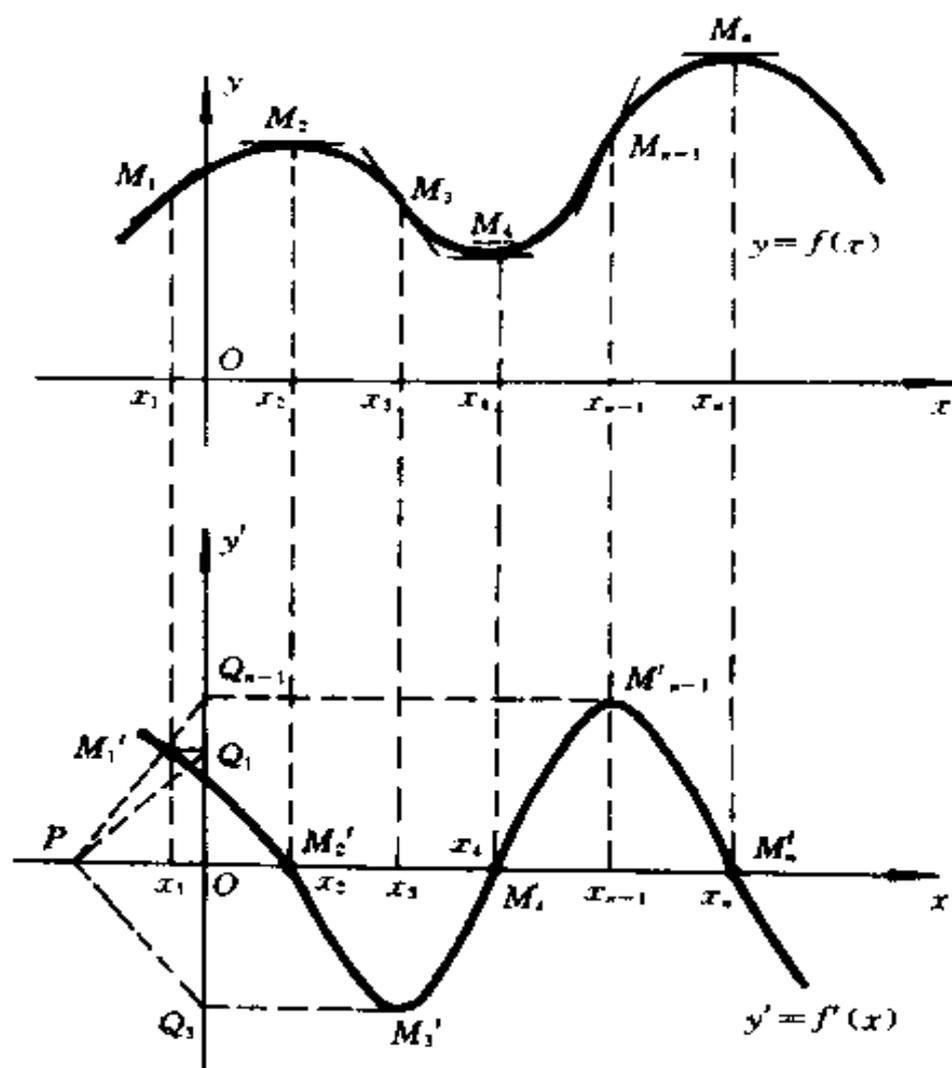


图 2.19

$$\begin{aligned}
 f'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

故 $f'(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 中处处存在. 但当 $x \rightarrow 0$ 时, $f'(x)$ 并不趋向于任何极限, 所以 $f'(x)$ 在点 $x = 0$ 处是间断的, 这就说明了 $f(x)$ 有不连续的导函数.

992. 在甚么条件下函数

$$f(x) = x^n \sin \frac{1}{x} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

(a) 在 $x = 0$ 处是连续的; (b) 在 $x = 0$ 处可微分;

(B) 在 $x = 0$ 处其导函数是连续的?

解 (a) 当 $n > 0$ 时

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^n \sin \frac{1}{x} = 0,$$

于是, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, 此时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的

(当 $n = \frac{p}{q}$ (p, q 互质) 且 q 为偶数时, 只考虑在 $x = 0$ 处右连续).

(b) 当 $n > 1$ 时

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x)^{n-1} \sin \frac{1}{\Delta x} = 0, \end{aligned}$$

于是, $f'(0) = 0$, 即 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是可微的;

(B) 当 $n > 2$ 时, 由于

$$f(x) = nx^{n-1} \sin \frac{1}{x} - x^{n-2} \cos \frac{1}{x} \quad (x \neq 0),$$

故

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

而由 (b) 可得 $f'(0) = 0$, 所以 $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = f'(0)$. 这就说

明当 $n > 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是连续的.

993. 在甚么条件下函数

$$f(x) = |x|^n \sin \frac{1}{|x|^m} \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

$$(m > 0)$$

有 (a) 于坐标原点的邻域上有有界的导函数;

(6) 在此域上有无界的导函数.

解 (a) 当 $x \neq 0, x \in (-\delta, \delta) (\delta > 0)$ 时,

$$\begin{aligned} f(x) &= n|x|^{n-1} \frac{|x|}{x} \sin \frac{1}{|x|^m} \\ &= \frac{m}{|x|^{m+1}} \cdot \frac{|x|}{x} \cdot |x|^n \cdot \cos \frac{1}{|x|^m} \\ &= \frac{|x|}{x} \left[n|x|^{n-1} \sin \frac{1}{|x|^m} \right. \\ &\quad \left. - m|x|^{n-(m+1)} \cos \frac{1}{|x|^m} \right]. \end{aligned}$$

由于 $\frac{|x|}{x}, \sin \frac{1}{|x|^m}, \cos \frac{1}{|x|^m}$ 均为有界函数, 于是当 $n \geq m+1$ 时, $f'(x)$ 为有界函数 (易知此时 $f'(0) = 0$).

(6) 在此域上, 当 $n - (m+1) < 0$ (即 $n < m+1$) 时 $f'(x)$ 无界. 另一方面, 同 992 题(6) 一样, 当 $n > 1$ 时 $f'(0)$ 才存在, 因而所求的条件为

$$1 < n < m+1 \quad (m > 0).$$

994. 设:

$$f(x) = (x-a)\varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处是连续的, 求 $f'(a)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \varphi(a+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x), \end{aligned}$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续, 故 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(a+\Delta x) = \varphi(a)$. 于

$$y - f(x) = \sum_{k=1}^n |x - a_k|,$$

它在 a_1, a_2, \dots, a_n 点均连续, 而在这些点均无导数.

997. 证明: 函数

$$f(x) = x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| \quad (x \neq 0) \text{ 及 } f(0) = 0$$

在点 $x = 0$ 的任何邻域上有不可微分的点, 但在 $x = 0$ 这点是可微分的.

作出此函数的略图.

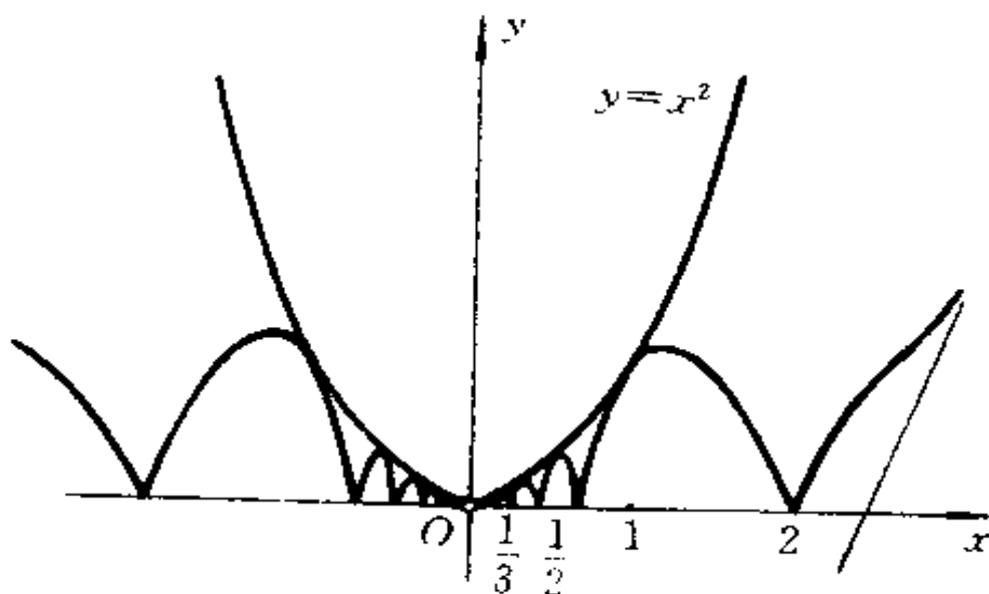


图 2.20

证 对于函数 $f(x)$, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{x} = 0,$$

故 $f'(0) = 0$, 即在 $x = 0$ 处函数 $f(x)$ 是可微的.

下面我们将指出对于 $x = 0$ 的任何邻域 $(-\delta, \delta)$ (其

中 $\delta > 0$) 中, 函数 $f(x)$ 总有不可微分的点. 事实上, 令

$$x_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

则当 n 充分大时, 总可使 $0 < x_n < \delta$, 从而点 $x_n \in (-\delta, \delta)$. 对于这样的点 x_n , 有

$$f'_+(x_{2n}) = \pi \quad \text{及} \quad f'_-(x_{2n}) = -\pi.$$

所以

$$f'_-(x_{2n}) \neq f'_+(x_{2n}).$$

同法可得

$$f'_-(x_{2n+1}) \neq f'_+(x_{2n+1}).$$

于是, 函数 $f(x)$ 在点 x_n 处不可微.

函数的图形全在 Ox 轴上方, 包括原点; 当 $x = \frac{2}{2n+1}$ 时, $f(x) = 0$, 且 $f'(x)$ 不存在. 此函数的略图如图 2.20 所示.

998. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

仅在 $x = 0$ 时有导数.

证
$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \begin{cases} \Delta x, & \text{当 } \Delta x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } \Delta x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

于是, 有

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = 0.$$

即

$$f'(0) = 0.$$

其次,对于任一点 $x \neq 0$,分两种情形讨论函数的可微性:

(1) x 为有理数. 取一无理数叙列 $\{x_n\}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$,

则有

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{x_n \rightarrow x} \frac{0 - x^2}{x_n - x} = \infty.$$

由此可知,函数 $f(x)$ 在任一有理点 ($\neq 0$) 不可微.

(2) x 为无理数. 取一异于零的有理数叙列 $\{x_n'\}$, 使 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n' = x$, 则有

$$\lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{f(x_n') - f(x)}{x_n' - x} = \lim_{x_n' \rightarrow x} \frac{x_n'^2}{x_n' - x} = \infty.$$

由此可知,函数 $f(x)$ 在任一无理点也不可微.

综上所述,函数 $f(x)$ 仅在 $x = 0$ 时有导数.

999. 研究下列函数的可微性:

(a) $y = |(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|;$

(b) $y = |\cos x|;$

(c) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x;$

(d) $y = \arcsin(\cos x);$

$$(e) y = \begin{cases} \frac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{当 } |x| \leq 1; \\ |x| - 1 & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$$

解 (a) 当 $x \neq 1$ 或 $x \neq 2$ 或 $x \neq 3$ 时,函数均可微. 现在我们来考察在 1, 2, 3 这三点的可微性.

1. 当 $x = 1$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} |(\Delta x - 1)^2(\Delta x - 2)^3|,$$

故 $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8, \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -8.$

因此 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 不存在, 由此可知 y 在 $x = 1$ 点不可微;

2. 当 $x = 2$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 1)(\Delta x - 1)^3|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而 y 在 $x = 2$ 点可微;

3. 当 $x = 3$ 时, 由于

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \Delta x |(\Delta x + 2)(\Delta x + 1)^2 \Delta x|,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

因而 y 在 $x = 3$ 点可微.

(6) $y = |\cos x|$ 在 $x = \frac{2k-1}{2}\pi$ (k 为整数) 点不可微分.

(B) $y = |\pi^2 - x^2| \sin^2 x$ 只可能在 $x = \pm \pi$ 的点不可微分.

现在我们来考察在 $x = -\pi$ 及 $x = \pi$ 时函数 y 的可微性.

1. 当 $x = \pi$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\pi^2 - (\pi + \Delta x)^2| \sin^2(\pi + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \frac{\sin \Delta x \sin \Delta x |2\pi \Delta x + (\Delta x)^2|}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0,$$

所以函数 y 在 $x = \pi$ 点可微.

2. 同理可证函数 y 在 $x = -\pi$ 点也可微.

于是, 函数 $y = (\pi^2 - x^2) \sin^2 x$ 处处可微分.

(r) $y = \arcsin(\cos x)$ 在 $|\cos x| = 1$ 的点不可微分, 即在 $x = k\pi$ (k 为整数) 的点不可微分.

(a) 函数 y 对于 $|x| \neq 1$ 的点均可微. 现在我们来考虑函数 y 在 $|x| = 1$ 点的可微性.

1. 当 $x = 1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \frac{1}{4}(\Delta x + 2)^2, & \text{当 } \Delta x < 0; \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0; \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1,$$

所以 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, 即函数 y 在 $x = 1$ 点可微.

2. 当 $x = -1$ 时,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\begin{cases} \frac{|-1+\Delta x|-1}{\Delta x} = -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时,} \\ \frac{(-2+\Delta x)(\Delta x)^2}{4} = -\frac{1}{2}\Delta x + \frac{1}{4}(\Delta x)^2, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

于是,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1 \text{ 及 } \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0.$$

所以函数 y 在 $x = -1$ 点不可微分.

求函数 $f(x)$ 左侧和右侧的导函数 $f'_-(x)$ 和 $f'_+(x)$.

设:

1000. $f(x) = |x|.$

解 当 $x \neq 0$ 时, 易见

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{|x|}{x} = \operatorname{sgn} x.$$

当 $x = 0$ 时,

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \begin{cases} -1, & \text{当 } \Delta x < 0 \text{ 时;} \\ 1, & \text{当 } \Delta x > 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

所以,

$$f'_+(0) = 1, f'_-(0) = -1.$$

1001. $f(x) = [x] \sin \pi x.$

解 当 $x \neq$ 整数时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \pi [x] \cos \pi x;$$

当 x 为整数时, 从定义出发得

$$\begin{aligned} f'_+(k) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{[k + \Delta x] \sin \pi(k + \Delta x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{k \cos k \pi \sin(\pi \Delta x)}{\Delta x} \\ &= k \pi (-1)^k, \end{aligned}$$

同法可得 $f'_-(k) = \pi(k-1)(-1)^k.$

1002. $f(x) = x \left\lfloor \cos \frac{\pi}{x} \right\rfloor (x \neq 0), f(0) = 0.$

解 当 $x \neq \frac{2}{2k+1}$ (k 为整数) 时 (即使 $\cos \frac{\pi}{x} \neq 0$ 的 x 值),

$$\begin{aligned} f'_-(x) &= f'_+(x) \\ &= \left| \cos \frac{\pi}{x} \right| + \frac{\pi}{x} \frac{\left| \cos \frac{\pi}{x} \right|}{\cos \frac{\pi}{x}} \sin \frac{\pi}{x} \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{x} + \frac{\pi}{x} \sin \frac{\pi}{x} \right) \operatorname{sgn} \left(\cos \frac{\pi}{x} \right); \end{aligned}$$

当 $x = \frac{2}{2k+1}$ 时, 从定义出发易得

$$\begin{aligned} f'_-\left(\frac{2}{2k+1}\right) &= -\frac{2k+1}{2}\pi, \\ f'_+\left(\frac{2}{2k+1}\right) &= \frac{2k+1}{2}\pi \quad (k \text{ 为整数}). \end{aligned}$$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}$.

解 当 $\sqrt{2k\pi} < |x| < \sqrt{(2k+1)\pi}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) 时,

$$f'_+(x) = f'_-(x) = \frac{x \cos x^2}{\sqrt{\sin x^2}}$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= 1; \\ f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{\sin(\Delta x)^2}{\Delta x^2}} \right] = -1. \end{aligned}$$

当 $x = \sqrt{2k\pi} (k = 1, 2, \dots)$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} f'_+(\sqrt{2k\pi}) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\sin(\sqrt{2k\pi} + \Delta x)^2}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sin[2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2]}{2\Delta x \sqrt{2k\pi} + (\Delta x)^2}} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{2\sqrt{2k\pi}}{\Delta x} + 1} \\ &= +\infty; \end{aligned}$$

同理, 可得

$$f'_-(\sqrt{2k\pi}) = -\infty (k = 1, 2, \dots);$$

$$f'_\mp(\sqrt{(2k+1)\pi}) = \mp\infty (k = 1, 2, \dots).$$

1004. $f(x) = \frac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ ($x \neq 0$), $f(0) = 0$.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}}{(1 + e^{\frac{1}{x}})^2};$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{\Delta x}}} = 0. \end{aligned}$$

1005. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}$.

解 当 $x \neq 0$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}};$$

当 $x = 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - e^{-(\Delta x)^2}}}{\Delta x} \\ &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \sqrt{\frac{1 - e^{-(\Delta x)^2}}{(\Delta x)^2}} = -1 \end{aligned}$$

同理可求得 $f'_+(0) = 1$.

1006. $f(x) = |\ln|x|| (x \neq 0)$.

解 当 $|x| \neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(x) = f'_+(x) &= \frac{|\ln|x||}{\ln|x|} \cdot \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|}{x} \\ &= \frac{1}{x} \frac{|\ln|x||}{\ln|x|}, \end{aligned}$$

分两种情况:

1° 当 $0 < |x| < 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = -\frac{1}{x};$$

2° 当 $|x| > 1$ 时,

$$f'_-(x) = f'_+(x) = \frac{1}{x};$$

当 $|x| = 1$ 时,

$$f'_-(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{1 + (1 + \Delta x)^2} \\ & \cdot \frac{1}{\Delta x} \\ & = 1. \end{aligned}$$

同理可求得

$$f'_-(-1) = -1, f'_+(1) = -1, f'_+(-1) = 1.$$

1008. $f(x) = (x - 2)\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x - 2} (x \neq 2), f(2) = 0.$

解 当 $x \neq 2$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= f'_+(x) \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x - 2} \\ &\quad + \frac{x - 2}{1 + \left(\frac{1}{x - 2}\right)^2} \left[-\frac{1}{(x - 2)^2}\right] \\ &= \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x - 2} - \frac{x - 2}{(x - 2)^2 + 1}; \end{aligned}$$

当 $x = 2$ 时,

$$\begin{aligned} f'_-(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\Delta x} = -\frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

同理可求得 $f'_+(2) = \frac{\pi}{2}.$

1009. 证明: 在 $x \neq 0$ 时函数 $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, 在 $x = 0$ 时 $f(0) = 0$, 在此点连续, 但在此点既无左侧导数, 又无右侧导数.

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = f(0),$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点连续.

其次, 由于

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \sin \frac{1}{\Delta x},$$

不论 Δx 从左、右侧趋向于零, 此极限均不存在, 因此在点 $x = 0$, 函数 $f(x)$ 既无左侧导数, 也无右侧导数.

1010. 设:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

为了使函数 $f(x)$ 于点 $x = x_0$ 处连续而且可微分, 应当如何选取系数 a 和 b ?

解 $f(x_0) = x_0^2 = f(x_0 - 0), f(x_0 + 0) = ax_0 + b$.
当

$$x_0^2 = ax_0 + b$$

时, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 又因 $f'_-(x_0) = 2x_0, f'_+(x_0) = a$, 故当

$$a = 2x_0$$

时, 函数在点 x_0 处可微. 从而得

$$x_0^2 = 2x_0^2 + b,$$

即 $b = -x_0^2$.

于是, 所求的系数为

$$a = 2x_0, b = -x_0^2.$$

1011. 设:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0; \\ ax + b, & \text{若 } x > x_0. \end{cases}$$

其中函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 为左方可微分的. 应当选择如何的系数 a 和 b , 使函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续而且可微分?

解 $F(x_0) = F(x_0 - 0) = f(x_0)$,

$$F(x_0 + 0) = ax_0 + b. \text{ 当}$$

$$f(x_0) = ax_0 + b$$

时, 函数 $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 又因 $F'_-(x_0) = f'_-(x_0)$, $F'_+(x_0) = a$, 故当

$$a = f'_-(x_0)$$

时, 函数 $F(x)$ 在点 x_0 处可微分.

解方程组

$$\begin{cases} a = f'_-(x_0), \\ f(x_0) = ax_0 + b, \end{cases}$$

即得所求的系数为

$$a = f'_-(x_0), b = f(x_0) - x_0 f'_-(x_0).$$

1012. 适当地选定参数 A 与 c 用立方抛物线

$$y = A(x - a)(x - b)x - c$$

在区域 $a \leq x \leq b$ 上把两个半直线:

$$y = k_1(x - a) \quad (-\infty < x < a)$$

及

$$y = k_2(x - b) \quad (b < x < +\infty)$$

光滑地连接起来.

解 对于立方抛物线,

$$y' = A[(x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)],$$

此即曲线上在任一点切线的斜率.

当接点处两条曲线的切线重合时,它们就平滑地联接起来,此时应有相等的斜率.于是,有

1°. 在点 $x = a$ 处,

$$A(a-b)(a-c) = k_1; \quad (1)$$

2°. 在点 $x = b$ 处,

$$A(b-a)(b-c) = k_2. \quad (2)$$

联立(1)和(2)式,解之得

$$A = \frac{k_1 + k_2}{(b-a)^2}, c = \frac{ak_2 + bk_1}{k_1 + k_2}.$$

1013. 用抛物线 $y = a + bx^2$ ($|x| \leq c$) (其中 a 与 b 为未知的参数) 去补充曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ ($|x| > c$) 的部分,使所得的为一平滑曲线.

解 显见 $c > 0$, 否则在点 $x = c$ 处就不可能形成一平滑曲线. 此时,在点 $x = c$ 处两曲线的切线斜率相等,且有相同的纵坐标. 于是,有

$$(a + bx^2)' \Big|_{x=c} = \left(\frac{m^2}{|x|} \right)' \Big|_{x=c}$$

及

$$a + bc^2 = \frac{m^2}{c}.$$

从而得

$$\begin{cases} 2bc = -\frac{m^2}{c^2}, \\ a + bc^2 = \frac{m^2}{c}. \end{cases}$$

解之,得

$$a = \frac{3m^2}{2c}, b = -\frac{m^2}{2c^3}.$$

由曲线的对称性可知,在点 $x = -c$ 处,按上述系数 a 与 b 所确定的曲线 $y = a + bx^2$ 与曲线 $y = \frac{m^2}{|x|}$ 也联成一平滑曲线.

1014. 若:(a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数,而函数 $g(x)$ 在这点没有导数;(b) 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者在点 x_0 都没有导数,可否断定它们的和

$$F(x) = f(x) + g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (a) 能. 因为

$$\frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x)}{\Delta x},$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$, 上式右端第一项的极限存在,而第二项的极限不存在. 因而当 $\Delta x \rightarrow 0$, 左端的极限也不存在(否则差 $\frac{\Delta g(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$ 的极限就存在,与 $g(x)$ 不可导相矛盾),这说明 $F(x)$ 在点 x_0 没有导数.

(b) 不能. 例如,

$$f(x) = \frac{x + |x|}{2}, g(x) = \frac{x - |x|}{2},$$

它们在点 $x = 0$ 处都没有导数,但它们的和 $F(x) =$

$f(x) + g(x) = x$ 在点 $x = 0$ 处有导数且为 1.

1015. 若: (a) 函数 $f(x)$ 在点 x_0 有导数, 而函数 $g(x)$ 在此点没有导数; (b) 在点 x_0 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 二者都没有导数, 可否断定他们的积

$$F(x) = f(x)g(x)$$

在点 $x = x_0$ 没有导数?

解 (a) 不能. 例如,

$f(x) = x$, 在 $x = 0$ 处有导数,

$g(x) = |x|$, 在点 $x = 0$ 没有导数,

而它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = x|x|$$

在点 $x = 0$ 处有导数. 事实上,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x |\Delta x| - 0 \cdot |0|}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} |\Delta x| = 0,\end{aligned}$$

即有 $F'(0) = 0$.

(b) 不能. 例如,

$$f(x) = |x|, g(x) = |x|,$$

在点 $x = 0$ 它们都没有导数, 但它们的积

$$F(x) = f(x)g(x) = (|x|)^2 = x^2,$$

在点 $x = 0$ 处有导数, 且 $F'(0) = 2x|_{x=0} = 0$.

1016. 若: (a) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数; (b) 函数 $f(x)$ 于点 $x = g(x_0)$ 没有导数, 而函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 有导数; (c) 函数 $f(x)$

于点 $x = g(x_0)$ 没有导数及函数 $g(x)$ 于点 $x = x_0$ 没有导数, 则函数

$$F(x) = f[g(x)]$$

于已知点 $x = x_0$ 的可微性怎样?

解 (a) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在. 例如, 考察函数 $f(x)$ 、 $g(x)$ 及点 x_0 如下:

1° $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0) = 0$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = (|x|)^2 = x^2$, $F'(0) = 0$. 这是 $F'(x_0)$ 存在的一例.

2° $f(x) = x$, $g(x) = |x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0) = 1$, $g'(0)$ 不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$,
 $F'(0)$ 不存在. 这是 $F'(x_0)$ 不存在的一例.

(b) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在. 例如,

1° $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
 $f'(0)$ 不存在, $g'(0)$ 存在, 且等于零; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x^2| = x^2$, $F'(0)$ 存在, 且等于零.

2° $f(x) = |x|$, $g(x) = x$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$.
而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$, $F'(0)$ 不存在.

(b) $F'(x_0)$ 可能存在, 也可能不存在, 例如,

1° $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$, 点 $x = 0$, $g(0) = 0$. 则 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 易知 $F(x) = f[g(x)] = 2\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right) + \left|\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|\right| \equiv x$.
因此 $F'(0)$ 存在且等于 1.

$2^\circ f(x) = |x|, g(x) = |x|$, 点 $x = 0, g(0) = 0$.
 $f'(0)$ 及 $g'(0)$ 均不存在; 而 $F(x) = f[g(x)] = |x|$,
 $F'(0)$ 也不存在.

1017. 在函数

$$y = x + \sqrt[3]{\sin x}$$

的图形上哪些点处有垂直切线? 作出这图形.

解 $y' = 1 + \frac{\cos x}{3 \sqrt[3]{\sin^2 x}} (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots)$.

当 $x = k\pi$ 时, 容易直接算出

$$\begin{aligned} y' |_{x=k\pi} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k\pi + \Delta x + \sqrt[3]{\sin(k\pi + \Delta x)} - k\pi}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \sqrt[3]{\frac{(-1)^k \cdot \sin \Delta x}{(\Delta x)^2} \cdot \Delta x} \right) \\ &= \infty, \end{aligned}$$

故当 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时有垂直切线.

当 $x = k\pi$ 时,

$$y = k\pi;$$

当 $x = \frac{2k+1}{2}\pi$ 时,

$$y = x \pm 1,$$

其图形如图 2.21 所示.

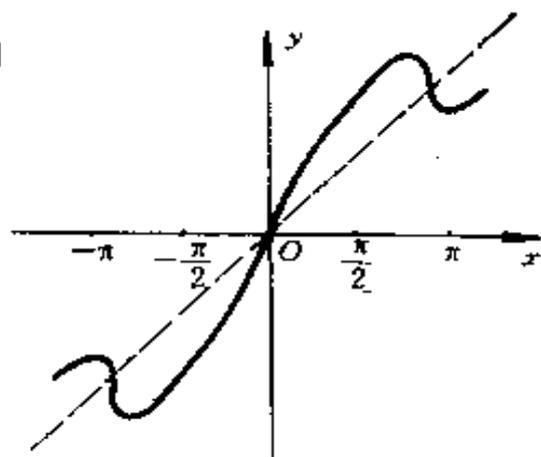


图 2.21

1018. 函数 $f(x)$ 在其不连续点

可否有: (a) 有穷的导数; (b) 无穷的导数?

解 (a) 不能, 否则由此可推出其连续性.

(b) 能, 例如,

$$y = f(x) = \operatorname{sgn} x$$

它在 $x = 0$ 点不连续, 但

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \frac{1}{|\Delta x|} \rightarrow +\infty (\Delta x \rightarrow 0).$$

1019. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty,$$

则是否必有

$$(1) \lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty; \quad (2) \overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = +\infty?$$

解 (1) 一般地说, 不能保证 $\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty$. 例如, 对

于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内定义的函数

$$f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x},$$

显然有 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \infty$. 但是, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}$,

对于特殊的一串数 $x_n = \frac{1}{2k\pi + \frac{\pi}{2}}$ ($k = 1, 2, \dots$) 有

$f'(x_n) = 0$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} f'(x_n) = 0$, 因而 $\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = \infty$ 不成立.

(2) 必有 $\overline{\lim}_{x \rightarrow a+0} |f'(x)| = \infty$.

由于 $f(x)$ 在 (a, b) 连续, 且 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$, 故 $f(x)$ 在

$f(x_2) > M_1$, 即点 $P_2 = (x_2, f(x_2))$ 位于 l 线之上方.

另一方面, 由在 $x = B_0$ 点 $f(x)$ 的可微性, 在 $x = B_0$ 右侧邻域内, 对于任给 $\epsilon_1 > 0$ (取 $\epsilon_1 < \frac{K}{2}$), 存在 δ , 使当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\left| f'(B_0) - \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| < \epsilon_1 < \frac{K}{2}.$$

于是, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - B_0} \right| \\ & \leq |f'(B_0)| + \left| \frac{f(x) - f(B_0)}{x - x_0} - f'(B) \right| \\ & < K + \epsilon_1 < K + \frac{K}{2} = \frac{3}{2}K. \end{aligned}$$

即有在 r 曲线 $y = f(x)$ 上: 当 $0 < |x - B_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(B_0)| < \frac{3}{2}K|x - B_0|, \quad (4)$$

今取 $x_1 > B_0$ 使 $x_1 < x_2, x_1 < B_0 + \delta$.

于是, 由(3)式和(4)式知

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(B_0) & < \frac{3}{2}K(x_1 - B_0) \\ & < 2K(x_1 - B_0) = Y(x_1) - f(B_0), \end{aligned}$$

故

$$f(x_1) < Y(x_1),$$

即点 $(x_1, f(x_1))$ 位于直线 l 之下方.

考虑连续函数

$$G(x) = f(x) - Y(x),$$

我们取

$$c = \inf_{x \in (x_1, x_2)} \{x | G(x) > 0\},$$

则由 $G(x_1) < 0, G(x_2) > 0$, 易见 c 是存在的, 而且 $G(c) = 0$. 它也就是连续函数 $G(x)$ 的一个中间值点.

考虑 $x_2 \geq x > c$, 则有 $G(x) > 0$, 即在 c 点附近且 $x > c$ 时, 有

$$f(x) > Y(x).$$

从而

$$f(x) - f(c) > Y(x) - f(c) = Y(x) - Y(c).$$

注意 $x - c > 0$, 故又有 (当 $x > c$, 且在 c 附近时):

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > \frac{Y(x) - Y(c)}{x - c}.$$

上式两边取极限 (让 $x \rightarrow c + 0$), 并注意到函数的可微性, 有 $f'(c + 0) = f'(c)$, 于是有

$$f'(c) \geq Y'(c) = 2K.$$

此处 $c \in (x_1, x_2) \subset [B_0, B)$, 这个不等式与 $|f'(x)| \leq K$ 式相抵触. 因此 $f'(x)$ 当 $x \in [B_0, B)$ 时是无界的. 这就完成了 (2) 的证明, 从而命题得证.

注. 若利用以后的拉格朗日定理, 则可很简单地证明此结论.

1020. 若函数 $f(x)$ 于有限的区间 (a, b) 上可微分且

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f'(x) = \infty,$$

是否必有

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty?$$

解 不一定. 例如:

$$f(x) = \sqrt[3]{x},$$

它在 $(0, b)$ ($b > 0$) 上可微分, 且 $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$,

$$\lim_{x \rightarrow +0} f'(x) = +\infty,$$

然而

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) - \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt[3]{x} = 0.$$

1021. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在. 由此能否推出 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在?

解 不能. 例如, 函数

$$f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x},$$

它在 $(0, +\infty)$ 上可微分, $f'(x) = 2\cos(x^2) - \frac{\sin(x^2)}{x^2}$,

且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

然而 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 不存在.

1022. 设有界函数 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上可微分且有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ 存在. 由此可否推出有穷的或无穷的 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在?

解 不能. 例如,

$$f(x) = \cos(\ln x),$$

它由 $(0, +\infty)$ 上有界且可微分, 其导数为

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x},$$

同时有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0.$$

然而 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 不存在.

1023. 对不等式可否逐项微分?

解 一般地说不行. 例如, 在 $(-\infty, 0)$ 上有

$$2x \leq x^2 + 1,$$

但在此区间上不能对此不等式逐项微分, 因为在 $(-\infty, 0)$ 上不等式

$$2 \leq 2x$$

不成立.

1024. 导出表示和式

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$$

及

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$$

的公式.

解 设 $\bar{P}_n = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$, (1)

$$\bar{Q}_n = 1 \cdot x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n. \quad (2)$$

则 $(\bar{P}_n)' = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = P_n$,

$$(\bar{Q}_n)' = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} = Q_n.$$

另一方面, 由(1)式得

$$\bar{P}_n = \frac{x(1-x^n)}{1-x}.$$

由于 $(\bar{P}_n)' = P_n$, 即

$$\left[\frac{x(1-x^n)}{1-x} \right]' = P_n,$$

于是, 得

$$P_n = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

由(2)式得

$$\bar{Q}_n = x(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) = xP_n.$$

由于 $(\bar{Q}_n)' = Q_n$, 所以

$$(xP_n)' = Q_n,$$

即

$$P_n + xP_n' = Q_n. \quad (3)$$

而

$$P_n' = \left[\frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2} \right]' = \frac{[-n(n+1)x^{n-1} + n(n+1)x^n](1-x)^2 + 2(1-x)[1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}]}{(1-x)^4}$$

将 P_n 及 P_n' 代入(3)式, 即得

$$Q_n = \frac{1+x - (n+1)^2x^n + (2n^2+2n-1)x^{n+1} - n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}.$$

1025. 导出表示和式

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$$

及

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \cdots + n\cos nx$$

的公式.

$$\begin{aligned} \text{解 } S_n &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[2\sin \frac{x}{2} \sin x + 2\sin \frac{x}{2} \sin 2x \right. \\ &\quad \left. + \dots + 2\sin \frac{x}{2} \sin nx \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left[\left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{3x}{2} - \cos \frac{5x}{2} \right) + \dots \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{2n-1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\sin \frac{x}{2}} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{2n+1}{2}x \right) \\ &= \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

即

$$S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}.$$

又因

$$\begin{aligned} T_n &= (S_n)' = \\ &= \frac{\left(n \cos \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2}x + (n+1) \cos \frac{n+1}{2}x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\cos \frac{x}{2} \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{n+1}{2} x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
= & \frac{n \left(\sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{nx}{2} + \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2} \right) \sin \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
& - \frac{\sin \frac{nx}{2} \left(\sin \frac{n+1}{2} x \cos \frac{x}{2} - \cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{x}{2} \right)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \\
= & \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}},
\end{aligned}$$

所以,

$$T_n = \frac{n \sin \frac{x}{2} \sin \frac{2n+1}{2} x - \sin^2 \frac{nx}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

1026. 利用恒等式:

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}},$$

推出表示和式:

$$S_n = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}$$

的公式.

解 对等式

$$\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} \quad (1)$$

两端分别求导数,即得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \\
 & -\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cdots\cos\frac{x}{2^n} \\
 & \quad \vdots \\
 & -\cdots-\frac{1}{2^n}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\sin\frac{x}{2^n} \\
 = & \frac{\cos x \sin\frac{x}{2^n}-\frac{1}{2^n}\sin x \cos\frac{x}{2^n}}{2^n \sin^2\frac{x}{2^n}}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

(2) ÷ (1) 得

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}-\cdots-\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} \\
 & = \operatorname{ctg}x-\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n},
 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} \\
 & = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x
 \end{aligned}$$

1027. 求证可微分的偶函数的导函数为奇函数,而可微分的奇函数的导函数为偶函数.

对这个事实加以几何解释.

证 设 $f(x)$ 为偶函数,则 $f(x) = f(-x)$.

两端微分之,得

$$f'(x) = -f'(-x), \text{ 即 } f'(-x) = -f'(x).$$

这就说明 $f'(x)$ 是奇函数.

同理可证:可微分的奇函数的导函数为偶函数.

这个事实说明:凡对称于 Oy 轴的图形,其对称点

的切线也关于 Oy 轴对称；凡关于原点对称的图形，其对称点的切线互相平行。

1028. 求证可微分的周期函数，其导函数仍为具有相同周期的周期函数。

证 设 $f(x)$ 为周期函数，周期为 T ，则

$$f(x+T) = f(x).$$

两端微分之，得

$$f'(x+T) = f'(x),$$

这说明 $f'(x)$ 为具有周期 T 的周期函数。

1029. 若圆半径以 2 厘米 / 每秒的等速度增加，则当圆半径 $R = 10$ 厘米时，圆面积增加的速度如何？

解 设圆面积为 S ，则 $S = \pi R^2$ ，

$$\left. \frac{dS}{dt} \right|_{R=10} = 2\pi R \left. \frac{dR}{dt} \right|_{R=10} = 40\pi (\text{平方厘米 / 每秒}),$$

故当 R 为 10 厘米时，圆面积的增加速度为 40π 平方厘米 / 每秒。

1030. 长方形的一边 $x = 20$ 米，另一边 $y = 15$ 米，若第一边以 1 米 / 秒的速度减少，而第二边以 2 米 / 秒的速度增加，问这长方形的面积和对角线变化的速度如何？

解 面积 $S = xy$ ，对角线 $l = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($x > 0, y > 0$)。对 t 求导数，即得

$$\frac{dS}{dt} = x \frac{dy}{dt} + y \frac{dx}{dt}$$

及

当 $x \in (2, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} 2^2 + \frac{1}{2} (x-2)[2 + (2x-2)] \\ &= x^2 - 2x + 2. \end{aligned}$$

从而有

$$S'(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 2 \text{ 时,} \\ 2x - 2, & \text{当 } 2 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases} \quad (\text{图 2.22})$$

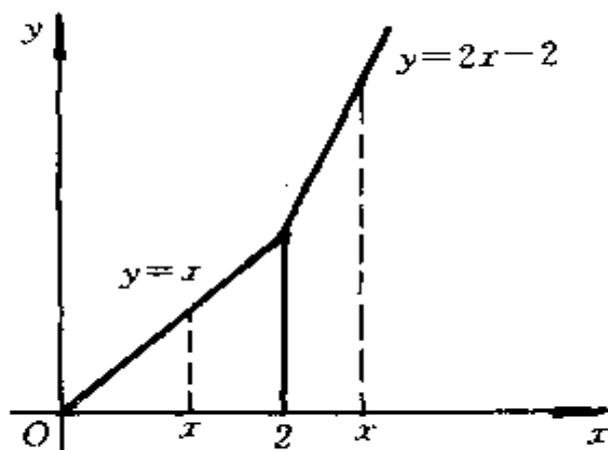


图 2.22

1033. 函数 $S(x)$ 是由圆弧 $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 、轴 Ox 及通过点 O 和 $x (|x| \leq a)$ 而垂直于轴 Ox 的两条直线四者围成的面积. 作出函数 $S(x)$ 的解析表达式, 求出导函数 $S'(x)$, 并作其导函数 $y = S'(x)$ 的图形.

解 $S(x)$ 是由一个直角三角形和一个中心角为 α 的扇形组成, 其中 $\sin \alpha = \frac{|x|}{a}$, 故当 $0 < |x| \leq a$ 时,

$$S(x) = \frac{|x|}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{|x|}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 S'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{|x|}{x} \sqrt{a^2 - x^2} - \frac{|x|}{2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\
 &\quad + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{|x|}{x} \\
 &= \frac{|x| \sqrt{a^2 - x^2}}{x} = \sqrt{a^2 - x^2} \operatorname{sgn} x \quad (0 < |x| \leq a).
 \end{aligned}$$

函数 $y = S(x)$ 的图形如图 2.23 所示. 函数 $y = S'(x)$ 的图形就是以原点为中心, a 为半径的圆周上位于第一及第三象限的弧段, 但不包括 $(0, a)$ 点及 $(0, -a)$ 点, 图形省略.

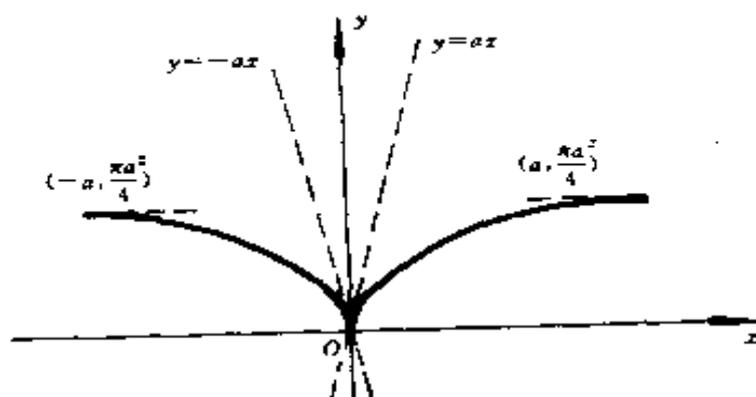


图 2.23

§ 2. 反函数的导函数. 用参变数表示的函数的导函数. 隐函数的导函数

1° 反函数的导函数 若具有导函数 $f'(x) \neq 0$ 的可微分的函数 $y = f(x) (a < x < b)$ 有单值连续的反函数 $x = f^{-1}(y)$, 则此反函数也可

微分,且有公式

$$x'_{y'} = \frac{1}{y'_x}$$

成立.

2° 用参变数表示的函数的导函数 若方程组:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad (\alpha < t < \beta),$$

其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 为可微分的函数,且 $\varphi'(t) \neq 0$, 确定 y 为 x 的单值连续函数:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

则此函数的导函数存在,且可用公式

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

求出.

3° 隐函数的导函数 若可微函数 $y = y(x)$ 满足方程

$$F(x, y) = 0,$$

则此隐函数之导函数 $y' = y'(x)$ 可从以下方程求得:

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

其中 $F(x, y)$ 是当作变量 x 的复合函数.

1034. 证明由方程 $y^3 + 3y = x$ 定义的单值函数 $y = y(x)$ 存在,并求它的导函数 y'_x .

证 对函数 $x = f(y) = y^3 + 3y$ 有

$$f'(y) = 3y^2 + 3 = 3(y^2 + 1) > 0$$

其中 y 为任意实数,故 $f(y)$ 是严格增大的(在 $-\infty < y < +\infty$),因此存在单值的反函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$),且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{3(y^2 + 1)}.$$

1035. 证明由方程 $y - \varepsilon \sin y = x$ ($0 \leq \varepsilon < 1$) 确定的单值函数

$y = y(x)$ 存在, 并求其导函数 y'_x .

证 对于函数 $x = f(y) = y - \varepsilon \sin y$ 有

$$f'(y) = 1 - \varepsilon \cos y > 0 \quad (0 \leq \varepsilon < 1).$$

故 $f(y)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增大的, 从而反函数 $y = y(x)$ 存在且是单值的, 且

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}.$$

1036. 设:

(a) $y = x + \ln x \quad (x > 0)$; (6) $y = x + e^x$;

(b) $y = \operatorname{sh} x$; (r) $y = \operatorname{th} x$.

求它们的反函数 $x = x(y)$ 的存在域, 并求它们的导函数.

解 (a) 由 $y'_x = 1 + \frac{1}{x} > 0 \quad (x > 0)$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'_x} = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x}{x+1}.$$

(6) 由 $y'_x = 1 + e^x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{1 + e^x} = \frac{1}{1 - x + y}.$$

(b) 由 $y'_x = \operatorname{ch} x > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-\infty < y < +\infty$, 而导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}},$$

其中因为 $x = \ln(y + \sqrt{1 + y^2})$, 所以, $e^x + e^{-x} =$

$$2\sqrt{1+y^2}.$$

(r) 由 $y'_x = \frac{1}{(\operatorname{ch}x)^2} > 0$ 知有单值连续反函数 $x = x(y)$, 其存在域为 $-1 < y < 1$. 由于

$$y^2 = \operatorname{th}^2x = \frac{\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^2x} = \frac{\operatorname{ch}^2x - 1}{\operatorname{ch}^2x},$$

而 $\operatorname{ch}^2x = \frac{1}{y'_x} = x'_y$, 于是, 反函数的导函数

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1-y^2}.$$

1037. 设:

$$(a)y = 2x^2 - x^4; \quad (b)y = \frac{x^2}{1+x^2};$$

$$(B)y = 2e^{-x} - e^{-2x}.$$

选出反函数 $x = x(y)$ 的单值连续的各枝, 求它们的导函数并作其图形.

解 (a) $x^4 - 2x^2 + y = 0$.

$$x^2 = 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

单值连续的各枝为

$$x_1 = -\sqrt{1 + \sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1),$$

$$x_2 = -\sqrt{1 - \sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_3 = \sqrt{1 - \sqrt{1-y}} \quad (0 \leq y \leq 1),$$

$$x_4 = \sqrt{1 + \sqrt{1-y}} \quad (-\infty < y \leq 1).$$

由 $y = 2x^2 - x^4$, 微分得

$$1 = 4x \frac{dx}{dy} - 4x^3 \frac{dx}{dy},$$

所以

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{4x - 4x^3}$$

从而有

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{1}{4x(1-x^2)} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{图 2.24}).$$

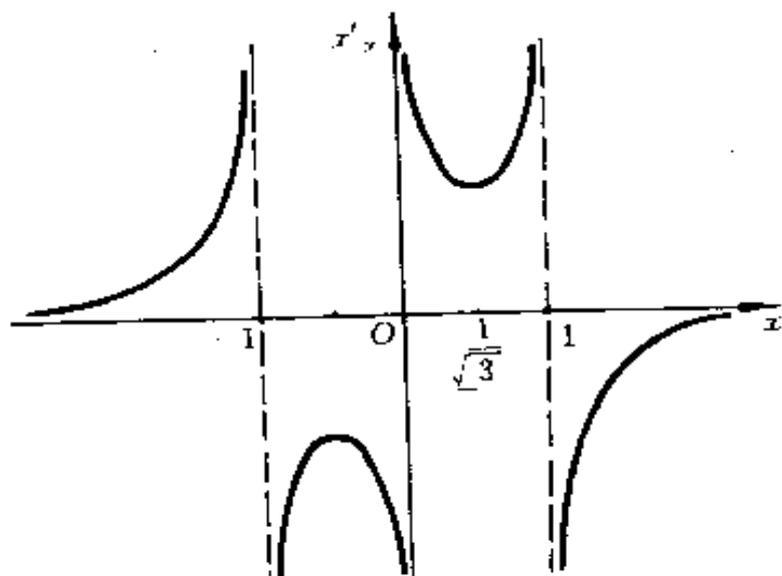


图 2.24

$$(6) \frac{x^2}{1+x^2} = y, \text{ 即 } x^2 = \frac{y}{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$x_1 = -\sqrt{\frac{y}{1-y}}, \quad (0 \leq y < 1),$$

$$x_2 = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$$

$$\text{由 } y' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\text{及 } \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'} \text{ 有}$$

$$\frac{dx_i}{dy} = \frac{(1+x^2)^2}{2x}$$

$$= \frac{x^3}{2y^2}$$

当 $x_i \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{dx_i}{dy} \rightarrow$$

$$(\operatorname{sgn} x_i) \cdot (+\infty)$$

($i = 1, 2$) (图 2.25)

(B) y

$$= 2e^{-x} - e^{-2x},$$

解出 e^{-x} , 得 e^{-x}

$$= 1 \pm \sqrt{1-y}.$$

单值连续各枝为

$$x_1 = -\ln(1 + \sqrt{1-y})$$

($-\infty < y \leq 1$),

$$x_2 = -\ln(1 - \sqrt{1-y})$$

$$= \ln \frac{1 + \sqrt{1-y}}{y}$$

($0 < y \leq 1$).

由 $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$, 对 y 求导数, 得

$$1 = -2e^{-x} \frac{dx}{dy} + 2e^{-2x} \frac{dx}{dy},$$

所以,

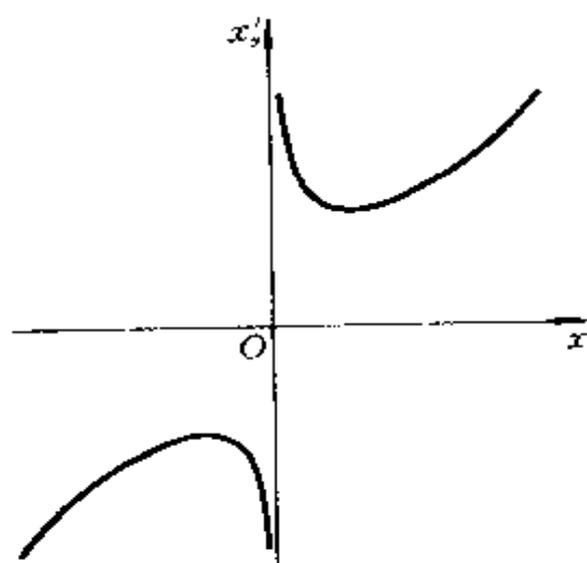


图 2.25

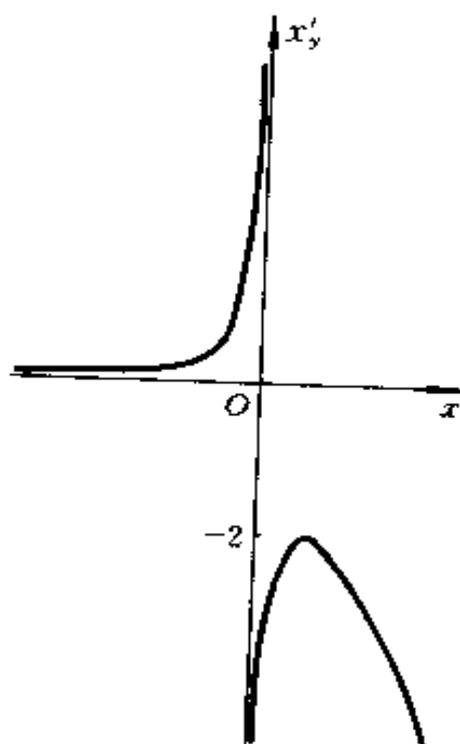


图 2.26

$$\frac{dx_i}{dy} = -\frac{1}{2(e^{-x} - e^{2x})}$$

($i = 1, 2$) (图 2.26).

1038. 作出函数 $y = y(x)$ 的略图, 并求其导函数 y'_x , 设: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. 当 $x = 0$ 及 $x = -1$ 时 $y'_x(x)$ 等于甚么? 在何点 $M(x, y)$ 的导函数 $y'_x(x) = 0$?

解
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3 + 3t^2}{2 - 2t} = -\frac{3}{2}(1 + t).$$

当 $t = -1$, 即 $x = -4, y = 4$ 时, $y'_x(x) = 0$.

当 $x = 0$ 时, $t = 1$, 此时 $y'_x(x) = -3$;

当 $x = -1$ 时, $t = 0$ 或 $t = 2$, 此时 $y'_x(x) = -\frac{3}{2}$

或 $y'_x(x) = -\frac{9}{2}$.

列表:

t	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
y	-16	0	4	2	0	4	20	54

当 $t < -1$ 时, $\frac{dy}{dx} > 0$, 函数值 y 随自变量增加而增加, 曲线上升.

当 $t > -1$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0$, 曲线下降.

图形如图 2.27 所示.

求导函数 y'_x (参数是正数). 设:

$$1039. x = \sqrt[3]{1 - \sqrt{t}},$$

$$y = \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dt}$$

$$= -\frac{1}{6 \sqrt[3]{t^2} \cdot \sqrt{1 - \sqrt[3]{t}}},$$

$$\frac{dx}{dt} =$$

$$-\frac{1}{6 \sqrt{t} \cdot \sqrt[3]{(1 - \sqrt{t})^2}},$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \sqrt[6]{\frac{(1 - \sqrt{t})^4}{t(1 - \sqrt[3]{t})^3}} \quad (t > 0, t \neq 1).$$

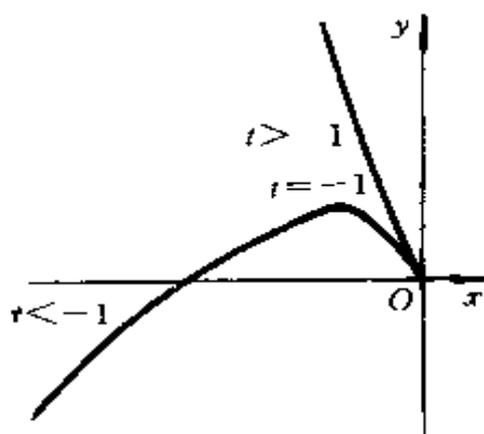


图 2.27

$$1040. x = \sin^2 t, y = \cos^2 t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dt} = -2\cos t \sin t, \frac{dx}{dt} = 2\sin t \cos t,$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2\cos t \sin t}{2\cos t \sin t} = -1 \quad (0 < x < 1).$$

$$1041. x = a \cos t, y = b \sin t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{b \cos t}{-a \sin t} = -\frac{b}{a} \operatorname{ctgt} \quad (0 < |t| < \pi).$$

$$1042. x = a \operatorname{ch} t, y = b \operatorname{sh} t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{b \operatorname{ch} t}{a \operatorname{sh} t} = \frac{b}{a} \operatorname{cth} t \quad (t \neq 0).$$

$$1043. x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t.$$

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \cos^2 t \sin t}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\operatorname{sgnt}}{1+t^2}}{\frac{1}{1+t^2}} = \operatorname{sgnt} \quad (0 < |t| < +\infty).$$

1047. 证明由方程组

$$x = 2t + |t|, y = 5t^2 + 4t|t|,$$

所确定的函数 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分. 但它的导函数不能用普通的公式求得.

证 当 t 由 0 变化到 Δt 时, x 由 0 变化到 $\Delta x = 2\Delta t + |\Delta t|$, y 由 0 变化到 $\Delta y = 5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|$. 于是,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{t=0} &= \frac{5(\Delta t)^2 + 4\Delta t \cdot |\Delta t|}{2\Delta t + |\Delta t|} \\ &= \begin{cases} 3\Delta t, & \Delta t > 0, \\ \Delta t, & \Delta t < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 0 \quad (\Delta t \rightarrow 0).$$

即 $y = y(x)$ 当 $t = 0$ 时可微分. 但由于 $|t|$ 当 $t = 0$ 时不可微, 因而 $\frac{dx}{dt}$ 及 $\frac{dy}{dt}$ 当 $t = 0$ 时不存在. 所以, 导数 $\frac{dy}{dx}$ 当 $t = 0$ 的值不能从普通公式求得.

求下列隐函数的导函数 y'_x :

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$. 当 $x = 2$ 与 $y = 4$ 及当 $x = 2$ 与 $y = 0$ 时, y' 等于甚么?

解 对 x 微分, 得

$$2x + 2xy'_x + 2y - 2yy'_x = 2.$$

于是,

$$y'_x = \frac{1-x-y}{x-y} \quad (x \neq y).$$

$$y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=4}} = \frac{5}{2}, \quad y'_x \Big|_{\substack{x=2 \\ y=0}} = -\frac{1}{2}.$$

1049. $y^2 = 2px$ (抛物线).

解 对 x 微分, 得

$$2yy'_x = 2p.$$

于是,

$$y'_x = \frac{p}{y} \quad (y \neq 0).$$

1050. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (椭圆).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'_x}{b^2} = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\frac{b^2x}{a^2y} \quad (y \neq 0).$$

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (抛物线).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}}y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad (x > 0, y > 0).$$

1052. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 对 x 微分, 得

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}y'_x = 0.$$

于是,

$$y'_x = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad (x \neq 0).$$

1053. $\text{arc tg } \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ (对数螺线).

解 对 x 微分, 得

$$-\frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{xy'_x - y}{x^2} = \frac{x + yy'_x}{x^2 + y^2}.$$

于是,

$$y'_x = \frac{x + y}{x - y} \quad (x \neq y, x \neq 0).$$

1054. 求 y'_x , 设:

(a) $r = a\varphi$ (阿基米得螺线);

(b) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (心脏形线);

(c) $r = ae^{m\varphi}$ (对数螺线),

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $\varphi = \text{arc tg } \frac{y}{x}$ 表极坐标.

解 $x = r \cos\varphi, y = r \sin\varphi$, 其中 $r = r(\varphi)$. 于是,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + r \cos\varphi}{\frac{dr}{d\varphi} \cos\varphi - r \sin\varphi}. \quad (1)$$

(a) $\frac{dr}{d\varphi} = a$, 代入(1)式得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{a \sin\varphi + a \varphi \cos\varphi}{a \cos\varphi - a \varphi \sin\varphi} \\ &= \text{tg}(\varphi + \text{arc tg}\varphi). \end{aligned}$$

(b) $\frac{dr}{d\varphi} = -a \sin\varphi$, 代入(1)式得

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{-a\sin^2\varphi + a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi}{-a\sin\varphi\cos\varphi - a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi} \\
&= \frac{\cos 2\varphi + \cos\varphi}{\sin 2\varphi + \sin\varphi} \\
&= \frac{2\cos\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{3\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}} \\
&= -\operatorname{ctg}\frac{3\varphi}{2} \left(\varphi \neq 0, \varphi \neq \pm\frac{2\pi}{3} \right).
\end{aligned}$$

(B) $\frac{dr}{d\varphi} = mae^{m\varphi}$, 代入(1)式得

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{mae^{m\varphi}\sin\varphi + ae^{m\varphi}\cos\varphi}{mae^{m\varphi}\cos\varphi - ae^{m\varphi}\sin\varphi} \\
&= \frac{m\sin\varphi + \cos\varphi}{m\cos\varphi - \sin\varphi} \\
&= \operatorname{tg}\left(\varphi + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{m}\right).
\end{aligned}$$

§ 3. 导函数的几何意义

1° 切线和法线的方程 可微分的函数 $y = f(x)$ 在其图形上之一点 $M(x, y)$ (图 2.28) 处的切线 MT 和法线 MN 的方程的形式分别是:

$$Y - y = y'(X - x)$$

及

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

其中 X, Y 为切线或法线上的流动坐标, 而 $y' = f'(x)$ 为切点处导函数的值.

2° 切线长和法线长 PT 为次切线, PN 为次法线, MT 为切线, MN 为法线. 设 $\operatorname{tga} = y'$ (图 2.28), 我们得下列的值:

$$PT = \left| \frac{y}{y'} \right|, PN = |yy'|,$$

$$MT = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2},$$

$$MN = |y| \sqrt{1 + y'^2}.$$

3° 切线与切点的向径间的夹角 若 $r = f(\varphi)$ 为曲线的极坐标方程及 β 为切线 MT 与切点 M 的向径 OM 所成的角(图 2.29), 则

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. 写出曲线 $y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$ 上 $A(-1, 0)$ 、 $B(2, 3)$ 、 $C(3, 0)$ 诸点处的切线和法线方程.

解 由于

$$y' = \sqrt[3]{3 - x} - \frac{x + 1}{3 \sqrt[3]{(3 - x)^2}},$$

所以, 在 A 点的切线方程为

$$y - 0 = y'|_{x=-1}(x + 1), \text{ 即 } y = \sqrt[3]{4}(x + 1);$$

法线方程为

$$y - 0 = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}(x + 1),$$

$$\text{即 } y = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}(x + 1).$$

在 B 点的切线方程为

$$y - 3 = y'|_{x=2}(x - 2), \text{ 即 } y = 3;$$

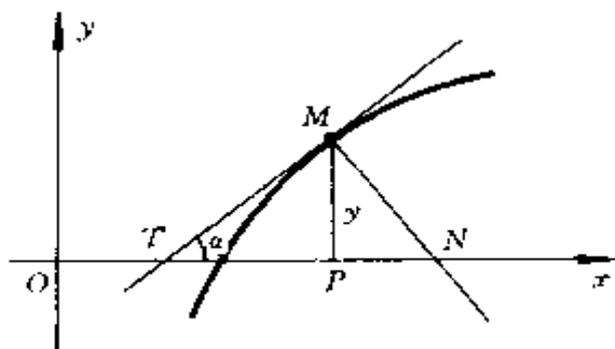


图 2.28

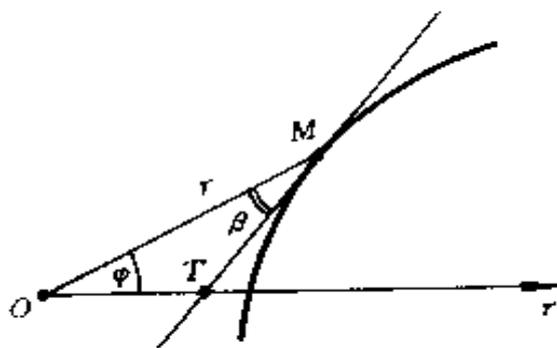


图 2.29

法线方程为

$$x = 2.$$

在 C 点, 由于 y' 为无穷, 故切线方程为

$$x = 3;$$

法线方程为

$$y = 0.$$

1056. 在曲线

$$y = 2 + x - x^2$$

上的哪些点其切线 (a) 平行于 Ox 轴; (b) 平行于第一象限角的平分线?

解 由于

$$y' = 1 - 2x,$$

所以, 有

$$(a) \text{ 令 } y' = 0, \text{ 则 } x = \frac{1}{2}, y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4},$$

故在点 $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ 处其切线平行于 Ox 轴;

(b) 令 $y' = 1$, 则 $x = 0, y = 2$, 故在点 $(0, 2)$ 处其切线平行于第一象限角的平分线.

1057. 证明抛物线

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \quad (a \neq 0, x_1 < x_2)$$

与 Ox 轴相交所成的两角 α 及 β

$\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ 彼此相等.

解 如图 2.30 所示, 显然抛物线与 Ox 轴的交点为 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$. 由于 $y' = 2ax - a(x_1 + x_2)$, 故在点 A, B 处切线的斜率分别为

$$\begin{aligned}
 k_A = y' |_{x=x_1} &= 2ax_1 - a(x_1 + x_2) \\
 &= a(x_1 - x_2) = \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg}(\pi - \beta),
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

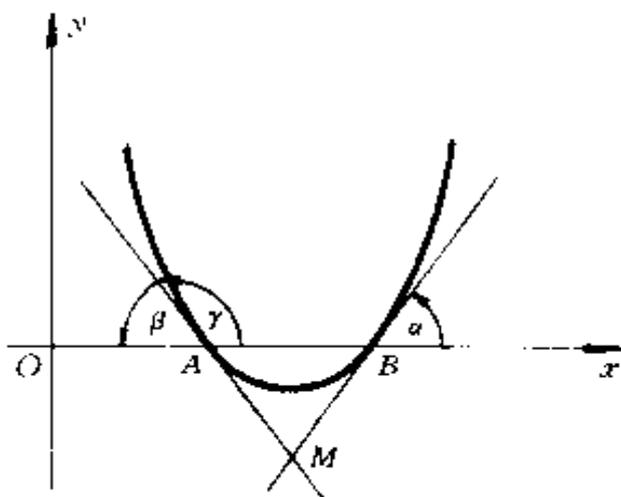


图 2.30

$$\begin{aligned}
 k_B = y' |_{x=x_2} &= 2ax_2 - a(x_1 + x_2) \\
 &= a(x_2 - x_1) = \operatorname{tga}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

由(2)式得

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = a(x_1 - x_2).
 \tag{3}$$

由(1)式及(3)式证得

$$\alpha = \beta.$$

1058. 在曲线

$$y = 2\sin x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

上求出“曲线的坡度”(即是 $|y'|$) 大于 1 的区域.

解 由于 $y' = 2\cos x$, 故要 $|y'| > 1$, 只要

$$|\cos x| > \frac{1}{2},$$

也即

$$|x| < \frac{\pi}{3} \quad \text{及} \quad \frac{2\pi}{3} < |x| \leq \pi,$$

此即所求的区域.

1059. 函数 $y = x$ 及 $y_1 = x + 0.01 \cdot \sin 1000\pi x$ 二者相差不大于 0.01, 则这些函数的导函数的差的最大值为何? 作出对应的图形.

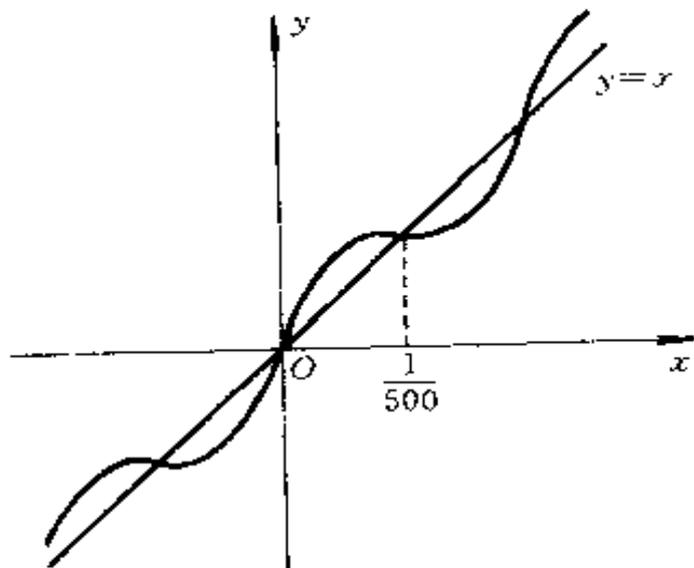


图 2.31

解 导函数差的最大值

$$\max |y' - y_1'| = \max |10\pi \cdot \cos 1000\pi x| = 10\pi \approx 31.4.$$

由此可见, 两函数相差甚微时(图 2.31), 其导函数却可相差很大.

如图 2.32 所示.

1060. 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴相交的角如何?

解 曲线 $y = \ln x$ 与 Ox 轴的交点为 $(1, 0)$, 设曲线与 Ox 轴的相交角为 α , 则

$$\operatorname{tg} \alpha = y' \Big|_{x=1} = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = 1,$$

故交角 α 为 45° .

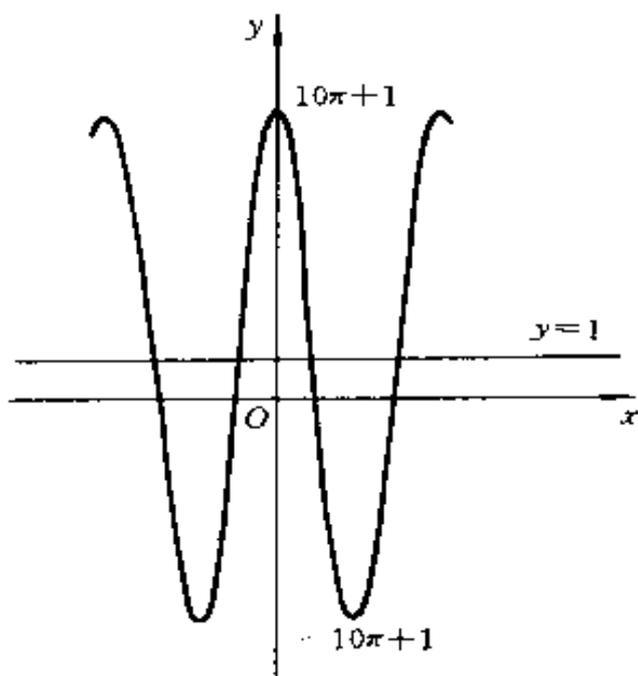


图 2.32

1061. 曲线 $y = x^2$ 及 $x = y^2$ 相交的角如何?

解 两曲线的交点为 $(0,0)$ 及 $(1,1)$. 由于导数为

$$y' = 2x \text{ 及 } y' = \frac{1}{2y},$$

故在 $(0,0)$ 点两曲线的交角显然为 90° .

在 $(1,1)$ 点两切线的斜率分别为

$$k_1 = 2 \text{ 及 } k_2 = \frac{1}{2},$$

故其交角 θ 的正切为

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} = \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{3}{4},$$

于是

$$\theta = \operatorname{arc\,tg} \frac{3}{4} \approx 37^\circ.$$

$\theta > 89^\circ$, 相当于 $\operatorname{tg}\theta > \operatorname{tg}89^\circ = 57.29$, 即

$$n > 57.29.$$

1064. 求出曲线: (a) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ 于点 $x = 0$ 处,

(6) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ 于点 $x = 1$ 处的左切线与右切线间的夹角.

解 (a) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -0} \left[-\sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2} \cdot a^2} \right] \\ &= -|a|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{e^{-a^2x^2} - 1}{-a^2x^2} \cdot a^2} = |a|. \end{aligned}$$

所以, 于点 $x = 0$ 处左、右切线之间的夹角 θ 满足

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{2|a|}{|a|^2 - 1}, \text{ 即 } \theta = 2\arcsin \frac{1}{|a|}.$$

(6) 函数的左、右导数分别为

$$\begin{aligned} y'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arcsin \frac{2x}{1+x^2} - \arcsin 1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\frac{1-x^2}{1+x^2}}{1-x} = 1, \end{aligned}$$

同理, $y', (1) = -1$. 因此, 左、右切线的斜率互为负倒数, 所以, 夹角为 90° .

1065. 证明对数螺线 $r = ae^{m\varphi}$ (a 及 m 为常数) 的切线与切点的向径所成的角度为一常量.

证 设切线与切点的向径所成的角为 β , 由于

$$r = ae^{m\varphi}, r' = ame^{m\varphi},$$

所以 $\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{r'} = \frac{1}{m}$, 它为一常数, 故 β 为一常量.

1066. 求曲线 $y = ax^n$ 的次切线长, 由此给出作这曲线的切线的方法.

解 设在任一点 $M(x, y)$ 的次切线长为 l_T , 如图 2.33 中的 $|PT|$, 则

$$\begin{aligned} l_T &= \left| \frac{y}{\operatorname{tg}\alpha} \right| = \left| \frac{y}{y'} \right| \\ &= \left| \frac{ax^n}{nax^{n-1}} \right| = \left| \frac{x}{n} \right|. \end{aligned}$$

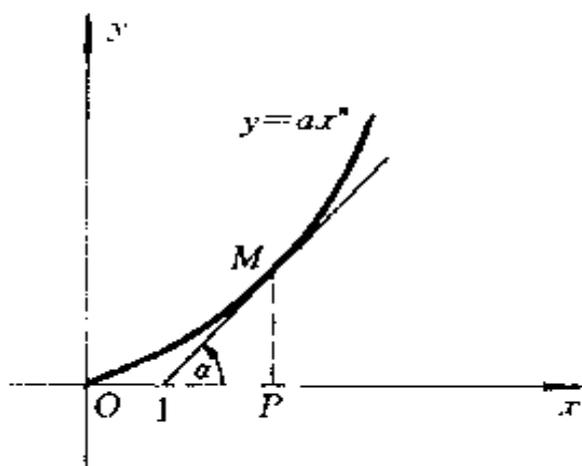


图 2.33

由此, 该曲线的切线可以这样作: 对于曲线 $y = ax^n$ 上任一点 $M(x, y)$, 由此点向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 再在 Ox 轴上取点 T , 使 $|PT| = \frac{|x|}{n}$ (当然, 只是在 P 的一侧取点 T , 若在此点 $yy' > 0$, 则在 P 点的左侧取 T ; 若在此点 $yy' < 0$, 则在 P 点的右侧取 T . 以后不再说明), 然后联接 MT , 则 MT 就是所求的切线.

1067. 证明抛物线 $y^2 = 2px$ 的 (a) 次切线长等于切点的横坐标的两倍; (6) 次法线为一常量. 给出作抛物线的切线的方法.

证 (a) 次切线长为

$$\begin{aligned} l_T &= |PT| = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{y}{\frac{p}{y}} \right| \\ &= \left| \frac{y^2}{p} \right| = \left| \frac{2px}{p} \right| = 2|x|, \end{aligned}$$

所以, 次切线长为切点横坐标的两倍.

$$(6) \text{ 次法线长为 } l_N = |PN| = |yy'| = \left| y \cdot \frac{p}{y} \right| = |p|,$$

所以, 次法线长为一常量.

由此, 抛物线的切线可以这样作: 由曲线 $y^2 = 2px$ 上的任一点 $M(x, y)$ 向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 由于 $yy' = p$, 故当 $p > 0$ ($p < 0$) 时, 在 Ox 轴上 P 点的左(右)侧取点 T , 如图 2.34, 使 $|PT| =$

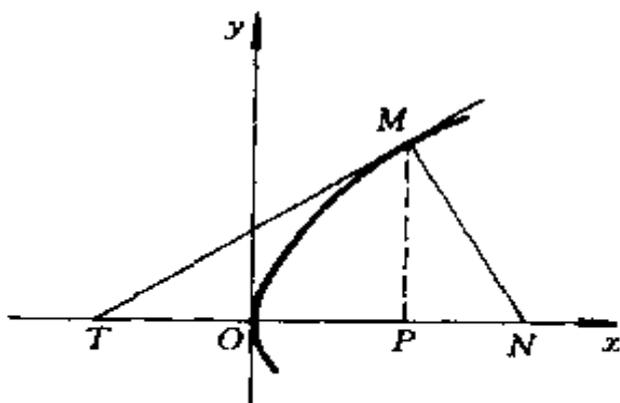


图 2.34

$2|x|$, 联结 MT , 此即所求的切线.

1068. 证明指数曲线 $y = a^x$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 有定长的次切线. 给出作指数曲线的切线的方法.

证 次切线长为

$$l_T = \left| \frac{y}{y'} \right| = \left| \frac{a^x}{a^x \ln a} \right| = \frac{1}{|\ln a|}.$$

从而 l_T 为常量.

由此, 该曲线的切线可以这样作: 对于曲线 $y = a^x$ 上任一点 $M(x, y)$ 向 Ox 轴作垂线, 得交点 P . 由于当 a

> 1 时 $yy' > 0$, 当 $0 < a < 1$ 时 $yy' < 0$, 故在 Ox 轴上点 P 的左侧 (当 $a > 1$ 时) 或右侧 (当 $0 < a < 1$ 时) 取点 T , 使 $|PT| = \frac{1}{|\ln a|}$, 联接 MT , 此即所求的切线 (图 2.35).

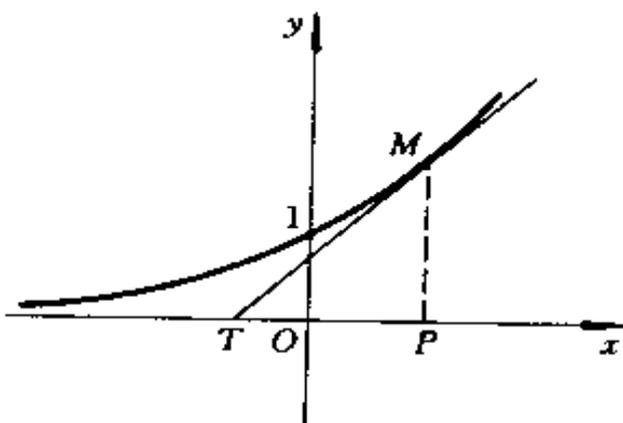


图 2.35

1069. 求悬链线

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$$

上任一点 $M(x_0, y_0)$ 处的法线长.

解 法线长为

$$\begin{aligned}
 & |MN| \\
 &= |y| \sqrt{1 + y'^2} \Big|_{(x_0, y_0)}.
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 y' &= a \cdot \frac{1}{a} \operatorname{sh} \frac{x}{a} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}, \\
 \sqrt{1 + y'^2} &= \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} = \left| \operatorname{ch} \frac{x}{a} \right| \\
 &= \left| \frac{y}{a} \right|,
 \end{aligned}$$

故

$$|MN| = |y_0| \cdot \left| \frac{y_0}{a} \right| = \frac{y_0^2}{|a|},$$

即

$$|MN| = \frac{y_0^2}{|a|} \quad (a \neq 0).$$

1070. 证明内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间的部分的长为一常量.

证 由方程 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 求得导数 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$. 对于曲线上任一点 (x_0, y_0) ($x_0 \neq 0$) 处, 其切线方程为

$$y - y_0 = -\sqrt[3]{\frac{y_0}{x_0}}(x - x_0),$$

它在两坐标轴上的截距分别为

$$l_x = x_0 + \sqrt[3]{x_0 y_0^2} \text{ 及 } l_y = y_0 + \sqrt[3]{x_0^2 y_0}.$$

于是, 切线在两坐标轴间的部分长为

$$l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}.$$

由于,

$$\begin{aligned} l_x^2 + l_y^2 &= x_0^2 + y_0^2 + 3x_0 \sqrt[3]{x_0 y_0^2} + 3y_0 \sqrt[3]{x_0^2 y_0} \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{x_0^2 y_0^2} (\sqrt[3]{x_0^2} + \sqrt[3]{y_0^2}) \\ &= x_0^2 + y_0^2 + 3 \sqrt[3]{a^2 x_0^2 y_0^2} \\ &= (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}})^3 + y_0^2 + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{4}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} + 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{4}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3a^{\frac{2}{3}} y_0^{\frac{2}{3}} (a^{\frac{2}{3}} - y_0^{\frac{2}{3}}) + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2 - 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} + 3(ax_0 y_0)^{\frac{2}{3}} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

故 $l = a$, 即内摆线

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

的切线介于坐标轴间部分的长为一常量.

1071. 若抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 Ox 轴相切, 则系数 a, b, c 间的关系如何?

解 由方程 $y = ax^2 + bx + c$ 求得导数 $y' = 2ax + b$. 要抛物线与 Ox 轴相切, 需 $y' = 0$, 所以

$$2ax + b = 0,$$

即

$$x = -\frac{b}{2a}; \quad (1)$$

另一方面, 切点的横坐标满足:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

即

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式, 得

$$b^2 - 4ac = 0,$$

此即所求的 a, b, c 间的关系.

1072. 在甚么条件下, 三次抛物线

$$y = x^3 + px + q$$

与 Ox 轴相切?

解 由方程 $y = x^3 + px + q$ 求得 $y' = 3x^2 + p$. 要此曲线与 Ox 轴相切, 必须满足

$$\begin{cases} 3x^2 + p = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^3 + px + q = 0. & (2) \end{cases}$$

由(2)式得 $x(x^2 + p) = -q$, 两端平方, 则

$$x^2(x^2 + p)^2 = q^2. \quad (3)$$

以(1)式代入(3)式, 得

$$-\frac{p}{3} \cdot \left(-\frac{p}{3} + p\right)^2 = q^2,$$

即

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0,$$

此即所求的条件.

1073. 当参数 a 为何值时, 抛物线 $y = ax^2$ 与曲线 $y = \ln x$ 相切?

解 按题意, 我们有

$$(ax^2)' = (\ln x)',$$

即

$$x^2 = \frac{1}{2a} \quad (a \neq 0),$$

从而
$$y = a \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{2}.$$

同时, 由于在切点相切, 其纵坐标也必需相等, 所以

$$\ln x = \frac{1}{2}, \text{ 即 } x = \sqrt{e}.$$

最后得到

$$a = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2e}.$$

1074. 证明曲线

$$y = f(x) \quad [f(x) > 0]$$

及
$$y = f(x)\sin ax,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数, 于公共点彼此相切.

证 解曲线方程

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = f(x)\sin ax, \end{cases}$$

得 $\sin ax = 1, x = \frac{(4k+1)\pi}{2a}$ (k 为整数), 这就是两曲线交点的横坐标. 两曲线在交点处切线的斜率分别为

$$\begin{aligned} k_1 &= f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right), \\ k_2 &= f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right) \sin \left(\frac{4k+1}{2} \pi \right) \\ &\quad + a \cos \left(\frac{4k+1}{2} \pi \right) f \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right) \\ &= f' \left(\frac{4k+1}{2a} \pi \right). \end{aligned}$$

从而

$$k_1 = k_2,$$

所以两曲线在公共点彼此相切.

1075. 证明双曲线族 $x^2 - y^2 = a$ 及 $xy = b$ 形成一正交网, 就是说这两族中的曲线成直角相交.

证 设双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 与双曲线 $xy = b$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2x - 2yk_1 = 0$, 所以,

$$k_1 = \frac{x}{y};$$

在同一点双曲线 $xy = b$ 的切线的斜率 k_2 满足: $y + xk_2 = 0$, 所以,

$$k_2 = -\frac{y}{x};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x} \right) = -1.$$

因此, 两双曲线交成直角, 故此两曲线族形成一正交网.

1076. 证明抛物线族

$$y^2 = 4a(a - x) \quad (a > 0)$$

及 $y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$

形成正交网.

证 设抛物线 $y^2 = 4a(a - x)$ 与抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 相交于点 $P(x, y)$, 则在此点 $y^2 = 4a(a - x)$ 的切线的斜率 k_1 满足: $2yk_1 = -4a$, 所以,

$$k_1 = -\frac{2a}{y};$$

在同一点抛物线 $y^2 = 4b(b + x)$ 的切线的斜率 k_2 满足: $2yk_2 = 4b$, 所以,

$$k_2 = \frac{2b}{y};$$

由此得到

$$k_1 k_2 = -\frac{4ab}{y^2}. \quad (1)$$

但点 $P(x, y)$ 同时在这两条抛物线上, 故

$$4a(a - x) = 4b(b + x).$$

于是, $x = a - b$, 所以

$$y^2 = 4a(a - a + b) = 4ab. \quad (2)$$

以(2)式代入(1)式, 得知在交点处, 两切线的斜率满足

$$k_1 k_2 = -1,$$

故此两切线直交. 由此可知, 该两抛物线族形成正交网.

1077. 写出曲线 $x = 2t - t^2$ 及 $y = 3t - t^3$ 上于(a) $t = 0$, (b) $t = 1$ 各点处的切线和法线的方程.

解 由于

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 1.$$

切线方程为

$$y = x;$$

法线方程为

$$y = -x.$$

(6) 当 $t = 1$ 时,

$$x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}, \frac{dy}{dx} = 3.$$

切线方程为

$$y - \frac{1}{2} = 3\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } 3x - y - 4 = 0;$$

法线方程为

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right), \text{即 } x + 3y - 3 = 0;$$

(B) 当 $t = \infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = -1.$$

(意即: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -1$).

切线方程为

$$y = -x.$$

法线方程为

$$y = x.$$

1079. 写出摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$$

上任意一点 $t = t_0$ 处的切线方程. 给出摆线的切线的作法.

解 因为

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}\bigg|_{t=t_0} &= \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}\bigg|_{t=t_0} \\ &= \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\bigg|_{t=t_0} = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.\end{aligned}$$

于是,切线方程为

$$y - a(1 - \cos t_0) = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2} \cdot [x - a(t_0 - \sin t_0)],$$

化简得

$$y - 2a = (x - at_0)\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

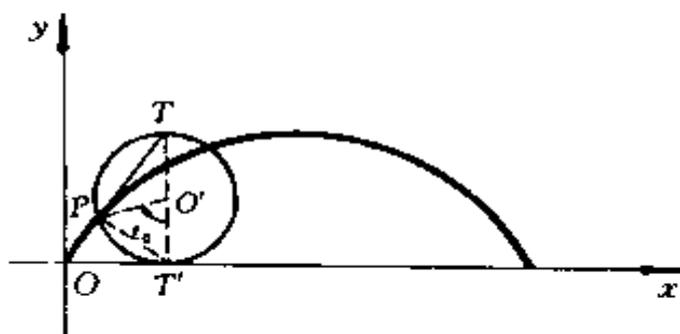


图 2.36

由此可知,切线通过点 $(at_0, 2a)$, 其斜率为 $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$. 如图 2.36 中所示, $\angle T'O'P = t_0$, 而

$$O'I' = \widehat{T'P} = at_0, T'T = 2a,$$

故 T 点的坐标为 $(at_0, 2a)$, 它在切线上. 其次, 联接 PT 及 PT' , 则 $PT' \perp PT$,

$$\begin{aligned}k_{PT} &= \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \angle PTT' \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{t_0}{2} \right) \\ &= \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.\end{aligned}$$

这样, PT 就通过点 $(at_0, 2a)$, 且其斜率为 $\operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}$, 所以,

直线 PT 即为所求的切线. 于是摆线的切线可以这样作: 先联接切点与滚动的圆的接触点(即点 P), 然后, 过 P 作其垂直线, 此即所求的切线.

1080. 证明曳物线

$$\begin{aligned}x &= a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t \right), \\y &= a \sin t \quad (a > 0, 0 < t < \pi)\end{aligned}$$

有一定长的切线段.

证 切线段的长 $= \left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x}$, 而

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \cos t}{a \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right)} = \frac{\sin t}{\cos t},$$

所以

$$\begin{aligned}\left| \frac{y}{y'_x} \right| \sqrt{1 + y'^2_x} &= \left| \frac{a \sin t}{\frac{\sin t}{\cos t}} \right| \sqrt{1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}} \\&= |a| |\cos t| \cdot \frac{1}{|\cos t|} \\&= |a|,\end{aligned}$$

这是一个常量, 故曳物线有定长的切线段.

写出下列曲线在指定点的切线与法线方程:

1081. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1, M(6, 6.4).$

解 由于

$$y' = -\frac{64x}{100y} = -\frac{16x}{25y},$$

从而点 M 处的导数

$$y'|_M = -\frac{16 \times 6}{25 \times 6.4} = -\frac{3}{5},$$

此即曲线在 M 点的切线的斜率.

所以,切线方程为

$$y - 6.4 = -\frac{3}{5}(x - 6), \text{即 } 3x + 5y - 50 = 0;$$

法线方程为

$$y - 6.4 = \frac{5}{3}(x - 6), \text{即 } 5x - 3y - 10.8 = 0.$$

1082. $xy + \ln y = 1, M(1, 1)$.

解 先求 y' . 由于

$$xy' + y + \frac{y'}{y} = 0,$$

从而

$$y' = -\frac{y^2}{x + y}, \quad y' \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -\frac{1}{2},$$

故切线方程为

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1), \text{即 } x + 2y - 3 = 0;$$

法线方程为

$$y - 1 = 2(x - 1), \text{即 } 2x - y - 1 = 0.$$

§ 4. 函数的微分

1° 函数的微分 若自变数为 x 的函数 $y = f(x)$ 之增量可表为下形

$$\Delta y = A(x)dx + o(dx),$$

其中 $dx = \Delta x$, 则此增量的线性主部称为函数 y 的微分:

$$dy = A(x)dx$$

函数 $y = f(x)$ 的微分存在的必要且充分条件为存在有限的导函数 $y' = f'(x)$, 且有

$$dy = y'dx. \quad (1)$$

若自变数 x 为另一自变数的函数, 公式(1)于这种情形下仍然有效 (一阶微分的不变性).

2° 函数的微小增量的估计 为了计算可微分的函数 $f(x)$ 的微小增量可利用公式

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x,$$

若 $f'(x) \neq 0$, 当 $|\Delta x|$ 充分小时, 它的相对误差可以任意地小.

特别情形, 若计算自变数 x 的绝对误差等于 $|\Delta x|$, 则函数 $y = f(x)$ 的绝对误差 $|\Delta y|$ 和相对误差 δy 用下列公式近似地表示出来:

$$|\Delta y| = |f'(x)\Delta x|$$

及

$$\delta y = |[\ln f(x)]' \Delta x| = \left| \frac{f'(x)}{f(x)} \Delta x \right|.$$

1083. 设:

$$(a)\Delta x = 1, (b)\Delta x = 0.1, (B)\Delta x = 0.01,$$

对于函数

$$f(x) = x^3 - 2x + 1$$

求出: (1) $\Delta f(1)$, (2) $df(1)$, 并比较它们.

$$\begin{aligned} \text{解 } \Delta f(1) &= f(1 + \Delta x) - f(1) \\ &= (\Delta x + 1)^3 - 2(1 + \Delta x) + 1 - (1 - 2 + 1) \end{aligned}$$

$$= \Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,$$

$$df(1) = f'(1)\Delta x = (3x^2 - 2)|_{x=1} \cdot \Delta x = \Delta x,$$

将所求值列表如下:

	Δx	$\Delta f(1)$	$df(1)$
		$\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$	Δx
(a)	$\Delta x = 1$	5	1
(б)	$\Delta x = 0.1$	0.131	0.1
(в)	$\Delta x = 0.01$	0.010301	0.01

从上表可以看出,当 Δx 值愈小时, $\Delta f(1)$ 与 $df(1)$ 之差就愈小.

1084. 运动方程是

$$x = 5t^2,$$

其中 t 以秒来度量, x 以公尺来度量. 设 (a) $\Delta t = 1$ 秒, (б) $\Delta t = 0.1$ 秒, (в) $\Delta t = 0.001$ 秒, 对 $t = 2$ 秒的时刻, 求出路线的增量 Δx 及路线的微分 dx , 并作比较.

解 $\Delta x = 5(2 + \Delta t)^2 - 5 \cdot 2^2 = 20\Delta t + 5(\Delta t)^2,$

$$dx = x_t' |_{t=2} \cdot \Delta t = 10t |_{t=2} \cdot \Delta t = 20\Delta t,$$

(a) 当 $\Delta t = 1$ 秒时,

$$\Delta x = 25 \text{ 公尺}, dx = 20 \text{ 公尺};$$

(б) 当 $\Delta t = 0.1$ 秒时,

$$\Delta x = 2.05 \text{ 公尺}, dx = 2 \text{ 公尺};$$

(B) 当 $\Delta t = 0.001$ 秒时,

$$\Delta x = 0.020005 \text{ 公尺}, dx = 0.02 \text{ 公尺}.$$

由上可以看出,当 Δt 愈小时, $\Delta x - dx$ 就愈小.

求下列函数 y 的微分:

$$1085. y = \frac{1}{x}.$$

$$\text{解 } y' = -\frac{1}{x^2}, dy = -\frac{1}{x^2}dx (x \neq 0).$$

$$1086. y = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} (a \neq 0).$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2 + x^2},$$

$$dy = \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

$$1087. y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) = \frac{1}{x^2 - a^2},$$

$$dy = \frac{dx}{x^2 - a^2} (|x| \neq |a|).$$

$$1088. y = \ln |x + \sqrt{x^2 + a}|.$$

$$\text{解 } y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}, dy = \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}}.$$

$$1089. y = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} (a \neq 0).$$

$$\text{解 } y' = \frac{|a|}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$dy = \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \quad (|x| < |a|).$$

1090. (a) $d(xe^x)$; (б) $d(\sin x - x \cos x)$;

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$; (г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$;

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2})$; (е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

(ж) $d \ln(1-x^2)$; (з) $d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right)$;

(и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right]$

解 (a) $d(xe^x) = (xe^x)' dx = e^x(x+1)dx$;

(б) $d(\sin x - x \cos x) = (\sin x - x \cos x)' dx$
 $= x \sin x dx$;

(в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right) = -\frac{3}{x^4} dx \quad (x \neq 0)$;

(г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\frac{1}{x} \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln x}{x} dx$
 $= \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} dx \quad (x > 0)$;

(д) $d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$;

(е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} dx$
 $= \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (|x| < 1)$;

$$(*) d\ln(1-x^2) = -\frac{2xdx}{1-x^2} \quad (|x| < 1);$$

$$(3) d\left(\arccos \frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \left(\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{|x|}{x} dx \\ = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (|x| > 1);$$

$$(4) d\left(\frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \right) \\ = \left[\frac{\cos^3 x + 2\sin^2 x \cos x}{2\cos^4 x} + \frac{1}{2\cos x} \right] dx \\ = \frac{dx}{\cos^3 x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

设 u, v, w 为 x 的可微分的函数. 求函数 y 的微分, 设:

1091. $y = uvw.$

解 $dy = uvdu + uvdv + uvdw.$

1092. $y = \frac{u}{v^2}.$

解 $dy = \frac{v^2 du - 2uv dv}{v^4} \\ = \frac{v du - 2u dv}{v^3} \quad (v \neq 0).$

1093. $y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$

解 $dy = -\frac{1}{2(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (2udu + 2v dv)$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2x} \sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x \cos x - \sin x}{2x^3},$$

显然,上述结果对于 $x < 0$ 也是正确的 ($x \neq 0$).

$$(B) \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} = \frac{\cos x dx}{-\sin x dx}$$

$$= -\operatorname{ctg} x (x \neq k\pi, k \text{ 为整数});$$

$$(r) \frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} = \frac{d}{d(\operatorname{ctg} x)} \left(\frac{1}{\operatorname{ctg} x} \right)$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} = -\operatorname{tg}^2 x$$

$$\left(x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \text{ 为整数} \right);$$

$$(D) \frac{d(\operatorname{arc} \sin x)}{d(\operatorname{arc} \cos x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx}{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx} = -1$$

$$(|x| < 1).$$

1097. 有半径为 $R = 100$ 厘米及圆心角 $\alpha = 60^\circ$ 的扇形. 若 (a) 其半径 R 增加 1 厘米; (b) 角 α 减小 $30'$, 则扇形面积的变化若干? 求出精确的和近似的解.

解 扇形面积 $A = \frac{1}{2} R^2 \alpha$, 其增量

$$\Delta A = \frac{\alpha}{2} [(R + \Delta R)^2 - R^2]$$

$$= \alpha R \Delta R + \frac{1}{2} \alpha (\Delta R)^2,$$

或

$$\Delta A = \frac{1}{2} R^2 \Delta \alpha.$$

扇形面积的微分

$$dA = R\alpha dR,$$

或

$$dA = \frac{1}{2} R^2 d\alpha.$$

增量是精确的解,微分是近似的解.

(a) 当 $R = 100, \alpha = \frac{\pi}{3}, \Delta R = 1$ 时,

$$\Delta A = \frac{\pi}{6} (200 + 1) = 105.2 \text{ 平方厘米},$$

$$dA = 100 \cdot \frac{\pi}{3} = 104.7 \text{ 平方厘米(增加)}.$$

(6) 当 $\Delta \alpha = -\frac{\pi}{360}$ 时,

$$\Delta A = \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360} \right) = -43.6 \text{ 平方厘米},$$

$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} \cdot 100^2 \cdot \left(-\frac{\pi}{360} \right) \\ &= -43.6 \text{ 平方厘米(减少)}. \end{aligned}$$

1098. 单摆振动的周期(以秒计算)按下式确定:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

其中 l 为摆长以厘米计, $g = 981$ 厘米 / 每秒² 为重力加速度.

为了使周期 T 增大 0.05 秒, 对摆长 $l = 20$ 厘米的长度需要作多少修改?

解 周期 T 对摆长 l 的微分

$$dT = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{l}} dl = \frac{\pi dl}{\sqrt{lg}}.$$

将 $dT = 0.05$, $g = 981$, $l = 20$ 代入上式, 即得

$$dl = \frac{0.05 \times \sqrt{981 \times 20}}{3.1416} \approx 2.23,$$

即摆长增加约 2.23 厘米.

利用函数之微分代替函数的增量, 求下列各式之近似值:

1099. $\sqrt[3]{1.02}$.

解 设 $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.02$, 则

$$f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \Big|_{x=1} = \frac{1}{3},$$

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x = 0.0066.$$

于是

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1.02} &= f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0) \\ &= 1 + 0.0066, \end{aligned}$$

即

$$\sqrt[3]{1.02} \approx 1.007.$$

1100. $\sin 29^\circ$.

解 设 $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = -\frac{\pi}{180}$, 则

$$\sin 29^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi}{6} = 0.4849.$$

1101. $\cos 151^\circ$.

解 设 $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{5\pi}{6}$, $\Delta x = \frac{\pi}{180}$, 则

$$\cos 151^\circ \approx \cos \frac{5\pi}{6} - \sin \frac{5\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{180} = -0.8748.$$

1102. $\text{arc tg} 1.05$.

解 设 $f(x) = \text{arctg} x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.05$, 则

$$\begin{aligned} \text{arctg} 1.05 &\approx \text{arc tg} 1 + 0.05 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 0.8104(\text{弧度}) = 46^\circ 26'. \end{aligned}$$

1103. $\lg 11$.

解 $\lg 11 = \lg 10 + \lg 1.1 = 1 + \lg 1.1$.

设 $f(x) = \lg x$, $x_0 = 1$, $\Delta x = 0.1$, 则

$$\lg 1.1 \approx \lg 1 + \frac{0.1}{\ln 10} = \frac{0.1}{2.3026} = 0.0434.$$

于是

$$\lg 11 \approx 1.0434.$$

1104. 证明近似公式:

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} (a > 0),$$

其中 $|x| \ll a$ (正数 A 和 B 间的关系式 $A \ll B$ 表示 A 与 B 相比较时, A 为高阶无穷小).

利用这个公式近似地计算:

(a) $\sqrt{5}$; (b) $\sqrt{34}$; (c) $\sqrt{120}$

并与表中的数值比较.

证 设 $f(y) = \sqrt{y}$, $y_0 = a^2$, $\Delta y = x$, 则

$$\sqrt{y_0 + \Delta y} \approx \sqrt{y_0} + \frac{1}{2\sqrt{y_0}} \Delta y$$

(当 $|\Delta y| \ll \sqrt{y_0}$ 时).

于是,

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a}, \text{ (当 } |x| \ll a \text{ 时)}$$

(a) $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1} \approx 2 + \frac{1}{4} = 2.25,$

查表: $\sqrt{5} = 2.24;$

(b) $\sqrt{34} = \sqrt{6^2 - 2} \approx 6 - \frac{2}{2.6} = 5.833,$

查表: $\sqrt{34} = 5.831;$

(c) $\sqrt{120} = \sqrt{11^2 - 1} \approx 11 - \frac{1}{2.11} = 10.9546,$

查表： $\sqrt{120} = 10.9545$.

1105. 证明近似公式：

$$\sqrt[n]{a^n + x} \approx a + \frac{x}{na^{n-1}} (a > 0).$$

其中 $|x| \ll a$. 利用此公式近似地计算：

(a) $\sqrt[3]{9}$; (б) $\sqrt[4]{80}$; (в) $\sqrt[7]{100}$;

(г) $\sqrt[10]{1000}$.

证 设 $f(y) = \sqrt[n]{y}$, $y_0 = a^n$, $\Delta y = x$, 则

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a^n + x} &\approx \sqrt[n]{a^n} + \frac{x}{n \sqrt[n]{(a^n)^{n-1}}} \\ &= a + \frac{x}{na^{n-1}} (\text{当 } |x| \ll a \text{ 时}). \end{aligned}$$

(a) $\sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{2^3 + 1} \approx 2 + \frac{1}{3 \cdot 2^2} = 2.083$,

查表： $\sqrt[3]{9} = 2.080$;

(б) $\sqrt[4]{80} = \sqrt[4]{3^4 - 1} \approx 3 - \frac{1}{4 \cdot 3^3} = 2.9907$,

查表： $\sqrt[4]{80} = 2.9905$;

(в) $\sqrt[7]{100} = \sqrt[7]{2^7 - 28} \approx 2 - \frac{28}{7 \cdot 2^6} = 1.938$,

查表： $\sqrt[7]{100} = 1.931$;

(г) $\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} \approx 2 - \frac{24}{10 \cdot 2^9} = 1.9953$,

查表： $\sqrt[10]{1000} = 1.9953$.

1106. 正方形的边 $x = 2.4$ 米 ± 0.05 米. 由此计算所得正方

形的面积的相对误差和绝对误差如何?

解 正方形的面积 $A = x^2$. 于是, 面积的相对误差为

$$\begin{aligned}\delta_A &= \left| \frac{\Delta A}{A} \right| = \left| \frac{2x\Delta x}{x^2} \right| = 2 \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \\ &= 2 \cdot \frac{0.05}{2.4} = 4.2\%;\end{aligned}$$

而绝对误差为

$$|\Delta A| = |2.45^2 - 2.4^2| = 0.24 \text{ 平方米.}$$

1107. 为了计算出球的体积准确到 1%, 问度量球半径 R 时所允许发生的相对误差如何?

解 球的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, 从而

$$dV = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 dR = V \frac{3dR}{R},$$

即体积的相对误差是半径的相对误差的 3 倍:

$$\left| \frac{dV}{V} \right| = 3 \left| \frac{dR}{R} \right|.$$

因而, 半径 R 允许发生的相对误差为

$$\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V \leq \frac{1}{3} \cdot 0.01 = 0.33\%.$$

1108. 借助于单摆的振动利用公式 $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$ (其中 l 为摆长, T 为摆振动的全周期) 以求重力加速度. 当测量 (a) 摆长 l , (b) 周期 T 时的相对误差 δ 影响于值 g 几何?

解 (a) $\delta_g = \left| \frac{dg}{g} \right| = \left| \frac{dl}{l} \right|$, 于是

$$\delta_g = \delta_l,$$

即 g 的相对误差等于摆长的相对误差.

$$(6) \delta_g = \left| \frac{-8\pi^2 l \cdot T^2 dT}{T^3 \cdot 4\pi^2 l} \right| = 2 \left| \frac{dT}{T} \right|, \text{ 于是}$$

$$\delta_g = 2\delta_T,$$

即 g 的相对误差是周期的相对误差的 2 倍.

1109. 求数 $x(x > 0)$ 的常用对数的绝对误差, 设此数的相对误差等于 δ .

解 设 $f(x) = \lg x$, 若数 δ 很小, 则有

$$\ln(1 + \delta) \approx \delta.$$

因而, 所要求的绝对误差

$$\begin{aligned} |\lg(x + \Delta x) - \lg x| &= \left| \lg \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) \right| \\ &= |\lg(1 + \delta)| = \frac{1}{\ln 10} \ln(1 + \delta) \approx 0.43\delta. \end{aligned}$$

1110. 证明: 根据正切对数表所求得的角度比用具有同样多位小数的正弦对数表求得的角度更为精确.

证 正切对数函数的微分

$$\begin{aligned} d(\lg \operatorname{tg} \varphi) &= \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \operatorname{tg} \varphi \cos^2 \varphi} \\ &= \frac{d\varphi}{\ln 10 \cdot \sin \varphi \cos \varphi}, \end{aligned}$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot |\cos \varphi| \cdot |d(\lg \operatorname{tg} \varphi)|; \quad (1)$$

而正弦对数函数的微分

$$d(\lg \sin \varphi) = \frac{\cos \varphi d\varphi}{\sin \varphi \ln 10},$$

于是

$$|d\varphi| = \ln 10 \cdot |\sin \varphi| \cdot \left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \cdot |d(\lg \sin \varphi)|. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式的右端,由于假设确定 $\lg \sin \varphi$ 与 $\lg \operatorname{tg} \varphi$ 时,具有同样的误差,而 $\left| \frac{1}{\cos \varphi} \right| \geq 1 \geq |\cos \varphi|$, 故由(2)式所确定的 $|d\varphi|$ 不比(1)式的 $|d\varphi|$ 小. 这就证明了求角度时用正切对数表更为精确.

§ 5. 高阶的导函数和微分

1° 基本定义 函数 $y = f(x)$ 的高阶导函数由下列关系式顺次地定义出来(假设对应的运算都有意义!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \quad (n = 2, 3, \dots).$$

函数 $y = f(x)$ 的高阶微分是根据下列公式顺次定义的:

$$d^n y = d(d^{n-1} y) \quad (n = 2, 3, \dots),$$

其中采取 $d^1 y = dy = y' dx$.

若 x 为自变数,则应有:

$$d^2 x = d^3 x = \dots = 0.$$

在这种情形下,下列公式正确

$$= \frac{x(3 + 2x^2)}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1112. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y' = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$
 $= \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$y'' = \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot (1-x^2)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

($|x| < 1$).

1113. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1).$

1114. $y = \operatorname{tg}x$.

解 $y' = \frac{1}{\cos^2 x},$

$$y'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \left(x \neq \frac{2k+1}{2}\pi, k \text{ 为整数} \right).$$

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arc} \operatorname{tg}x$.

解 $y' = 1 + 2x\operatorname{arctg}x,$

$$y'' = 2\operatorname{arctg}x + \frac{2x}{1+x^2}.$$

1116. $y = \frac{\operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $y' = \frac{1}{1-x^2} + \frac{x\operatorname{arc} \sin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{2x}{(1-x^2)^2} \\
&+ \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x\right) (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + 3x^2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{3x}{(1-x^2)} + \frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&\quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

1117. $y = x \ln x$.

解 $y' = 1 + \ln x$, $y'' = \frac{1}{x}$ ($x > 0$).

1118. $y = \ln f(x)$.

解 $y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$,

$$y'' = \frac{f(x)f''(x) - f'^2(x)}{f^2(x)} \quad (f(x) > 0).$$

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$
 $+ x \cdot \frac{1}{x} [\cos(\ln x) - \sin(\ln x)]$
 $= 2\cos(\ln x),$
 $y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x} \quad (x > 0).$

1120. 设 $y = e^{\sin x} \cos(\sin x)$, 求 $y(0)$, $y'(0)$ 及 $y''(0)$.

解 $y(0) = 1$. 又

$$y' = e^{\sin x} [\cos x \cos(\sin x)$$

$$- \cos x \sin(\sin x)].$$

于是,

$$y'(0) = e^0[1 - 0] = 1.$$

而

$$\begin{aligned} y'' &= e^{\sin x} [\cos^2 x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad - \sin x \cos(\sin x) - \cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x)] \\ &= e^{\sin x} \{-2\cos^2 x \sin(\sin x) \\ &\quad + \sin x [\sin(\sin x) - \cos(\sin x)]\}, \end{aligned}$$

于是,

$$y''(0) = e^0\{0 + 0\} = 0.$$

设 $u = \varphi(x)$ 及 $v = \psi(x)$ 为可微分二次的函数. 求 y'' ,
设:

1121. $y = u^2.$

解 $y' = 2uu',$

$$y'' = 2u'^2 + 2uu'' = 2(u'^2 + uu'').$$

1122. $y = \ln \frac{u}{v}.$

解 $y' = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v},$

$$y'' = \frac{uu'' - u'^2}{u^2} - \frac{vv'' - v'^2}{v^2} \quad (uv > 0).$$

$$1123. y = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

$$\text{解 } y' = \frac{uu' + vv'}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

$$y'' = \frac{(uu'' + u'^2 + vv'' + v'^2) \sqrt{u^2 + v^2} - \frac{(uu' + vv')^2}{\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2}$$

$$= \frac{(u^2 + v^2)(uu'' + vv'') + (u'v - v'u)^2}{(u^2 + v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$(u^2 + v^2 > 0).$

$$1124. y = u^v (u > 0).$$

$$\text{解 } y' = u^v \left[v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right],$$

$$y'' = u^v \left[v' \ln u + \frac{vu'}{u} \right]^2$$

$$+ u^v \left[v'' \ln u + \frac{u'v'}{u} \right. \\ \left. + \frac{(u'v' + vu'')u - vu'^2}{u^2} \right]$$

$$= u^v \left[\left(v' \ln u + \frac{u'}{u} v \right)^2 + v'' \ln u \right. \\ \left. + \frac{2u'v'}{u} + \frac{v}{u^2} (uu'' - u'^2) \right].$$

设 $f(x)$ 为可微分三次的函数. 求 y'' 及 y''' , 设:

$$1125. y = f(x^2).$$

$$\text{解 } y' = 2xf'(x^2),$$

$$y'' = 2f'(x^2) + 4x^2 f''(x^2),$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= 4xf''(x^2) + 8xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2) \\
 &= 12xf''(x^2) + 8x^3f'''(x^2).
 \end{aligned}$$

1126. $y = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

解 $y' = -\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$y'' = \frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= -\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &\quad - \frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= -\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{6}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &\quad - \frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \neq 0).
 \end{aligned}$$

1127. $y = f(e^x)$.

解 $y' = e^x f'(e^x)$,

$$y'' = e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x),$$

$$y''' = e^{3x} f'''(e^x) + 3e^{2x} f''(e^x) + e^x f'(e^x).$$

1128. $y = f(\ln x)$.

解 $y' = \frac{1}{x} f'(\ln x)$,

$$y'' = -\frac{1}{x^2} f'(\ln x) + \frac{1}{x^2} f''(\ln x)$$

$$= \frac{1}{x^2} [f''(\ln x) - f'(\ln x)],$$

$$\begin{aligned}
y''' &= -\frac{2}{x^3} [f''(\ln x) - f'(\ln x)] \\
&\quad + \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - f''(\ln x)] \\
&= \frac{1}{x^3} [f'''(\ln x) - 3f''(\ln x) + 2f'(\ln x)] \\
&\quad (x > 0).
\end{aligned}$$

1129. $y = f[\varphi(x)]$, 其中 $\varphi(x)$ 是可多次微分的函数.

解 $y' = \varphi'(x)f'[\varphi(x)],$

$$y'' = \varphi''(x)f'[\varphi(x)] + \varphi'(x)f''[\varphi(x)],$$

$$y''' = \varphi'''(x)f'[\varphi(x)]$$

$$+ 3\varphi''(x)\varphi'(x)f''[\varphi(x)]$$

$$+ \varphi'(x)f'''[\varphi(x)].$$

1130. 对于以下二种情形: (a) x 为自变量, (b) x 为中间变量, 求函数 $y = e^x$ 的 d^2y .

解 (a) $dy = e^x dx, d^2y = e^x dx^2;$

$$(b) dy = e^x dx, d^2y = e^x d^2x + e^x dx^2.$$

若 x 为自变数, 求 d^2y , 设:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}.$

解 $dy = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx,$

$$y'' = \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

于是,

$$d^2y = \frac{dx^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

1132. $y = \frac{\ln x}{x}.$

解 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3},$

于是,

$$d^2y = \frac{2\ln x - 3}{x^3} dx^2 \quad (x > 0).$$

1133. $y = x^x.$

解 $y' = x^x(1 + \ln x),$

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right],$$

于是,

$$d^2y = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] dx^2 \quad (x > 0).$$

令 u 及 v 为变数 x 的可微分两次的函数, 求 d^2y , 设:

1134. $y = uv.$

解 $dy = u dv + v du,$

$$\begin{aligned} d^2y &= du dv + u d^2v + dv du + v d^2u \\ &= u d^2v + 2 du dv + v d^2u. \end{aligned}$$

1135. $y = \frac{u}{v}.$

解 $dy = \frac{v du - u dv}{v^2},$

$$d^2y = \frac{v^2(dvdu + vd^2u - dudv - ud^2v) - 2vdv(vdu - udv)}{v^4}$$

$$= \frac{v(vd^2u - ud^2v) - 2dv(vdu - udv)}{v^3} \quad (v \neq 0)$$

1136. $y = u^m v^n$ (m 及 n 为常数).

解 $dy = mu^{m-1}v^n du + nu^m v^{n-1} dv,$

$$d^2y = m(m-1)u^{m-2}v^n du^2$$

$$+ mu^{m-1}(v^n d^2u + nv^{n-1} dudv)$$

$$+ mnu^{m-1}v^{n-1} dudv$$

$$+ nu^m(n-1)v^{n-2}dv^2 + nu^m v^{n-1} d^2v$$

$$= u^{m-2}v^{n-2} \{ [m(m-1)v^2 du^2$$

$$+ 2mnuvdudv + n(n-1)u^2 dv^2]$$

$$+ uv(mvd^2u + nud^2v) \}.$$

1137. $y = a^x$ ($a > 0$).

解 $dy = a^x \ln a dx,$

$$d^2y = a^x \ln^2 a \cdot du^2 + a^x \ln a \cdot d^2u$$

$$= a^x \ln a (\ln a \cdot du^2 + d^2u) \quad (a > 0).$$

1138. $y = \ln \sqrt{u^2 + v^2}.$

解 $dy = \frac{udu + vdv}{u^2 + v^2},$

$$d^2y = \frac{(u^2 + v^2)(du^2 + ud^2u + dv^2 + vd^2v) - 2(udu + vdv)^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(v^2 - u^2)du^2 - 4uvdudv + (u^2 - v^2)dv^2 + (u^2 + v^2)(ud^2u + vd^2v)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &\quad (u^2 + v^2 > 0). \end{aligned}$$

1139. $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$.

解 $dy = \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2}$,

$$\begin{aligned} d^2y &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) - 2(udu + vdv)(vdu - u dv)}{(u^2 + v^2)^2} \\ &= \frac{(u^2 + v^2)(vd^2u - ud^2v) + 2uv(dv^2 - du^2) + 2(u^2 - v^2)dudv}{(u^2 + v^2)^2} \\ &\quad (v \neq 0). \end{aligned}$$

求以参数给出的函数 $y = y(x)$ 的导函数 y'_x , y''_x , y'''_x , 设:

1140. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

解 $y'_x = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(t + 1)$,

$$y''_x = \frac{\frac{dy'_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}}{2 - 2t} = \frac{3}{4(1 - t)}$$

$$\begin{aligned} y'''_x &= \frac{\frac{dy''_x}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{4(1 - t)^2}}{2 - 2t} \\ &= \frac{3}{8(1 - t)^3} (t \neq 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right), \\
y_x'' &= \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + t\right) e^t (\cos t - \sin t)} \\
&= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cos^3\left(\frac{\pi}{4} + t\right)}, \\
y_x''' &= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t} \left[-\cos^{-3}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) + 3\cos^{-4}\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} + t\right) \right]}{e^t (\cos t - \sin t)} \\
&= \frac{e^{-2t} (2\sin t + \cos t)}{\sqrt{2} \cos^5\left(\frac{\pi}{4} + t\right)} \left(t \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \text{ 为整数} \right).
\end{aligned}$$

1144. $x = f'(t), y = tf'(t) - f(t)$.

解 $y'_x = \frac{tf''(t)}{f''(t)} = t,$

$$y_x'' = \frac{1}{f''(t)},$$

$$y_x''' = -\frac{\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^2}}{f''(t)} = -\frac{f'''(t)}{[f''(t)]^3}$$

($f''(t) \neq 0$).

1145. 设函数 $y = f(x)$ 是可微分若干次的. 求反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的导函数 $x', x'', x''', x^{(4)}$ (设这些导函数都存在).

解 $x' = \frac{1}{y'},$

$$\begin{aligned}
x'' &= -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dy} \\
&= -\frac{1}{y'^2} \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = -\frac{y''}{y'^3}, \\
x''' &= -\frac{y''' \cdot \frac{1}{y'} y'^3 - 3y'^2 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} \cdot y''}{y'^6} \\
&= -\frac{y' y''' - 3y''^2}{y'^5}, \\
x^{(4)} &= -\frac{y'^5 \left(\frac{y^{(4)}}{y'} y''' + y^{(4)} - 6y'' y''' \cdot \frac{1}{y'} \right)}{y'^{10}} \\
&\quad - \frac{5y'^4 \cdot y'' \cdot \frac{1}{y'} (y' y''' - 3y''^2)}{y'^{10}} \\
&= -\frac{y'^2 y^{(4)} - 10y' y'' y''' + 15y''^3}{y'^7} (y' \neq 0).
\end{aligned}$$

求由下列隐函数给出的 $y = y(x)$ 的 y'_x , y''_x 及 y'''_x :

1146. $x^2 + y^2 = 25$. 在点 $M(3,4)$ 的 y' , y'' 及 y''' 等于甚么?

解 $y' = -\frac{x}{y},$

$$\begin{aligned}
y'' &= -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y + \frac{x^2}{y}}{y^2} \\
&= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{25}{y^3},
\end{aligned}$$

$$y''' = \frac{75y'}{y^4} = -\frac{75x}{y^5},$$

在 $M(3,4)$ 点, 得

$$y' = -\frac{3}{4}, y'' = -\frac{25}{64}, y''' = -\frac{225}{1024}.$$

1147. $y^2 = 2px.$

解 $y' = \frac{p}{y}, y'' = -\frac{p}{y^2}y' = -\frac{p^2}{y^3},$

$$y''' = \frac{3p^2}{y^4}y' = \frac{3p^3}{y^5} (y \neq 0).$$

1148. $x^2 - xy + y^2 = 1.$

解 对 x 微分, 得

$$2x - y - xy' + 2yy' = 0, \quad (1)$$

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}. \quad (2)$$

将(1)式两端再对 x 微分, 得

$$2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0, \quad (3)$$

将(2)式所得 y' 代入(3)式, 得

$$y'' = \frac{6}{(x - 2y)^3}. \quad (4)$$

将(3)式两端对 x 微分, 得

$$-3y'' - xy''' + 6y'y'' + 2yy''' = 0, \quad (5)$$

将(2)式及(4)式代入(5)式, 得

$$y''' = \frac{54x}{(x - 2y)^5} (x \neq 2y).$$

求 y'_x 及 y''_x , 设:

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4.$

解 对 x 微分, 得

$$2yy' + \frac{2y'}{y} = 4x^3, \quad (1)$$

再对 x 微分, 得

$$2y'^2 + 2yy'' + \frac{2y''}{y} - \frac{2y'^2}{y^2} = 12x^2. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式得

$$y' = \frac{2x^3 y}{1 + y^2},$$

$$y'' = \frac{2x^2 y}{(1 + y^2)^3} [3(1 + y^2)^2 + 2x^4(1 - y^2)].$$

1150. $\sqrt{x^2 + y^2} = ae^{\operatorname{arctg} \frac{y}{x}} (a > 0).$

解 取对数得

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln a + \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

对 x 微分, 得

$$\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2},$$

于是

$$y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

将上式对 x 微分, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(1+y')(x-y) - (1-y')(x+y)}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x \cdot \frac{x+y}{x-y} - 2y}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3} \quad (x \neq y, x \neq 0). \end{aligned}$$

1151. 设函数 $f(x)$ 当 $x \leq x_0$ 时有定义且可微分两次. 应当如何选择系数 a, b 及 c , 使函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{若 } x \leq x_0, \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{若 } x > x_0 \end{cases}$$

是可微分两次的函数?

解 按题设 $F'(x)$ 存在, 所以 $F(x)$ 在点 x_0 连续, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} F(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} F(x) = F(x_0),$$

也即

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0+0} [a(x-x_0)^2 \\ &+ b(x-x_0) + c] = f(x_0). \end{aligned}$$

于是, $c = f(x_0)$. 其次, 由 $F'(x_0-0) = F'(x_0+0)$ 得

$$f'(x_0) = [2a(x-x_0) + b] \Big|_{x=x_0} = b,$$

再由 $F''(x_0-0) = F''(x_0+0)$ 得

$$f''(x_0) = 2a,$$

于是

$$a = \frac{1}{2} f''(x_0).$$

1152. 点作直线运动的规律为

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

求其运动的速度和加速度. 在 $t = 2$ 的时刻, 速度与加速度等于甚么?

解 速度

$$v = \frac{ds}{dt} = 20 - 10t, v|_{t=2} = 0;$$

而加速度

$$j = \frac{d^2s}{dt^2} = -10, j|_{t=2} = -10.$$

1153. 点 $M(x, y)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = a^2$ 均匀地运动, 每 T 秒走完一圈. 求点 M 在 Ox 轴上的射影之速度 v 及加速度 j , 设 $t = 0$ 时点的位置为 $M_0(a, 0)$.

解 设 M 点的坐标为 (x, y) , 由于 $\angle M_0OM = \frac{2\pi}{T}t$, 从而

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

于是速度和加速度分别为

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi a}{T} \sin \frac{2\pi}{T}t,$$

$$j = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2 a}{T^2} \cos \frac{2\pi}{T}t.$$

1154. 质点 $M(x, y)$ 在铅直平面 Oxy 内以速度 v_0 沿与水平面成 α 角的方向抛去. 建立(空气的阻力略去不计)运动的方程并计算速度 v 加速度 j 的大小及运动的轨道. 最大的高度和射程等于多少?

解 若不考虑空气的阻力,则有

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \alpha, \\ y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2. \end{cases}$$

此即运动方程. 化为直角坐标方程,得

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

即轨道为一抛物线. 速度

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + (v_0 \sin \alpha - gt)^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2 v_0 g t \sin \alpha}, \end{aligned}$$

而加速度

$$\begin{aligned} j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{0 + (-g)^2} = g. \\ \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \end{aligned}$$

在最大高度处, $\frac{dy}{dx} = 0$. 此时

$$x = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}.$$

于是,最大高度为

$$\begin{aligned}
 H_{\max} &= \frac{v_0^2 \cos \alpha \sin \alpha}{g} \operatorname{tg} \alpha \\
 &= \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{v_0^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{g^2} \\
 &= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.
 \end{aligned}$$

上式也可从 $\frac{dy}{dt} = 0$, 解出 $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$, 再以 t 值代入 y 的表达式而得到. 在最大射程处有: $y = 0$. 于是

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

解得

$$x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

从而, 最大射程为 $\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

1155. 点运动的方程为

$x = 4\sin \omega t - 3\cos \omega t$, $y = 3\sin \omega t + 4\cos \omega t$, (ω 为常数). 求运动的轨道, 速度与加速度的大小.

解 由于

$$\begin{aligned}
 x^2 + y^2 &= 16\sin^2 \omega t + 9\cos^2 \omega t \\
 &\quad - 24\sin \omega t \cos \omega t + 9\sin^2 \omega t \\
 &\quad + 16\cos^2 \omega t + 24\sin \omega t \cos \omega t \\
 &= 25(\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = 25.
 \end{aligned}$$

所以, 运动的轨道为一以原点为中心, 5 为半径的圆.

其次,速度与加速度的大小分别为

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(4\omega\cos\omega t + 3\omega\sin\omega t)^2 + (3\omega\cos\omega t - 4\omega\sin\omega t)^2} \\
 &= 5|\omega|, \\
 j &= \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\
 &= \sqrt{(-4\omega^2\sin\omega t + 3\omega^2\cos\omega t)^2 + (-4\omega^2\cos\omega t - 3\omega^2\sin\omega t)^2} \\
 &= 5\omega^2.
 \end{aligned}$$

求下列指定的阶的导函数:

1156. $y = x(2x - 1)^2(x + 3)^3$; 求 $y^{(6)}$ 及 $y^{(7)}$.

解 y 是 x 的多项式, 最高次数为 6 次, 因而

$$y^{(6)} = 1 \cdot 2^2 \cdot 1^3 \cdot 6! = 4 \cdot 6! = 2880,$$

$$y^{(7)} = 0.$$

1157. $y = \frac{a}{x^m}$; 求 y''' .

解 $y' = -amx^{-m-1},$

$$y'' = am(m+1)x^{-m-2},$$

$$y''' = -am(m+1)(m+2)x^{-m-3}$$

$$= -\frac{am(m+1)(m+2)}{x^{m+3}} (x \neq 0).$$

$$\begin{aligned}
& + C_{100}^1 \cdot \left[(1-x)^{-\frac{1}{2}} \right]^{(99)} \\
& = (1+x) \cdot \frac{199!!}{2^{100}} (1-x)^{-\frac{201}{2}} \\
& \quad + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} (1-x)^{-\frac{199}{2}} \\
& = \frac{197!! \cdot (399-x)}{2^{100} (1-x)^{100} \sqrt{1-x}} (x < 1).
\end{aligned}$$

1161. $y = x^2 e^{2x}$; 求 $y^{(20)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y^{(20)} & = x^2 (e^{2x})^{(20)} + 2xC_{20}^1 \cdot (e^{2x})^{(19)} \\
& \quad + 2C_{20}^2 (e^{2x})^{(18)} \\
& = 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95).
\end{aligned}$$

1162. $y = \frac{e^x}{x}$; 求 $y^{(10)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad y^{(10)} & = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i e^x \cdot \left(\frac{1}{x} \right)^{(10-i)} \\
& = e^x \sum_{i=0}^{10} (-1)^i \frac{A_{10}^i}{x^{i+1}},
\end{aligned}$$

其中 $A_{10}^i = 10 \cdot 9 \cdots (11-i)$ 及 $A_{10}^0 = 1$.

1163. $y = x \ln x$; 求 $y^{(5)}$.

$$\text{解} \quad y' = 1 + \ln x, \quad y'' = \frac{1}{x},$$

$$y^{(5)} = -\frac{3!}{x^4} (x > 0).$$

1164. $y = \frac{\ln x}{x}$; 求 $y^{(5)}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{1 - \ln x}{x^2}, \\
y'' &= \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4} \\
&= -\frac{3 - 2\ln x}{x^3}, \\
y''' &= -\frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2(3 - 2\ln x)}{x^6} \\
&= \frac{11 - 6\ln x}{x^4}, \\
y^{(4)} &= \frac{-\frac{6}{x} \cdot x^4 - 4x^3(11 - 6\ln x)}{x^8} \\
&= -\frac{50 - 24\ln x}{x^5}, \\
y^{(5)} &= -\frac{-\frac{24}{x} \cdot x^5 - 5x^4(50 - 24\ln x)}{x^{10}} \\
&= \frac{274 - 120\ln x}{x^6} (x > 0).
\end{aligned}$$

1165. $y = x^2 \sin 2x$; 求 $y^{(50)}$

$$\begin{aligned}
\text{解 } y^{(50)} &= x^2 (\sin 2x)^{(50)} + C_{50}^1 \cdot 2x \cdot (\sin 2x)^{(49)} \\
&\quad + 2C_{50}^2 (\sin 2x)^{(48)} \\
&= 2^{50} x^2 \sin \left(2x + \frac{50}{2} \pi \right) \\
&\quad + 100x \cdot 2^{49} \sin \left(2x + \frac{49}{2} \pi \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{50 \cdot 49}{1 \cdot 2} \cdot 2^{49} \cdot \sin\left(2x + \frac{48}{2}\pi\right) \\
& = 2^{50}(-x^2 \sin 2x + 50x \cos 2x \\
& \quad + \frac{1225}{2} \sin 2x).
\end{aligned}$$

1166. $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$, 求 y''' .

解 $y''' = \cos 3x \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'''$

$$\begin{aligned}
& + C_3^1 (\cos 3x)' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)'' \\
& + C_3^2 (\cos 3x)'' \left(\frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \right)' \\
& + (\cos 3x)''' \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1-3x}} \\
& = -\frac{28}{3^3} (-3)^3 \cdot \frac{\cos 3x}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \\
& \quad + 3(-3 \sin 3x) \cdot \left(\frac{4}{3^2} \right) (-3)^2 \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} + 3 \cdot (-3^2 \cos 3x) \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \\
& \quad \cdot (-3) \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} + 3^3 \sin 3x \\
& \quad \cdot \frac{1}{(1-3x)^{\frac{1}{3}}} \\
& = \frac{28 - 27(1-3x)^2}{(1-3x)^{\frac{10}{3}}} \cos 3x
\end{aligned}$$

$$+ \frac{27(1-3x)^2 - 36}{(1-3x)^{\frac{7}{3}}} \sin 3x \left(x \neq \frac{1}{3} \right).$$

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; 求 $y^{(10)}$.

解 利用三角函数和, 差与其积的互化公式, 将 y 化简得

$$y = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 2x.$$

于是,

$$\begin{aligned} y^{(10)} &= \frac{1}{4} \cdot 4^{10} \sin \left(4x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \cdot 6^{10} \sin \left(6x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \cdot 2^{10} \sin \left(2x + \frac{10}{2}\pi \right) \\ &= -2^{18} \sin 4x + 2^8 \cdot 3^{10} \sin 6x - 2^8 \sin 2x. \end{aligned}$$

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; 求 $y^{(100)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(100)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(100)} + C_{100}^1 (\operatorname{sh} x)^{(99)} \\ &= x \operatorname{sh} x + 100 \operatorname{ch} x. \end{aligned}$$

1169. $y = e^x \cos x$; 求 $y^{(4)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y' &= e^x (\cos x - \sin x), \\ y'' &= e^x [(\cos x - \sin x) + (-\sin x - \cos x)] \\ &= -2e^x \sin x, \\ y''' &= -2e^x (\sin x + \cos x), \\ y^{(4)} &= -2e^x [(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)] \end{aligned}$$

$$= -4e^x \cos x.$$

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; 求 $y^{(6)}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \ln x \\ &= \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \cos 2x \cdot \ln x. \\ y^{(6)} &= \frac{(-1)^5}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{x^6} \\ &= \frac{1}{2} (\cos 2x \cdot \ln x)^{(6)} \\ &= -\frac{60}{x^6} + \left(\frac{144}{x^5} - \frac{160}{x^3} + \frac{96}{x} \right) \sin 2x \\ &\quad + \left(\frac{60}{x^6} - \frac{180}{x^4} + \frac{120}{x^2} + 32 \ln x \right) \cos 2x. \end{aligned}$$

于下列各例中, 视 x 为自变数, 求指定的阶的微分.

1171. $y = x^5$; 求 $d^5 y$.

$$\text{解 } d^5 y = 5! dx^5 = 120 dx^5.$$

1172. $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 求 $d^3 y$.

$$\begin{aligned} \text{解 } d^3 y &= \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{3}{2} \right) \left(-\frac{5}{2} \right) x^{-\frac{7}{2}} dx^3 \\ &= -\frac{15}{8x^3 \cdot \sqrt{x}} dx^3 \quad (x > 0). \end{aligned}$$

1173. $y = x \cos 2x$; 求 $d^{10} y$.

$$\begin{aligned} \text{解 } d^{10} y &= (x \cos 2x)^{(10)} dx^{10} \\ &= \left[2^{10} x \cos \left(2x + \frac{10\pi}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10 \cdot 2^9 \cos\left(2x + \frac{9}{2}\pi\right) dx^{10} \\
& = -1024(x\cos 2x + 5\sin 2x)dx^{10}.
\end{aligned}$$

1174. $y = e^x \ln x$; 求 $d^4 y$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad d^4 y &= (e^x \ln x)^{(4)} dx^4 \\
&= e^x \left(\ln x + \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} + \frac{8}{x^3} - \frac{6}{x^4} \right) dx^4.
\end{aligned}$$

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; 求 $d^6 y$.

$$\text{解} \quad d^6 y = (\cos x \cdot \operatorname{ch} x)^{(6)} dx^6 = 8 \sin x \operatorname{sh} x dx^6.$$

设 u 为 x 的可微分足够多次的函数, 于下列各例中求指定的阶的微分.

1176. $y = u^2$; 求 $d^{10} y$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad d^{10} y &= d^{10}(u \cdot u) = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i d^{10-i} u \cdot d^i u \\
&= u d^{10} u + 10 d^9 u \cdot du + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^8 u \cdot d^2 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^7 u d^3 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^6 u d^4 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (d^5 u)^2 \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} d^4 u d^6 u \\
&\quad + \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} d^3 u d^7 u + \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} d^2 u d^8 u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 10dud^9u + ud^{10}u \\
& = 2ud^{10}u + 20dud^9u + 90d^2ud^8u \\
& \quad + 240d^3ud^7u + 420d^4ud^6u + 252(d^5u)^2.
\end{aligned}$$

1177. $y = e^u$; 求 d^4y .

解 $dy = e^u du,$

$$d^2y = e^u du^2 + e^u d^2u,$$

$$d^3y = e^u [(du^3 + dud^2u) + d(du^2) + d^3u]$$

$$= e^u (du^3 + 3dud^2u + d^3u),$$

$$d^4y = e^u [(du^4 + 3du^2d^2u + dud^3u)$$

$$+ d(du^2 \cdot du) + 3d(dud^2u) + d^4u]$$

$$= e^u (du^4 + 6du^2d^2u + 3d^2u^2 + 4dud^3u$$

$$+ d^4u).$$

1178. $y = \ln u$; 求 d^3y .

解 $dy = \frac{1}{u} du,$

$$d^2y = -\frac{1}{u^2} du^2 + \frac{1}{u} d^2u,$$

$$d^3y = \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{2}{u^2} dud^2u - \frac{1}{u^2} d^2u du$$

$$+ \frac{1}{u} d^3u$$

$$= \frac{2}{u^3} du^3 - \frac{3}{u^2} dud^2u + \frac{1}{u} d^3u.$$

1179. 视 x 为某个自变数的函数, 由函数 $y = f(x)$ 求 d^2y, d^3y 及 d^4y .

解 $dy = f'(x)dx$

$$d^2y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x$$

$$d^3y = f'''(x)dx^3 + 3f''(x)dx d^2x + f'(x)d^3x,$$

$$\begin{aligned} d^4y &= f^{(4)}(x)dx^4 + 3f'''(x)dx^2 d^2x \\ &\quad + 3f'''(x)dx^2 d^2x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + dx d^3x + f''(x)dx d^3x + f'(x)d^4x \\ &= f^{(4)}(x)dx^4 + 6f'''(x)dx^2 d^2x \\ &\quad + 4f''(x)dx d^3x + 3f''(x)(d^2x)^2 \\ &\quad + f'(x)d^4x. \end{aligned}$$

1180. 以变量 x 和 y 的逐次微分来表示函数 $y = f(x)$ 的导函数 y'' 及 y''' , 但不假定 x 为自变量.

解 $y' = \frac{dy}{dx},$

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^3},$$

$$y''' = \frac{d\left(\frac{dx d^2y - dy d^2x}{dx^3}\right)}{dx}$$

$$= \frac{dx \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^3x & d^3y \end{vmatrix} - 3d^2x \begin{vmatrix} dx & dy \\ d^2x & d^2y \end{vmatrix}}{dx^5}.$$

1181. 证明: 函数

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' + y = 0.$$

证 $y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x,$

$$y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x = -y,$$

所以

$$y'' + y = 0.$$

1182. 证明: 函数

$$y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x,$$

其中 C_1 及 C_2 为任意的常数, 满足方程

$$y'' - y = 0.$$

证 $y' = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x,$

$$y'' = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x = y,$$

所以

$$y'' - y = 0.$$

1183. 证明: 函数

$$- C_1 \sin(\ln x)]\},$$

于是,

$$\begin{aligned} & x^2 y'' + (1 - 2n)xy' + (1 + n^2)y \\ &= x^n \{(n^2 - n - 1)[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ (2n - 1)[C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)]\} \\ &+ (1 - 2n)x^n \{n[C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &+ [C_2 \cos(\ln x) - C_1 \sin(\ln x)]\} \\ &+ (1 + n^2)x^n [C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

1185. 证明: 函数

$$\begin{aligned} y &= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

其中 C_1, C_2, C_3 及 C_4 为任意常数, 满足方程

$$y^{(4)} + y = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } y' &= e^{\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{C_1}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{C_1}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\ &+ e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(-\frac{C_3}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{C_4}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_3}{\sqrt{2}} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& + \frac{C_4}{\sqrt{2}} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \Big), \\
y'' = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} & \left(\frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\
& - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& - \frac{C_1}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_2}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& \left. - \frac{C_1}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_2}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(\frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right. \\
& + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& + \frac{C_3}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \\
& \left. - \frac{C_3}{2} \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{C_4}{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
= e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} & \left(C_2 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_1 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(C_3 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \\
y^{(4)} = (y'')'' = e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} & \left(-C_1 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - C_2 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \Big) \\
& + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \left(- C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} - C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \\
& = -y,
\end{aligned}$$

于是,

$$y^{(4)} + y = 0.$$

1186. 证明:若函数 $f(x)$ 有 n 阶导函数,则

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

证 每求一次导函数,均要乘以因子 $(ax+b)' = a$,
所以.

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. 若 $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, 求 $P^{(n)}(x)$.

$$\text{解 } P'(x) = a_0 n x^{n-1} + a_1 (n-1) x^{n-2} + \dots + a_{n-1}$$

$$P''(x) = a_0 n(n-1) x^{n-2} + a_1 (n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$+ \dots + a_{n-2}$$

.....

$$P^{(n)}(x) = n! a_0.$$

求 $y^{(n)}$, 设:

$$1188. y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\text{解 } y' = \frac{a(cx+d) - c(ax+b)}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2};$$

$$y'' = -\frac{2c(ad-bc)}{(cx+d)^3};$$

利用数学归纳法,可证得

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!}{(cx+d)^{n+1}} \\ \left(x \neq -\frac{d}{c}, c \neq 0\right).$$

事实上,对于 $n=2$ 等式成立,设对于 n 等式成立,则对于 $n+1$ 有

$$y^{(n+1)} = \frac{-(-1)^{n-1}c^{n-1}(ad-bc)n!(n+1)(cx+d)^n \cdot c}{(cx+d)^{2(n-1)}} \\ = \frac{(-1)^{(n+1)-1}c^{(n+1)-1}(ad-bc)(n+1)!}{(cx+d)^{(n+1)+1}}$$

即对于 $n+1$ 等式也成立,于是得证.

$$1189. y = \frac{1}{x(1-x)}.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

$$y^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} + \left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)} \\ = n! \left[\frac{(-1)^n}{x^{n+1}} + \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \right] \\ (x \neq 0, x \neq 1).$$

$$1190. y = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$\text{解 } y = \frac{1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

$(x \neq 1, x \neq 2).$

1191. $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}.$

解 $y^{(n)} = \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \left(-\frac{5}{2}\right) \cdots$
 $\left(-\frac{2n-1}{2}\right) (-2)^n (1-2x)^{-\frac{2n+1}{2}}$
 $= \frac{(2n-1)!!}{(1-2x)^{n+\frac{1}{2}}} \left(x < \frac{1}{2}\right).$

1192. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}.$

解 $y = \frac{(x+1) - 1}{\sqrt[3]{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{3}} - (1+x)^{-\frac{1}{3}}.$

$$y^{(n)} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots$$

$$\left(-\frac{3n-5}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n-2}{3}}$$

$$- \left(-\frac{1}{3}\right) \left(-\frac{4}{3}\right) \cdots$$

$$\left(-\frac{3n-2}{3}\right) (1+x)^{-\frac{3n+1}{3}}$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-5)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}} [2(1+x)$$

$$+ (3n-2)]$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-5)(3n+2x)}{3^n (1+x)^{n+\frac{1}{3}}}$$

$$(n \geq 2; x \neq -1).$$

1193. $y = \sin^2 x.$

解 $y' = 2\sin x \cos x = \sin 2x,$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= (y')^{(n-1)} = (\sin 2x)^{(n-1)} \\ &= 2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &= -2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

1194. $y = \cos^2 x.$

解 $y' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x,$

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= -(\sin 2x)^{(n-1)} \\ &= -2^{n-1} \sin\left(2x + \frac{n-1}{2}\pi\right) \\ &= 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{n}{2}\pi\right). \end{aligned}$$

1195. $y = \sin^3 x.$

解 $y = \sin x \sin^2 x = \frac{1}{2} \sin x (1 - \cos 2x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \sin x - \frac{1}{2} \sin x \cos 2x \\ &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x. \end{aligned}$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1196. $y = \cos^3 x.$

解 $y = \cos x \cos^2 x = \frac{1}{2} \cos x (1 + \cos 2x)$

$$= \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2} \cos x \cos 2x$$

$$= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x.$$

$$y^{(n)} = \frac{3}{4} \cos\left(x + \frac{n}{2}\pi\right) + \frac{3^n}{4} \cos\left(3x + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1197. $y = \sin ax \sin bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x - \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a-b)^n \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$- \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1198. $y = \cos ax \cos bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos(a-b)x + \frac{1}{2} \cos(a+b)x.$

$$y^{(n)} = \frac{(a-b)^n}{2} \cos\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+ \frac{1}{2} (a+b)^n \cos\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1199. $y = \sin ax \cos bx.$

解 $y = \frac{1}{2} \sin(a+b)x + \frac{1}{2} \sin(a-b)x,$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (a+b)^n \sin\left[(a+b)x + \frac{n}{2}\pi\right]$$

$$+ \frac{1}{2} (a-b)^n \sin\left[(a-b)x + \frac{n}{2}\pi\right].$$

1200. $y = \sin^2 a x \cos b x.$

解 $y = \frac{1}{2} \cos b x (1 - \cos 2 a x)$
 $= \frac{1}{2} \cos b x - \frac{1}{4} \cos (2 a + b) x$
 $- \frac{1}{4} \cos (2 a - b) x.$

$y^{(n)} = \frac{1}{2} b^n \cos \left(b x + \frac{n}{2} \pi \right)$
 $- \frac{1}{4} (2 a + b)^n \cos \left[(2 a + b) x + \frac{n}{2} \pi \right]$
 $- \frac{1}{4} (2 a - b)^n \cos \left[(2 a - b) x + \frac{n}{2} \pi \right].$

1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 $y = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2 x = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4 x)$
 $= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4 x.$

$y^{(n)} = 4^{n-1} \cos \left(4 x + \frac{n}{2} \pi \right).$

1202. $y = x \cos a x.$

解 $y^{(n)} = x (\cos a x)^{(n)} + n (\cos a x)^{(n-1)}$
 $= a^n x \cos \left(a x + \frac{n}{2} \pi \right)$
 $+ n a^{n-1} \cos \left(a x + \frac{n-1}{2} \pi \right)$
 $= a^n x \cos \left(a x + \frac{n}{2} \pi \right)$

$$+ na^{n-1} \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1203. $y = x^2 \sin ax.$

解
$$y^{(n)} = a^n x^2 \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$+ 2na^{n-1} x \sin\left(ax + \frac{n-1}{2}\pi\right)$$

$$+ n(n-1)a^{n-2} \sin\left(ax + \frac{n-2}{2}\pi\right)$$

$$= a^n \left[x^2 - \frac{n(n-1)}{a^2} \right] \sin\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right)$$

$$- 2na^{n-1} x \cos\left(ax + \frac{n}{2}\pi\right).$$

1204. $y = (x^2 + 2x + 2)e^{-x}.$

解
$$y^{(n)} = (-1)^n (x^2 + 2x + 2)e^{-x}$$

$$+ 2(-1)^{n-1} (x+1)e^{-x} \cdot n$$

$$+ (-1)^{n-2} n(n-1)e^{-x}$$

$$= (-1)^n e^{-x} [x^2 - 2(n-1)x$$

$$+ (n-1)(n-2)].$$

1205. $y = \frac{e^x}{x}.$

解
$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k e^x \left(\frac{1}{x}\right)^k$$

$$= e^x \left\{ \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{x^{k+1}} \right\}.$$

1206. $y = e^x \cos x.$

1209. $y = e^{ax}P(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项式.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(n)} &= e^{ax} [a^n P(x) + C_n^1 a^{n-1} P'(x) \\ &\quad + \cdots + P^{(n)}(x)]. \end{aligned}$$

1210. $y = x \operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } y^{(n)} &= x(\operatorname{sh} x)^{(n)} + n(\operatorname{sh} x)^{(n-1)} \\ &= \frac{x}{2} [e^x - (-1)^n e^{-x}] \\ &\quad + \frac{n}{2} [e^x - (-1)^{n-1} e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)e^x - (-1)^n (x-n)e^{-x}] \\ &= \frac{1}{2} [(x+n)(\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x) \\ &\quad - (-1)^n (x-n)(\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x)] \\ &= \frac{1}{2} \{ [(x+n) - (-1)^n (x-n)] \operatorname{ch} x \\ &\quad + [(x+n) + (-1)^n (x-n)] \operatorname{sh} x \}. \end{aligned}$$

1211. 求 $d^n y$, 设 $y = x^n e^x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } d^n y &= y^{(n)} dx^n \\ &= e^x \left[x^n + n^2 x^{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{2!} x^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + n! \right] dx^n. \end{aligned}$$

1212. 求 $d^n y$, 设 $y = \frac{\ln x}{x}$.

$$\text{解 } d^n y = y^{(n)} dx^n$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\left(\frac{1}{x} \right)^{(n)} \ln x + n \cdot \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} \right)^{(n-1)} \right. \\
&\quad + C_n^2 \left(-\frac{1}{x^2} \right) \left(\frac{1}{x} \right)^{(n-2)} \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{x} (\ln x)^{(n)} \left. \right] dx^n \\
&= \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \left[\ln x - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] dx^n (x > 0).
\end{aligned}$$

1213. 证明等式:

$$\begin{aligned}
(1) & [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} \\
&= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \sin(bx + c + n\varphi)
\end{aligned}$$

及 (2) $[e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)}$

$$= e^{ax} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \cos(bx + c + n\varphi),$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

证 (1) $[e^{ax} \sin(bx + c)]'$

$$\begin{aligned}
&= e^{ax} [a \sin(bx + c) + b \cos(bx + c)] \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(bx + c) \right. \\
&\quad \left. + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(bx + c) \right] \\
&= \sqrt{a^2 + b^2} e^{ax} \sin(bx + c + \varphi),
\end{aligned}$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 及 $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,
 $[e^{ax} \sin(bx + c)]^n$

$$= (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + 2\varphi),$$

.....

利用数学归纳法可证得

$$\begin{aligned} & [e^{ax} \sin(bx + c)]^{(n)} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin(bx + c + n\varphi). \end{aligned}$$

(2) 同理可证

$$\begin{aligned} & [e^{ax} \cos(bx + c)]^{(n)} \\ &= (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \cos(bx + c + n\varphi). \end{aligned}$$

1214. 求 $y^{(n)}$, 设:

$$(a) y = \operatorname{ch} ax \cos bx; \quad (b) y = \operatorname{ch} ax \sin bx;$$

$$(B) y = \operatorname{sh} ax \cos bx; \quad (r) y = \operatorname{sh} ax \sin bx.$$

解 (a) $y = \frac{1}{2} e^{ax} \cos bx + \frac{1}{2} e^{-ax} \cos bx,$

利用 1213 题(2) 的结果, 得

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} [e^{ax} \cos(bx + n\varphi) \\ &\quad + e^{-ax} \cos(bx + n\pi - n\varphi)] \\ &= \frac{1}{2} (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ e^{ax} \left[\cos \left(bx \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{n}{2}\pi \right) \cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. - \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + e^{-ax} \left[\cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \cos \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \left. + \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right] \Big\} \\
& = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \cdot \cos \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) - \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \\
& \cdot \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \Big\} \\
& = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \quad \cdot \operatorname{ch} ax \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \\
& \quad \left. - \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \operatorname{sh} ax \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right]
\end{aligned}$$

同样方法可求得：

$$\begin{aligned}
(6) y^{(n)} & = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\cos \left(n\varphi - \frac{n\pi}{2} \right) \operatorname{ch} ax \right. \\
& \quad \cdot \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) + \sin \left(n\varphi - \frac{n}{2}\pi \right) \operatorname{sh} ax \\
& \quad \left. \cdot \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{B}) y^{(n)} & = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[\sin n\varphi \operatorname{ch} ax \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \quad \left. + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{r}) y^{(n)} & = (a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}} \left[-\sin n\varphi \operatorname{ch} ax \cos \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right. \\
& \quad \left. + \cos n\varphi \operatorname{sh} ax \sin \left(bx + \frac{n}{2}\pi \right) \right].
\end{aligned}$$

其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

1215. 将函数

$$f(x) = \sin^{2p} x,$$

其中 p 为自然数, 化为三角多项式:

$$f(x) = \sum_{k=0}^p A_k \cos 2kx,$$

以求 $f^{(n)}(x)$.

解 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则

$$\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$$

其中 \bar{t} 为 t 的共轭复数.

于是

$$\begin{aligned} \sin^{2p} x &= \frac{1}{(2i)^{2p}} (t - \bar{t})^{2p} \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} C_{2p}^k t^{2p-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= (-1)^p \frac{1}{(2i)^{2p}} C_{2p}^p + \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k \\ &\quad \cdot \cos(2p - 2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} (\sin^{2p} x)^{(n)} &= \frac{2}{(2i)^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} C_{2p}^k (-1)^k (2p \\ &\quad - 2k)^n \cos \left[(2p - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p+k} 2^{n-2p+1} (p-k)^n \\ &\quad C_{2p}^k \cos \left[(2p - 2k)x + \frac{n}{2}\pi \right]. \end{aligned}$$

1216. 设:

$$(a) f(x) = \sin^{2p+1} x; \quad (b) f(x) = \cos^{2p} x;$$

$$(B) f(x) = \cos^{2p+1} x,$$

其中 p 为正整数, 求 $f^{(n)}(x)$.

解 (a) 设 $t = \cos x + i \sin x$, 则

$$\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

$$\begin{aligned} \sin^{2p+1} x &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k t^{2p+1-k} (-1)^k \bar{t}^k \\ &= \frac{1}{(2i)^{2p+1}} \sum_{k=0}^{2p+1} C_{2p+1}^k (-1)^k [\cos(2p+1-2k)x \\ &\quad - i \sin(2p+1-2k)x] \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} 2^{-2p} C_{2p+1}^k \sin(2p+1-2k)x. \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p+k} C_{2p+1}^k \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} \\ &\quad \cdot \sin\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right] \end{aligned}$$

类似 1215 题及本题(a)的方法, 可求得:

$$\begin{aligned} (b) f^{(n)}(x) &= (\cos^{2p} x)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} 2^{n-2p+1} (p-k)^n C_{2p}^k \cos\left[(2p-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B) f^{(n)}(x) &= (\cos^{2p+1} x)^{(n)} \\ &= \sum_{k=0}^p \frac{(2p+1-2k)^n}{2^{2p}} C_{2p+1}^k \cos\left[(2p+1-2k)x + \frac{n}{2}\pi\right]; \end{aligned}$$

$$- 2k)x + \frac{n}{2}\pi\}.$$

1217. 利用恒等式

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i} \right)$$

证明

$$\left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(1 + x^2)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n + 1)\operatorname{arccctg}x].$$

证 将复数 $x + i$ 及 $x - i$ 化成下列形式:

$$x + i = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

$$x - i = r(\cos\theta - i\sin\theta).$$

其中 $r = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, $\theta = \operatorname{arccctg}x$.

于是

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)^{(n)} &= \frac{1}{2i} \left[\left(\frac{1}{x - i} \right)^{(n)} - \left(\frac{1}{x + i} \right)^{(n)} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{(-1)^n n!}{(x - i)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x + i)^{n+1}} \right] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2 + 1)^{n+1}} [(x + i)^{n+1} \\ &\quad - (x - i)^{n+1}] \\ &= \frac{(-1)^n n!}{2i(x^2 + 1)^{n+1}} \{ r^{n+1} [\cos(n + 1)\theta \\ &\quad + i\sin(n + 1)\theta] - r^{n+1} [\cos(n + 1)\theta \\ &\quad - i\sin(n + 1)\theta] \} \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{n+1}} r^{n+1} \sin(n + 1)\theta \\ &= \frac{(-1)^n n!}{(x^2 + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n + 1)\operatorname{arccctg}x], \end{aligned}$$

所以,

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \sin[(n+1)\operatorname{arctg} x].$$

1218. 求函数 $f(x) = \operatorname{arctg} x$ 的 n 阶导函数.

解 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

利用 1217 题的结果, 得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin[n \operatorname{arctg} x] \\ &= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \operatorname{arctg} \frac{1}{x}\right) \\ &\quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

求 $f^{(n)}(0)$, 设:

1219. (a) $f(x) = \frac{1}{(1-2x)(1+x)}$;

(b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x}}$.

解 (a) $f(x) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1-2x} \right)$.

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{3} \left[\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}} + \frac{n! 2^{n+1}}{(1-2x)^{n+1}} \right].$$

所以

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{3} [(-1)^n + 2^{n+1}].$$

(b) $f(x) = -\sqrt{1-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

于是,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(2n-3)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n-1}{2}}}$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{2^n} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\frac{2n+1}{2}}}.$$

所以

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &= \frac{(2n-3)!!}{2^n} + \frac{(2n-1)!!}{2^n} \\ &= \frac{n(2n-3)!!}{2^{n-1}} \quad (n > 1). \end{aligned}$$

1220. (a) $f(x) = x^2 e^{ax}$; (b) $f(x) = \arctan x$;
 (B) $f(x) = \arcsin x$.

解 (a) $f^{(n)}(x) = x^2 a^n e^{ax} + 2nxa^{n-1}e^{ax}$
 $+ n(n-1)a^{n-2}e^{ax},$

$$f^{(n)}(0) = n(n-1)a^{n-2};$$

(b) 利用 1218 题的结果, 得

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= 0 \text{ 及 } f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)! \\ &\quad (k = 0, 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$(B) y' = f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

若以添加下标“0”表示在 $x=0$ 时的导数值, 则得

$$y'_0 = f'(0) = 1, y''_0 = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' = 0.$$

对上式应用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} (1-x^2)y^{(n+2)} - 2nxy^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)} \\ - xy^{(n+1)} - ny^{(n)} = 0. \end{aligned}$$

在上式中, 令 $x=0$, 则有

$$y_0^{(n+2)} - n(n-1)y_0^{(n)} - ny_0^{(n)} = 0,$$

令 $x = 0$, 即得

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于 $y_0' = 0$, 故 $y_0^{(2k-1)} = f^{(2k-1)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$;

又由于 $y_0'' = -m^2$, 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k)} &= f^{(2k)}(0) = \dots [m^2 - (2k-2)^2] y_0^{(2k-2)} \\ &= \{- [m^2 - (2k-2)^2]\} \\ &\quad \cdot \{- [m^2 - (2k-4)^2]\} y_0^{(2k-4)} \\ &= \dots \\ &= (-1)^{k-1} [m^2 - (2k-2)^2] \\ &\quad [m^2 - (2k-4)^2] \dots (m^2 - 2^2) y_0'' \\ &= (-1)^k m^2 (m^2 - 2^2) \dots [m^2 - (2k-2)^2] \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

$$(6) y' = f'(x) = \frac{m}{\sqrt{1-x^2}} \cos(\operatorname{arcsin} x),$$

$$\begin{aligned} y'' = f''(x) &= \frac{m^2}{1-x^2} \sin(\operatorname{arcsin} x) \\ &\quad + \frac{mx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \cos(\operatorname{arcsin} x). \end{aligned}$$

于是,

$$y_0' = f'(0) = m, y_0'' = f''(0) = 0,$$

并且有

$$(1-x^2)y'' - xy' + m^2y = 0.$$

这与本题(a)所得的方程是一样的, 因而也有与(a)同样的结果:

$$y_0^{(n+2)} + (m^2 - n^2)y_0^{(n)} = 0.$$

由于 $y_0'' = 0$, 故 $y_0^{(2k)} = f^{(2k)}(0) = 0 (k = 1, 2, \dots)$;

又由于 $y'_0 = m$, 故

$$\begin{aligned} y_0^{(2k+1)} &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= -[m^2 - (2k-1)^2]y_0^{2k-1} = \dots \\ &= (-1)^k m(m^2 - 1^2) \dots [m^2 - (2k-1)^2] \\ &\quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

1222. (a) $f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2$; (b) $f(x) = (\operatorname{arc} \sin x)^2$.

解 (a) 仍以下标带“0”者表示在 $x = 0$ 时的导数值, 应用莱布尼兹公式及 1220 题(6)的结果, 即得

$$\begin{aligned} f^{(2k-1)}(0) &= (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k-1)} \\ &= 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(0) &= (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k)} \\ &= \sum_{i=0}^{2k} C_{2k}^i (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(i)} \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2i+1)} \\ &\quad \cdot (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)_0^{(2k-2i-1)} \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} C_{2k}^{2i+1} (-1)^i (2i)! \\ &\quad \cdot (-1)^{k-i-1} (2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(2k)!}{(2i+1)!(2k-2i-1)!} \\ &\quad \cdot (2i)!(2k-2i-2)! \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \\ &\quad \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{(2i+1)(2k-2i-1)} \\ &= (-1)^{k-1} (2k)! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sum_{i=0}^{k-1} \left[\frac{1}{2k} \left(\frac{1}{2i+1} + \frac{1}{2k-2i-1} \right) \right] \\
& = (-1)^{k-1} 2(2k-1)! \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2(k-i)-1} \\
& = (-1)^{k-1} (2k-1)! \cdot \\
& \quad 2 \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2k-1} \right) (k=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

(6) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x$ 或

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 2 \arcsin x,$$

对上式两边再求导, 得

$$\sqrt{1-x^2} f''(x) - \frac{x f'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}},$$

即

$$(1-x^2) f''(x) - x f'(x) - 2 = 0.$$

应用莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned}
& (1-x^2) f^{(n+2)}(x) - 2n x f^{(n+1)}(x) \\
& - n(n-1) f^{(n)}(x) - x f^{(n+1)}(x) - n f^{(n)}(x) = 0.
\end{aligned}$$

在上式中令 $x=0$, 即得

$$f^{(n+2)}(0) - n^2 f^{(n)}(0) = 0.$$

由于 $f'(0) = 0$, 故

$$f^{(2k-1)}(0) = 0 \quad (k=1, 2, \dots);$$

又由于 $f''(0) = 2$, 故

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) & = (2k-2)^2 (2k-4)^2 \dots 2^2 f''(0) \\
& = 2^{(2k-1)} [(k-1)!]^2 (k=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

1223. 设

$$f(x) = (x - a)^n \varphi(x),$$

其中函数 $\varphi(x)$ 于 a 点的邻区内有 $(n - 1)$ 阶的连续导函数, 求 $f^{(n)}(a)$.

解 由莱布尼兹公式, 得

$$\begin{aligned} f^{(n-1)}(x) &= (x - a)^n \varphi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_{n-1}^1 n(x - a)^{n-1} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-2}^{n-2} n(n-1) \dots 3(x - a)^2 \varphi'(x) \\ &\quad + n!(x - a) \varphi(x). \end{aligned}$$

于是, $f^{(n-1)}(a) = 0$.

按导数定义, 即得

$$\begin{aligned} f^{(n)}(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} [(x - a)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x) \\ &\quad + C_{n-1}^1 n(x - a)^{n-2} \varphi^{(n-2)}(x) + \dots \\ &\quad + C_{n-2}^{n-2} n(n-1) \dots 3(x - a) \varphi'(x) \\ &\quad + n! \varphi(x)] \\ &= n! \varphi(a). \end{aligned}$$

1224. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n} \sin \frac{1}{x}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$$

(n 为自然数) 于点 $x = 0$ 有一直到 n 阶的导函数, 而无 $(n + 1)$ 阶导函数.

证 由莱布尼兹公式, 当 $x \neq 0$ 时得

$$f^{(m)}(x) = \left(x^{2n} \sin \frac{1}{x} \right)^{(m)}$$

$$= \sum_{i=0}^m C_m^i (x^{2\pi})^{m-i} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)}$$

首先指出, 有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(i)} &= \sum_{k=1}^{i-1} \left[a_k x^{-(i+k)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right] \\ &\quad + (-x^{-2})^i \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2} \right), \\ &\quad (x \neq 0), \end{aligned}$$

其中 a_k 是某些常数. 现用数学归纳法证明之:

当 $i = 1$ 时, 命题显然成立;

设当 $i = N$ 时, 命题成立, 要证命题对 $i = N + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \left(\sin \frac{1}{x} \right)^{(N+1)} &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[x^{-(N+k)} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) \right], \\ &\quad + \left[(-x^{-2})^N \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) \right], \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left[-(N+k)x^{-(N+1+k)} \right. \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2} \right) + x^{-(N+k)} \\ &\quad \cdot (-x^{-2}) \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{k+1}{2}\pi \right) \left. \right] \\ &\quad + [N(-x^{-2})^{N-1} \cdot (2x^{-3}) \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N\pi}{2} \right) + (-x^{-2})^{N+1} \\ &\quad \cdot \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi \right) \left. \right] \\ &= \sum_{k=1}^{(N+1)-1} [b_k x^{-(N+1+k)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) + (-x^{-2})^{N+1} \\ & \cdot \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{N+1}{2}\pi\right), \end{aligned}$$

其中 b_k 是一些适当的常数. 于是, 命题对于一切自然数均成立.

因而, 我们有

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{i=0}^m C_m^i \cdot \frac{(2n)!}{(2n-m+i)!} x^{2n-m+i} \\ & \cdot \left[\sum_{k=1}^{i-1} a_k x^{-(i+k)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{k\pi}{2}\right) \right. \\ & \left. + (-x^{-2})^i \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{i\pi}{2}\right) \right] (x \neq 0). \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= (-1)^m x^{2(n-m)} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{m\pi}{2}\right) \\ & + O(|x|^{2(n-m)+1} (x \rightarrow 0)) \\ & (m = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (*)$$

由于

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{2n-1} \sin \frac{1}{x} = 0, \end{aligned}$$

故由 (*), 得知

$$\begin{aligned} f''(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[-x^{2n-3} \sin\left(\frac{1}{x} + \frac{\pi}{2}\right) + O(|x|^{2n-2}) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

一直推下去, 得

$$\begin{aligned}
 f^{(n)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[(-1)^{n-1} x \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{(n-1)\pi}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + O(|x|^2) \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right],
 \end{aligned}$$

在 $x = 0$ 近旁, $\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right)$ 无界且振荡, 故

$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{(-1)^n}{x} \sin \left(\frac{1}{x} + \frac{n\pi}{2} \right) + O(1) \right]$ 不存在, 因而 $f^{(n+1)}(0)$ 不存在. 证毕

1225. 证明: 函数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{若 } x \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x = 0, \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处是无穷次可微分的. 作出此函数的图形.

证 当 $x \neq 0$ 时, $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$. 下面我们指出, 对于任何自然数 n , 均有

$$f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_n \left(\frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0),$$

其中 $P_n(t)$ 是关于 t 的多项式. 现用数学归纳法证明之:

当 $n = 1$ 时, 命题显然成立;

设当 $n = k$ 时命题成立, 即 $f^{(k)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right)$,

$P_k(t)$ 是关于 t 的某多项式. 要证命题对于 $n = k + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= \left[e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right) \right]', \\ &= \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} P_k \left(\frac{1}{x} \right) + e^{-\frac{1}{x^2}} P_k' \left(\frac{1}{x} \right) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} \left\{ 2 \left(\frac{1}{x} \right)^3 P_k \left(\frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} \right)^2 P_k' \left(\frac{1}{x} \right) \right\} \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}} P_{k+1} \left(\frac{1}{x} \right), \end{aligned}$$

其中 $P_{k+1}(t)$ 是关于 t 的另一多项式.

于是, 命题对于一切自然数 n 均成立.

现在, 证明函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是无穷次可微分的. 首先, 注意到

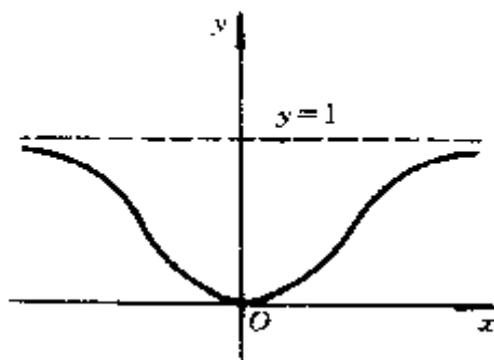


图 2.37

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = 0,$$

其中最末一式的极限求法可参看 654 题(6). 仍用此法, 设 $f^{(n)}(0) = 0$, 则可证明 $f^{(n+1)}(0) = 0$. 事实上, 有

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} P_n \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ P_n^* \left(\frac{1}{x} \right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right\} = 0,$$

($P_n^*(t) = t p_n(t)$ 也是 t 的多项式).

根据数学归纳法, 可知 $f^{(n)}(0) = 0$ 对于一切自然数 n 均成立, 即函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无穷次可微分, 且其各阶导数为零. 图象如图 2.37 所示.

1226. 证明: 契比协夫多项式

$$T_m(x) = \frac{1}{2^{m-1}} \cos(\text{arc cos } x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

满足方程式

$$(1 - x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

$$\text{证 } T_m'(x) = \frac{m}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\text{arc cos } x)$$

$$(|x| < 1),$$

$$T_m''(x) = -\frac{m^2}{2^{m-1}(1-x^2)} \cos(\text{arc cos } x) \\ + \frac{mx}{2^{m-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \sin(\text{arc cos } x).$$

于是,

$$(1 - x^2)T_m''(x) = -\frac{m^2}{2^{m-1}} \cos(\text{arc cos } x) \\ + \frac{mx}{2^{m-1} \sqrt{1-x^2}} \sin(\text{arc cos } x) \\ = -m^2T_m(x) + xT_m'(x),$$

即

$$(1 - x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0.$$

1227. 证明: 勒襄德多项式

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} [(x^2 - 1)^m]^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + (-1)C_m^{m-1}m!xe^{-x} + m!e^{-x}\} \\
& = (-1)^m x^m + (-1)^{m-1}C_m^1 m x^{m-1} \\
& \quad + \cdots + (-1)C_m^{m-1}m!x + m! \\
& = (-1)^m [x^m - m^2 x^{m-1} + \cdots \\
& \quad + (-1)^{m-1}m^2(m-1)!x + \\
& \quad (-1)^m m!]
\end{aligned}$$

其次, 设 $y = x^m e^{-x}$, 就有

$$y' = mx^{m-1}e^{-x} - x^m e^{-x},$$

于是,

$$xy' + (x - m)y = 0.$$

在上述等式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned}
& xy^{(m+2)} + (m+1)y^{(m+1)} + (x-m)y^{(m+1)} \\
& \quad + (m+1)y^{(m)} = 0
\end{aligned}$$

或

$$xy^{(m+2)} + (1+x)y^{(m+1)} + (m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 则由上式可得

$$xz'' + (1+x)z' + (m+1)z = 0. \quad (1)$$

由于 $L_m(x) = e^x \cdot z$, 故

$$L'_m(x) = e^x(z + z'), L''_m(x) = e^x(z + 2z' + z''),$$

于是

$$\begin{aligned}
& xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) \\
& = e^x \{x(z + 2z' + z'') + (1+x)(z + z') + mz\} \\
& = e^x \{xz'' + (x+1)z' + (m+1)z\}. \quad (2)
\end{aligned}$$

将(1)式代入(2)式, 即证得

$$xL''_m(x) + (1-x)L'_m(x) + mL_m(x) = 0.$$

1229. 设 $y = f(u)$ 及 $u = \varphi(x)$, 其中 $f(u)$ 及 $\varphi(x)$ 为可微分 n 次的函数.

$$\text{证明: } \frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u),$$

其中系数 $A_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 与函数 $f(u)$ 无关.

证 由于

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\varphi'(x),$$

故命题当 $n = 1$ 时成立;

设当 $n = m$ 时命题成立, 即有

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u),$$

要证命题对于 $n = m + 1$ 时也成立. 事实上, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^m A_k(x) f^{(k)}(u) \\ &= \sum_{k=1}^m \{ A'_k(x) f^{(k)}(u) \\ &\quad + A_k(x) f^{(k+1)}(u) \varphi'(x) \} \\ &= \sum_{k=1}^{m+1} B_k(x) f^{(k)}(u), \end{aligned}$$

其中, $B_1(x) = A'_1(x)$, $B_k(x) = \varphi'(x) A_{k-1}(x) + A'_k(x)$ ($k = 2, 3, \dots, m$), $B_{m+1}(x) = A_m(x) \varphi'(x)$, 它们均与 $f(u)$ 无关.

于是, 按数学归纳法得知

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \sum_{k=1}^n A_k(x) f^{(k)}(u)$$

对于一切自然数 n 均成立.

1230. 证明: 对于复合函数 $y = f(x^2)$ 的 n 阶导函数, 下面的公

式正确

$$\begin{aligned}\frac{d^n y}{dx^n} &= (2x)^n f^{(n)}(x^2) + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} f^{(n-1)}(x^2) \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} f^{(n-2)}(x^2) \\ &+ \dots\end{aligned}$$

证 当 $n=1$ 时公式成立,事实上,

$$\frac{dy}{dx} = 2xf(x^2).$$

设当 $n=m$ 时公式成立,要证公式对于 $n=m+1$ 时也成立.事实上,有

$$\begin{aligned}\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right) \\ &= 2m(2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) + (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} 2(m-2)(2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\ &\quad \cdot 2(m-4)(2x)^{m-5} f^{(m-2)}(x^2) \\ &+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \\ &\quad \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\ &= (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\ &+ \left[2m + \frac{m(m-1)}{1!} \right] (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\ &+ \left[\frac{2m(m-1)(m-2)}{1!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots \\
& - (2x)^{m+1} f^{(m+1)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m}{1!} (2x)^{m-1} f^{(m)}(x^2) \\
& + \frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{2!} \\
& \cdot (2x)^{m-3} f^{(m-1)}(x^2) + \dots
\end{aligned}$$

这正是公式对于 $n = m + 1$ 时的情形. 于是, 按数学归纳法得知, 公式对于一切自然数 n 均成立.

1231. 契比协夫-厄耳米特多项式定义如下:

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

求多项式 $H_m(x)$ 的明显的表达式.

证明: $H_m(x)$ 满足方程

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

解 设 $y = e^{-x^2}$, 则有

$$y' = (-2x)e^{-x^2} = (-1)^1(2x)^1 e^{-x^2}.$$

$$\begin{aligned}
y'' &= e^{-x^2} [(-2x)^2 - 2] \\
&= [(-1)^2(2x)^2 - 2] e^{-x^2},
\end{aligned}$$

一般地, 可用数学归纳法证明

$$\begin{aligned}
y^{(m)} &= \left[(-1)^m (2x)^m + (-1)^{m-1} \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2} \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{m-2} \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} \right. \\
&\quad \left. \cdot (2x)^{m-4} + \dots \right] e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

于是, 得

$$\begin{aligned}
H_m(x) &= (-1)^m e^{x^2} y^{(m)} \\
&= (2x)^m + \frac{m(m-1)}{1!} (2x)^{m-2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2!} (2x)^{m-4} - \dots$$

又 $y' + 2xy = 0$.

对上式两端各取 $(m+1)$ 阶导函数, 按莱布尼兹公式, 即得

$$y^{(m+2)} + 2xy^{(m+1)} + 2(m+1)y^{(m)} = 0.$$

再设 $z = y^{(m)}$, 上式就是

$$z'' + 2xz' + 2(m+1)z = 0. \quad (1)$$

由 $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} z$, 得

$$H'_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (2xz + z'),$$

$$H''_m(x) = (-1)^m e^{x^2} [(4x^2 + 2)z + 4xz' + z''].$$

从而有

$$\begin{aligned} & H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) \\ &= (-1)^m e^{x^2} \{ (4x^2 + 2)z + 4xz' + z'' - 4x^2z \\ &\quad - 2xz' + 2mz \} \\ &= (-1)^m e^{x^2} \{ z'' + 2xz' + 2(m+1)z \}. \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式代入(2)式, 即证得

$$H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

1232. 证明等式

$$(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时, 由于 $(e^{\frac{1}{x}})' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, 故等式成立.

设当 $n=k$ 时等式成立, 即有

$$(x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)} = \frac{(-1)^k}{x^{k+1}} e^{\frac{1}{x}},$$

要证等式对 $n=k+1$ 时也成立. 事实上, 有

$$(x^k e^{\frac{1}{x}})^{(k+1)} = [(x \cdot x^{k-1} e^{\frac{1}{x}})^{(k)}]'$$

$$\begin{aligned}
&= [x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}] \\
&= x(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)} + (x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&\quad + k(x^{k-1}e^{\frac{1}{x}})^{(k)} \\
&= x\left[\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}\right]' + (k+1) \cdot \frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&\quad + \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}} + \frac{(-1)^k(k+1)}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}} \\
&= \frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

于是,按数学归纳法得知

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}$$

对于一切自然数 n 均成立.

1233. 设 $\frac{d}{dx} = D$ 表示微分算子及

$$f(D) = \sum_{k=0}^n p_k(x)D^k$$

为微分符号的多项式,其中 $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) 为 x 的某连续函数.

证明:

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D + \lambda)u(x),$$

其中 λ 为常数.

证 按莱布尼兹公式,有

$$\begin{aligned}
D^k\{e^{\lambda x}u(x)\} &= [e^{\lambda x}u(x)]^{(k)} \\
&= \sum_{i=0}^k C_k^i (e^{\lambda x})^{(i)} u^{(k-i)}(x)
\end{aligned}$$

$$= e^{\lambda x} \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x).$$

另一方面,有

$$\begin{aligned} (D + \lambda)^k u(x) &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i D^{(k-i)} u(x) \\ &= \sum_{i=0}^k C_k^i \lambda^i u^{(k-i)}(x). \end{aligned}$$

因而,得

$$D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} (D + \lambda)^k u(x).$$

于是,

$$\begin{aligned} f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} &= \sum_{k=0}^n p_k(x) D^k \{e^{\lambda x} u(x)\} \\ &= e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n p_k(x) \cdot (D + \lambda)^k u(x) \\ &= e^{\lambda x} (D + \lambda) u(x), \end{aligned}$$

即

$$f(D) \{e^{\lambda x} u(x)\} = e^{\lambda x} f(D + \lambda) u(x).$$

1234. 证明:若干方程

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} = 0$$

中,令

$$x = e^t,$$

其中 t 为自变数,则此方程具有下形

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0,$$

其中 $D = \frac{d}{dt}$.

证 记 $\delta = \frac{d}{dx}$,则有

$$Dy = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = e^t \delta y \text{ 或 } \delta y = e^{-t} Dy.$$

从而对于符号 D 及 δ 有关系

$$\delta = e^{-t} D.$$

继续求得

$$\begin{aligned} \delta^2 y &= e^{-t} D[e^{-t} Dy] = e^{-t} [-e^{-t} Dy + e^{-t} D^2 y] \\ &= e^{-2t} D(D-1)y, \end{aligned}$$

一般地,可用数学归纳法证得

$$\delta^{(k)} y = e^{-kt} D(D-1)\cdots(D-k+1)y. \quad (1)$$

事实上,设公式(1)对 $k=m$ 时成立,则有

$$\begin{aligned} \delta^{(m+1)} y &= \delta(\delta^{(m)} y) \\ &= e^{-t} D[e^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-t} [-me^{-mt} D(D-1)\cdots(D-m+1)y \\ &\quad + e^{-mt} D^2(D-1)\cdots(D-m+1)y] \\ &= e^{-(m+1)t} D(D-1)\cdots[D \\ &\quad - (m+1) + 1]y, \end{aligned}$$

即公式(1)对 $k=m+1$ 时也成立. 于是,公式(1)对于一切自然数均成立.

于是,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k x^k \frac{d^k y}{dx^k} &= \sum_{k=0}^n a_k x^k \delta^{(k)} y \\ &= \sum_{k=0}^n a_k e^{kt} \cdot e^{-kt} D(D-1)\cdots(D \\ &\quad - k + 1)y = 0, \end{aligned}$$

即

$$\sum_{k=0}^n a_k D(D-1)\cdots(D-k+1)y = 0.$$

§ 6. 洛尔、拉格朗日及哥西定理

1° 洛尔定理 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在此区间内有有限的导函数 $f'(x)$; (3) $f(a) = f(b)$, 则至少存在有一个数 c 于区间 (a, b) 内, 使

$$f'(c) = 0, \text{ 其中 } a < c < b.$$

2° 拉格朗日定理 若函数 $f(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 在区间 (a, b) 内有有限的导函数, 则

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c), \text{ 其中 } a < c < b$$

(有限增量公式).

3° 哥西定理 若函数 $f(x)$ 及 $g(x)$: (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义并且是连续的; (2) 于 (a, b) 内 $f(x)$ 及 $g(x)$ 有有限的导函数 $f'(x)$ 及 $g'(x)$; (3) 当 $a < x < b$, $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$; (4) $g(a) \neq g(b)$, 则

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

其中 $a < c < b$.

1235. 检验洛尔定理对于函数

$$f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

的正确性.

解 (1) 函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 及 $[2, 3]$ 上连续;

(2) $f'(x)$ 在 $(1, 2)$ 及 $(2, 3)$ 上处处存在;

(3) $f(1) = f(2) = 0$ 及 $f(2) = f(3) = 0$.

由洛尔定理, 应该有 $1 < c_1 < 2$, $2 < c_2 < 3$ 存在, 使 $f'(c_1) = 0$, $f'(c_2) = 0$. 下面, 我们验证确有这种 c_1, c_2 存在. 易知

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 2)(x - 3) + (x - 1)(x - 3) \\ &\quad + (x - 1)(x - 2) \end{aligned}$$

$= F(b)$. 故由洛尔定理可知, 在 (a, b) 内至少存在一点 c , 使

$$F'(c) = 0.$$

而在 (a, b) 内, $F'(x) = f'(x)$, 所以

$$f'(c) = 0.$$

下设 (a, b) 为无穷区间. 若 $a = -\infty, b = +\infty$, 可设

$$x = \operatorname{tgt} \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \right),$$

则对由函数 $f(x)$ 与 $x = \operatorname{tgt}$ 组成的复合函数

$$g(t) = f(\operatorname{tgt})$$

在有穷区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ 内仿前讨论可知: 至少存在一

点 $t_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \sec^2 t_0 = 0,$$

其中 $c = \operatorname{tgt}_0$. 由于 $\sec^2 t_0 \neq 0$, 故

$$f'(c) = 0.$$

若 a 为有限数, $b = +\infty$. 则可取 $b_0 > \max \{a, 0\}$, 而令

$$x = \frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}.$$

于是, 对复合函数 $g(t) = f\left(\frac{(b_0 - a)t}{b_0 - t}\right)$ 在有穷区间 (a, b_0) 上仿前讨论, 可知: 存在 $t_0 \in (a, b_0)$ 使

$$g'(t_0) = f'(c) \cdot \frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} = 0,$$

其中 $c = \frac{(b_0 - a)t_0}{b_0 - t_0}$. 显然 $a < c < +\infty$ 由于

$$\frac{b_0(b_0 - a)}{(b_0 - t_0)^2} > 0,$$

故 $f'(c) = 0$.

对于 $a = -\infty, b$ 为有限数的情形, 可类似地进行讨论. 证毕.

1238. 设函数 $f(x)$: (1) 于闭区间 $[x_0, x_n]$ 上有定义且有 $(n-1)$ 阶的连续导函数 $f^{(n-1)}(x)$; (2) 于区间 (x_0, x_n) 内有 n 阶导函数 $f^{(n)}(x)$; (3) 有下面的等式成立

$$f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \cdots < x_n).$$

证明: 在区间 (x_0, x_n) 内最少有一点 ξ , 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

证 在每一个闭区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{k-1}, x_k],$$

$$\cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

上, 函数 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此, 存在 n 个点

$$x'_1, x'_2, \cdots, x'_k, \cdots, x'_n,$$

其中 $x'_k \in (x_{k-1}, x_k) (k = 1, 2, \cdots, n)$, 使

$$f'(x'_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

于是, 在每个区间 $[x'_k, x'_{k+1}] (k = 1, 2, \cdots, n-1)$ 上, 函数 $f'(x)$ 满足洛尔定理的条件. 因此存在点 x''_k 属于 $[x'_k, x'_{k+1}] (k = 1, 2, \cdots, n-1)$, 使

$$f''(x''_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, n-1).$$

继续上述步骤, 经 $(n-1)$ 次后, 得出一个区间 $[x''_{n-1}, x''_1] \subset (x_0, x_n)$, 满足 $f^{(n-1)}(x''_k) = 0 (k = 1, 2)$.

于是在此区间上, 函数 $f^{(n-1)}(x)$ 满足洛尔定理的条件.

所以,至少存在一点 $\xi(x_1^{n-1}, x_2^{n-1})$, 使

$$f^{(n)}(\xi) = 0.$$

1239. 设函数 $f(x)$: (1) 于闭区间 $[a, b]$ 上有定义且有 $(p + q)$ 阶的连续导函数 $f^{(p+q)}(x)$; (2) 在区间 (a, b) 内有 $(p + q + 1)$ 阶的导函数 $f^{(p+q+1)}(x)$; (3) 有下面的等式成立:

$$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(p)}(a) = 0$$

$$\text{及 } f(b) = f'(b) = \cdots = f^{(q)}(b) = 0$$

证明: 在此种情形下

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0,$$

其中 c 为区间 (a, b) 内的某点.

证 若 $p = q$.

在 $[a, b]$ 上 $f(x)$ 满足洛尔定理的条件, 因此, 至少存在一点 $x_1^{(1)} \in (a, b)$, 使 $f'(x_1^{(1)}) = 0$;

对于区间 $[a, x_1^{(1)}]$ 及 $[x_1^{(1)}, b]$, 函数 $f(x)$ 在其上满足洛尔定理的条件, 因此, 至少分别存在 $x_2^{(1)}, x_2^{(2)}$, 使 $f''(x_2^{(1)}) = 0, f''(x_2^{(2)}) = 0$;

.....

继续上述步骤, 经过 p 次后, 得出 $(p + 2)$ 个点:

$$a, x_p^{(1)}, x_p^{(2)}, x_p^{(3)}, \cdots, x_p^{(p)}, b$$

使 $f^{(p)}(a) = f^{(p)}(x_p^{(k)}) = f^{(p)}(b) = 0$ ($k = 1, 2, \cdots, p$);

由此 $(p + 2)$ 个点组成 $(p + 1)$ 个区间, 仿 1238 题对于它们重复使用洛尔定理 p 次, 即可得出点 c 属于 (a, b) , 使

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

若 $p \neq q$, 不失一般性, 设 $q = p + k$ (k 为某正整

数).

当进行 $(p+1)$ 次后,对于函数 $f^{(p)}(x) = 0$ 而言,在 (a, b) 内有 $(p+1)$ 个点:

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+1},$$

满足 $f^{(p+1)}(\xi_k) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, p+1$);

再加上条件 $f^{(p+1)}(b) = f^{(p+2)}(b) = \dots = f^{(p+k)}(b) = 0$,重复对此再应用洛尔定理 k 次,则在 (a, b) 内仍然存在 $(p+1)$ 个点:

$$\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \dots, \xi_{p+1}^{(k)},$$

使

$$f^{(p+k+1)}(\xi_j^{(k)}) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, p+1).$$

以后,每进行一次,减少一个点,进行 p 次后,即可得出一点 $c \in (a, b)$,使

$$f^{(p-k+q+1)}(c) = 0,$$

即

$$f^{(p+q+1)}(c) = 0.$$

证毕.

1240. 证明:若具实系数 a_k ($k = 0, 1, \dots, n$) 的多项式

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

之一切根为实数,则其逐次的导函数 $P'_n(x), P''_n(x), \dots, P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

证 根据假设,此处 n 次多项式 $P_n(x)$ 有 n 个实根.记其诸实根为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$,并且 α_i 是 k_i 重根, $k_i \geq 1$ ($i = 1, 2, \dots, l$),有 $k_1 + k_2 + \dots + k_l = n$.

于是可改写 $P_n(x)$ 为

$$P_n(x) = a_0 (x - \alpha_1)^{k_1} (x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_l)^{k_l}.$$

显见 α_i 为 $P_n'(x)$ 的 $k_i - 1$ 重根 ($i = 1, 2, \dots, l$).

由 $P_n(\alpha_1) = P_n(\alpha_2) = \dots = P_n(\alpha_l) = 0$, $P_n(x)$ 可微, 据洛尔定理, 存在 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$, 而 $\xi_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, 使 $P_n'(\xi_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, l-1$), 于是有

$P_n'(x)$ 的根	$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{l-1}$	α_1	α_2	\dots	α_l
重数	单根	$k_1 - 1$	$k_2 - 1$	\dots	$k_l - 1$

即 $n-1$ 次多项式 $P_n'(x)$ 的根恰有 $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \dots + (k_l - 1) + (l - 1) = k_1 + k_2 + \dots + k_l - 1 = n - 1$ 个, 这就是说, 一个 n 次多项式, 若 n 个根均为实根的话, 则其导函数 $n-1$ 次多项式的 $n-1$ 个根也必全为实根. 反复运用这一结果. 由 $P_n'(x)$ 的 $n-1$ 个根皆为实根, 便可推知 $P_n''(x)$ 的 $n-2$ 个根也均为实根. 如此下去, 即知关于 $P_n(x)$ 的一切低阶导函数——直至 $P_n^{(n-1)}(x)$ 也仅有实根.

1241. 证明: 勒襄德多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2 - 1)^n\}$$

的一切根都是实数且包含于区间 $(-1, 1)$ 中.

证 显然, $2n$ 次多项式 $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n = (x + 1)^n \cdot (x - 1)^n$ 仅有实根 (-1 是 n 重根, 1 也是 n 重根). 因此, 根据 1240 题的结果知 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} Q_{2n}(x)$ 仅有实根, 且都含于 $[-1, 1]$ 中. 但显然 -1 和 1 都不是 $P_n(x)$ 的根 (因为, 例如, -1 是 $Q_{2n}(x)$ 的 n 重根, 故

-1 是 $\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}Q_{2n}(x)$ 的单根, 因而 -1 不是 $\frac{d^n}{dx^n}Q_{2n}(x)$ 的根). 因此, $P_n(x)$ 的根全部位于 $(-1, 1)$ 中. 证毕.

1242. 证明: 契比协夫——拉格耳多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

所有的根都是正数.

证 令 $Q(x) = x^n e^{-x}$, 则易知

$$\begin{aligned} Q^{(m)}(x) = e^{-x} [& (-1)^m x^n + (-1)^{m-1} C_m^1 n x^{n-1} \\ & + \cdots + (-1) C_m^{m-1} n(n-1)\cdots(n-m \\ & + 2)x^{n-m+1} + n(n-1)\cdots(n-m \\ & + 1)x^{n-m}] (m = 1, 2, \cdots, n). \end{aligned}$$

显然 $Q^{(m)}(0) = 0$ ($m = 0, 1, \cdots, n-1$; 为方便计, 以下记 $Q^{(0)}(x) = Q(x)$, 但 $Q^{(n)}(0) = n! \neq 0$). 又

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Q^{(m)}(x) = 0 \quad (m = 0, 1, \cdots, n).$$

对函数 $Q(x)$ 和区间 $(0, +\infty)$ 应用 1237 题, 知存在 $\xi^{(1)} \in (0, +\infty)$ 使 $Q'(\xi^{(1)}) = 0$. 再对函数 $Q'(x)$ 和区间 $(0, \xi^{(1)})$ 及 $(\xi^{(1)}, +\infty)$ 应用 1237 题, 知存在 $\xi_1^{(2)} \in (0, \xi^{(1)})$, $\xi_2^{(2)} \in (\xi^{(1)}, +\infty)$ 使

$$Q''(\xi_i^{(2)}) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

这样继续下去, 反复应用 1237 题 n 次, 知存在 $0 < \xi_1^{(n)} < \xi_2^{(n)} < \cdots < \xi_n^{(n)} < +\infty$ 使

$$Q^{(n)}(\xi_i^{(n)}) = 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, n).$$

显然 $L_n(\xi_i^{(n)}) = 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$), 故 $\xi_i^{(n)}$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) 都是 $L_n(x)$ 的根. 但由于

$$L_n(x) = e^x Q^{(n)}(x)$$

$$= (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} C_n^1 n x^{n-1} + \dots \\ + (-1) C_n^{n-1} n! x + n!$$

是 x 的 n 次多项式, 故 $L_n(x)$ 恰有 n 个根 (实的或复的), 因此 $\xi_i^{(n)} (i = 1, 2, \dots, n)$ 是 $L_n(x)$ 的全部根. 证毕.

1243. 证明: 契比协夫 —— 厄耳米特多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

所有的根都是实数.

证 设 $Q(x) = e^{-x^2}$. 显然有

$$Q'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$Q''(x) = 2e^{-x^2} (\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1),$$

从而得知 $Q'(x) = 0$ 有一个实根, $Q''(x) = 0$ 有两个相异的实根.

设 $Q^{(k)}(x) = 0$ 有 k 个相异实根, 并记成

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k,$$

注意到 $Q^{(k)}(x)$ 是 e^{-x^2} 与一个 k 次多项式的乘积, 从而就有

$$Q^{(k)}(x) = Ae^{-x^2} (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_k),$$

其中 $A \neq 0$ 为某个常数. 下面我们将证 $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个相异实根. 事实上, 由

$$Q^{(k)}(\alpha_i) = Q^{(k)}(\alpha_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, k-1)$$

应用洛尔定理得知, 存在 $\beta_i \in (\alpha_i, \alpha_{i+1})$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k-1).$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} Q^{(k)}(x) = 0 \text{ 及 } Q^{(k)}(\alpha_1) = 0,$$

利用 1237 题的结果, 故知存在 $\beta_0 \in (-\infty, \alpha_1)$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_0) = 0.$$

同法可知, 存在 $\beta_k \in (\alpha_k, +\infty)$, 使

$$Q^{(k+1)}(\beta_k) = 0.$$

于是, $Q^{(k+1)}(x) = 0$ 有 $k+1$ 个实根. 故由数学归纳法, 知 $Q^{(n)}(x) = 0$ 有 n 个相异实根 ($n = 1, 2, \dots$). 从而 $H_n(x)$ 有 n 个相异实根. 但是由于 $H_n(x)$ 是 x 的一个 n 次多项式, 故 $H_n(x)$ 恰有 n 个根 (实的或复的). 因此 $H_n(x)$ 所有的根都是实数. 证毕.

1244. 在曲线 $y = x^3$ 上某点的切线, 平行于连接点 $A(-1, -1)$ 及点 $B(2, 8)$ 所成的弦, 求出此点.

解 由题设知 $y = x^3$ 在所求点 (x_0, y_0) 的切线斜率应

$$\text{为 } y'(x_0) = 3x_0^2 = \frac{8 - (-1)}{2 - (-1)} = 3. \text{ 于是,}$$

$$x_0 = -1, \text{ 或 } x_0 = 1,$$

故所求的点为 $A(-1, -1)$ 及 $C(1, 1)$.

1245. 若 $ab < 0$, 有限增量的公式对于函数

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

在闭区间 $[a, b]$ 上是否正确?

解 不正确. 事实上, 如果有限增量公式在此成立, 则有

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a), \xi \in (a, b),$$

即

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{1}{\xi^2}(b - a) = \frac{a - b}{\xi^2}.$$

但是

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

所以

$$\frac{a-b}{\xi^2} = \frac{a-b}{ab},$$

即有 $\xi^2 = ab < 0$, 这样产生矛盾. 因此, 有限增量公式对于函数 $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[a, b]$ ($ab < 0$) 上不正确. 原因是 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 处不存在, 故有限增量公式的条件不满足.

1246. 设

$$(a) f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0); \quad (b) f(x) = x^3;$$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x}; \quad (d) f(x) = e^x.$$

求满足

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x) \quad (0 < \theta < 1)$$

的函数 $\theta = \theta(x, \Delta x)$.

解 (a) $f'(x) = 2ax + b$.

于是, 有

$$\begin{aligned} & a(x + \Delta x)^2 + b(x + \Delta x) + c - ax^2 - bx - c \\ &= \Delta x [2a(x + \theta \Delta x) + b]. \end{aligned}$$

化简之, 得 $\theta = \frac{1}{2}$.

$$(b) f'(x) = 3x^2.$$

于是, 有

$$(x + \Delta x)^3 - x^3 = 3\Delta x(x + \theta \Delta x)^2.$$

如果 $x = 0$, 则 $\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$;

如果 $x \neq 0$, 化简整理得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

其中 $\frac{1}{4} \leq \theta(x) \leq \frac{1}{2},$

并且 $\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = \frac{1}{2}.$

证 当 $x \geq 0$ 时, 对函数 \sqrt{x} 施用有限增量公式, 即得

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x+\theta(x)}},$$

解之, 得

$$\theta(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}[\sqrt{x(x+1)} - x].$$

当 $x = 0$ 时 $\theta = \frac{1}{4}$. 当 $x > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 \leq \sqrt{x(x+1)} - x &= \frac{x}{\sqrt{x(x+1)} + x} < \frac{x}{2x} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

于是

$$\frac{1}{4} \leq \theta(x) < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

且有

$$\lim_{x \rightarrow +0} \theta(x) = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{x}{2[\sqrt{x(x+1)} + x]} \right\} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

1248.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{x} & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

在闭区间 $[0, 2]$ 上对于函数 $f(x)$ 求有限增量公式中的中间值 c .

解 $f(0) = \frac{3}{2}, f(2) = \frac{1}{2},$

$$f'(x) = \begin{cases} -x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ -\frac{1}{x^2}, & \text{当 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

按题设有

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -c(2-0) \text{ 或 } \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{c^2}(2-0),$$

所以 $c = \frac{1}{2}$ 或 $c = \sqrt{2}$ ($-\sqrt{2}$ 不适合), 此即所求的中间值 c .

1249. 设:

$$f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)],$$

其中 $0 < \xi(x) < x$.

证明: 若

$$f(x) = x \sin(\ln x) \quad (x > 0)$$

及

$$f(0) = 0$$

则函数 $\xi = \xi(x)$ 于任意小的区间 $(0, \epsilon)$ 内(于此 $\epsilon > 0$)是不连续的.

证 用反证法. 假定 $\xi(x)$ 在某区间 $(0, \epsilon)$ 内连续($\epsilon > 0$).

由于当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin(\ln x) + \cos(\ln x) \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right), \end{aligned}$$

故由 $f(x) - f(0) = xf'[\xi(x)]$ 得

$$x \sin(\ln x) = x \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right),$$

从而

$$\sin(\ln x) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x)\right), 0 < x < +\infty.$$

现取一个充分大的正整数 N , 使

$$-2N\pi + \frac{\pi}{4} < \ln \xi\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

由 $0 < \xi(x) < x$ 知 $\lim_{x \rightarrow 0+0} \xi(x) = 0$, 从而

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln \xi(x) = -\infty.$$

因此, 可取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2}$, 使

$$\ln \xi(\delta) < -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

由于 $\ln \xi(x)$ 在 $\left[\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 上连续, 根据中间值定理, 必有

$x_0 \in \left[\delta, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ 存在, 使

$$\ln \xi(x_0) = -2N\pi + \frac{\pi}{4}.$$

于是

$$\begin{aligned} 1 &\geq \sin(\ln x_0) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln \xi(x_0)\right) \\ &= \sqrt{2}, \end{aligned}$$

这是不可能的. 证毕.

1250. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$. 对于区间 (a, b) 内任何一点 ξ 可否从此区间中指出另外的两点 x_1 及 x_2 使满足于

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (x_1 < \xi < x_2)?$$

解 一般地说, 不可以. 例如, 研究函数

$$f(x) = x^3 \quad (-1 < x < 1),$$

它对于 $\xi = 0$ 就找不到所需的 x_1 和 x_2 , 使

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

事实上, $f'(\xi) = 3\xi^2 = 0$, 而当 $x_1 < 0 < x_2$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{x_2^3 - x_1^3}{x_2 - x_1} \\ &= x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 \\ &= x_2^2 + x_1^2 - |x_1| \cdot |x_2| \\ &> x_2^2 + x_1^2 - 2|x_1||x_2| \\ &= (|x_1| - |x_2|)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

1251. 证明下列不等式:

(a) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$

(b) 若 $0 < y < x$ 及 $p > 1$, $py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y);$

(v) $|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|;$

(r) $\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$, 设 $0 < b < a$.

证 (a) $|\sin x - \sin y| = |(x-y)\cos\xi| \leq |x-y|$ (ξ 在 x, y 之间).

(b) $x^p - y^p = p(x-y)\xi^{p-1}$, 其中 $0 < y < \xi < x$.

由于 $p > 1$, 所以

$$y^{p-1} < \xi^{p-1} < x^{p-1},$$

于是

$$py^{p-1}(x-y) < x^p - y^p < px^{p-1}(x-y);$$

*) 原题的不等式中的等号可以去掉.

$$(b) |\operatorname{arc} \operatorname{tga} - \operatorname{arc} \operatorname{tgb}| = \left| \frac{a-b}{1+\xi^2} \right| \leq |a-b|;$$

$$(c) \ln a - \ln b = \frac{a-b}{\xi}, \text{ 其中 } 0 < b < \xi < a.$$

于是,

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

1252. 说明在闭区间 $[-1, 1]$ 上哥西定理对于函数 $f(x) = x^2$ 及 $g(x) = x^3$ 何以不真?

解 $f(x)$ 及 $g(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上虽有连续的导函数, 且 $g(-1) \neq g(1)$, 但是, 当 $x = 0$ 时,

$$[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 = 4x^2 + 9x^4 = 0,$$

因此, 对于函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 不满足哥西定理的条件, 所以结论可以不真. 事实上

$$\frac{f(1) - f(-1)}{g(1) - g(-1)} = 0,$$

而

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{2\xi}{3\xi^2} \neq 0 \quad \xi \in (-1, 1), \xi \neq 0,$$

它们是不相等的.

1253. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[x_1, x_2]$ 上可微分, 并且 $x_1, x_2 > 0$. 证明

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi),$$

其中 $x_1 < \xi < x_2$.

证 设 $g(x) = \frac{1}{x}$, $F(x) = \frac{f(x)}{x}$, 由于 $x_1 x_2 > 0$, 故 $x = 0$ 在 $[x_1, x_2]$ 之外. 从而 $g(x)$ 和 $F(x)$ 均在 $[x_1, x_2]$ 上可微, 且有

$$\begin{aligned} & [g'(x)]^2 + [F'(x)]^2 \\ &= \frac{1}{x^4} \{1 + [xf'(x) - f(x)]^2\} \neq 0 \end{aligned}$$

及

$$g(x_1) \neq g(x_2).$$

因此, 对于函数 $F(x)$ 和 $g(x)$ 满足哥西定理的条件. 故在 (x_1, x_2) 内至少存在一点 ξ , 使有

$$\frac{F(x_2) - F(x_1)}{g(x_2) - g(x_1)} = \frac{F'(\xi)}{g'(\xi)},$$

即

$$\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}} = \frac{\frac{\xi f'(\xi) - f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}},$$

化简整理, 即得

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

1254. 证明 若函数 $f(x)$ 于有穷的区间 (a, b) 内可微分, 但无界, 则其导函数 $f'(x)$ 于区间 (a, b) 内也无界. 逆定理不真; 举出例子.

证 在开区间 (a, b) 内, 由于导函数存在, 因此, $f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

现在假定 $|f'(x)| < N$ ($a < x < b$), 即 $f'(x)$ 是

有界的. 取定 $c \in (a, b)$. 则按有限增量公式可知, 对任何 $a < x < b$, 均有

$$|f(x) - f(c)| = |x - c| |f'(\xi)| < N(b - a),$$

其中 ξ 在 c 与 x 之间, 从而属于 (a, b) .

因为,

$$|f(x) - f(c)| \geq |f(x)| - |f(c)|,$$

所以

$$|f(x)| < |f(c)| + N(b - a).$$

此与 $f(x)$ 是无界的条件相矛盾, 所以 $f'(x)$ 是无界的.

反之不一定正确. 例如, 函数

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 内有界, 但其导函数却是无界的.

注意, 在无限区间内无界的函数的导函数可能有界. 例如, 函数

$$f(x) = \ln x$$

在 $(1, +\infty)$ 内无界, 但其导函数 $f'(x) = \frac{1}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 内却是有界的.

1255. 证明: 若函数 $f(x)$ 于有穷或无穷的区间 (a, b) 内有有界的导函数 $f'(x)$, 则 $f(x)$ 于 (a, b) 中一致连续.

证 设当 $x \in (a, b)$ 时, $|f'(x)| \leq M$. 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, 则当 $x_1, x_2 \in (a, b)$ 且 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} & |f(x_1) - f(x_2)| \\ &= |x_1 - x_2| \cdot |f'(\xi)| \leq M|x_1 - x_2| < \varepsilon, \end{aligned}$$

(ξ 在 x_1 与 x_2 之间),

于是, $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续.

1256. 证明: 若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分, 且

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0,$$

则

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $X_1 > 0$, 使当 $x > X_1$ 时, 恒有

$$|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

今在 $(X_1, +\infty)$ 内任取一点 a , 则当 $x > a$ 时, 由有限增量公式可得

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| \cdot |f'(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

由于

$$|f(x)| - |f(a)| \leq |f(x) - f(a)|,$$

所以

$$|f(x)| \leq |f(a)| + \frac{\varepsilon}{2} |x - a|.$$

再取 $X_2 > a$, 使 $\frac{|f(a)|}{X_2} < \frac{\varepsilon}{2}$, 则当 $x > X_2$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{x} \right| &\leq \frac{|f(a)|}{x} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{|x - a|}{x} \\ &< \frac{|f(a)|}{X_2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

即:当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

1257. 证明:若函数 $f(x)$ 于无穷的区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分且当

$$x \rightarrow +\infty \text{ 时, } f(x) = o(x);$$

则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$.

证 由条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ 易得对于任意常数 $a > x_0$, 均有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \left(1 + \frac{a}{x - a} \right) - \frac{f(a)}{x - a} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是,对于 $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, $a_n = \max \{n, x_0 + 1\}$ ($n = 1, 2, \dots$),

总存在 $b_n > a_n$, 使

$$\left| \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n} \right| < \epsilon_n.$$

由拉格朗日定理知,存在 $x_n; a_n < x_n < b_n$, 使

$$f'(x_n) = \frac{f(b_n) - f(a_n)}{b_n - a_n},$$

即

$$|f'(x_n)| < \epsilon_n (n = 1, 2, \dots).$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f'(x_n)| = 0.$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}.$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}.$$

但是

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x - 1}$$

$$= -\infty$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{\arctan \frac{1+x}{1-x}}{x - 1}$$

$$= -\infty,$$

所以 $f'_-(1)$ 及 $f'_+(1)$ 皆不存在.

$y = f(x)$ 的图形

如图 2.38 所示.

当 $x \rightarrow 1-0$ 时,

$f(x) \rightarrow \frac{\pi}{2}$; 当 $x \rightarrow$

$1+0$ 时, $f(x) \rightarrow -$

$\frac{\pi}{2}$.

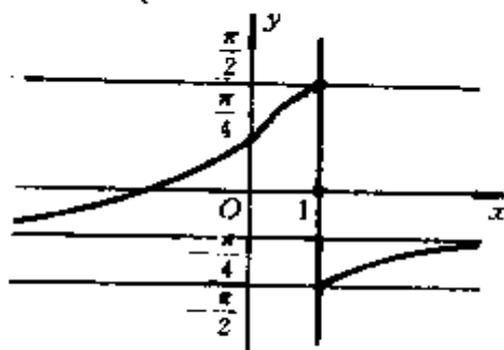


图 2.38

即 $x = 1$ 为 $f(x)$ 的第一类

不连续点, 即在 $x = 1$ 处 $f(x)$ 产生跳跃, 所以 $f(x)$ 在

$x = 1$ 处无导数.

1259. 证明:若当 $a < x < b$ 时, $f'(x) = 0$, 则当
 $a < x < b$ 时, $f(x) = \text{常数}$.

证 在 (a, b) 内取一定点 x_0 , 则当 $a < x < b$ 时, 按有限增量公式可得

$$f(x) - f(x_0) = f'(c) \cdot (x - x_0)$$

其中 c 在 x_0 与 x 之间. 由于 $f'(c) = 0$, 故

$$f(x) - f(x_0) = 0,$$

即

$$f(x) = f(x_0) = \text{常数}.$$

1260. 证明:导函数为常数

$$f'(x) = k$$

的唯一函数 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是线性函数:

$$f(x) = kx + b.$$

证 $[f(x) - kx]' = f'(x) - k = k - k = 0$,

于是,

$$f(x) - kx = b \quad (b \text{ 为常数}).$$

故 $f(x)$ 必为线性函数: $f(x) = kx + b$. 证完.

1261. 设 $f^{(n)}(x) = 0$, 则函数 $f(x)$ 有什么性质?

解 由 $f^{(n)}(x) = 0$, 于是 $f^{(n-1)}(x) = c$ (c 为常数).

再由 1260 题的结果得知

$$f^{(n-2)}(x) = cx + b.$$

假设

$$f^{(k)}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-k-1}x^{n-k-1},$$

并令

$$\Phi(x) = f^{(k-1)}(x) - \left(a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \dots + \frac{1}{n-k}a_{n-k-1}x^{n-k} \right),$$

则有 $\Phi'(x) = f^{(k)}(x) - (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-k-1}x^{n-k-1}) = 0$.

由 1259 题知 $\Phi(x) = b_0$, 并记 $a_0 = b_1, \frac{1}{2}a_1 = b_2, \dots,$

$\frac{1}{n-k}a_{n-k-1} = b_{n-k}$, 则有

$$f^{(k-1)}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_{n-k}x^{n-k}.$$

依归纳法便有

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{n-1}x^{n-1},$$

它是 $n-1$ 次多项式, 其中 c_0, c_1, \dots, c_{n-1} 是常数, 而且是任意的.

1262. 证明: 满足方程

$$y' = \lambda y (\lambda = \text{常数})$$

的唯一函数 $y = y(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是指数函数:

$$y = Ce^{\lambda x},$$

其中 C 为任意常数.

$$\begin{aligned} \text{证 } (ye^{-\lambda x})' &= y'e^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} \\ &= \lambda ye^{-\lambda x} - \lambda ye^{-\lambda x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

于是,

$$ye^{-\lambda x} = C \quad (C \text{ 为常数})$$

即

$$y = Ce^{\lambda x}.$$

1263. 检验函数

$$f(x) = \arctan \frac{x+a}{1-ax}$$

及

$$g(x) = \arctan x$$

于范围: (1) $ax < 1$ 及 (2) $ax > 1$ 内有相同的导函数.

推出这些函数间的关系.

解 当 $ax < 1$ 或 $ax > 1$ 时,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+a}{1-ax}\right)^2} \cdot \frac{1-ax + a(x+a)}{(1-ax)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}, \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

故有

$$f'(x) = g'(x) \quad (ax < 1 \text{ 或 } ax > 1).$$

因此

$$f(x) - g(x) = C_1, \text{ 当 } ax < 1 \text{ 时.} \quad (1)$$

$$f(x) - g(x) = C_2, \text{ 当 } ax > 1 \text{ 时,} \quad (2)$$

下面确定常数 C_1 与 C_2 . 设 $a > 0$ ($a < 0$ 情形可类似地讨论).

在(1)中令 $x \rightarrow -\infty$, 得

$$-\arctan \frac{1}{a} + \frac{\pi}{2} = C_1,$$

故 $C_1 = \arctan a$. 因此

$$\arctan \frac{x+a}{1-ax} - \arctan x = \arctan a \quad (ax < 1).$$

在(2)中令 $x \rightarrow +\infty$, 得

$$-\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{a} - \frac{\pi}{2} = C_2,$$

故 $C_2 = \operatorname{arc\,tga} - \pi$. 因此

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+a}{1-ax} - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tga} - \pi \quad (ax > 1).$$

1264. 证明下列恒等式:

$$(a) 2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x,$$

当 $|x| \geq 1$;

$$(b) 3\operatorname{arc\,cos} x - \operatorname{arc}(3x - 4x^3) = \pi, \text{ 当 } |x| \leq \frac{1}{2}.$$

证 (a) 当 $|x| > 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & \left(2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} \right)' \\ &= \frac{2}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \\ & \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = 0, \end{aligned}$$

故

$$2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} = C_1, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时};$$

$$2\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,sin} \frac{2x}{1+x^2} = C_2, \text{ 当 } x < -1 \text{ 时}.$$

下面确定常数 C_1 与 C_2 .

$$\text{令 } x = \sqrt{3}, \text{ 代入前一式, 得 } C_1 = \pi;$$

$$\text{令 } x = -\sqrt{3}, \text{ 代入后一式, 得 } C_2 = -\pi.$$

从而当 $|x| \neq 1$ 时, 有

$$2\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,sin}\frac{2x}{1+x^2}$$

$$= \begin{cases} \pi, & \text{当 } x > 1 \text{ 时;} \\ -\pi, & \text{当 } x < -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

而当 $|x| = 1$ 时, 上式仍然成立. 于是, 当 $|x| \geq 1$ 时, 有

$$2\operatorname{arc\,tg}x + \operatorname{arc\,sin}\frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn}x.$$

(6) 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$[3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3)]'$$

$$= -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}$$

$$\cdot (3-12x^2) = 0,$$

故有

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = C$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

其中 C 为常数. 令 $x = 0$, 代入上式, 即可求出 $C = \pi$. 于是

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right).$$

由于上式左端的函数在 $x = \frac{1}{2}$ 左连续, 在 $x = -\frac{1}{2}$ 右连续, 分别取极限即知上式当 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = -\frac{1}{2}$ 时也成立. 于是

$$3\operatorname{arc\,cos}x - \operatorname{arc\,cos}(3x - 4x^3) = \pi$$

$$\left(|x| \leq \frac{1}{2} \right).$$

1265. 证明: 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的; (2) 于此线段内有有穷的导函数 $f'(x)$; (3) 非线性函数, 则于区间 (a, b) 内至少能找到一点 c , 满足

$$|f'(c)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

作出这个事实的几何解释.

证 当 $a \leq x \leq b$ 时, 设

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

易知 $F(a) = F(b) = 0$, 且当 $a < x < b$ 时, $F(x) \neq 0$ (因为 $f(x)$ 为非线性函数). 设在 c_1 ($a < c_1 < b$) 点, $F(c_1) \neq 0$, 不妨设 $F(c_1) > 0$, 在区间 $[a, c_1]$ 与 $[c_1, b]$ 上分别应用拉格朗日定理, 可知存在

$$\begin{aligned} \xi_1 \in (a, c_1) \text{ 使 } F'(\xi_1) &= \frac{F(c_1) - F(a)}{c_1 - a} \\ &= \frac{F(c_1)}{c_1 - a} > 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 \in (c_1, b) \text{ 使 } F'(\xi_2) &= \frac{F(b) - F(c_1)}{b - c_1} \\ &= -\frac{F(c_1)}{b - c_1} < 0. \end{aligned}$$

因而,

$$f'(\xi_1) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (1)$$

$$f'(\xi_2) < \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (2)$$

由此可知:

$$\text{当 } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \geq 0 \text{ 时, 由 (1),}$$

$$|f'(\xi_1)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|;$$

当 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$ 时, 由(2),

$$|f'(\xi_2)| > \left| \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right|.$$

于是命题得证.

这个事实的几何意义是: 对于一条非直线的连续曲线段(线段上每点都存在不垂直于 Ox 轴的切线), 在曲线上至少存在一点 c , 使曲线在该点的切线斜率的绝对值大于连接该线段两个端点, $(a, f(a)), (b, f(b))$ 的弦的斜率

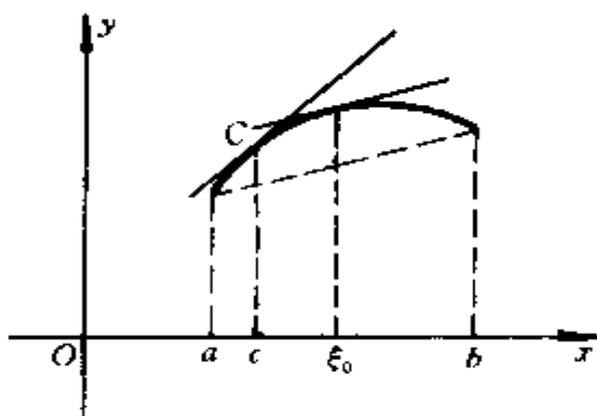


图 2.39

的绝对值, 换句话说, 此切线比此弦“陡”, 如图 2.39 所示.

1266. 若函数 $f(x)$: (1) 在区间 $[a, b]$ 上有二阶导函数 $f''(x)$ 及 (2) $f'(a) = f'(b) = 0$, 则在区间 (a, b) 内至少存在一点 c , 满足

$$|f''(c)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

证 令

$$K = \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

用反证法, 即设 $|f''(x)| < K$ ($a < x < b$).

对于函数(x_0 是 $[a, b]$ 中任意固定的一点)

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$$

及

$$G(x) = (x - x_0)^2,$$

两次应用哥西定理, 即得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 f''(\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 ξ 在 x_0 与 x 之间(即 $x_0 \leq \xi \leq x$), x 为 $[a, b]$ 中任意点. 特别, 在(1)式中取

$$x_0 = a, x = \frac{a+b}{2},$$

并利用已知条件 $f'(a) = 0$, 则有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(a) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_1),$$

其中 c_1 满足 $a < c_1 < \frac{a+b}{2}$.

于是,

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f(a) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

同理在(1)式中取 $x_0 = b, x = \frac{a+b}{2}$, 并利用已知条件 $f'(b) = 0$, 则得

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f(b) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c_2),$$

其中 $\frac{a+b}{2} < c_2 < b$.

于是

$$\left| f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| < \frac{(b-a)^2}{8} K.$$

其中 $x_0 < \xi < x$ (以后即将看到, 这就是所谓的台劳公式, 这里就顺便给了一个关于二阶的台劳公式的另一种推证方法.)

1267. 汽车从某点开始行驶, 于 t 秒钟内走完了路程, 于此时间内经过了距离 s 米. 证明汽车运动的加速度的绝对值在某瞬间不小于 $\frac{4s}{t^2}$ $\frac{\text{米}}{\text{秒}^2}$.

证 利用 1266 题的结果即可得证. 此时

$$s = f(t),$$

$$f(t) - f(0) = s, t - 0 = t.$$

故 $a = \left. \frac{d^2s}{dt^2} \right|_{t=t_1}$ 的绝对值

$$|a| \geq \frac{4s}{t^2}.$$

§ 7. 函数的增大与减小. 不等式

1° 函数的增大和减小 若当

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b \text{ 时, } f(x_2) > f(x_1)$$

[或当 $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ 时, $f(x_2) < f(x_1)$], 则称函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上 增大(或对应地减小).

若可微分的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上增大(或减小), 则当

$$a \leq x \leq b \text{ 时, } f'(x) \geq 0$$

[或对应地当 $a \leq x \leq b$ 时, $f'(x) \leq 0$].

2° 函数增大(或减小)的充分条件 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上是连续的, 并且在其内有正的(或负的)导函数 $f'(x)$, 则函数 $f(x)$ 于 (a, b) 内增大(或对应地减小).

求下列函数在严格意义上的单调(增大或减小)的区间:

1268. $y = 2 + x - x^2$

解 $y' = 1 - 2x$.

当 $-\infty < x < \frac{1}{2}$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $\frac{1}{2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1269. $y = 3x - x^3$.

解 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x)(1 + x)$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1270. $y = \frac{2x}{1 + x^2}$.

解 $y' = \frac{2(1 - x)(1 + x)}{(1 + x^2)^2}$.

当 $-\infty < x < -1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1271. $y = \frac{\sqrt{x}}{x + 100} (x \geq 0)$.

解 $y' = \frac{-x + 100}{2\sqrt{x}(x + 100)^2}$.

当 $0 < x < 100$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $100 < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1272. $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x \geq 0$.

当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数增大.

1273. $y = x + |\sin 2x|$.

解 $y' = 1 + 2 \frac{|\sin 2x|}{\sin 2x} \cos 2x$

$$\left(x \neq \frac{k\pi}{2}; k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right).$$

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in \left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数减小,

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

1274. $y = \cos \frac{\pi}{x}$.

解 $y' = \frac{\pi}{x^2} \sin \frac{\pi}{x}$.

当 $2k\pi < \frac{\pi}{x} < (2k+1)\pi$ 及 $-(2k+2)\pi < \frac{\pi}{x} < -(2k+1)\pi$.

$0 < \frac{\pi}{x} < \pi$ 时, 即 $x > 1$, $x \in \left(\frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k+1}, -\frac{1}{2k+2}\right)$ 时, $y' > 0$, 所以函数增大 ($k = 1, 2, \dots$).

同理, 当 $x \in \left(\frac{1}{2k+2}, \frac{1}{2k+1}\right)$ 及 $x \in \left(-\frac{1}{2k}, -\frac{1}{2k+1}\right)$ 时, $y' < 0$, 函数减小 ($k = 1, 2, \dots$).

1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

解 $y' = \frac{2x - x^2 \ln 2}{2^x}$.

当 $-\infty < x < 0$ 及 $\frac{2}{\ln 2} < x < +\infty$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $0 < x < \frac{2}{\ln 2}$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

1276. $y = x^n e^{-x} (n > 0, x \geq 0)$.

解 $y' = x^{n-1} e^{-x} (n - x)$.

当 $x \in (0, n)$ 时, $y' > 0$, 函数增大;

当 $x \in (n, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数减小.

1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

解 $y' = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$.

当 $-\infty < x < -1$ 及 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 函数减小;

当 $-1 < x < 0$ 及 $1 < x < +\infty$ 时, $y' > 0$, 函数增大.

1278. 若 $x > 0, f(x) = x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x \right)$ 及 $f(0) = 0$.

解 $f'(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sin \ln x + \cos \ln x$
 $= \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \ln x \right) (x > 0)$.

令 $f'(x) = 0$, 得

$$\sin \left(\ln x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

解上述方程得

$$x = e^{-\frac{11}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}$$

或 $x = e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi}, x = e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi}$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $x \in (e^{-\frac{7}{12}\pi + 2k\pi}, e^{\frac{13}{12}\pi + 2k\pi})$ 时, $f'(x) > 0$,

函数增大;

当 $x \in (e^{\frac{13}{12}\pi - 2k\pi}, e^{\frac{17}{12}\pi + 2k\pi})$ 时, $f'(x) < 0$,

函数减小.

1279. 证明: 内接于圆的正 n 边形, 当边的数目 n 增加时, 其周界 P_n 增加, 而外切于此圆的正 n 边形的周界 P_n 则减小. 利用这点来证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, p_n 及 P_n 有相同的极限.

证 如图 2.40 所示,

我们有

$$\begin{aligned} p_n &= 2nx \\ &= 2na \sin \alpha \\ &= 2na \sin \frac{\pi}{n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n &= 2ny \\ &= 2na \operatorname{tg} \alpha \\ &= 2na \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

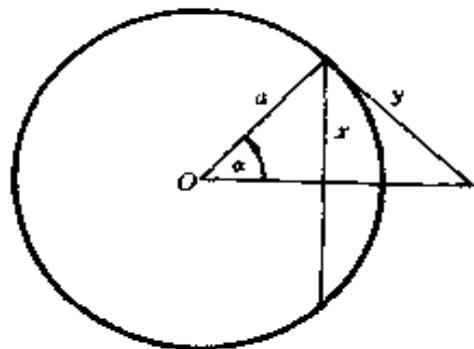


图 2.40

考虑 $f(x) = \frac{2a}{x} \sin \pi x$. 易证当 $x (x > 0)$ 很小时有 $f'(x) < 0$, 从而当 x 变小时 $f(x)$ 增大. 所以, $p_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 增大时, p_n 逐渐增大. 同样, 令 $g(x) = \frac{2a}{x} \operatorname{tg} \pi x$, 利用 $x < \operatorname{tg} x$ (当 x 很小时, $x > 0$), 可证得 $g'(x) > 0$, 情形相反, 当 x 变小时, $g(x)$ 逐渐减小, 故 $P_n = g\left(\frac{1}{n}\right)$ 当 n 变大时逐渐变小. 总之, 有 $p_n < p_{n+1}$ 及 $P_{n+1} < P_n$, 并且显然有 $p_{n+1} < P_{n+1}$. 于是

$$p_n < p_{n+1} < P_{n+1} < P_n,$$

故 $\{P_n\}$ 是有界减数列, $\{p_n\}$ 是有界增数列, 从而它们的极限都存在, 但

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - p_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi a \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} - \frac{\sin \frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \right) = 0, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n.$$

1280. 证明: 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

于区间 $(-\infty, -1)$ 及 $(0, +\infty)$ 内增大.

证 设 $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$, 则

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right].$$

由于当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > 0$, 因此要看 y' 为正或为负, 只需看 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$ 的正负性.

再设 $z = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$, 则

$$z' = -\frac{1}{x(1+x)^2} > 0, \quad x \in (-\infty, -1),$$

故当 $-\infty < x < -1$ 时 z 增大, 又 $\lim_{x \rightarrow -\infty} z = 0$, 因而 $z > 0$. 于是, 在 $(-\infty, -1)$ 内 $y' > 0$. 因此, 函数

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

在区间 $(-\infty, -1)$ 内增大.

同理可证, 函数 $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内增大.

1281. 证明: 有理整函数

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (n \geq 1, a_n \neq 0)$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的(就严格的意义而言!), 其中 x_0 为充分大的正数.

证 由于

$$\begin{aligned} P'_n(x) &= a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1} \\ &= x^{n-1} \left(na_n + \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right), \end{aligned}$$

而

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right] = 0,$$

故存在 $x_0 > 0$, 使当 $|x| > x_0$ 时,

$$\left| \frac{(n-1)a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} \right| < n|a_n|.$$

由此可知, 当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $P'_n(x)$ 均保持定号(例如, 若 $a_0 > 0$, 则当 $x_0 < x < +\infty$ 时, $P'_n(x) > 0$), 故 $P_n(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内都是严格单调的. 证毕.

1282. 证明: 有理函数

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m} \\ &\quad (m + n \geq 1, m \neq n^*) a_n b_m \neq 0 \end{aligned}$$

于区间 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 内是单调的(就严格的意义而言!),其中 x_0 为充分大的正数.

证 我们有

$$\begin{aligned}
 R'(x) &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \{ [a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}] [b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m] - [b_1 + 2b_2x + \cdots + mb_mx^{m-1}] [a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n] \} \\
 &= \frac{1}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \{ (a_1b_0 - a_0b_1) + 2(a_2b_0 - a_0b_2)x + \cdots + [(n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m]x^{m+n-2} + (n-m)a_nb_mx^{m+n-1} \} \\
 &= \frac{x^{m+n-1}}{(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)^2} \left[\frac{(n-m)a_nb_m}{x} + \frac{(n-m+1)a_nb_{m-1} - (n-m-1)a_{n-1}b_m}{x} + \cdots + \frac{a_1b_0 - a_0b_1}{x^{m+n-1}} \right].
 \end{aligned}$$

仿 1281 题之证法,可知存在 $x_0 > 0$,使当 $|x| > x_0$ 时上式右端方括弧内的式子与第一项 $(n-m)a_nb_m$ 同符号,由此可知,当 $-\infty < x < -x_0$ 或 $x_0 < x < +\infty$ 时 $R'_*(x)$ 均保持定号,故 $R(x)$ 在 $(-\infty, -x_0)$ 及 $(x_0, +\infty)$ 中都是严格单调的.

*) 本题应加上条件 $m \neq n$ (原题上没有). 否则所述结论不成立. 例如,若 $m = n, a_i = b_i (i = 0, 1, \dots,$

n), 则 $R(x) \equiv 1$, 它在 $(x_0, +\infty)$ 上显然不是严格单调的.

1283. 单调函数的导函数是否也必为单调的?

解 不. 例如函数

$$f(x) = x + \sin x,$$

在区间 $(0, +\infty)$ 内, 由于 $f'(x) = 1 + \cos x > 0$ (除 $x = (2n+1)\pi, n = 0, 1, \dots$), 所以它是单调增加的; 然而其导函数 $f'(x)$ 却不是单调的. 事实上由于 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, f'(\pi) = 0, f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$, 显见并非是单调的.

1284. 证明: 若 $\varphi(x)$ 为单调增大的可微分的函数, 且当

$$x \geq x_0 \text{ 时, } |f'(x)| \leq \varphi(x),$$

则当 $x \geq x_0$ 时, $|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0)$.

对这个事实作几何的解释.

证 证法一:

作函数 $\psi(x) = \varphi(x) - f(x)$, 由拉格朗日定理知

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \psi'(\xi)(x - x_0) \quad (x_0 < \xi < x).$$

由 $|f'(x)| \leq \varphi(x)$ 知

$$\psi'(\xi) = \varphi'(\xi) - f'(\xi) \geq 0.$$

从而 $\psi(x) - \psi(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x) - f(x_0). \quad (1)$$

再令 $\psi_1(x) = \varphi(x) + f(x)$, 同理有 $\psi_1(x) - \psi_1(x_0) \geq 0$ (当 $x \geq x_0$ 时), 由此得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq f(x_0) - f(x). \quad (2)$$

结合(1)和(2)便得

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) \geq |f(x) - f(x_0)|.$$

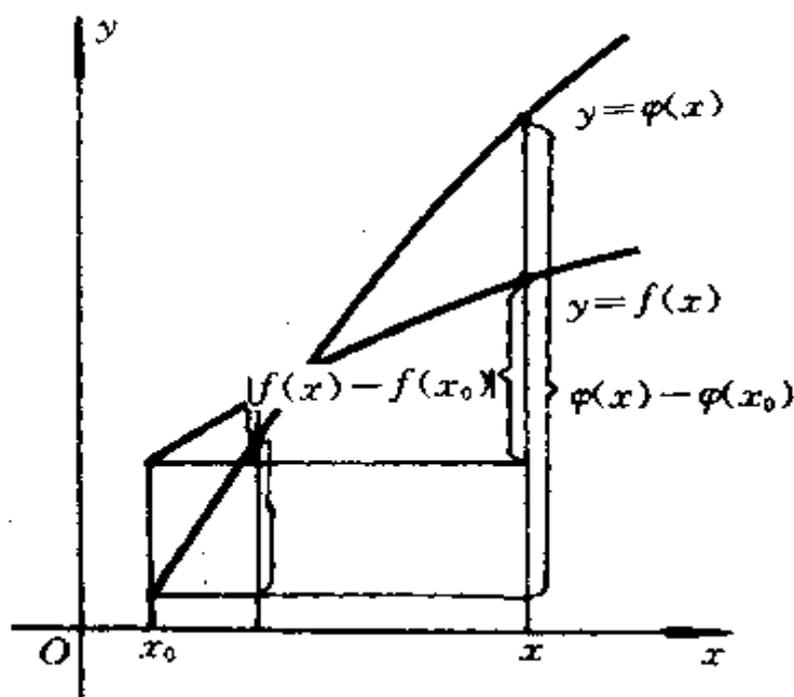


图 2.41

于是, $f\left(a - \frac{f(a)}{k}\right) > 0$. 又 $f(a) < 0$, 故根据连续函数的介值定理知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 上至少有一实根. 又因为当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 内严格单调上升, 由此可知, 方程 $f(x) = 0$ 在 $\left(a, a - \frac{f(a)}{k}\right)$ 内恰有一个实根.

1286. 若于某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内, 函数增量 $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ 的符号与自变数增量 $\Delta x_0 = x - x_0$ 的符号相同, 函数 $f(x)$ 称为在 x_0 点增大.

证明: 若函数 $f(x)$ ($a < x < b$) 于有穷或无穷的区间 (a, b) 内的每一点增大, 则它在此区间内为增函数.

证 要证对任意两点 $x_1 < x_2$ ($a < x_1 < x_2 < b$), 都有

$f(x_1) < f(x_2)$. 对 $[x_1, x_2]$ 中每一点 c , 由假定都存在开区间 $\Delta_c = (c - \delta_c, c + \delta_c)$ 使当 $0 < |x - c| < \delta_c$ 时, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$. 于是, 诸区间 $\{\Delta_c\}$ (c 取遍 $[x_1, x_2]$) 形成 $[x_1, x_2]$ 的一个开复盖. 由波内耳有限复盖定理, 从 $\{\Delta_c\}$ 中可选出有限个, 设为 $\Delta_{c_1}, \Delta_{c_2}, \dots, \Delta_{c_m}$, 它们已经复盖了 $[x_1, x_2]$. 不妨设 $x_1 < c_1 < c_2 < \dots < c_m < x_2$, 而且可设诸 Δ_{c_i} 互不包含 (因若 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 则可将 Δ_{c_i} 舍去). 于是, 必有 $x_1 \in \Delta_{c_1}$ (因若 x_1 不属于 Δ_{c_1} , 而属于某 $\Delta_{c_j}, j > 1$, 则显然有 $\Delta_{c_1} \subset \Delta_{c_j}$, 此与诸 Δ_{c_i} 互不包含矛盾). 另外, 易知 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, m - 1$) 必有公共点 \bar{x}_i (因若 Δ_{c_i} 与 $\Delta_{c_{i+1}}$ 没有公共点, 则点 $c_i + \delta_{c_i}$ 必属于某 $\Delta_{c_j}, j \neq i, j \neq i + 1$. 若 $j < i$, 则 $\Delta_{c_i} \subset \Delta_{c_j}$, 矛盾; 若 $j > i + 1$, 则 $\Delta_{c_{i+1}} \subset \Delta_{c_j}$, 也矛盾). 显然可取公共点 \bar{x}_i 满足 $c_i < \bar{x}_i < c_{i+1}$.

于是

$$f(c_i) < f(\bar{x}_i) < f(c_{i+1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m - 1).$$

同理, 可知 $x_2 \in \Delta_{c_m}$. 于是, 我们有

$$f(x_1) < f(c_1) < f(c_2) < \dots < f(c_m) < f(x_2).$$

证完.

1287. 证明: 函数

$$f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x}, \text{ 若 } x \neq 0 \text{ 及 } f(0) = 0,$$

于点 $x = 0$ 增大, 但在含这点的任何区间 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ 中并非增大的, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任意小的数. 作出此函数的略

图：

证 当 $x \neq 0$ 时，

$$f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x},$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + \Delta x^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = 1 > 0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点增大。又当 $x \neq 0$ 时，

$$f''(x) = 2 \sin \frac{1}{x} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x},$$

$$f''\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = -4n\pi \begin{cases} < 0, n \text{ 为正整数;} \\ > 0, n \text{ 为负整数;} \end{cases}$$

$$\text{而 } f'\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 0.$$

故 $f(x)$ 在点 x_n

$$= \frac{1}{2n\pi} (n = 1, 2,$$

...) 都达极大值。

由于 $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow$

0, 故 $f(x)$ 在

$(-\epsilon, \epsilon)$ 内不是

增大的(作无穷

次振荡, 如图

2.42 所示)。

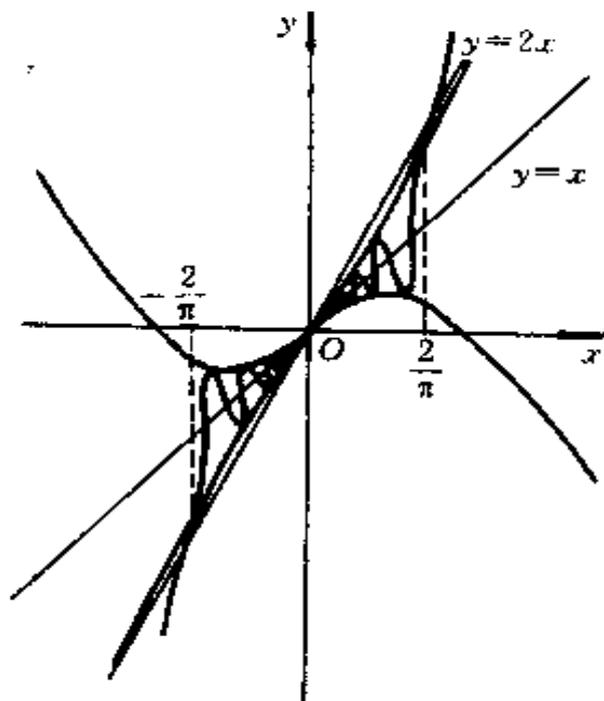


图 2.42

1288. 证明定理: 设(1)

函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 可微分 n 次; (2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$); (3) 当 $x > x_0$ 时, $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 则当 $x > x_0$ 时有不等式

$$\varphi(x) > \psi(x).$$

证 设 $F(x) = \varphi(x) - \psi(x)$, 则由于 $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$, 所以

$$F^{(n)}(x) = \varphi^{(n)}(x) - \psi^{(n)}(x) > 0 \quad (x > x_0).$$

因此 $F^{(n-1)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的. 另外, 由条件(2)得

$$F^{(n-1)}(x_0) = \varphi^{(n-1)}(x_0) - \psi^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

因此

$$F^{(n-1)}(x) > F^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

由此又知 $F^{(n-2)}(x)$ 在 $x > x_0$ 时是严格增大的. 再由条件(2), 知

$$F^{(n-2)}(x_0) = \varphi^{(n-2)}(x_0) - \psi^{(n-2)}(x_0) = 0,$$

故

$$F^{(n-2)}(x) > F^{(n-2)}(x_0) = 0 \quad (x > x_0).$$

依此类推, 最后得

$$F(x) > F(x_0) = 0 \quad (x > x_0), \text{ 即}$$

$$\varphi(x) > \psi(x) \quad (x > x_0).$$

1289. 证明下列不等式:

(a) 当 $x \neq 0$ 时, $e^x > 1 + x$;

(b) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$;

(c) 当 $x > 0$ 时, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$;

(r) 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$;

(s) 当 $x > 0, y > 0$ 及 $0 < \alpha < \beta$ 时,

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}.$$

作不等式(a)–(r)的几何解释.

证 (a) 设 $f(x) = e^x - (1+x)$, 则当 $x > 0$ 时,

$$f'(x) = e^x - 1 > 0,$$

所以, $f(x) > f(0) = 0$ ($x > 0$), 即

$$e^x > 1 + x \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x < 0$ 时,

$$e^x > 1 + x.$$

总之, 当 $x \neq 0$ 时,

$$e^x > 1 + x.$$

此不等式的几何意义是, 曲线 $y = e^x$ 位于曲线 $y = 1 + x$ 的上方. 如图 2.43 所示.

(6) 设 $\varphi(x) = x, \psi(x) = \ln(1+x)$, 则

$$\varphi'(x) = 1, \psi'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > \psi'(x)$, 即 $\varphi'(x) - \psi'(x) > 0$,

且有 $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, 从而

$$\varphi(x) - \psi(x) > \varphi(0) - \psi(0) = 0 \quad (x > 0),$$

即

$$x - \ln(1+x) > 0 \quad (x > 0).$$

同理可证, 当 $x < 0$ 时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x).$$

所以, 当 $x > 0$ 时,

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

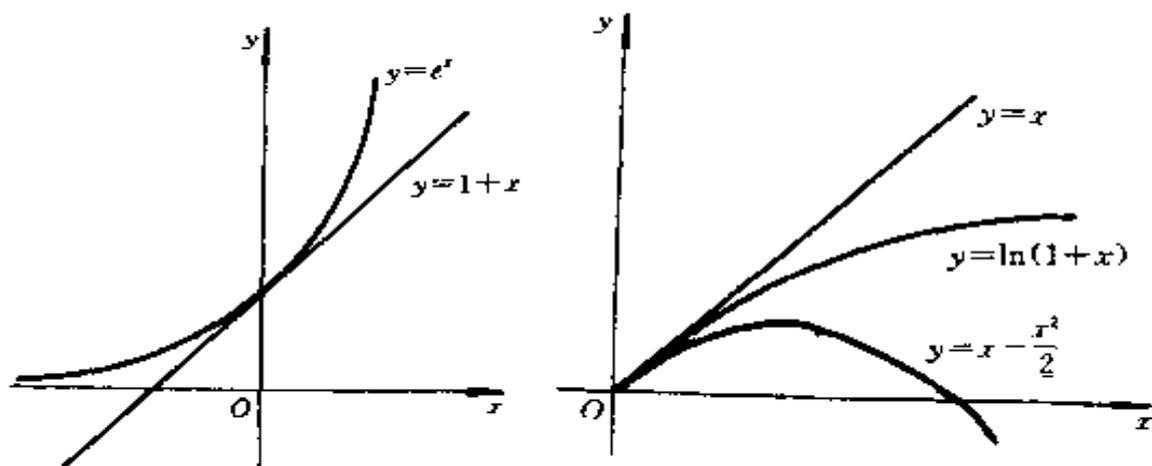


图 2.44

图 2.43

此不等式表示对数函数 $y = \ln(1+x)$ 的图形介于抛物线 $y = x - \frac{x^2}{2}$ 和直线 $y = x$ 之间 ($x > 0$). 如图 2.44 所示.

(B) 令 $F(x) = x - \sin x$, 则

$$F'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad (\text{当 } x > 0, x \neq 2n\pi, \\ n = 1, 2, \dots \text{ 时}),$$

故 $F(x)$ 在 $x > 0$ 时是严格增大的. 因此, 当 $x > 0$ 时, 有

$$F(x) > F(0) = 0,$$

从而

$$x > \sin x \quad (x > 0).$$

其次再证, $x - \frac{x^3}{6} < \sin x$ ($x > 0$). 设

$$\psi_1(x) = x - \frac{x^3}{6}, \varphi_1(x) = \sin x,$$

则有

$$\psi_1(0) = \varphi_1(0) = 0, \psi'_1(0) = \varphi'_1(0) = 1.$$

又因 $\psi''_1(x) = -x, \varphi''_1(x) = -\sin x$, 于是, 当 $x > 0$ 时, 有

$$\psi''_1(x) > \varphi''_1(x).$$

利用 1288 题的结果得知,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} (x > 0).$$

所以, 当 $x > 0$ 时

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x <$$

x . 此不等式表示, 在 y 轴的右侧, 曲线 $y = \sin x$ 介于直线 $y = x$ 和曲线 $y = x - \frac{x^3}{6}$ 之间,

如图 2.45 所示.

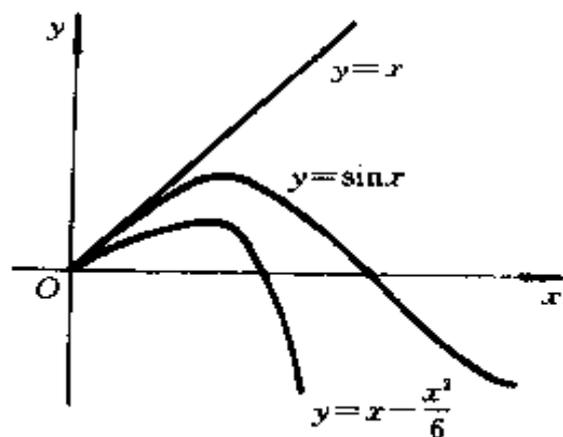


图 2.45

(r) 设 $\varphi(x) = \operatorname{tg} x, \psi(x) = x + \frac{x^3}{3}$, 则有

$$\varphi(0) = \psi(0) = 0;$$

$$\varphi'(x) = \sec^2 x, \psi'(x) = 1 + x^2,$$

$$\varphi(0) = \psi'(0) = 1;$$

$$\varphi''(x) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \psi''(x) = 2x,$$

$$\varphi''(0) = \psi''(0) = 0;$$

$$\varphi'''(x) = 2(1 + 3\operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg}^2 x),$$

$$\psi'''(x) = 2,$$

从而当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\varphi'''(x) > \psi'''(x)$.

于是利用 1288 题的结果
得知

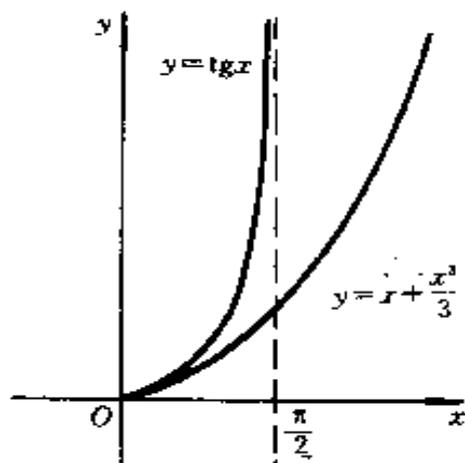
当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\operatorname{tg}x >$

$x + \frac{x^3}{3}$. 此不等式表示,

在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内, 曲线 $y =$

$\operatorname{tg}x$ 在曲线 $y = x + \frac{x^3}{3}$ 的

上方. 如图 2.46 所示.



2.46

(1) 当 $x = y$ 时, 由 $0 < a < \beta$ 知, 不等式

$$2^{\frac{1}{a}} > 2^{\frac{1}{\beta}} (x > 0, y > 0)$$

显然成立.

当 $x \neq y$, 且 $x > 0, y > 0$, 不妨设 $0 < \frac{y}{x} < 1$.

令 $a = \frac{y}{x}$, 为证不等式, 只需证明 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 严格

递减, 也即只要证明函数 $F(t) = \frac{1}{t} \ln(1 + a^t)$ 严格

递减. 实际上, 因为

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{\ln(1 + a^t)}{t^2}.$$

当 $a^t > 0$ 时, 有 $a^t - \frac{a^{2t}}{2} < \ln(1 + a^t)$, 所以

$$F'(t) = \frac{a^t \ln a}{t(1 + a^t)} - \frac{a^t - \frac{a^{2t}}{2}}{t^2}.$$

由于 $0 < a < 1$ 及 $t > 0$, 所以 $\ln a < 0$ 及 $a^t > a^{2t} > \frac{a^{2t}}{2}$
 从而 $F'(t) < 0$, 即 $F(t)$ 是严格递减, 从而当 $x \neq y$ 时,
 不等式

$$(x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta + y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

也成立.

作 $f(t) = (1 + a^t)^{\frac{1}{t}}$ 的图形, 如图 2.47 所示. 对于
 $(0, +\infty)$ 内任意两个值 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$, 图形上对应点的
 纵坐标却相应地减小

$$f(\alpha) > f(\beta).$$

*) 利用本题(6)的结果.

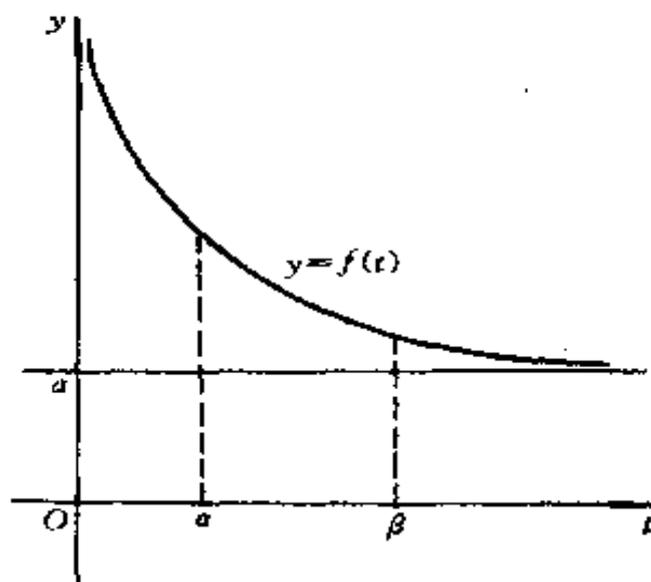


图 2.47

1290. 证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x,$$

所以,

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e \quad (x > 0).$$

同理可证,当 $x > 0$ 时, $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}$ 严格递减,并且有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = e,$$

所以

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} > e \quad (x > 0).$$

1292. 等差级数与等比级数的项的数目相同且有相同的首项与末项,它们的一切项都是正的. 证明等差级数各项的和大于或等于^{*}等比级数各项的和.

证 证法一:

设等差级数各项为 a_1, a_2, \dots, a_n 公差为 d ; 等比级数各项为 b_1, b_2, \dots, b_n , 公比为 q . 记其和为

$$\sigma = \sum_{k=1}^n a_k, Q = \sum_{k=1}^n b_k.$$

当 $q = 1$ 时,由 $a_1 = b_1$ 及 $a_n = b_n$ 可知有 $\sigma = Q$.

当 $q < 1$ 时,由 $a_1 = b_1$ 及 $a_n = a_1 + (n-1)d, b_n = b_1 q^{n-1}$ 且 $a_n = b_n$ 得知

$$a_1 + (n-1)d = b_1 q^{n-1},$$

即

$$d = -\frac{1 - q^{n-1}}{n-1} a_1 \quad (a_1 > 0).$$

那么有

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] \\
&= \sum_{k=1}^n \left[a_1 - \frac{k-1}{n-1} (1 - q^{n-1}) a_1 \right] \\
&= a_1 \left[n - \frac{1}{n-1} (1 - q^{n-1}) \sum_{l=0}^{n-1} l \right] \\
&= \frac{n}{2} a_1 (1 + q^{n-1}), \\
Q &= \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.
\end{aligned}$$

研究

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{a_1} (1 - q) (\sigma - Q) \\
&= n(1 - q)(1 + q^{n-1}) - 2(1 - q^n) \\
&= n(1 - q + q^{n-1} - q^n) - 2(1 - q^n) \\
&= (n - 2)(1 - q^n) - nq(1 - q^{n-2}).
\end{aligned}$$

作函数

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (n - 2)(1 - t^n), \\
\psi(t) &= nt(1 - t^{n-2}),
\end{aligned}$$

则有 $\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = -n(n - 2)$.

但是

$$\begin{aligned}
\varphi''(t) &= -n(n - 1)(n - 2)t^{n-2}, \\
\psi''(t) &= -n(n - 1)(n - 2)t^{n-3},
\end{aligned}$$

当 $0 < t < 1$ 时, 有 $\psi''(t) < \varphi''(t)$, 利用 1288 题的结果可得,

$$\psi(t) < \varphi(t) \quad (0 < t < 1),$$

即当 $q < 1$ 时, $\psi(q) < \varphi(q)$. 从而,

$$\frac{2}{a_1}(1-q)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

这就证明了 $\sigma > Q$.

当 $q > 1$ 时, 由 $a_n = b_n$ 得知

$$d = \frac{q^{n-1} - 1}{n-1} a_1 > 0.$$

又

$$\begin{aligned} \sigma &= \sum_{k=1}^n [a_1 + (k-1)d] \\ &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d \\ &= \frac{n}{2}a_1(1+q^{n-1}), \end{aligned}$$

$$Q = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

与上述讨论相同, 有

$$\begin{aligned} &\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) \\ &= (n-2)(q^n-1) - nq(q^{n-2}-1). \end{aligned}$$

作函数

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (n-2)(t^n-1), \\ \psi(t) &= nt(t^{n-2}-1), \end{aligned}$$

则有

$$\varphi(1) = \psi(1) = 0, \varphi'(1) = \psi'(1) = n(n-2).$$

而

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= n(n-1)(n-2)t^{n-2}, \\ \psi''(t) &= n(n-1)(n-2)t^{n-3}, \end{aligned}$$

当 $t > 1$ 时, 有 $\varphi''(t) > \psi''(t)$, 利用 1288 题结果有

$$\varphi(t) > \psi(t).$$

于是当 $q > 1$ 时, 便得 $\varphi(q) > \psi(q)$. 因而

$$\frac{2}{a_1}(q-1)(\sigma-Q) = \varphi(q) - \psi(q) > 0.$$

从而完全证明了 $\sigma > Q$.

证法二:

设等差级数的公差为 d , 等比级数的公比为 q .

如果 $d = 0$, 易见两个级数叙列均为常数叙列, 因此其和相等.

如果 $d \neq 0$, 不妨设 $d > 0$ (否则把末项变为首项, 将叙列颠倒即成), 由于各项均为正的, 所以 $q > 0$.

设首项为 a , 则末项为 $a + nd = aq^n$. 考虑函数

$$f(x) = a + xd - aq^x.$$

由于 $f(0) = f(n) = 0$, 所以在 $(0, n)$ 内存在一点 c , 使得 $f'(c) = 0$, 而 $f''(x) = -aq^x \ln^2 q < 0$. 从而

$$f'(x) = d - aq^x \ln q$$

为一递减函数. 所以

$$\text{当 } x < c \text{ 时, } f'(x) > 0;$$

$$\text{当 } x > c \text{ 时, } f'(x) < 0.$$

从而当 $0 \leq x \leq n$ 时, $f(x) \geq 0$, 其中等号当且仅当 $x = 0$ 及 $x = n$ 时成立. 特别是, 对于 $0 < k < n$, 有

$$f(k) = a + kd - aq^k > 0,$$

即

$$a + kd > aq^k.$$

于是,

$$\sum_{k=0}^n (a + kd) > \sum_{k=0}^n aq^k.$$

*) 原题要求证明“大于”，实际应为“大于或等于”。

1293. 用不等式

$$\sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \geq 0,$$

其中 $x, a_k, b_k (k = 1, 2, \dots, n)$ 为实数，来证明哥西—布尼雅柯夫斯基不等式

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

证 由于

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_k x + b_k)^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) x + \sum_{k=1}^n b_k^2 \geq 0, \end{aligned}$$

对任何 x 都成立，故上述二次式的判别式不能为正，即

$$4 \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 - 4 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \leq 0,$$

也即，

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n b_k^2.$$

1294. 证明：正数的算术平均数不大于这些数的平方的平均数，即是

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

证 利用 1293 题的结果，设

$$a_k = x_k, b_k = \frac{1}{n},$$

则有

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{n}\right)^2 \leq \sum_{k=1}^n x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2,$$

所以,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

1295. 证明:正数的几何平均数不大于这些数的算术平均数,即是

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

证 设 $G_n = (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$,

$$A_n = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

则有

$$(G_n)^n = x_1 x_2 \cdots x_n, nA_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

当 $n = 2$ 时,我们已有不等式

$$\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

今假定 $n = k$ 时,有

$$G_k \leq A_k,$$

我们来证 $n = k + 1$ 时,有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

事实上,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &= (x_1 \cdot x_2 \cdots x_k \cdot x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &= [(G_k)^k \cdot x_{k+1}]^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (G_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq (A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}}. \end{aligned}$$

如果我们设

$$f(x) = x^a - (1 - a + ax),$$

$$\text{由 } f'(x) = a(x^{a-1} - 1) \begin{cases} > 0, \text{当 } 0 < x < 1; \\ = 0, \text{当 } x = 1; \\ < 0, \text{当 } x > 1, \end{cases}$$

故知 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是严格递增的, 而在 $[1, \infty)$ 上是严格递减的. 令 $a = \frac{1}{p}, 1 - a = \frac{1}{q}$, 用 $\frac{a}{b}$ 代替 x , 于是就有下列不等式:

$$\text{当 } a > 0, b > 0, p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ 时}$$

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}.$$

$$\text{今 } A_k = a, x_{k+1} = b, p = \frac{k+1}{k} > 1, q = k+1 > 1,$$

且

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{k+1} = 1,$$

所以,

$$(A_k)^{\frac{k}{k+1}} \cdot (x_{k+1})^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1}.$$

于是,

$$\begin{aligned} G_{k+1} &\leq \frac{k}{k+1} A_k + \frac{1}{k+1} x_{k+1} \\ &= \frac{1}{k+1} (kA_k + x_{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} (x_1 + x_2 + \cdots + x_k + x_{k+1}) = A_{k+1}. \end{aligned}$$

从而有

$$G_{k+1} \leq A_{k+1}.$$

按照数学归纳法得知不等式

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

对于任何的自然数 n 均成立.

1296. 设 a 及 b 为二正数, 则由下之等式

$$\text{若 } s \neq 0, \Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2} \right)^{\frac{1}{s}},$$

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b)$$

所定义之函数称为正数 a 及 b 之 s 阶平均数.

特别是, 当 $s = -1$ 时得调和平均数, 当 $s = 0$ 时得几何平均数(试证之!); 当 $s = 1$ 时得算术平均数; 当 $s = 2$ 时得平方平均数.

证明: (1) $\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b)$;

(2) 当 $a \neq b$ 时, 函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的增函数;

(3) $\lim_{s \rightarrow -\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b).$$

证 先证当 $s = 0$ 时得几何平均数, 由题设知

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} \Delta_s(a, b) = \lim_{s \rightarrow 0} e^{\frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}},$$

研究 $f(x) = \ln \frac{a^x + b^x}{2}$ 在 $x = 0$ 点的导数, 有

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \ln \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right) \right\}.$$

另一方面,

$$\begin{aligned} f'(0) &= f'(x) \Big|_{x=0} \\ &= \left[\frac{2}{a^x + b^x} \cdot \frac{1}{2} (a^x \ln a + b^x \ln b) \right] \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

因此求得

$$\Delta_G(a, b) = e^{f'(G)} = e^{\frac{1}{2}(\ln a + \ln b)} = \sqrt{ab},$$

此即几何平均数.

$$(1) \text{ 由于 } 2[\min(a, b)]^s \leq a^s + b^s \\ \leq 2[\max(a, b)]^s,$$

所以,

$$\min(a, b) \leq \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} \leq \max(a, b),$$

即

$$\min(a, b) \leq \Delta_s(a, b) \leq \max(a, b).$$

$$(2) \text{ 考虑 } \ln \Delta_s(a, b) = \frac{1}{s} \ln \frac{a^s + b^s}{2}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) \\ &= -\frac{1}{s^2} \ln \frac{a^s + b^s}{2} + \frac{a^s \ln a + b^s \ln b}{s(a^s + b^s)} \\ &= \frac{1}{s^2(a^s + b^s)} \left\{ (a^s \ln a^s + b^s \ln b^s) \right. \\ & \quad \left. - (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2} \right\}. \end{aligned}$$

由于 $a^s > 0, b^s > 0$, 参看 1314 题(B) 的结果知

$$a^s \ln a^s + b^s \ln b^s > (a^s + b^s) \ln \frac{a^s + b^s}{2},$$

所以, $\frac{d}{ds} \ln \Delta_s(a, b) > 0$, 即 $\ln \Delta_s(a, b)$ 是严格增函数, 由于对数函数的严格单调增加性, 故知函数 $\Delta_s(a, b)$ 是变量 s 的严格增函数.

(3) 不妨设 $0 < a < b$. 于是

$$\begin{aligned} &\leq |f(x+h)| + |f(x-h)| \\ &\quad + \frac{h^2}{2} [|f''(\xi_1)| + |f''(\xi_2)|] \\ &\leq 2M_0 + h^2 M_2, \end{aligned}$$

即

$$M_2 h^2 - 2|f'(x)|h + 2M_0 \geq 0.$$

由于此式对任何 h 都成立, 故此二次式的判别式必非正:

$$4|f'(x)|^2 - 4M_2(2M_0) \leq 0,$$

即

$$|f'(x)|^2 \leq 2M_0 M_2$$

由此可得

$$M_1^2 \leq 2M_0 M_2.$$

证完.

§ 8. 凹凸性, 拐点

1° 凹的充分条件 若曲线 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 的一段, 位于其任意一点的切线之上(或之下), 则称这个可微分的函数 $y = f(x)$ 的图形于闭区间 $[a, b]$ 上是凹(或对应地, 凸)的. 在假设二阶导函数 $f''(x)$ 存在的情况下, 当 $a < x < b$ 时不等式

$$f''(x) > 0 \text{ [或对应地 } f''(x) < 0 \text{]}$$

成立, 为图形是凹(或对应地, 凸)的充分条件.

2° 拐点的充分条件 若函数的图形在某点的凹凸性改变, 则称此点为**拐点**.

若在点 x_0 , 或是 $f''(x_0) = 0$, 或是 $f''(x_0)$ 不存在, 且当 x 变动经过 x_0 时, $f''(x)$ 变号, 则 x_0 便是拐点.

1298. 研究曲线

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

于 $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ 及 $C(0, 0)$ 诸点的凹凸性.

$$\text{解 } y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}.$$

于 $A(-1, 0)$ 点, $y'' = \frac{2}{9} > 0$, 故在该点附近曲线的图象是凹的;

于 $B(1, 2)$ 点, $y'' = -\frac{2}{9} < 0$. 故在该点附近曲线的图形是凸的;

于 $C(0, 0)$ 点附近, y'' 变号, 因此它是拐点. 在 C 点左边 ($x < 0$), $y'' > 0$, 曲线是凹的; 在 C 点右边 ($x > 0$), $y'' < 0$, 曲线是凸的. 注意, 当 $x = 0$ 时, y'' 不存在.

求下列函数的图象的凹或凸的区域及拐点:

$$1299. y = 3x^2 - x^3.$$

$$\text{解 } y' = 6x - 3x^2, y'' = 6 - 6x.$$

当 $-\infty < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = 1$ 为拐点.

$$1300. y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} (a > 0).$$

$$\text{解 } y' = -\frac{2a^3x}{(a^2 + x^2)^2}, y'' = -\frac{2a^3(a^2 - 3x^2)}{(a^2 + x^2)^3}.$$

当 $|x| < \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \frac{a}{\sqrt{3}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}$ 是拐点.

1301. $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

解 $y' = 1 + \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, y'' = \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}$.

当 $-\infty < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $0 < x < +\infty$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = 0$ 是拐点(注意, $x = 0$ 时, y'' 不存在).

1302. $y = \sqrt{1+x^2}$.

解 $y' = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}, y'' = x(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} > 0$, 图形始终呈凹状. 无拐点.

1303. $y = x + \sin x$.

解 $y' = 1 + \cos x, y'' = -\sin x$.

当 $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = k\pi$ 是拐点($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1304. $y = e^{-x^2}$.

解 $y' = -2xe^{-x^2}, y'' = e^{-x^2}(4x^2 - 2)$.

当 $|x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $|x| > \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 是拐点.

1305. $y = \ln(1+x^2)$.

解 $y' = \frac{2x}{1+x^2}, y'' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

当 $|x| < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $|x| > 1$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = \pm 1$ 是拐点.

1306. $y = x \sin(\ln x) (x > 0)$.

解 $y' = \sin(\ln x) + \cos(\ln x)$,

$$y'' = \frac{\sqrt{2}}{x} \cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}} (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

当 $e^{2k\pi + \frac{3}{4}\pi} < x < e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的;

当 $e^{2k\pi + \frac{\pi}{4}} < x < e^{2k\pi + \frac{5}{4}\pi}$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

$x = e^{k\pi + \frac{\pi}{4}}$ 是拐点 ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

1307. $y = x^x (x > 0)$.

解 $y' = x^x (\ln x + 1), y'' = x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right]$.

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形始终是凹的.

1308. 证明曲线

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

有位于同一直线上的三个拐点. 作出这个函数的图形.

证 $y' = \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$,

$$y'' = \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x_1 = -2 - \sqrt{3}, x_2 = -2 + \sqrt{3}$,

$x_3 = 1$, 对应的函数值为 $y_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$,

$y_2 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}, y_3 = 1$. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 + \sqrt{3} & -2 - \sqrt{3} \\ 1 & \frac{1 + \sqrt{3}}{4} & \frac{1 - \sqrt{3}}{4} \end{vmatrix} = 0$$

所以拐点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 及 $C(x_3, y_3)$ 在一条直线上(图 2.48).

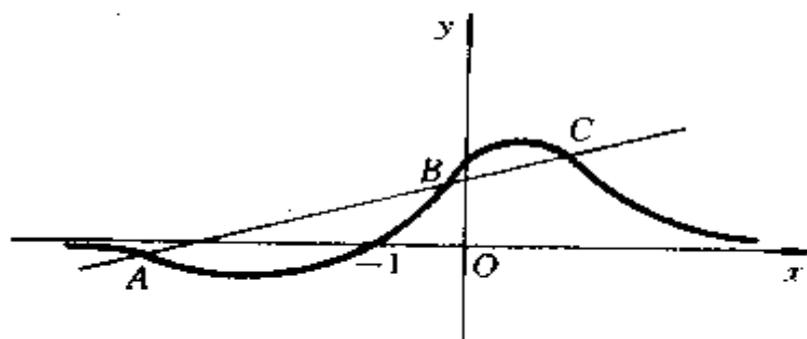


图 2.48

1309. 当如何选择参变数 h 时, “概率曲线”

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} \quad (h > 0)$$

有拐点 $x = \pm \sigma$?

解 $y' = \frac{-2h^3 x}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$

$$y'' = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2} (4h^4 x^2 - 2h^2).$$

令 $y'' = 0$, 得 $x^2 = \frac{1}{2h^2}.$

由于拐点为 $x = \pm \sigma$, 故有

$$h^2 = \frac{1}{2\sigma^2}, \text{ 即 } h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (\sigma > 0).$$

1310. 研究摆线(旋轮线)

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (a > 0)$$

的凹凸性。

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'_t y''_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}$$

$$= -\frac{\operatorname{csc}^2 \frac{t}{2}}{2a(1 - \cos t)} < 0$$

$$(2k\pi < t < 2(k+1)\pi, k = 0, \pm 1, \dots),$$

故摆线始终呈凸状。

1311. 设函数 $f(x)$ 于区间 $a \leq x < +\infty$ 中可微分二次, 并且:

$$(1) f(a) = A > 0; \quad (2) f'(a) < 0;$$

$$(3) \text{ 当 } x > a, f''(x) \leq 0.$$

证明: 在区间 $(a, +\infty)$ 内有而且仅有方程 $f(x) = 0$ 之一实根。

证 由于 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续且当 $a < x < +\infty$ 时 $f''(x) \leq 0$, 故函数 $f'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的, 于是当 $a \leq x < +\infty$ 时, 必 $f'(x) \leq f'(a) < 0$; 由此又知函数 $f(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是严格减小的, 因此在 $(a, +\infty)$ 上至多有一点使 $f(x) = 0$, 即在 $(a, +\infty)$ 上方程 $f(x) = 0$ 至多有一(实)根。

下面再证明必有点 $a < x_0 < +\infty$ 存在, 使 $f(x_0) =$

0. 考虑函数 $F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$ ($a \leq x < +\infty$), 则

$$F'(x) = f'(x) - f'(a), F''(x) = f''(x), \\ (a \leq x < +\infty).$$

于是当 $a < x < +\infty$ 时 $F''(x) \leq 0$, 从而 $F'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的, 但 $F'(a) = 0$, 故当 $a \leq x < +\infty$ 时, $F'(x) \leq F'(a) = 0$; 由此又知 $F(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上是减小的, 但 $F(a) = 0$, 因此当 $a \leq x < +\infty$ 时, 恒有 $F(x) \leq F(a) = 0$.

令 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. 由于 $f(a) > 0, f'(a) < 0$, 故 $x^* > a$. 很明显

$$F(x^*) = f(x^*) - f(a) - f'(a) \left[-\frac{f(a)}{f'(a)} \right] \\ = f(x^*).$$

但上面已证必 $F(x^*) \leq 0$, 故 $f(x^*) \leq 0$. 于是, 根据连续函数的中间值定理, 知必有 $a < x_0 \leq x^*$ 存在, 使 $f(x_0) = 0$. 证毕.

注 上述证明的思路在几何上是明显的. 函数 $F(x)$ 代表曲线 $y = f(x)$ (它是凸的) 上的纵坐标与在点 $(a, f(a))$ 处的切线 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ 上的纵坐标之差, 点 $x^* = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ 即是此切线与 Ox 轴的交点 (图 2.49).

1312. 若对于区间 (a, b) 内的任意两点 x_1 与 x_2 及任意二数 λ_1 与 λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 有不等式:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$$

(或对应地,相反的不等式 $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)$), 则称函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凹(凸)的.

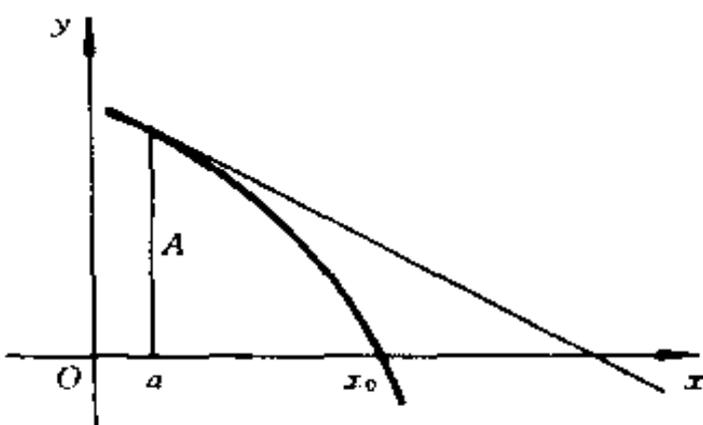


图 2.49

证明: 函数 $f(x)$ (1) 若当 $a <$

$x < b$ 时, $f''(x) > 0$, 则于 (a, b) 上是凹的; (2) 若当 $a < x < b$ 时, $f''(x) < 0$, 则于 (a, b) 上是凸的.

证 证法一:

设 x_1, x_2 为 (a, b) 中任意两点, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 不妨设 $x_1 < x_2$. 于是 $a < x_1 < x_2 < b$. 考虑 $0 \leq t \leq 1$ 上的函数 $F(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2] - (1-t)f(x_1) - tf(x_2)$. 显然,

$$F(0) = f(x_1) - f(x_1) = 0,$$

$$F(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

利用中值定理得知: 当 $0 \leq t \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F'(t) &= (x_2 - x_1) f'[(1-t)x_1 + tx_2] \\ &\quad - [f(x_2) - f(x_1)] \\ &= (x_2 - x_1) \{ f'[(1-t)x_1 + tx_2] - f'(c) \}, \end{aligned}$$

其中 $x_1 < c < x_2$. 令 $t_0 = \frac{c - x_1}{x_2 - x_1}$, 则 $0 < t_0 < 1$ 且 $c = (1 - t_0)x_1 + t_0x_2$. 于是 $F'(t_0) = 0$. 此外, 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, 有

$$F''(t) = (x_2 - x_1)^2 f''[(1-t)x_1 + tx_2].$$

(1) 若 $f''(x) > 0 (a < x < b)$. 由上式知 $F''(t) > 0 (0 \leq t \leq 1)$, 故 $F'(t)$ 在 $0 \leq t \leq 1$ 上是严格增大的, 再注意到 $F'(t_0) = 0$, 即知: 当 $0 \leq t < t_0$ 时 $F'(t) < 0$; 当 $t_0 < t \leq 1$ 时, $F'(t) > 0$. 由此又知: 在 $0 \leq t \leq t_0$ 上 $F(t)$ 是严格减小的, 在 $t_0 \leq t \leq 1$ 上 $F(t)$ 是严格增大的; 由此, 再用 $F(0) = 0, F(1) = 0$, 即知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) < 0$. 特别 $F(\lambda_2) < 0$. 但 $F(\lambda_2) = f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - \lambda_1 f(x_1) - \lambda_2 f(x_2)$, 故

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) < \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

由此可知 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凹的.

(2) 若 $f''(x) < 0 (a < x < b)$, 则 $F''(t) < 0 (0 \leq t \leq 1)$. 和(1)情形完全类似地可推知: 当 $0 < t < 1$ 时, 恒有 $F(t) > 0$. 特别 $F(\lambda_2) > 0$, 由此即知

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) > \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

故 $f(x)$ 在 (a, b) 上是凸的.

证法二:

在 (a, b) 内任取两点 x_1 及 x_2 , 使 $a < x_1 < x_2 < b$, 并令 $t = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, 则由 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 知: $x_1 < t < x_2$.

将函数 $f(x)$ 在 $x = t$ 点按 1266 题题解附注的公式展开, 得

$$f(x) = f(t) + (x-t)f'(t) + \frac{1}{2}(x-t)^2 f''(\xi), \quad (1)$$

其中 $a < t < \xi < x$ 或 $a < x < \xi < t$. 将 $x = x_1$ 及 $x = x_2$ 代入(1)式, 得

所以,函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 上是凸的.

1313. 证明: 函数

$$x^n (n > 1), e^x, x \ln x$$

于区间 $(0, +\infty)$ 上是凹的; 而函数

$$x^n (0 < n < 1), \ln x,$$

于区间 $(0, +\infty)$ 上是凸的.

证 (1) 设 $y = x^n (n > 1)$, 则

$$y'' = n(n-1)x^{n-2}.$$

它在 $(0, +\infty)$ 上是大于零的, 因此图形是凹的.

但当 $0 < n < 1$ 时, 则 $y'' < 0$, 故此时图形是凸的.

(2) 对于函数 e^x , 其二阶导函数为 e^x , 它始终为正, 因此图形是凹的.

(3) 对于函数 $x \ln x$, 其二阶导函数为 $\frac{1}{x}$, 它在 $(0, +\infty)$ 内大于零, 因此图形是凹的.

(4) 对于函数 $\ln x$, 其二阶导函数为 $-\frac{1}{x^2}$, 它始终为负, 因此, 在 $(0, +\infty)$ 内图形是凸的.

1314. 证明下列不等式, 并解释其几何意义:

$$(a) \frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n, (x > 0, y > 0, x \neq y, n > 1);$$

$$(b) \frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y);$$

$$(c) x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2} \\ (x > 0, y > 0).$$

证 我们已知,若函数 $f(x)$ 的图形在区间 (a, b) 内是凹的,则对于 (a, b) 中的任意两点 x 和 y 满足不等式

$$\frac{1}{2}[f(x) + f(y)] > f\left[\frac{x+y}{2}\right].$$

于是,利用 1313 题的结果,我们有,

(a) 设 $f(x) = x^n$, ($x > 0, n > 1$), 则其图形是凹的. 于是,对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left[\frac{x+y}{2}\right]^n.$$

(b) 设 $f(x) = e^x$, 则在 $(-\infty, +\infty)$ 上图形是凹的. 于是,对于任意两点 x 和 y , 得

$$\frac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$$

(c) 设 $f(x) = x \ln x$, 则对于 $x > 0$ 图形是凹的. 于是,对于任意两点 x 和 y , 得

$$x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}.$$

它们的几何意义是:联接点 $(x, f(x))$ 及 $(y, f(y))$ 的弦的中点始终位于曲线上对应点(具相同横坐标)的上方.

1315. 证明有界的凸的函数处处连续,并有左侧及右侧的导函数.

证 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内是凸的,并设 x_0 为 (a, b) 内的任一点,今证 $f(x)$ 在点 x_0 连续,且有左侧及右侧的导数.

在点 x_0 附近取一邻域 $|x - x_0| < \delta$, 使得这邻域全部包含在 (a, b) 内,并记

$$M = \min\{f(x_0 - \delta), f(x_0 + \delta)\}.$$

设 $0 < |x - x_0| < \delta$. 记

$$t = \frac{|x - x_0|}{\delta},$$

则 $0 < t < 1$.

当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时, 有

$$x = t(x_0 + \delta) + (1 - t)x_0$$

及

$$x_0 = \frac{1}{1+t}x + \frac{t}{1+t}(x_0 + \delta).$$

由于 $f(x)$ 为凸函数, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &> tf(x_0 + \delta) + (1 - t)f(x_0) \\ &\geq tM + (1 - t)f(x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} f(x_0) &> \frac{1}{1+t}f(x) + \frac{t}{1+t}f(x_0 + \delta) \\ &\geq \frac{f(x) + tM}{1+t}. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1), 得

$$f(x) - f(x_0) > -t[f(x_0) - M];$$

由(2), 得

$$t[f(x_0) - M] > f(x) - f(x_0).$$

从而 $f(x_0) - M > 0$, 且

$$|f(x) - f(x_0)| < t[f(x_0) - M]$$

$$= \frac{[f(x_0) - M]}{\delta} \cdot |x - x_0|. \quad (3)$$

当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时, 类似地也可导出(3)式, 故当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, (3)式恒成立.

由此显然有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

这就证实了凸函数 $f(x)$ 在点 x_0 的连续性.

记 $x = x_0 + h$, 则(3)式可改写为

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \\ & < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta} \quad (0 < |h| < \delta). \end{aligned} \quad (4)$$

引进函数

$$\varphi(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \quad (-\delta < h < \delta).$$

容易验证 $\varphi(h)$ 仍为凸函数, 且有 $\varphi(0) = 0$. 今取任意两数 t_1 及 t_2 , 设有 $0 < t_1 < t_2 < \delta$, 并改写为

$$t_1 = \frac{t_1}{t_2} \cdot t_2 + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \cdot 0.$$

对于 t_2 与 0 两点可用凸函数性质, 有

$$\begin{aligned} \varphi(t_1) & > \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2) + \left(1 - \frac{t_1}{t_2}\right) \varphi(0) \\ & = \frac{t_1}{t_2} \varphi(t_2), \end{aligned}$$

即

$$\frac{\varphi(t_1)}{t_1} > \frac{\varphi(t_2)}{t_2},$$

这说明函数 $F(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$ 是一个严格单调下降函数. 如

从 $h \rightarrow +0$ 方向看, 则函数 $F(h)$ 严格单调增大. 但由 (4) 可知 $|F(h)| < \frac{|f(x_0) - M|}{\delta}$, 即 $F(h)$ 在 $0 < |h| < \delta$ 有界, 故极限 $\lim_{h \rightarrow +0} F(h)$ 存在, 也即 x_0 的右侧导数

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_+(x_0)$$

存在. 同理, 可证左侧导数 $f'_-(x_0)$ 也存在.

以上讨论中, 对于区间是否有穷无关紧要. 证毕.

注 本题不需假定凸函数有界, 证明中也未用到有界这个条件, 参看 E. C. Titchmarsh, The Theory of Functions, § 5. 31. 若以较弱的不等式 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) >$

$\frac{1}{2}f(x_1) + \frac{1}{2}f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 作为凸函数的定义, 则需

加上凸函数有界这个条件, 才能推出它连续并且左、右导数都存在. 参看 G. Pólya, G. Szegő, Problems and Theorems in Analysis, Vol. I, 70 题和 124 题.

1316. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内可微分二次, 且 $f''(\xi) \neq 0$, 其中 $a < \xi < b$. 证明: 在区间 (a, b) 中可找出两个值 x_1 与 x_2 , 满足

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

证 不妨设 $f''(\xi) > 0$. 考察 $f'(\xi)$, 分两种情形:

(1) 若 $f'(\xi) = 0$, 则由 $f''(\xi) > 0$ 知 $f(\xi)$ 为极小值. 从而存在 $\delta > 0$, 在 $[-\delta + \xi, \xi + \delta] \subset (a, b)$ 上函数 $f(x)$ 在 ξ 的左侧单调下降, 在 ξ 的右侧单调上升. 如

果 $f(-\delta + \xi) = f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi, x_2 = \xi + \delta$, 就满足了题中的等式. 如果 $f(-\delta + \xi) < f(\xi + \delta)$, 则取 $x_1 = -\delta + \xi$, 而在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上函数值 $f(x_1)$ 介于 $f(\xi)$ 与 $f(\xi + \delta)$ 之间. 由于 $f(x)$ 在 $[\xi, \xi + \delta]$ 上单调上升, 故存在 $x_2 \in (\xi, \xi + \delta)$, 使 $f(x_2) = f(x_1)$, 从而题中的等式成立. 如果 $f(-\delta + \xi) > f(\xi + \delta)$, 仿前也可取得两点 x_1 及 x_2 , 使 $f(x_1) = f(x_2)$. 这时题中的等式得证.

(2) 若 $f'(\xi) \neq 0$, 则设

$$F(x) = f(x) - f'(\xi)x,$$

从而有

$$F'(\xi) = f'(\xi) - f'(\xi) = 0,$$

且

$$F''(\xi) = f''(\xi) > 0.$$

对于函数 $F(x)$, 应用上述(1)的推证方法, 总存在两点 x_1 及 x_2 , 使 $F(x_1) = F(x_2)$, 也即有

$$f(x_1) - f'(\xi)x_1 = f(x_2) - f'(\xi)x_2,$$

解得

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

从而命题得证.

1317. 证明: 若函数 $f(x)$ 在无穷区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微分两次, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

则在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ , 满足

$$f''(\xi) = 0.$$

证 用反证法,即若不存在 ξ ,使 $f''(\xi) = 0$,则当 $x > x_0$ 时,或者 $f''(x) > 0$,或者 $f''(x) < 0$,如果不是这样,即若存在点 a 与 b ,使得 $f''(a) < 0$ 及 $f''(b) > 0$,则由达布定理*)可知,在 a 与 b 之间必有 c 存在,使得 $f''(c) = 0$,这与我们的反证假设矛盾.因此我们不妨设 $f''(x) > 0$,从而函数 $f(x)$ 的图象是凹的,位于其任一点曲线的切线的上方.

再由

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

与 $f(x)$ 的可微性,利用1237题的结果,即知:在 $(x_0, +\infty)$ 中至少存在一点 c_1 ,使

$$f'(c_1) = 0.$$

由 $f''(x) > 0$ 易知 $f'(x)$ 单调上升,从而当 $x > c_1$ 时, $f'(x) > 0$.取 $c_2 > c_1$,则 $f'(c_2) > 0$.

过点 $(c_2, f(c_2))$ 作曲线 $y = f(x)$ 的切线,其方程为

$$Y(x) = f(c_2) + f'(c_2)(x - c_2).$$

易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} Y(x) = +\infty,$$

而 $f(x) - Y(x) > 0$,从而应有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

这与原设条件 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 矛盾.同样,对于 $f''(x) < 0$ 的情况也可推得以上结论.

于是,在区间 $(x_0, +\infty)$ 内至少有一点 ξ ,使

$$f''(\xi) = 0.$$

*) 达布定理指:若函数 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 内有有限的导

函数,且 $g'(a)g'(b) < 0$,则在 (a,b) 内至少有一点 c ,使

$$g'(c) = 0.$$

其证法是:不妨设 $g'(a) < 0, g'(b) > 0$,则在 a 右边且与 a 充分近的点 x ,有 $g(a) > g(x)$;在 b 左边且与 b 充分近的点 x ,有 $g(x) < g(b)$;由此可知 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最小值必在 (a,b) 内某点 c 达到,从而必有 $g'(c) = 0$.

在本题中,可设 $g(x) = f'(x)$,则由 $g'(a) = f''(a) < 0$ 及 $g'(b) = f''(b) > 0$ 可知在 a 与 b 之间必有 c 存在,使 $g'(c) = 0$,即 $f''(c) = 0$.

§ 9. 未定形的求值法

洛比塔第一法则(未定形 $\frac{0}{0}$ 的求值法) 若(1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 a 点的某邻域 $U, *$ 内有定义并且是连续的(此处 a 为数字或符号 ∞),并且当 $x \rightarrow a$ 时,这两个函数都趋近于零:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

(2) 在 a 点的邻域 $U, *$ 内,除 a 点而外,在其余各点导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在,并且当 $x \neq a$ 时,二者不同时为零;(3) 有限或无穷的极限值 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在,则有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

* 所谓 a 点的邻域 $U, *$ 系指适合于不等式

(1) $|x - a| < \epsilon$, 若 a 为一个数

及

(2) $|x| > \frac{1}{\epsilon}$, 若 a 为符号 ∞, x 的集合.

洛比塔第二法则(不定形 $\frac{\infty}{\infty}$ 的求值法)若:(1)当 $x \rightarrow a$ 时,函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 二者都趋于无穷大;

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty,$$

其中 a 为有限数或符号 ∞ ;

(2)对于属于 a 点的邻域 U ,而异于 a 的一切 x 值,导函数 $f'(x)$ 与 $g'(x)$ 都存在,并且当 $x \in U$,及 $x \neq a$ 时,

$$f'(x) + g'(x) \neq 0,$$

(3)有限或无穷的极限

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

存在,则

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

利用代数变形与取对数的方法,可使未定形 $0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0$ 等的求值法化为前面两个类型的未定形;

$$\frac{0}{0} \text{ 与 } \frac{\infty}{\infty}$$

的求值法.

求出下列各式之值:

$$1318. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} = \frac{a}{b} (b \neq 0).$$

$$1319. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x + \sin x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x + \cos x}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2 \frac{x}{\operatorname{tg} x} + \left(\frac{x}{\operatorname{tg} x} \right)^2} = - \frac{1}{3}.$$

1324.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{3} \frac{\sec^2 x}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}^2 x}}}{4\sin x \cos x} = \frac{1}{3}.$$

$$1325. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + 1 + xe^x - 2e^x}{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x + xe^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x + e^x + xe^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{6} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$1326. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{\sin t + t \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{t}{\sin t} \cos t} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1327. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x - 2 \operatorname{arc} \sin x}{x^3}$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{4x}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{6x}$$

$$= \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4}{(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = 1.$$

1328. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arcsin \sqrt{\frac{x}{b}} \right).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sqrt{x}} \left(\sqrt{a} \arcsin \sqrt{\frac{x}{a}} - \sqrt{b} \arcsin \sqrt{\frac{x}{b}} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{a}}{1+\frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{b}}{1+\frac{x}{b}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{b}\sqrt{x}}}{\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a-b}{(x+a)(x+b)}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{(x+a)^2} - \frac{b}{(x+b)^2}}{3}$$

$$= \frac{a-b}{3ab} \quad (ab \neq 0).$$

1329. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3}.$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - a^{\sin x}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x - \cos x \cdot a^{\sin x}) \ln a}{3x^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln a}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a + \sin x \cdot a^{\sin x} - \cos^2 x \cdot a^{\sin x} \ln a}{2x} \\
&= \frac{\ln a}{6} \lim_{x \rightarrow 0} (a^x \ln^2 a + \cos x \cdot a^{\sin x} + \sin x \cos x \cdot a^{\sin x} \ln a \\
&\quad + \sin 2x \cdot a^{\sin x} \ln a - \cos^3 x \cdot a^{\sin x} \ln^2 a) \\
&= \frac{\ln a}{6} (a > 0).
\end{aligned}$$

1330. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right)$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^x - x}{\ln x - x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{\frac{1}{x} - 1}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^x (\ln x + 1)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} = -2.$$

1331. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin bx \cos ax}{b \sin ax \cos bx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}^{*}) = 1.$

*) 利用 1318 题的结果.

1332. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \operatorname{tg} ax}{b \operatorname{tg} bx}$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sec^2 ax}{b \sec^2 bx} = \left(\frac{a}{b} \right)^2 (b \neq 0).$$

$$1333. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \cdot \sin(\sin x) + \sin x}{4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin(\sin x) - \cos^2 x \cos(\sin x) + \cos x}{12x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{24x} \left[\cos x \sin(\sin x) + \frac{1}{2} \sin 2x \cos(\sin x) \right. \\ & \quad \left. + \sin 2x \cos(\sin x) + \cos^3 x \sin(\sin x) - \sin x \right] \\ &= \frac{1}{24} \lim_{x \rightarrow 0} \left[-\sin x \sin(\sin x) + \cos^2 x \cos(\sin x) \right. \\ & \quad \left. + 3 \cos 2x \cos(\sin x) - \frac{3}{2} \cos x \sin 2x \sin(\sin x) \right. \\ & \quad \left. - 3 \cos^2 x \sin x \sin(\sin x) + \cos^4 x \cos(\sin x) - \cos x \right] \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$1334. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right).$$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\operatorname{th} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \operatorname{sh}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}{\sin 2x \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - \cos 2x}{\cos 2x \operatorname{sh}^2 x + \sin 2x \operatorname{sh} 2x + \operatorname{ch} 2x \sin^2 x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\operatorname{sh}2x + 2\sin 2x}{-2\sin 2x \operatorname{sh}^2 x + 3\cos 2x \operatorname{sh} 2x + 3\sin 2x \operatorname{ch} 2x + 2\operatorname{sh} 2x \sin^2 x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (4\operatorname{ch} 2x + 4\cos 2x)(-4\cos 2x \operatorname{sh}^2 x \\
&\quad - 2\sin 2x \operatorname{sh} 2x - 6\sin 2x \operatorname{sh} 2x + 6\cos 2x \operatorname{ch} 2x \\
&\quad + 6\cos 2x \operatorname{ch} 2x + 6\sin 2x \operatorname{sh} 2x + 4\operatorname{ch} 2x \sin^2 x \\
&\quad + 2\sin 2x \operatorname{sh} 2x)^{-1} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

$$1335. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x},$$

其中 $\operatorname{ar sh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ar sh}(\operatorname{sh} x) - \operatorname{ar sh}(\sin x)}{\operatorname{sh} x - \sin x}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x) - \ln(\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x})}{\operatorname{sh} x - \sin x}, \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x} \cdot \frac{\cos x + \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\sin x + \sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{\cos x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{\operatorname{ch} x - \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{-\sin x \sqrt{1 + \sin^2 x} - \frac{\cos^2 x \sin x}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}}{1 + \sin^2 x} \right)}{\operatorname{sh} x + \sin x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}} \operatorname{sh} x + \sin x} \\
&= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3\sin^2 x \cos x}{(1 + \sin^2 x)^{\frac{5}{2}}}}{\operatorname{ch} x + \cos x} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

1336. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} (\epsilon < 0)$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\epsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\epsilon x^{\epsilon-1}} = 0$.

1337. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} (a > 0, n > 0)$.

解 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{a^n e^{ax}} = 0$.

以上是就 n 为正整数的情形解得的. 若 n 不是正整数, 则

$$[n] < n < [n] + 1.$$

于是,

$$\frac{x^{[n]}}{e^{ax}} < \frac{x^n}{e^{ax}} < \frac{x^{[n]+1}}{e^{ax}} (x > 1).$$

而左右两端当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 上面已证明它们的极限为零. 因此, 中间的极限也为零. 于是, 对于任意大于零的实数 a 和 n , 均有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^{ax}} = 0.$$

$$1338. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}} = \lim_{\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right)^{50} \text{ *)}}{e^{\frac{1}{x^2}}} = 0.$$

*) 利用 1337 题的结果.

$$1339. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^{0.01x}} = 0. \text{ *)}$$

*) 利用 1337 题的结果.

$$1340. \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln x \cdot \ln(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \ln^2 x}{1-x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln^2 x + 2 \ln x}{-1} = 0.$$

$$1341. \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x \quad (\epsilon > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +0} x^\epsilon \ln x = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln x}{x^{-\epsilon}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{-\epsilon x^{-\epsilon-1}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^\epsilon}{\epsilon} = 0.$$

$$1342. \lim_{x \rightarrow +0} x^x.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} x^x = \lim_{x \rightarrow +0} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x} = e^0 \quad (*) = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

$$1343. \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1}.$$

$$\text{解 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(x^x - 1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x \ln x = 0 \quad (*) , \quad \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} = 1$$

及

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} (x \ln^2 x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{2}{x} \ln x}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} (-2x \ln x) = 0, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +0} \{ (e^{x \ln x} - 1) \ln x \} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left\{ \frac{e^{x \ln x} - 1}{x \ln x} \cdot x \ln^2 x \right\} = 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{x^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +0} e^{(e^{x \ln x} - 1) \ln x} = e^0 = 1.$$

*) 利用 1341 题的结果.

$$1344. \lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1).$$

解 $\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = \lim_{x \rightarrow +0} (e^{x^x \ln x} - 1).$

利用 1342 题的结果,有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^x = 1,$$

故得

$$\lim_{x \rightarrow +0} e^{x^x \ln x} = 0,$$

从而有

$$\lim_{x \rightarrow +0} (x^{x^x} - 1) = -1.$$

1345. $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{k}{1+\ln x} \ln x = k \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = k,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{k}{1+\ln x}} = e^k.$$

1346. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = e^0 = 1.$$

$$1350. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

解 由于 $\lim_{x \rightarrow -0} x \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln y)}{y}$

$$= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y \ln y} = 0,$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^0 = 1.$$

$$1351. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{(1+2x)^2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \cdot \cos^2 \frac{\pi x}{2x+1}} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sin \frac{2\pi x}{2x+1} (1+2x)^2} \\ &= 2\pi \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{(1+2x)^3 \frac{2\pi}{(1+2x)^2 \cos \frac{2\pi x}{2x+1}}} \\ &= -4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+2x) \cos \frac{2\pi x}{2x+1}} \end{aligned}$$

$$= 0.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2x+1} \right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

$$1352. \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \operatorname{ctg}(x-a) \ln \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tga}}{\operatorname{tg}(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \sec^2 x}{\sec^2(x-a)} = \frac{2}{\sin 2a}, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)} = e^{\frac{2}{\sin 2a}} \quad (a \neq \frac{k\pi}{2}, k \text{ 为整数}).$$

$$1353. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a^x - x \ln a) - \ln(b^x - x \ln b)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(a^x - 1) \ln a}{a^x - x \ln a} - \frac{(b^x - 1) \ln b}{b^x - x \ln b}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left\{ \frac{a^x \ln^2 a (a^x - x \ln a) - (a^x - 1)^2 \ln^2 a}{(a^x - x \ln a)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^x \ln^2 b (b^x - x \ln b) - (b^x - 1)^2 \ln^2 b}{(b^x - x \ln b)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\ln^2 a - \ln^2 b),$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x - x \ln a}{b^x - x \ln b} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{\ln^2 a - \ln^2 b}{2}}.$$

$$1354. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{e^x - 1 + xe^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x(x+2)} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1355. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \ln x - 1}{(x-1)\ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x} + \ln x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1) + x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1+1+\ln x} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$1356. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x \sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\frac{\sin x}{x} + \cos x} = 0. \end{aligned}$$

$$1357. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right].$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\ln(x + \sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\ln(1+x) \cdot \ln(x + \sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{1+x} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \ln(1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 - x}{\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + (1+x) \ln(1+x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 1}{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 1 + \ln(1+x)} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$1358. \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (a^x \ln a - a x^{a-1}) = a^a (\ln a - 1).$$

$$1359. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \left[\frac{1}{x(1+x)} - \frac{1}{x^2} \ln(1+x) \right]
\end{aligned}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}$$

$$= e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= -e \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)^2} = -\frac{e}{2}.$$

1360. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2} (a > 0).$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right] - a^x \ln a}{2x}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (a+x)^x \left[\ln(a+x) + \frac{x}{a+x} \right]^2 + (a+x)^x \left[\frac{1}{a+x} + \frac{a}{(a+x)^2} \right] - a^x \ln^2 a \right\}$$

$$= \frac{1}{a}.$$

1361. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^x.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} \cdot \frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x} = - \frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg}x \right)^x = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1362. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th}x)^x,$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(\operatorname{th}x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\operatorname{th}x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\operatorname{th}x \operatorname{ch}^2 x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh}2x} = -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2\operatorname{ch}2x}$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\operatorname{sh}2x} = 0.$$

所以 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{th}x)^x = e^0 = 1.$

1363. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\operatorname{arc} \sin x) - \ln x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\operatorname{arc} \sin x} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{x}}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x}{2x^2 \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arc} \sin x}{\left(4x \sqrt{1-x^2} - \frac{2x^3}{\sqrt{1-x^2}} \right) \operatorname{arc} \sin x + 2x^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{arc sin } x}{2(2 - 3x^2)\text{arc sin } x + 2x\sqrt{1-x^2}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-12x\text{arc sin } x + \frac{2(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}} + 2\sqrt{1-x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^2}}} \\
&= \frac{1}{6},
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\text{arc sin } x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{6}}.$$

1364. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x} \ln(1+x) - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

1365. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \text{arc cos } x \right)^{\frac{1}{x}}.$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} = -\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\pi} \arccos x\right)^{\frac{1}{x}} = e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

1366. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x - \ln \operatorname{ch} x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{tg} x - \operatorname{th} x}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sec^2 x - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}{2} = -1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1}.$$

1367. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}.$

$$\begin{aligned} \text{解 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{sh} x \left[\frac{1}{m} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{m}-1} - \frac{1}{n} (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{n}-1} \right]} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{m} - \frac{1}{n}} = \frac{mn}{n-m} \quad (n \neq m), \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[n]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[m]{\operatorname{ch} x}} = \frac{mn}{n-m}.$$

1368. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x}$.

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+e^x) - \ln 2}{\operatorname{th} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{2},$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2} \right)^{\operatorname{cth} x} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

1369.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1} \cdot \frac{\ln(e^x + x)}{x} \right].$$

解 当 $x \rightarrow +\infty$ 时,有

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} &= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) + o \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{3} + o \left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{3} + o(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x + 1} &= x \left[1 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + o \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) \right] \\ &= x + \frac{1}{2} + o \left(\frac{1}{x} \right) + o(1) = x + \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

并注意到 $x^{\frac{1}{x}} \rightarrow 1$, 于是得

$$\begin{aligned} (x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}} &= (x+a)(x+a)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x+a}} \\ &= (x+a) \cdot x^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x \cdot x^{\frac{1}{x}} x^{\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x}} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \left\{ (x+a) \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] - x \left[1 + o\left(\frac{1}{x}\right)\right] \right\} \\ &= x^{\frac{1}{x}} \{ [x+a+o(1)] - [x+o(1)] \} \\ &= x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)], \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+a)^{1+\frac{1}{x}} - x^{1+\frac{1}{x+a}}] \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \{ x^{\frac{1}{x}} [a+o(1)] \} = a. \end{aligned}$$

1371. 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0, 0)$ [$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$], 且在此有斜角 α , 求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x}.$$

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha^*$.

*) 所谓有斜角 α 是指在 $x = 0$ 点有 $f'(0) = \operatorname{tg} \alpha$, 注意到当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 以及 $f'(0)$ 存在, 如果再假定 $f'(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 则也可用洛比塔法则求得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'}{1} = f'(0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

1372. 若当 $x \rightarrow +0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 通过坐标原点 $(0,$

0) [$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0$], 并且当 $0 < x < \epsilon$ 时, 此曲线完全是在两直线 $y = -kx$ 及 $y = kx$ ($k \neq \infty$) 所组成的锐角之内, 证明

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

证 当 $x \rightarrow +0$ 时, 有 $x \ln x \rightarrow 0$. 按题设应有

$$-kx \leq f(x) \leq kx \quad (k > 0, 0 < x < \epsilon),$$

而当 $x > 0$ 且很小时, 有 $\ln x < 0$, 故

$$kx \ln x < f(x) \ln x < -kx \ln x,$$

从而有

$$e^{kx \ln x} < e^{f(x) \ln x} < e^{-kx \ln x}.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时, 不等式两端均趋于 $e^0 = 1$, 注意到 $e^{f(x) \ln x} = x^{f(x)}$, 即有

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{f(x)} = 1.$$

1373. 证明: 若函数 $f(x)$ 的二阶导函数 $f''(x)$ 存在, 则

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

证 当 $h \rightarrow 0$ 时, $f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) \rightarrow 0$

及 $h^2 \rightarrow 0$, 且分子、分母(视为 h 的函数)都有导数, 又注

意到分母的导数 $2h \neq 0$ ($h \rightarrow 0$ 但 $h \neq 0$), 故对 $\lim_{h \rightarrow 0}$

$\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$ 可用洛比塔法则, 并

且继续运算,最后得证

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} + \frac{f'(x-h) - f'(x)}{-h} \right] \\ &= \frac{1}{2} [f''(x) + f''(x)] = f''(x). \end{aligned}$$

1374. 研究运用洛比塔法则于下列各例的可能性:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}; & \text{(6)} \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}; \\ \text{(b)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2} \sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)}; \\ \text{(r)} \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + x + \sin x \cos x}{(x + \sin x \cos x)e^{\sin x}}. \end{aligned}$$

解 (a) 分子、分母分别求导数,得商为

$$\frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x},$$

此函数当 $x \rightarrow 0$ 时,极限不存在,因此洛比塔法则不能适用.但是,原极限是存在的.事实上,函数

$$\frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{x}{\sin x} \cdot x \sin \frac{1}{x},$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{x}{\sin x} \rightarrow 1$ 及 $x \sin \frac{1}{x} \rightarrow 0$, 于是,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0.$$

(6) 分子、分母分别求导数, 得商为

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x},$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 上述函数的极限不存在, 因此洛比塔法则不能适用. 但是, 原极限是存在的, 事实上, 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1.$$

(B) 如果运用洛比塔法则, 就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2x}(\cos x + 2\sin x) + e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x + \sin x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5e^{-2x}\sin x - 2xe^{-x^2}\sin^2 x + e^{-x^2}\sin 2x}{-2e^{-x}\sin x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2}e^{-x} + xe^{-x^2+x}\sin x - e^{-x^2+x}\cos x \right) = 0. \end{aligned}$$

这个结果是错误的. 事实上, 若取 $x_n = n\pi + \frac{3\pi}{4}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$. 对于数列 $\{x_n\}$, 原式的分母 $e^{-x_n} \cdot (\cos x_n + \sin x_n) = \sqrt{2}e^{-x_n}\sin\left(x_n + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{-(n\pi + \frac{3\pi}{4})} \cdot \sin(n+1)\pi = 0$, 而分子不为零, 此时原式的极限不存在, 从而对于 $x \rightarrow +\infty$, 原式的极限不存在. 原因是在求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 虽然 $f(x)$ 及 $g(x)$ 均连续且极限为

零,但其导函数在点列 $x^{(n)} = n\pi (n = 1, 2, \dots)$ 上两者同时出现了零点. 因此,一方面本题不符合运用洛比塔法则的条件;另一方面也不允许在求极限过程中,用 $\sin x$ 作除数,上、下同时约分后再求极限.

(r) 如果运用洛比塔法则,就有

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\cos 2x}{e^{\sin x} [1+\cos 2x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\cos^2 x}{e^{\sin x} [2\cos^2 x+\cos x \cdot (x+\sin x \cos x)]} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{\sin x} \left[1+\frac{1}{2\cos x}(x+\sin x \cos x)\right]}. \end{aligned}$$

由于

$$e^{\sin x} \geq e^{-1}, x + \sin x \cos x \geq x - 1,$$

故当 $x > 1$ 时,有

$$\begin{aligned} & \left| e^{\sin x} \left[1 + \frac{1}{2\cos x}(x + \sin x \cos x)\right] \right| \\ & \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2|\cos x|}(x-1) - 1 \right] \\ & \geq e^{-1} \left[\frac{1}{2}(x-1) - 1 \right] \rightarrow +\infty \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时)}, \end{aligned}$$

从而得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x+\sin x \cos x}{(x+\sin x \cos x)e^{\sin x}} = 0.$$

这个结果是错误的. 事实上, 对于不同的叙列:

$$x'_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ 及 } x''_n = 2n\pi (n = 1, 2, \dots),$$

让 $n \rightarrow +\infty$, 则分别取不同的极限 $\frac{1}{e}$ 及 1, 从而原极限是不存在的. 原因与 (B) 的情况类似, 只是注意到 $\cos x$ 在 $x^{(n)} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 的点列上 ($n = 1, 2, \dots$) 取值为零. 因此, 本题不符合运用洛比塔法则的条件; 当然也不允许在中间过程里, 用 $\cos x$ 作除数, 上、下约分后再求极限.

1375. 设有一弓形, 其弦为 b , 矢为 h , 又有内接于此弓形之内的等腰三角形, 若当 R 不变时弓形的弧趋于零, 求弓形面积与内接等腰三角形面积之比. 利用所得之结果推出计算弓形面积之近似公式:

$$S \approx \frac{2}{3}bh.$$

解 如图 2.50 所示.

$AB = b, DC = h,$

$\angle AOB = \alpha, \triangle ABC$ 为

内接等腰三角形, 其面

积为

$$\frac{1}{2}bh = R^2 \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} \sin \alpha \right).$$

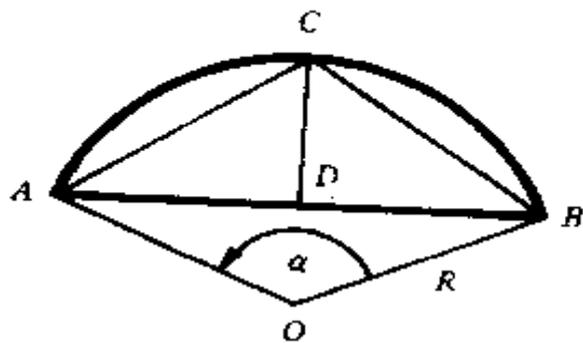


图 2.50

弓形面积为 $\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)$

当弧长趋于零时, α 趋于零, 于是, 弓形面积与内接等腰三角形面积之比为

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}R^2(\alpha - \sin\alpha)}{R^2\left(\sin\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2}\sin\alpha\right)} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha\right)} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{3\alpha}{4}\sin\frac{\alpha}{4}} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\frac{3\alpha}{4} \cdot \frac{\alpha}{4}} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

由此得弓形面积的近似公式为

$$S \approx \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}bh = \frac{2}{3}bh.$$

§ 10. 台劳公式

1° 台劳局部公式 若(1)函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某邻域 $|x - x_0| < \epsilon$ 内有定义; (2) 于此邻域内有一直到 $(n-1)$ 阶的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) n 级导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 于 x_0 点存在, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x - x_0)^k + o(|x - x_0|^n), \quad (1)$$

其中 $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (k = 0, 1, \dots, n)$.

特例,当 $x_0 = 0$ 时,有:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(|x|^n). \quad (2)$$

在所示的条件下,(1)式是唯一的.

从台劳局部公式(2),得出下列五个重要的展开式:

$$I. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n);$$

$$II. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n});$$

$$III. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$IV. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n);$$

$$V. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

2° 台劳公式 若函数 $f(x)$ (1) 在闭区间 $[a, b]$ 上有定义; (2) 在此闭区间上有连续的导函数 $f'(x), \dots, f^{(n-1)}(x)$; (3) 当 $a < x < b$ 时, 有有限值的导函数 $f^{(n)}(x)$, 则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}[a + \theta(x-a)]}{n!} (x-a)^n \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日余项公式), 或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a + \theta_1(x-a))}{(n-1)!} (1-\theta_1)^{n-1} (x-a)^n$$

$$(0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西余项公式).

1376. 将多项式

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

表成二项式 $x + 1$ 的正整数乘幂多项式.

$$\text{解 } P'(x) = 3 + 10x - 6x^2, \quad P'(-1) = -13.$$

$$P''(x) = 10 - 12x, \quad P''(-1) = 22.$$

$$P'''(x) = -12, \quad P'''(-1) = -12.$$

$$P^{(4)}(x) = 0, \quad P(-1) = 5.$$

按台劳公式有

$$\begin{aligned} P(x) &= P(-1) + \frac{P'(-1)}{1!}(x+1) \\ &+ \frac{P''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + \\ &R_4(x), \end{aligned}$$

这里 $R_4(x) = 0$, 即展开式中的余项为零, 将上述结果代入, 即得

$$P(x) = 5 - 13(x+1) + 11(x+1)^2 - 2(x+1)^3$$

按变数 x 的正整数乘幂, 写出下列函数的展开式至含有指出阶数的项:

1377. $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 到含 x^4 的项, $f^{(4)}(0)$ 等于甚么?

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} &= (1+x+x^2) \frac{(1+x)}{1+x^3} \\ &= (1+x)(1+x+x^2) \cdot [1-x^3+o(x^6)] \end{aligned}$$

于是

$$\sqrt[m]{a^m + x} = a + \frac{x}{ma^{m-1}} + \frac{(1-m)x^2}{2m^2a^{2m-1}} + o(x^2).$$

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ 到含 x^3 的项.

解 设 $f(x) = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2-2)(1-2x+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$- \frac{1}{3}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}},$$

$$f''(x) = 3x(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$- \frac{1}{4}(3x^2-2)^2(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$- \frac{2}{3}(1-3x+x^2)^{-\frac{2}{3}} + \frac{2}{9}(2x-3)^2(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}},$$

$$f'''(x) = 3(1-2x+x^3)^{-\frac{5}{2}}$$

$$- \frac{3}{2}x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{7}{2}}$$

$$+ \frac{3}{8}(3x^2-2)^3(1-2x+x^3)^{-\frac{9}{2}}$$

$$- 3x(3x^2-2)(1-2x+x^3)^{-\frac{3}{2}}$$

$$+ \frac{4}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$+ \frac{8}{9}(2x-3)(1-3x+x^2)^{-\frac{5}{3}}$$

$$- \frac{10}{27}(2x-3)^3(1-3x+x^2)^{-\frac{8}{3}},$$

从而

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, f''(0) = \frac{1}{3}, f'''(0) = 6,$$

于是,

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2} \\ &= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

1381. e^{2x-x^2} 到含 x^5 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad e^{2x-x^2} &= 1 + (2x - x^2) \\ &+ \frac{(2x - x^2)^2}{2!} + \frac{(2x - x^2)^3}{3!} + \frac{(2x - x^2)^4}{4!} \\ &+ \frac{(2x - x^2)^5}{5!} + o(x^5) \\ &= 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5 + o(x^5). \end{aligned}$$

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ 到含 x^4 的项.

解 当 x 很小时, 令 $\frac{e^x-1}{x} = 1 + \Delta$, 则有

$$\Delta = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4),$$

其中 Δ 也很小. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x-1} &= \frac{1}{\frac{e^x-1}{x}} = \frac{1}{1+\Delta} \\ &= 1 - \Delta + \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

注意到

$$\Delta^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72} + o(x^4),$$

$$\Delta^3 = \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8} + o(x^4),$$

$$\Delta^4 = \frac{x^4}{16} + o(x^4),$$

则得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4).$$

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ 到含 x^{13} 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sqrt[3]{\sin x^3} &= \left[x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} + o(x^{15}) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right]^{\frac{1}{3}} \\ &= x \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9} \left(\frac{x^{12}}{120} - \frac{x^6}{6} + o(x^{12}) \right)^2 + o(x^{12}) \right] \\ &= x - \frac{7}{18}x^7 - \frac{1}{3240}x^{13} + o(x^{13}). \end{aligned}$$

1384. $\ln \cos x$ 到含 x^6 的项.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \ln \cos x &= \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\sin^2 x + \frac{\sin^4 x}{2} + \frac{\sin^6 x}{3} + o(\sin^6 x) \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) \right)^6 + o(x^6) \Big] \\
& = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6 + o(x^6).
\end{aligned}$$

其中用到: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow 0$), 故 $o(\sin^6 x)$ 可换为 $o(x^6)$.

1385. $\sin(\sin x)$ 到含 x^3 的项.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \sin(\sin x) &= \sin x - \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^4) \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right) - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^3 \\
&\quad + o(x^4) \\
&= x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)
\end{aligned}$$

1386. $\operatorname{tg} x$ 到含 x^5 的项.

解 当 x 很小时, 有

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6), \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) = 1 - \Delta,
\end{aligned}$$

其中 $\Delta = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)$ 很小, 易见 $\Delta^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^5)$.

于是,

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \frac{1}{1 - \Delta}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \\
&\quad \cdot (1 + \Delta + \Delta^2 + o(x^4)) \\
&= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^6) \right) \\
&\quad \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4) \right) \\
&= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).
\end{aligned}$$

1387. $\ln \frac{\sin x}{x}$ 到含 x^6 的项.

解

$$\begin{aligned}
\ln \frac{\sin x}{x} &= \ln \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{x} \\
&= \ln \left[1 + \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \right] \\
&= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3} \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + o(x^6) \right)^3 + o(x^6) \\
&= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} + o(x^6).
\end{aligned}$$

1388. 求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按照差 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开式的前三项.

解

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$

$$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{2}, f''(1) = -\frac{1}{4}.$$

于是,

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2).$$

1389. 将函数 $f(x) = x^x - 1$ 按照 $(x-1)$ 的正整数乘幂展开到含有 $(x-1)^3$ 的项.

解 $f'(x) = x^x(1 + \ln x),$

$$f''(x) = x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1},$$

$$f'''(x) = x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1}(1 + \ln x)$$

$$+ x^{x-1}\left(\frac{x-1}{x} + \ln x\right).$$

$$f(1) = 0, f'(1) = 1, f''(1) = 2, f'''(1) = 3.$$

于是,

$$x^x - 1 = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3$$

$$+ o((x-1)^3).$$

1390. 于点 $x=0$ 的邻域中, 用二阶抛物线近似地代替函数

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

解 $y|_{x=0} = a, y'|_{x=0} = \operatorname{sh} \frac{x}{a}|_{x=0} = 0,$

$$y''|_{x=0} = \frac{1}{a} \operatorname{ch} \frac{x}{a}|_{x=0} = \frac{1}{a}.$$

于是,

$$a \operatorname{ch} \frac{x}{a} = a + \frac{x^2}{2a} + o(x^2).$$

1391. 按分式 $\frac{1}{x}$ 的正整数乘幂展开函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x (x > 0)$ 到含 $\frac{1}{x^3}$ 的项.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{1}{x^4}\right) + o\left(\frac{1}{x^4}\right),$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1+x^2} - x = x \sqrt{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} - x \\ &= \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right). \end{aligned}$$

1392. 求函数 $f(h) = \ln(x+h) (x > 0)$ 按增量 h 的正整数乘幂展开到含 h^n 的项 (n 为自然数).

$$\begin{aligned} \text{解 } \ln(x+h) &= \ln\left[x\left(1 + \frac{h}{x}\right)\right] = \ln x + \ln\left(1 + \frac{h}{x}\right) \\ &= \ln x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2x^2} + \frac{h^3}{3x^2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{h^n}{nx^n} + o(h^n). \end{aligned}$$

1393. 设:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots \\ &\quad + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

且 $f^{(n+1)}(x) \neq 0$. 证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1}.$$

证 按题设,我们有

$$f(x+h) = f(x) + hf'(c) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h),$$

其中 $0 < \theta < 1$.

又因 $f^{(n+1)}(x)$ 存在,故

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}). \end{aligned}$$

比较上面两式,得

$$\begin{aligned} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x+\theta h) &= \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) + o(h^{n+1}), \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} \theta \cdot \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{\theta h} &= \frac{f^{(n)}(x)}{\theta h} \\ &= \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(x) + n! \frac{o(h^{n+1})}{h^{n+1}}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x+\theta h)}{\theta h} - \frac{f^{(n)}(x)}{\theta h} = f^{(n+1)}(x) \neq 0$,

故由上式知 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$ 存在,并且

$$\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{n+1} \frac{f^{(n+1)}(x)}{f^{(n+1)}(x)} = \frac{1}{n+1}.$$

1394. 估计下列近似公式的绝对误差:

$$(a) e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1;$$

$$(6) \sin x \approx x - \frac{x^3}{6} \quad \text{当 } |x| \leq \frac{1}{2};$$

$$(B) \operatorname{tg} x \approx x + \frac{x^3}{3} \quad \text{当 } |x| \leq 0.1;$$

$$(r) \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq 1.$$

解 用拉格朗日余项公式估计误差:

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

(a) 由 $f(x) = e^x$ 及 $0 \leq x \leq 1$, 得

$$f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x} < e.$$

于是, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\left| R_{n+1}(x) \right| < \frac{e}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(6) 由 $f(x) = \sin x$, 得

$$\left| f^{(5)}(\theta x) \right| = \left| \sin \left(\theta x + \frac{5}{2}\pi \right) \right| \leq 1.$$

于是, 当 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$\left| R_4(x) \right| \leq \frac{1}{5!} |x|^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{3840}.$$

(B) 由 $f(x) = \operatorname{tg} x$, 得

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad f''(x) = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x},$$

$$f'''(x) = \frac{6}{\cos^4 x} - \frac{4}{\cos^2 x},$$

解 误差 $\Delta \leq \frac{|x|^4}{4!}$ 按题设需 $\frac{|x|^4}{4!} < 0.0001$, 于是

$$|x| < 0.22134(\text{弧度}) = 12^\circ 41'.$$

1396. 利用台劳公式近似地计算:

(a) $\sqrt[3]{30}$; (b) $\sqrt[5]{250}$; (c) $\sqrt[12]{4000}$;

(d) \sqrt{e} ; (e) $\sin 18^\circ$; (f) $\ln 1.2$;

(g) $\text{arc tg} 0.8$; (h) $\text{arc sin} 0.45$; (i) $(1.1)^{1.2}$, 并估计误

差.

解 (a) $\sqrt[3]{30} = 3 \left(1 + \frac{1}{9} \right)^{\frac{1}{3}}$

$$\approx 3 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{1}{9} \right)^2 \right]$$

$$\approx 3.1070;$$

$$\Delta < 3 \cdot \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3}}{3!} \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^3 \approx 2.54 \times 10^{-4}.$$

(b) $\sqrt[5]{250} = 5 \left(1 + \frac{7}{243} \right)^{\frac{1}{5}}$

$$\approx 5 \left[1 + \frac{1}{5} \cdot \frac{7}{243} + \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} - 1 \right)}{2!} \left(\frac{7}{243} \right)^2 \right]$$

$$\approx 3.0171;$$

$$\Delta < \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{5} \cdot \left(\frac{7}{243} \right)^3 \approx 1.15 \times 10^{-6}.$$

(c) $\sqrt[12]{4000} = 2 \left(1 + \frac{3}{128} \right)^{\frac{1}{12}}$

$$\approx 2 \left(1 - \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{128} \right) \approx 1.9960;$$

$$\Delta < \left(\frac{3}{128} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{128}} \approx 5.625 \times 10^{-4}.$$

$$\begin{aligned} (\Gamma) \sqrt{e} &\approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{1}{2} \right)^4 \\ &+ \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{2} \right)^5 + \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2} \right)^6 \approx 1.64872; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1}{8!} \left(\frac{1}{2} \right)^8 + \dots < \frac{1}{7!} \left(\frac{1}{2} \right)^7 \cdot \\ &\frac{1}{1 - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}} \approx 1.7 \times 10^{-6}. \end{aligned}$$

$$(\Delta) \sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^5 \approx 0.309017,$$

$$\Delta < \frac{1}{7!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^7 \approx 6 \times 10^{-8}.$$

$$(\epsilon) \ln 1.2 = \ln(1 + 0.2) \approx 0.2$$

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{2} (0.2)^2 + \frac{1}{3} (0.2)^3 - \frac{1}{4} (0.2)^4 \\ &+ \frac{1}{5} (0.2)^5 - \frac{1}{6} (0.2)^6 + \frac{1}{7} (0.2)^7 \approx 0.182322; \end{aligned}$$

$$\Delta < \frac{1}{8} (0.2)^8 \approx 3.2 \times 10^{-7}.$$

$$(\kappa) \operatorname{arc} \operatorname{tg} 0.8 \approx 0.8 - \frac{1}{3} (0.8)^3 + \frac{1}{5} (0.8)^5$$

$$- \frac{1}{7} (0.8)^7 + \dots - \frac{1}{39} (0.8)^{39}$$

$$\approx 0.67474 (\text{弧度}) \approx 38^\circ 39' 35'';$$

$$\Delta < \frac{1}{4!}(0.8)^4 \approx 2.6 \times 10^{-6}.$$

$$(a) \arcsin 0.45 \approx 0.45 + \frac{1}{2 \cdot 3}(0.45)^3$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}(0.45)^5 + \dots$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 13}(0.45)^{13}$$

$$\approx 0.46676 \text{ 弧度} \approx 26^\circ 44' 37''$$

$$\Delta = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 15}(0.45)^{15}$$

$$+ \frac{1 \cdot 3 \cdots 15}{2 \cdot 4 \cdots 16 \cdot 17}(0.45)^{17} + \dots$$

$$< \frac{1}{15}(0.45)^{15}[1 + (0.45)^2$$

$$+ \dots] < \frac{1}{15}(0.45)^{15} \cdot \frac{1}{1 - (0.45)^2} \approx 5.26 \times 10^{-7}.$$

(ii) 事实上, 只需计算 $\ln 1.1$.

$$\ln 1.1 = \ln(1 + 0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^2}{2}$$

$$+ \dots + \frac{(0.1)^5}{5} \approx 0.0953.$$

取五项, 所以 $(1.1)^{1.2} = e^{1.2 \ln 1.1} \approx e^{1.2 \times 0.0953} \approx 1.12117$.

$$\Delta = \frac{1}{4!} e^{1.2 \times 0.0953} (0.0953 \times 1.2)^4 < 7.9 \times 10^{-6}.$$

1397. 计算:

(a) e 准确到 10^{-9} ; (b) $\sin 1^\circ$ 准确到 10^{-8} ;

(c) $\cos 9^\circ$ 准确到 10^{-5} ; (d) $\sqrt{5}$ 准确到 10^{-4} ;

(1) $\log_{10} 11$ 准确到 10^{-9} .

$$\begin{aligned} \text{解 (a)} \Delta &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots \\ &< \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+1} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

要 $\Delta < 10^{-9}$, 只需 $n!n > 10^9$, 即只需 $n \geq 11$. 于是,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{11!} \approx 2.718281828.$$

$$(6) \Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-8}$, 只需 $\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^{2n+1} < 10^{-8}$, 即只需 $n \geq 3$. 于是,

$$\sin 1^\circ \approx \frac{\pi}{180} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^3 \approx 0.01745241.$$

$$(8) \Delta < \frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只需 $\frac{1}{(2n)!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^{2n} < 10^{-5}$, 即只需 $n \geq 3$. 于是,

$$\cos 9^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 \approx 0.98769.$$

$$(r) \sqrt{5} = 2 \left(1 + \frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\Delta < \frac{2 \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-4}$, 只需 $\frac{2(2n-1)!!}{2^{n+1}(n+1)!} \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} < 10^{-4}$, 即只需 $n \geq 4$. 于是,

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &\approx 2 \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2! \cdot 2^2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \right] \\ &\approx 2.2361.\end{aligned}$$

$$(D) \log_{10} 11 = 1 + \log_{10}(1 + 0.1),$$

$$\Delta < \frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1}.$$

要 $\Delta < 10^{-5}$, 只需 $\frac{1}{n+1} (0.1)^{n+1} < 10^{-5}$, 即只需 $n \geq 4$.

于是,

$$\begin{aligned}\log_{10} 11 &\approx 1 + \left[0.1 - \frac{1}{2} (0.1)^2 + \frac{1}{3} (0.1)^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} (0.1)^4 \right] \cdot \frac{1}{\ln 10} \approx 1.04139.\end{aligned}$$

利用展开式 $1 - V$, 求下列极限:

$$1398. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \right] - \left[1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{x^4}{4} + o(x^4) \right]}{x^4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \right) x^4 + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}.$$

$$1399. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[(1+x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)) \right] \cdot \left[(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) \right] - x(1+x)}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

$$1400. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \left[x^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right.$$

$$\left. + \left(1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} - \frac{1}{16x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) - 2 \right) \right]$$

$$= - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = - \frac{1}{4}.$$

$$1401. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}).$$

$$\text{解} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} - \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{6}} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left(1 - \frac{1}{6x} - \frac{5}{72x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \right) \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

1402. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right],$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt{x^6 + 1} \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(x^3 - x^2 + \frac{x}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right. \\
& \quad \left. - x^3 \left(1 + \frac{1}{2x^6} - \frac{1}{8x^{12}} + o\left(\frac{1}{x^{12}}\right) \right) \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{6} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

1403. $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} (a > 0).$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{x \ln a} + e^{-x \ln a} - 2}{x^2} \\
& = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x^2} \left[\left(1 + x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) \right. \\
& \quad \left. + \left(1 - x \ln a + \frac{x^2}{2!} \ln^2 a + o(x^2) \right) - 2 \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +0} [\ln^2 a + o(1)] = \ln^2 a (a > 0).
\end{aligned}$$

1404. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right].$

解

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \\
& = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \frac{1}{2}.$$

1405. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x}{x \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x + o(x)}{1 + o(x^2)}$$

$$= 0.$$

1406. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right).$

解
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{1}{x} - \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3) \right) \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{3} + o(x^2) \right] = \frac{1}{3}.$$

当 $x \rightarrow 0$ 时, 求出无穷小量 y 的形如 Cx^n (C 为常数) 的主项, 假设:

1407. $y = \operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x).$

解
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots.$$

从而

$$y = \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin^3 x + \frac{2}{15} \sin^5 x + \frac{1}{35} \sin^7 x + o(\sin^7 x) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{3!} \operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5!} \operatorname{tg}^5 x - \frac{1}{7!} \operatorname{tg}^7 x + o(\operatorname{tg}^7 x) \right) \\
= & \left(\left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right) \right. \\
& + \frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^3 \\
& + \frac{2}{15} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^5 \\
& \left. + \frac{1}{315} \left(x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{120} x^5 - \frac{1}{5040} x^7 + o(x^7) \right)^7 \right) \\
= & \left(\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right) \right. \\
& - \frac{1}{3!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right)^3 \\
& + \frac{1}{5!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right)^5 \\
& \left. - \frac{1}{7!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{x^7}{315} + o(x^7) \right)^7 + o(x^7) \right) \\
= & \frac{x^7}{30} + o(x^7).
\end{aligned}$$

故 y 的主项为 $\frac{x^7}{30}$.

1408. $y = (1+x)^e - 1$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y &= e^{\ln(1+x)} - 1 = e^{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - 1 \\
&= e^{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} - 1 \\
&= 1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x) \right) + o \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x) \right) - 1 \\
&= x + o(x^2),
\end{aligned}$$

解之,得 $a = \frac{4}{3}, b = -\frac{1}{3}$.

1411. 当 $|x|$ 为小量时,推出下列各式的简单的近似公式:

$$(a) \frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} (R > 0);$$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}};$$

$$(c) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right];$$

$$(d) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)}.$$

解 (a) $\frac{1}{R^2} - \frac{1}{(R+x)^2} = \frac{1}{R^2} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{R} \right)^{-2} \right]$
 $\approx \frac{1}{R^2} \left[1 - 1 + \frac{2x}{R} \right] = \frac{2x}{R^3};$

$$(b) \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = \left(1 + \frac{2x}{1-x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

 $- \left(1 - \frac{2x}{1+x} \right)^{\frac{1}{3}}$
 $\approx \left[1 + \frac{2x}{3(1-x)} \right] - \left[1 - \frac{2x}{3(1+x)} \right]$
 $\approx \frac{4x}{3(1-x^2)} \approx \frac{4}{3}x;$

$$(c) \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 + \frac{x}{100} \right)^{-n} \right] \approx \frac{A}{x} \left[1 - \left(1 - \frac{nx}{100} \right) \right] = \frac{nA}{100};$$

$$(d) \frac{\ln 2}{\ln \left(1 + \frac{x}{100} \right)} = \frac{\ln 2}{\frac{x}{100} - \frac{x^2}{20000} + \dots}$$

$$\approx \frac{\frac{\ln 2}{x}}{\frac{1}{100}} = \frac{100 \ln 2}{x} \approx \frac{70}{x}.$$

1412. 当 x 的绝对值为小量时, 推出形如

$$x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$$

且准确到 x^5 项的近似公式.

把这个公式用于小角度的弧长的近似求法.

$$\begin{aligned} \text{解 } x &= \alpha \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) \right] \\ &+ \beta \left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \right] \\ &= (\alpha + \beta)x - \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right) x^3 \\ &+ \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right) x^5 + o(x^5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } (1 - \alpha - \beta)x + \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} \right) x^3 \\ - \left(\frac{\alpha}{120} + \frac{2\beta}{15} \right) x^5 + o(x^5) = 0. \end{aligned}$$

要此近似公式准确到 x^5 项, 当且仅当

$$\begin{cases} 1 - \alpha - \beta = 0, \\ \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{3} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之, 得 } \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{1}{3}.$$

于是, 近似公式为

$$x \approx \frac{2}{3}\sin x + \frac{1}{3}\operatorname{tg} x;$$

弧长 = 中心角 \times 半径, 设中心角为 x , 半径为 R , 则弧长 = $Rx \approx \frac{2R}{3}\sin x + \frac{R}{3}\operatorname{tg} x$, 此即小角度的弧长的近似公式.

1413. 估计下面的契比协夫法则的相对误差: 圆弧近似地等于等腰三角形两腰的和, 此等腰三角形是立于弧所对的弦上, 并且高为此弓形之矢的 $\sqrt{\frac{4}{3}}$.

解 如图 2.51 所示

$$BC = R\sin\alpha, BC^2 = R^2\sin^2\alpha = \frac{R^2}{2}(1 - \cos 2\alpha),$$

$$DC = \sqrt{\frac{4}{3}}EC = \sqrt{\frac{4}{3}}R(1 - \cos\alpha),$$

$$\begin{aligned} DC^2 &= \frac{4}{3}R^2(1 - 2\cos\alpha + \cos^2\alpha) \\ &= R^2\left(2 - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{2}{3}\cos 2\alpha\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{于是, } BD^2 &= BC^2 + DC^2 \\ &= R^2\left(\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\cos\alpha + \frac{1}{6}\cos 2\alpha\right) \\ &= R^2\left\{\frac{5}{2} - \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 + \frac{1}{24}\alpha^4 - \frac{1}{720}\alpha^6\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}\left(1 - 2\alpha^2 + \frac{2}{3}\alpha^4 - \frac{4}{45}\alpha^6\right)\right\} + o(\alpha^7) \\ &= R^2(\alpha^2 - \frac{1}{90}\alpha^6) + o(\alpha^7) \end{aligned}$$

$$= R^2 \alpha^2 \left[1 - \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right]$$

$$= R^2 \alpha^2 [1 - \Delta],$$

其中 $\Delta = \frac{1}{90} \alpha^4 + o(\alpha^4)$,

$$BD = R\alpha \sqrt{1 - \Delta} =$$

$$R\alpha \left[1 - \frac{1}{2} \Delta + o(\Delta^2) \right] =$$

$$R\alpha \left[1 - \frac{1}{180} \alpha^4 + o(\alpha^5) \right].$$

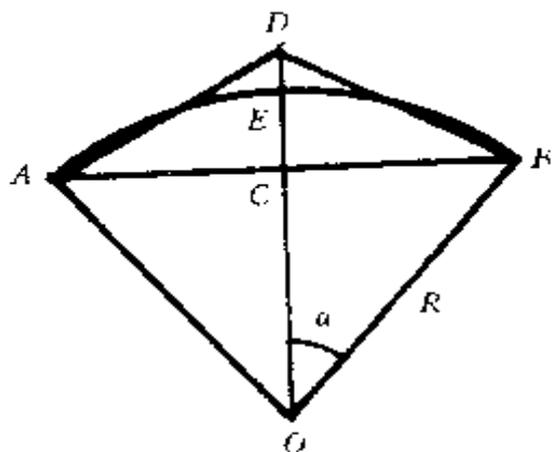


图 2.51

从而得

$$|\widehat{BE} - BD| = \left| R\alpha - R\alpha \left[1 - \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5) \right] \right|$$

$$= \frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5).$$

因此, 所求的相对误差为

$$\left| \frac{\widehat{AB} - (\widehat{AD} + \widehat{DB})}{\widehat{AB}} \right| = \left| \frac{2\widehat{BE} - 2BD}{2\widehat{BE}} \right|$$

$$= \frac{|\widehat{BE} - BD|}{|\widehat{BE}|} = \frac{\frac{\alpha^5}{180} R + o(\alpha^5)}{\alpha R} = \frac{\alpha^4}{180} + o(\alpha^5).$$

可见 α 愈小, 相对误差就愈小, 就愈精确.

§ 11. 函数的极值. 函数的最大值和最小值

有极值的必要条件 若函数于点 x_0 的双侧邻域中有定义, 并且

对于某域： $0 < |x - x_0| < \delta$ 内的一切点 x ，有下列的不等式成立：

$$f(x) < f(x_0) \text{ 或 } f(x) > f(x_0),$$

则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极值(极大值或极小值)。

在有极值的点导函数 $f'(x_0) = 0$ (假定它存在)。

2° 有极值的充分条件 第一法则：若(1)函数 $f(x)$ 于点 x_0 的某邻域 $|x - x_0| < \delta$ 内有定义并且是连续的，且在 x_0 点， $f'(x_0) = 0$ 或不存在(临界点)；(2) $f(x)$ 在范围： $0 < |x - x_0| < \delta$ 内有有限值的导函数 $f'(x)$ ；(3) 导函数 $f'(x)$ 在 x_0 的左侧与右侧有固定的符号，则函数 $f(x)$ 的性质用下表表示出来：

	导函数的符号		结 论
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	无 极 值
II	+	-	极 大 值
III	-	+	极 小 值
IV	-	-	无 极 值

第二法则：若函数 $f(x)$ 有二阶导函数 $f''(x)$ ，并且在点 x_0 有下列条件成立：

$$f'(x_0) = 0 \text{ 与 } f''(x_0) \neq 0,$$

则函数 $f(x)$ 在此点有极值，就是说：当 $f''(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f''(x_0) > 0$ 时，有极小值。

第三法则：设函数 $f(x)$ 于某区间 $|x - x_0| < \delta$ 内有导函数 $f'(x)$ ， $\dots, f^{(n-1)}(x)$ ，并且在点 x_0 有导函数 $f^{(n)}(x_0)$ 及

$f^{(k)}(x_0) = 0 (k = 1, \dots, n-1), f^{(n)}(x_0) \neq 0$ 。这时：(1) 若 n 为偶数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有极值，就是说，当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，有极大值；当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时有极小值；(2) 若 n 为奇数，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 无极值。

3° 绝对极值 在闭区间 $[a, b]$ 内，连续函数 $f(x)$ ，或于其临界点

(就是导函数 $f'(x)$ 等于零或不存在的点), 或于所给闭区间的端点 a 和 b , 达到其最大(最小)值.

研究下列函数的极值:

1414. $y = 2 - x - x^2$.

解 $y' = 1 - 2x$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$. 由于 $y'' = -2 < 0$, 所以当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 函数 y 取极大值

$$y = 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}.$$

1415. $y = (x - 1)^3$.

解 由于 $y' = 3(x - 1)^2 > 0$ (除 $x = 1$ 外), 即函数始终上升, 故函数 y 无极值.

1416 $y = (x - 1)^4$.

解 $y' = 4(x - 1)^3$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 当 $x < 1$ 时 $y' < 0$, 当 $x > 1$ 时 $y' > 0$, 所以函数 y 当 $x = 1$ 时取极小值

$$y = 0.$$

1417. $y = x^m(1 - x)^n$ (m 及 n 为正整数).

解 $y' = x^{m-1}(1 - x)^{n-1}[m - (m + n)x]$, 由 $y' = 0$ 得

$$x = 0, x = 1, x = \frac{m}{m + n}.$$

(1) 若 m 为偶数, 则

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$,

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$,

所以在 $x = 0$ 处有极小值 $y = 0$.

(2) 若 m 为奇数, 则 y' 在 $x = 0$ 邻近不变号, 故无极值.

(3) 不论 m, n 是奇数还是偶数时, 由于

当 $0 < x < \frac{m}{m+n}$ 时, $y' > 0$,

当 $\frac{m}{m+n} < x < 1$ 时, $y' < 0$.

所以, 函数 y 在 $x = \frac{m}{m+n}$ 处有极大值

$$y = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

(4) 同理, 容易得知: 若 n 为偶数时, 则当 $x = 1$ 时有极小值

$$y = 0.$$

若 n 为奇数, 则当 $x = 1$ 时函数 y 无极值.

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$.

解 $y' = -\sin x + \operatorname{sh} x$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$. 由于

$$y'' = -\cos x + \operatorname{ch} x, y''(0) = 0,$$

$$y'' = \sin x + \operatorname{sh} x, y''(0) = 0,$$

$$y^{(4)} = \cos x + \operatorname{ch} x, y^{(4)}(0) = 2 > 0,$$

所以,当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 2$.

1419. $y = (x + 1)^{10} e^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(x + 1)^9(9 - x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 $x = 9$.

由于

$$\text{当 } x < -1 \text{ 时, } y' < 0,$$

$$\text{当 } -1 < x < 9 \text{ 时, } y' > 0,$$

$$\text{当 } x > 9 \text{ 时, } y' < 0,$$

所以,当 $x = -1$ 时有极小值 $y = 0$; 当 $x = 9$ 时有极大值

$$y = 10^{10} e^{-9} \approx 1234100.$$

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \right) e^{-x}$ (n 为自然数).

解 $y' = -\frac{1}{n!} e^{-x} x^n$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

(1) 若 n 为偶数, 由于 $y' < 0$ (除 $x = 0$ 外), 故当 $x = 0$ 时函数 y 无极值.

(2) 若 n 为奇数, 则

$$\text{当 } x < 0 \text{ 时, } y' > 0,$$

当 $x > 0$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 0$ 时有极大值 $y = 1$.

1421. $y = |x|$.

解 当 $x = 0$ 时, 得 $y = 0$, 又在 $x = 0$ 的邻域内对于任意 $x \neq 0$, 恒有 $y = |x| > 0$, 所以, 当 $x = 0$ 时函数有极小值 $y = 0$. 注意, $y' |_{x=0}$ 不存在.

1422. $y = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

解 $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2(1-x)}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{3}$. 因为

当 $x < 0$ 时, $y' > 0$,

当 $0 < x < \frac{1}{3}$ 时, $y' > 0$,

当 $\frac{1}{3} < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = 0$ 时无极值; 当 $x = \frac{1}{3}$ 时有极大值

$$y = \frac{1}{3} \sqrt[3]{4} \approx 0.529;$$

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 0$.

1423. 函数

$$f(x) = (x - x_0)^n \varphi(x)$$

(n 为自然数), 其中函数 $\varphi(x)$ 当 $x = x_0$ 时连续及 $\varphi(x_0)$

$$f''(x) = \frac{P_1'(x)Q^2(x) - 2Q(x)Q'(x)P_1(x)}{Q^3(x)},$$

于是

$$f''(x_0) = \frac{P_1'(x_0)}{Q_2(x_0)}.$$

由于 $Q_2(x_0) > 0$, 所以有

$$\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0).$$

1425. 可否断定下面的事实: 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 有极大值, 则在此点某充分小邻域内, 函数 $f(x)$ 在点 x_0 的左侧上升, 而右侧下降?

解 不能断定. 例如, 函数

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2(2 + \sin \frac{1}{x}), & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \\ 2 & \text{, 当 } x = 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{则 } f(x) - f(0) &= -x^2 \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) < 0 \\ &(x \in (-\delta, \delta), x \neq 0). \end{aligned}$$

所以在 $x = 0$ 点有极大值 $f(0) = 2$.

易知

$$f'(x) = \cos \frac{1}{x} - 2x \left(2 + \sin \frac{1}{x} \right) \quad (x \neq 0).$$

故在 $x = 0$ 的任意小邻域内 $f'(x)$ 都时正时负, 故在 $x = 0$ 的左侧或右侧的任意小邻近 $f(x)$ 都是振荡的(时上升时下降).

1426. 已给函数

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

证明: 虽然

$$f^{(n)}(0) = 0 (n = 1, 2, \dots),$$

函数 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 有极小值.

作出此函数的图形.

证 在 1225 题中已证 $f^{(n)}(0) = 0$ ($n = 1, 2, \dots$).

由于

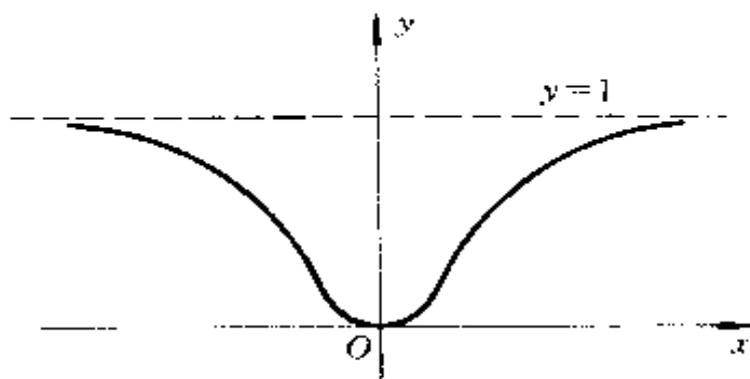


图 2.52

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, f''(x) = \frac{4}{x^5} - \frac{6x^2}{x^5} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

又过 $x = 0$ 点 $f'(x)$ 从负变到正, 故 $f(0) = 0$ 为极小值.

令 $f''(x) = 0$ 解得拐点 $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$. 又由

$$f(x) = f(-x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

知, $f(x)$ 为偶函数, $y = 1$ 为渐近线(图 2.52).

1427. 研究下列函数的极值:

(a) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \sin \frac{1}{x} \right)$ 及

$$f(0) = 0;$$

(b) 当 $x \neq 0$ 时, $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}} \left(\sqrt{2} + \cos \frac{1}{x} \right)$ 及

$$f(0) = 0.$$

作出这些函数的图形.

解 由于 $\left| \sin \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$, $\left| \cos \frac{1}{x} \right| < \sqrt{2}$ 及 $e^{-\frac{1}{|x|}} > 0$, 所以对于 (a) 和 (b) 均有 $f(x) > f(0)$ ($x \neq 0$), 故当 $x = 0$ 时均有极小值 $f(0) = 0$. 对于 $x \neq 0$, (a) 和 (b) 均存在 $f'(x)$, 但易知 $f'(x) = 0$ 无解, 因而无其它极值.

它们的图形分别如图 2.53 及图 2.54 所示.

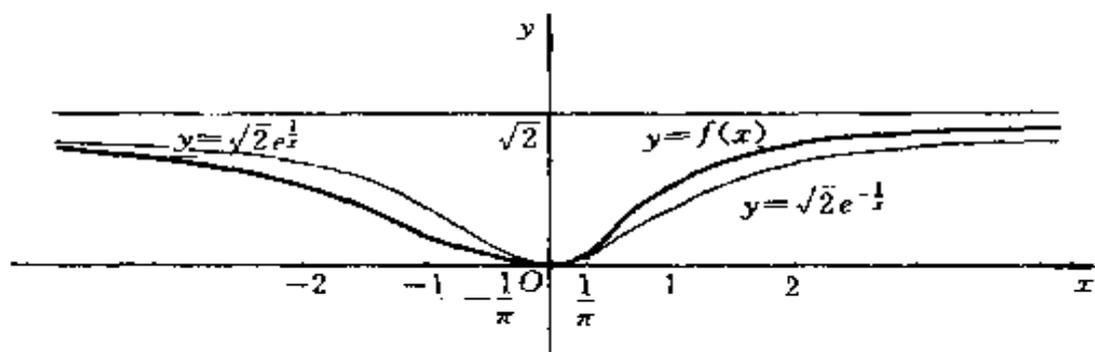


图 2.53

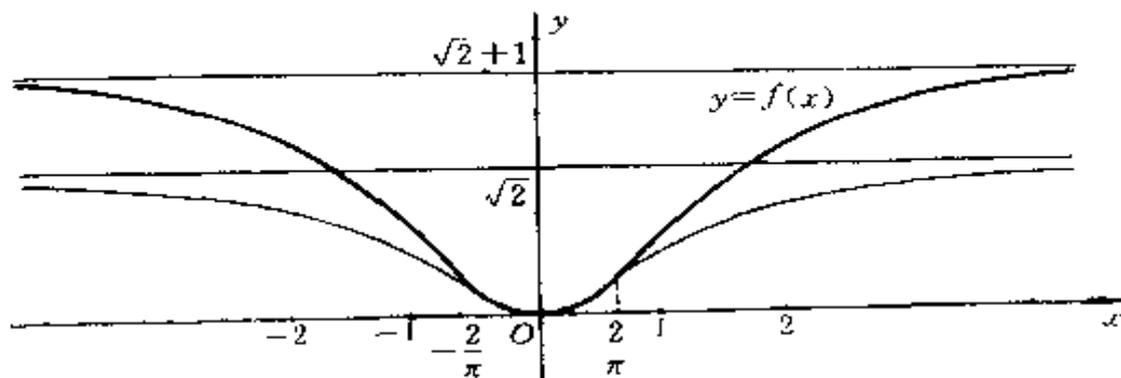


图 2.54

1428. 已给函数

$$f(x) = |x| \left(2 + \cos \frac{1}{x} \right) \text{ 当 } x \neq 0; f(0) = 0.$$

研究此函数于点 $x = 0$ 处的极值, 并作出此函数的图形.

解 由于当 $x \neq 0$ 时, 恒有 $f(x) > f(0)$, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $f(0) = 0$, 其图形如图 2.55 所示, 它对称于 Oy 轴, 又当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$.

求下列函数的极值:

1429. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$

解 $y' = 3x^2 - 12x + 9$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 3 . 因为

$$y'' = 6x - 12, y''(1) = -6 < 0, y''(3) = 6 > 0,$$

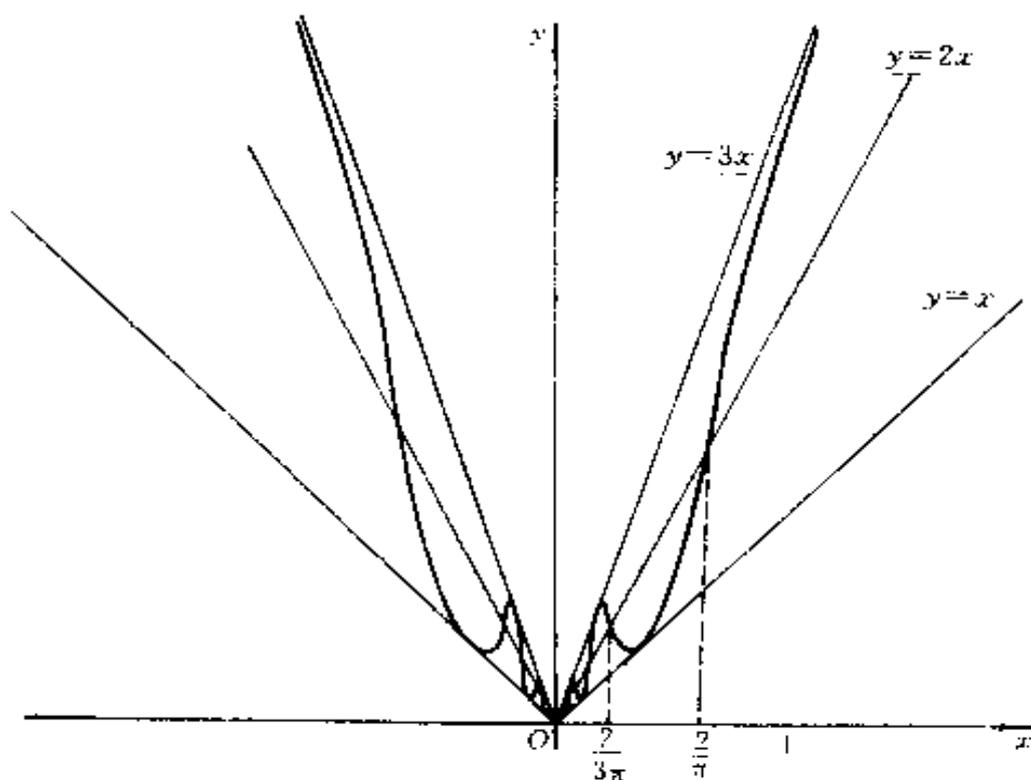


图 2.55

所以，

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$ ；

当 $x = 3$ 时有极小值 $y = 3^3 - 6 \times 3^2 + 9 \times 3 -$

$4 = -4$ 。

1430. $y = 2x^2 - x^4$ 。

解 $y' = 4x - 4x^3$ ，令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$ 或 0 。因为

$y'' = 4 - 12x^2$ ， $y''(-1) = -8 < 0$ ，

$y''(0) = 4 > 0$ ， $y''(1) = -8 < 0$ ，

所以，

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = 1$;

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

1431. $y = x(x-1)^2(x-2)^3$.

解 $y' = (x-1)(x-2)^2(6x^2-10x+2)$. 令 $y' = 0$ 得 $x = 1, 2$ 或 $\frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}$.

因为

当 $x < \frac{5 - \sqrt{13}}{6}$ 时, $y' < 0$,

当 $\frac{5 - \sqrt{13}}{6} < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $1 < x < \frac{5 + \sqrt{13}}{6}$ 时, $y' < 0$,

当 $\frac{5 + \sqrt{13}}{6} < x < 2$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 2$ 时, $y' > 0$,

所以,

当 $x = \frac{5 - \sqrt{13}}{6} \approx 0.23$ 时有极小值 $y \approx -0.76$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 0$;

当 $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{6} \approx 1.43$ 时有极小值 $y \approx -0.05$;

当 $x = 2$ 时无极值.

$$1432. y = x + \frac{1}{x}.$$

解 $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$,

当 $-1 < x < 0$ 时, $y' < 0$,

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极大值 $y = -2$;

当 $x = 1$ 时有极小值 $y = 2$.

$$1433. y = \frac{2x}{1+x^2}.$$

解 $y' = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm 1$. 因为

当 $x < -1$ 时, $y' < 0$,

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以,

当 $x = -1$ 时有极小值 $y = -1$;

当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

$$1434. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

解 $y' = \frac{5x - 7}{(x + 1)^3}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{7}{5}$. 因为

当 $-1 < x < \frac{7}{5}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > \frac{7}{5}$ 时, $y' > 0$.

所以, 当 $x = \frac{7}{5}$ 时有极小值 $y = -\frac{1}{24}$.

1435. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

解 $y' = \frac{1 - x}{\sqrt{2x - x^2}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $0 < x < 1$ 时, $y' > 0$,

当 $1 < x < 2$ 时, $y' < 0$,

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = 1$.

其次, 由于函数 y 的值不为负数, 故当 $x = 0$ 及 $x = 2$ 时, 有边界的极小值 $y = 0$.

1436. $y = x \sqrt[3]{x - 1}$.

解 $y' = \frac{4x - 3}{3(x - 1)^{\frac{2}{3}}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{3}{4}$. 因为

当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > \frac{3}{4}$ 时, $y' > 0$,

所以, 当 $x = \frac{3}{4}$ 时有极小值 $y = -\frac{3}{8} \sqrt[3]{2} \approx -0.47$.

此外, 对于 $y' \rightarrow \infty$ 的点也可能有极值, 但在此题

中,当 x 经过 1 时,导数不变号,故当 $x = 1$ 时无极值.

1437. $y = xe^{-x}$.

解 $y' = e^{-x}(1-x)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$.

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$,

所以,当 $x = 1$ 时有极大值 $y = e^{-1} \approx 0.368$.

1438. $y = \sqrt{x} \ln x$.

解 $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\ln x + 2)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = e^{-2}$. 因为

当 $0 < x < e^{-2}$ 时, $y' < 0$,

当 $x > e^{-2}$ 时, $y' > 0$,

所以,当 $x = e^{-2} \approx 0.135$ 时有极小值 $y = -\frac{2}{e}$

≈ -0.736 .

又因当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$, 而

$$y = \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{x} \ln x = 0,$$

所以,当 $x = +0$ 时有边界的极大值 $y = 0$.

1439. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

解 $y' = \frac{2\ln x - \ln^2 x}{x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$ 或 e^2 . 因为

当 $0 < x < 1$ 时, $y' < 0$,

当 $1 < x < e^2$ 时, $y' > 0$,

$$1442. y = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

解 $y' = \frac{1-x}{1+x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$. 因为

当 $x < 1$ 时, $y' > 0$.

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$;

所以, 当 $x = 1$ 时有极大值 $y = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \approx 0.439$.

$$1443. y = e^x \sin x.$$

解 $y' = e^x (\sin x + \cos x)$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ 或 } \frac{3\pi}{4} + 2k\pi (k = 0, \pm 1, \dots).$$

因为

$$y'' = 2e^x \cos x,$$

$$y'' \Big|_{x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi} > 0,$$

$$y'' \Big|_{x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi} < 0,$$

所以, 当 $x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时有极小值 $y = -$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi};$$

$$\text{当 } x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ 时有极大值 } y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}.$$

$$1444. y = |x|e^{-|x+1|}.$$

解 当 $x < 0$ 时, $y = -xe^{x+1}$, $y' = -(x+1)e^{x+1}$.

令 $y' = 0$ 得 $x = -1$. 因为

小值,因此也就是最小值,即 $m = 2$.

又由于 $f''(x) > 0$, 曲线呈凹状, 所以在端点取得最大值, 从而,

$$M = \max\{f(-3), f(10)\} = 66.$$

1447. $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$, 在闭区间 $[-10, 10]$ 上.

解 由于 $f(x) \geq 0$, 故对于在区间 $[-10, 10]$ 上能使 $f(x) = 0$ 的点取得最小值. 由 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 得 $x = 1, 2$. 即当 $x = 1, 2$ 时, 函数取得最小值

$$m = 0.$$

其次, $f'(x) = (2x - 3)\text{sgn}(x^2 - 2x + 3)$,

$$\text{当 } 1 < x < \frac{3}{2} \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$\text{当 } \frac{3}{2} < x < 2 \text{ 时, } f'(x) < 0,$$

所以, 当 $x = \frac{3}{2}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4}$, 于是

$$M = \max\left\{f\left(\frac{3}{2}\right), f(-10), f(10)\right\} = 132.$$

1448. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 在闭区间 $[0.01, 100]$ 上.

解 利用 1432 题结果知 $f(x)$ 当 $x = 1$ 时有极小值 $f(1) = 2$.

由于在此闭区间 $[0.01, 100]$ 上 $f(1)$ 为唯一的极小

值,因此也是最小值,即

$$m = 2.$$

其次,最大值

$$M = \max\{f(0.01), f(100)\} = 100.01.$$

1449. $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$, 在闭区间 $[-1, 1]$ 上.

解 $f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{5 - 4x}} < 0.$

因此函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上单调下降,所以,最小值和最大值分别为

$$m = f(1) = 1, M = f(-1) = 3.$$

求下列函数的下界(inf)与上界(sup):

1450. $f(x) = xe^{-0.01x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) > 0$, 而 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

其次,求极值判断得知,当 $x = 100$ 时,函数 $f(x)$ 取极大值,并且是唯一的极值,即为最大值.于是,

$$\sup\{f(x)\} = f(100) = \frac{100}{e} \approx 36.8.$$

1451. $f(x) = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!})e^{-x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 由 1420 题知, $f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内单调递减, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, f(0) = 1$. 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0, \sup\{f(x)\} = 1.$$

1452. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$, 在区间 $(0, +\infty)$ 内.

解 $f(x) > 0$, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. 于是,

$$\inf\{f(x)\} = 0.$$

容易验证, 当 $x = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ 时函数 $f(x)$ 有极大值, 并且只有一个极值, 因而就是最大值. 于是,

$$\begin{aligned} \sup\{f(x)\} &= f(\sqrt{\sqrt{2}-1}) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2}) \approx 1.2. \end{aligned}$$

1453. $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$, 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内.

解 可以求得, 函数的最小值和最大值分别为

$$m = f\left(\pm \sqrt{\frac{3\pi}{4}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067,$$

$$M = f(0) = 1.$$

于是,

$$\inf\{f(x)\} = -\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{3\pi}{4}} \approx -0.067,$$

$$\sup\{f(x)\} = 1.$$

1454. 求函数 $f(\xi) = \frac{1+\xi}{3+\xi^2}$ 在区间 $x < \xi < +\infty$ 内的下界与

上界,作出下列函数的图形:

$$m(x) = \inf_{-\infty < \xi < +\infty} f(\xi) \text{ 及 } M(x) = \sup_{-\infty < \xi < +\infty} f(\xi).$$

解 由于 $f(-3), f(1)$ 分别是函数 $f(\xi)$ 的极小值和极大值, 又 $\lim_{\xi \rightarrow +\infty} f(\xi) = 0$, 于是,

$$\text{当 } -\infty < x \leq -3 \text{ 时, } m(x) = f(-3) = -\frac{1}{6},$$

$$\text{当 } -3 < x \leq -1 \text{ 时, } m(x) = \frac{1+x}{3+x^2},$$

$$\text{当 } -1 < x < +\infty \text{ 时, } m(x) = 0;$$

$$\text{当 } -\infty < x \leq 1 \text{ 时, } M(x) = f(1) = \frac{1}{2},$$

$$\text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时, } M(x) = \frac{1+x}{3+x^2}.$$

$m(x)$ 及 $M(x)$ 的图形分别如图 2.56 及图 2.57 所示.

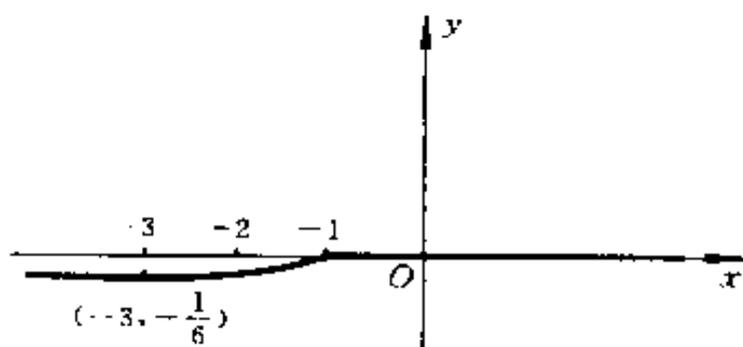


图 2.56

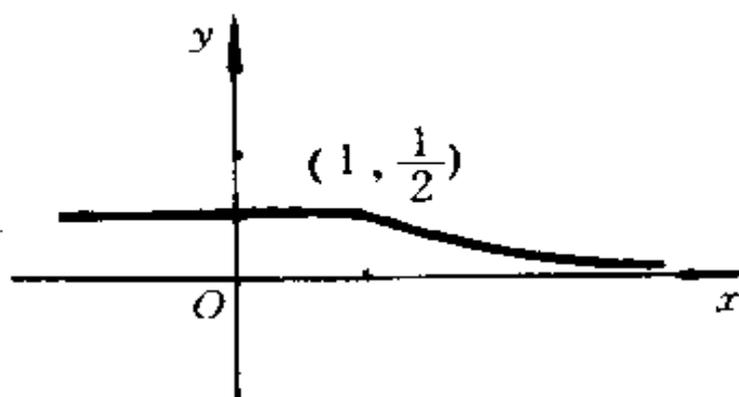


图 2.57

1455. 求以下各叙列的最大项:

(a) $\frac{n^{10}}{2^n} (n = 1, 2, \dots)$;

(b) $\frac{\sqrt{n}}{n + 10000} (n = 1, 2, \dots)$;

(c) $\sqrt[n]{n} (n = 1, 2, \dots)$.

解 (a) 经判断知当 $x = \frac{10}{\ln 2}$ 时, $f(x) = \frac{x^{10}}{2^x}$ 有极大值, 并且是唯一的极值. 从而, 最大项

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{(N-1)^{10}}{2^{N-1}}, \frac{N^{10}}{2^N}, \frac{(N+1)^{10}}{2^{N+1}}\right),$$

其中 $N = \lfloor \frac{10}{\ln 2} \rfloor = 14$. 于是

$$\max\left(\frac{n^{10}}{2^n}\right) = \max\left(\frac{13^{10}}{2^{13}}, \frac{14^{10}}{2^{14}}, \frac{15^{10}}{2^{15}}\right) = \frac{14^{10}}{2^{14}}$$

$$\approx 1.77 \times 10^7.$$

(b) 经判断知当 $x = 10000$ 时 $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 10000}$ 有

极大值,并且是唯一的极值.于是,最大项

$$\max\left(\frac{\sqrt{n}}{n+10000}\right) = f(10000) = \frac{1}{200}.$$

(B) 经判断知当 $x = e$ 时, $f(x) = x^{\frac{1}{x}} (x > 0)$ 有极大值,并且是唯一的极值.于是,最大项

$$\max(\sqrt[n]{n}) = \max(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}) = \sqrt[3]{3} \approx 1.44.$$

1456. 证明下列不等式:

(a) 当 $|x| \leq 2$ 时, $|3x - x^3| \leq 2$;

(b) 若 $0 \leq x \leq 1$ 及 $p > 1$, 则 $\frac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$;

(c) 当 $m > 0, n > 0$ 及 $0 \leq x \leq a$ 时,

$$x^m(a-x)^n \leq \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n};$$

(d) $\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a (x > 0, a > 0, n > 1)$;

(e) $|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

证 (a) 设 $f(x) = 3x - x^3$, 经判断知, 在 $|x| \leq 2$ 上, 其最小值和最大值分别为

$$m = f(-1) = -2, M = f(1) = 2,$$

而边界函数值为 $f(-2) = 2, f(2) = -2$. 于是,

$$|3x - x^3| \leq 2.$$

(6) 设 $f(x) = x^p + (1-x)^p$, 经判断知 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{p+1}}$ 为 $0 \leq x \leq 1$ 上的唯一的极小值, 而边界值 $f(0) = f(1) = 1$, 所以

$$\frac{1}{2^{p+1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq x + (1-x) = 1.$$

(B) 设 $f(x) = x^m(a-x)^n$, 经判断知 $f\left(\frac{ma}{m+n}\right)$ 为 $0 \leq x \leq a$ 上的唯一的极大值, 所以 $x^m(a-x)^n \leq \left(\frac{ma}{m+n}\right)^m \cdot \left(a - \frac{ma}{m+n}\right)^n = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} a^{m+n}$.

(r) 设 $f(x) = \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a}$, 经判断知 $f(a) = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}}$ 为满足 $x > 0$ 的唯一的极小值, 而边界值 $f(+0) = f(+\infty) = 1$, 所以

$$\frac{1}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \frac{(x^n + a^n)^{\frac{1}{n}}}{x+a} \leq 1.$$

由于 $x+a > 0$, 于是

$$\frac{x+a}{2^{\frac{n-1}{n}}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x+a.$$

(d) $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$,

其中 $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, 所以恒有

$$|a \sin x + b \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

1457. 求多项式

$$P(x) = x(x-1)^2(x+2)$$

在闭区间 $[-2, 1]$ 上“与零的差”，就是求

$$E_p = \sup_{-2 \leq x \leq 1} |P(x)|.$$

解 $P'(x) = 2(x-1)(2x^2 + 2x - 1)$.

令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 1$ 或 $\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$. 所以

$$E_p = \max\{|P(-2)|, |P(1)|,$$

$$\left. \left| P\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \right|, \left| P\left(\frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \right| \right\}$$

$$= \left| P\left(\frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \right| = \frac{9 + 6\sqrt{3}}{4} \approx 4.85.$$

1458. 应当选择怎样的系数 q , 使多项式

$$P(x) = x^2 + q$$

在闭区间 $[-1, 1]$ 上与零的差最小, 即

$$E_p = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| = \min.$$

解 $P'(x) = 2x$, 令 $P'(x) = 0$ 得 $x = 0$, 所以

$$E_p = \max\{|P(0)|, |P(1)|, |P(-1)|\}$$

$$= \max\{|q|, |1 + q|\}.$$

当 $|q| = |1 + q|$ 时, E_p 最小. 解之, 得

$$q = -\frac{1}{2}.$$

此最小的绝对差.

解 由于

$$f(x) - g(x) = x^2 - [(x_1 + x_2)x + b],$$

$$f'(x) - g'(x) = 2x - (x_1 + x_2),$$

从而令 $f'(x) - g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$. 又因

$$f''(x) - g''(x) = 2 > 0,$$

故当 $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ 时, $f(x) - g(x)$ 取极小值. 于是,

$$\begin{aligned} \Delta &= \max \left\{ \left| f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \right|, \right. \\ &\quad \left. \left| f(x_1) - g(x_1) \right|, \left| f(x_2) - g(x_2) \right| \right\} \\ &= \max \left\{ \left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right|, \left| b + x_1 x_2 \right| \right\}. \end{aligned}$$

要 Δ 为最小, 需

$$\left| b + \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} \right| = \left| b + x_1 x_2 \right|.$$

解之得

$$b = -\frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2).$$

此时

$$g(x) = (x_1 + x_2)x - \frac{1}{8}(x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 x_2),$$

而最小的绝对差

$$\Delta = \frac{1}{8}(x_1 - x_2)^2.$$

1461. 求函数

$$f(x) = \max\{2|x|, |1+x|\}$$

的极小值.

解 $y = 2|x|$ 及 $y = |1+x|$ 的图形如图 2.58 所示,

它们的交点是 $A\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 及 $B(1, 2)$. 从而

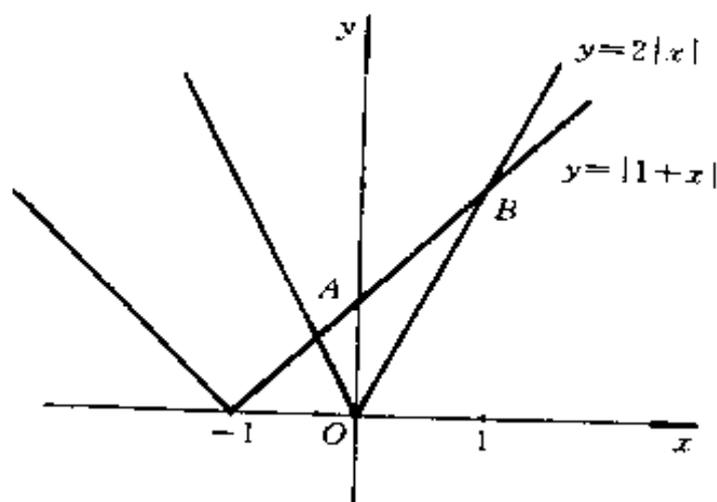


图 2.58

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 1 \leq x < +\infty, \\ 1+x, & -\frac{1}{3} \leq x \leq 1, \\ -2x, & -\infty < x \leq -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

于是, 函数 $f(x)$ 的极小值为 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

确定下列各方程实根的数目, 并定这些根所在的范围:

1462. $x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 10$, 则 $f(x)$ 为在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数, 且有

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = 1$ 或 3 .

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, f'(x) > 0, f(1) = -6 < 0,$$

故在区间 $(-\infty, 1)$ 内方程无实根.

当 $x \in (1, 3)$ 时, 由于

$$f'(x) < 0, f(3) = -10 < 0,$$

故在 $(1, 3)$ 内也无实根.

当 $x \in (3, +\infty)$, 由于

$$f'(x) > 0, f(3) = -10 < 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故在 $(3, +\infty)$ 内方程有且仅有一实根.

1463. $x^3 - 3x^2 - 9x + h = 0$.

解 设 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + h$, 则

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = -1$ 或 3 . 由于

$$f(-1) = 5 + h, f(3) = -27 + h,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

故当 $h < -5$ 时, $f(-1) < 0, f(3) < 0$, 且

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 3),$$

$$f'(x) > 0, x \in (3, +\infty),$$

因此, 有且仅有一实根位于 $(3, +\infty)$ 内.

当 $-5 < h < 27$ 时, $f(-1) > 0, f(3) < 0$, 导数 $f'(x)$ 的符号变化同上, 于是, 有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1), (-1, 3)$ 及 $(3, +\infty)$ 内.

当 $h > 27$ 时, $f(3) > 0, f(-1) > 0$, 因此, 有且仅有一实根位于 $(-\infty, -1)$ 内.

1464. $3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20 = 0.$

解 设 $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x - 20$, 则

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f(-1) = -31 < 0, f(1) = -15 < 0,$$

并且

$$f'(x) < 0, x \in (-\infty, -1),$$

$$f'(x) > 0, x \in (-1, +\infty),$$

故有两实根,分别位于 $(-\infty, -1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内.

1465. $x^5 - 5x = a.$

解 设 $f(x) = x^5 - 5x - a$, 则

$$f'(x) = 5x^4 - 5.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \pm 1$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

$$f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1), x \in (1, +\infty),$$

$$f'(x) < 0, x \in (-1, 1),$$

$$f(-1) = 4 - a, f(1) = -4 - a,$$

故当 $a < -4$ 时, $f(-1) > 0, f(1) > 0$. 因此, 有且仅有一实根, 位于 $(-\infty, -1)$ 内; 当 $-4 < a < 4$ 时, $f(-1) > 0, f(1) < 0$, 此时有三个实根, 分别位于 $(-\infty, -1), (-1, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 内; 当 $a > 4$ 时, $f(-1) < 0, f(1) < 0$. 因此, 有且仅有一实根位于 $(1, +\infty)$ 内.

1466. $\ln x = kx.$

解 当 $k = 0$ 时, 方程显然仅有一个根 $x = 1$. 因此, 不妨设 $k \neq 0$. 令 $f(x) = \ln x - kx (x > 0)$, 则

$$f'(x) = \frac{1}{x} - k.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{1}{k}$. 由于

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

故曲线的图形始终呈凸状.

当 $x \in \left(0, \frac{1}{k}\right)$ 时, $f'(x) > 0$;

当 $x \in \left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

又因

$$f\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - 1,$$

故当 $k > \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) < 0$, 此时方程无根.

当 $0 < k < \frac{1}{e}$ 时, $f\left(\frac{1}{k}\right) > 0$,

因此, 方程有两个实根, 分别位于 $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{k}, +\infty\right)$ 内.

当 $-\infty < k < 0$ 时, 由于

$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = -\infty, f(1) = -k > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - k > 0$, 故此时方程有且仅有一实根位于 $(0, 1)$ 内.

1467⁺ : $e^x = ax^2 (a > 0)$.

解 对于函数 $f(x) = e^x - ax^2$, 有 $f(0) = 1 > 0$; 又因 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, 故总存在充分大的正数 x_0 , 使 $f(-x_0) < 0$. 由函数 $f(x)$ 的连续性得知在 $(-x_0, 0)$ 中, 从而在 $(-\infty, 0)$ 中至少有 $f(x) = 0$ 的一个实根. 而当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f'(x) = e^x - 2ax > 0$, 即函数

严格单调上升. 因此, $f(x) = 0$, 当 $x \in (-\infty, 0)$ 时只有唯一的根.

对于 $x > 0$ 的情况, 为求方程 $e^x = ax^2$ 的根, 只需求方程 $x = \ln a + 2 \ln x$ ($a > 0, x > 0$) 的根. 设

$$g(x) = x - \ln a - 2 \ln x,$$

则有

$$g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x - 2}{x}.$$

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = 2$.

当 $0 < x < 2$ 时, $g'(x) < 0$;

当 $x > 2$ 时, $g'(x) > 0$,

所以, $g(2) = \ln \frac{e^2}{4a}$ 为极小值. 又因 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. 因此,

当 $g(2) > 0$, 即 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 无根.

当 $g(2) = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有唯一的根.

当 $g(2) < 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$ 时, $g(x) = 0$ 有二个根, 它们分别位于 $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

综上所述, 方程 $e^x = ax^2$ 根的情况如下:

当 $0 < a < \frac{e^2}{4}$ 时有唯一的根, 位于 $(-\infty, 0)$ 内; 当 $a = \frac{e^2}{4}$ 时, 有两个根, 一根为 2, 一根位于 $(-\infty, 0)$ 内; 当 $\frac{e^2}{4} < a < +\infty$ 时有三个根, 分别位于 $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ 和 $(2, +\infty)$ 内.

1468. 当 $0 \leq x \leq \pi$ 时, $\sin^3 x \cdot \cos x = a$.

解 当 $a = 0$ 时, 方程显然有实根 $x = 0, \frac{\pi}{2}$ 或 π . 因此, 不妨设 $a \neq 0$. 令 $f(x) = \sin^3 x \cos x - a$, 则

$$f'(x) = 3\sin^2 x \cos^2 x - \sin^4 x.$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$. 由于

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{16} - a, f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{16} - a,$$

$$f(0) = f(\pi) = -a,$$

并且

当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), x \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$ 时, $f'(x) > 0$,

当 $x \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时, $f'(x) < 0$.

于是, 当 $|a| < \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程有两个实根位于

$(0, \pi)$ 内; 当 $|a| > \frac{3\sqrt{3}}{16}$ 时, 方程无实根.

1469. $\operatorname{ch}x = kx$.

解 设 $f(x) = \operatorname{ch}x - kx$, 则

$$f'(x) = \operatorname{sh}x - k.$$

令 $f'(x) = 0$, 得唯一驻点 x_0 , 它适合 $k = \operatorname{sh}x_0$.

由于 $f''(x) = \operatorname{ch}x > 0$, 故曲线图形呈凹状, 且在 $x = x_0$ 达最小值. 显然 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$, 因此, 我们只需考虑 $f(x_0)$ 的符号. 而

$$f(x_0) = \operatorname{ch}x_0 - kx_0 = \operatorname{ch}x_0 - x_0 \operatorname{sh}x_0.$$

先设 $k > 0$, 于是 $x_0 > 0$. 引进辅助函数

$$g(x) = \operatorname{ch}x - x\operatorname{sh}x,$$

方程 $g(x) = 0$, 即 $\operatorname{cth}x = x$ 的(唯一)正根 $\xi \approx 1.2^*$.
由于

$$g'(x) = \operatorname{sh}x - \operatorname{sh}x - x\operatorname{ch}x = -x\operatorname{ch}x,$$

因此假如 $x > 0$, 则 $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上严格单调下降.

若 $k > \operatorname{sh}\xi$, 即 $\operatorname{sh}x_0 > \operatorname{sh}\xi$, 由于 $\operatorname{sh}x$ 是严格增大的, 故必 $x_0 > \xi$. 从而有

$$f(x_0) = \operatorname{ch}x_0 - x_0\operatorname{sh}x_0 < \operatorname{ch}\xi - \xi\operatorname{sh}\xi = 0.$$

因此, 方程 $f(x) = 0$ 恰有两个实根. 由于

$$f(\xi) = \operatorname{ch}\xi - k\xi < \operatorname{ch}\xi - \xi\operatorname{sh}\xi = 0,$$

$$f(0) = 1,$$

故两根分别位于 $(0, \xi)$ 及 $(\xi, +\infty)$ 内.

若 $k = \operatorname{sh}\xi$, 则 $\operatorname{sh}x_0 = \operatorname{sh}\xi$, 从而 $x_0 = \xi$. 因此, $f(x_0) = 0$, 此时方程 $f(x) = 0$ 恰有一实根 x_0 .

若 $0 < k < \operatorname{sh}\xi$, 则 $\operatorname{sh}x_0 < \operatorname{sh}\xi$, 从而 $x_0 < \xi$. 因此

$$f(x_0) = \operatorname{ch}x_0 - x_0\operatorname{sh}x_0 > \operatorname{ch}\xi - \xi\operatorname{sh}\xi = 0,$$

故方程 $f(x) = 0$ 无实根.

若 $k = 0$, 显然方程 $f(x) = 0$ 无根.

若 $k < 0$, 则可令 $x = -t$, 于是得

$$\operatorname{cht} = -kt \quad (-k > 0).$$

通过按上述的方法讨论该方程的根, 易知当 $\operatorname{sh}\xi < -k$ 时, 原方程有两实根, 分别位于 $(-\xi, 0)$ 及 $(-\infty, -\xi)$ 内, 其中 ξ 满足 $\operatorname{cth}\xi = \xi (\approx 1.2)$. 而当 $-\operatorname{sh}\xi < k < 0$ 时, 方程无实根.

综上所述, 若 $|k| > \operatorname{sh}\xi \approx 1.50$, 方程有两实根 x_1

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0,$$

此即方程仅有一实根的条件(前面 $p \geq 0$ 的情形可合并到此条件中去).

而 $f(x_1) < 0$ 及 $f(x_2) > 0$ 相当于

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

此即方程有三实根的条件.

如图 2.59 所示, 曲线

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0$$

的左右上方是方程仅有一实根的 (p, q) 域, 以阴影表之; 而曲线的下方则是方程有三实根的 (p, q) 域, 以不具阴影表之.

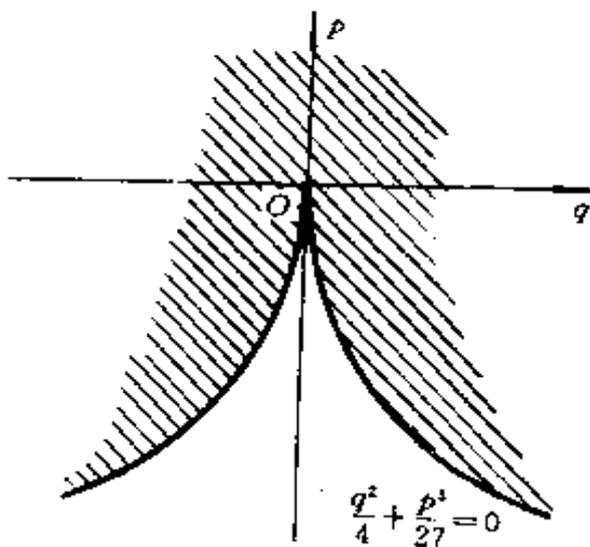


图 2.59

§ 12. 依据函数的特征点作函数图形

为了作出函数 $y = f(x)$ 的图形, 必须: (1) 确定此函数的存在域; 并研究函数在其存在域之边界上各点之性质; (2) 查明图形的对称性和周期性; (3) 求出函数的不连续点及连续的区间; (4) 确定函数的零值点及同号区间; (5) 求出极值点及查明函数上升和下降的区间; (6) 确定拐点及函数图形凸凹的区间; (7) 若有渐近线存在则求出渐近线; (8)

指出函数图形的各种特性。

作出下列函数的图形：

1471. $y = 3x - x^3$

解 $y' = 3 - 3x^2$, 令 $y' = 0$ 得 $x = -1$ 或 1 .

$y'' = -6x$ 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

列表

x		-1		0		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	↘	极小点	↗	拐点	↗	极大点	↘

当 $x = -1$ 时,

$$y = -2;$$

$$x = 0, \pm \sqrt{3}$$

时, $y = 0$;

$$x = 1 \text{ 时, } y = 2.$$

图形对称于原点

如图 2.60 所示.

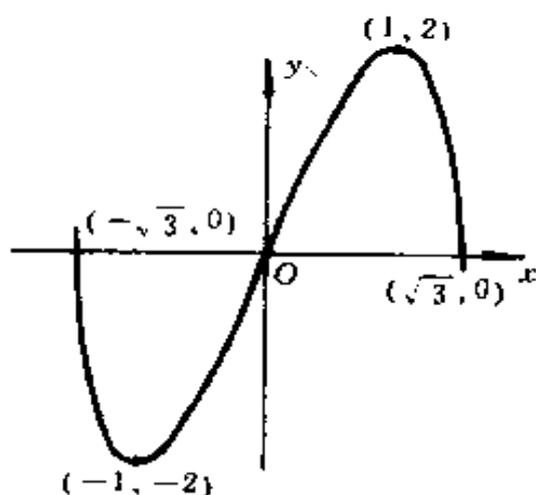


图 2.60

1472. $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$.

解 以 $-x$ 替代 x, y

值不变, 故图形对称于 Oy 轴.

零点处: $x = \pm \sqrt{1 + \sqrt{3}} \approx \pm 1.65$.

$y' = 2x - 2x^3$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 或 ± 1 .

$$y'' = 2 - 6x^2, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

列表

x		0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1	
y'	-	0	+	+	+	0	-
y''	+	+	+	0	-	-	-
y	\searrow	极小点	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow

当 $x = 0$ 时, $y = 1$; $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时, $y = \frac{23}{18}$; $x = 1$ 时, $y = \frac{3}{2}$ (图 2.61)

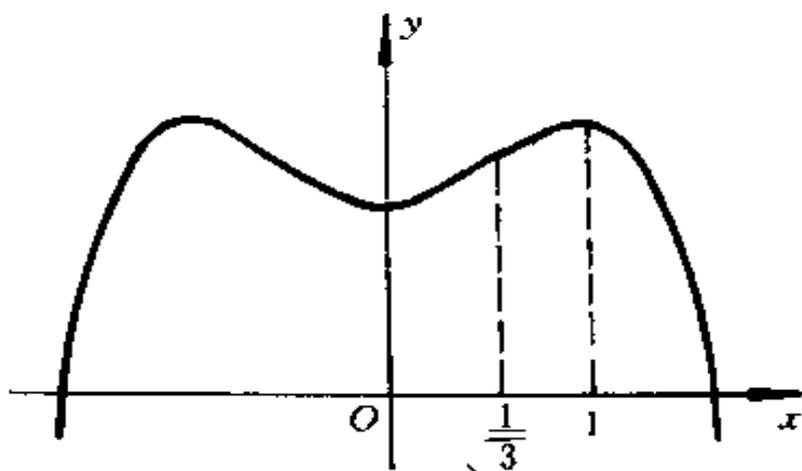


图 2.61

1473. $y = (x + 1)(x - 2)^2$

解 $y' = 3x(x - 2)$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 2 ;

$y'' = 6x - 6$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 1$.

列表

x		0		1		2	
y'	+	0	-	-		0	+
y''	-	-	-	0	+	-	+
y	↗	极大点	↘	拐点	↘	极小点	↗

当 $x = 0$ 时, $y = 4$;

$x = 1$ 时, $y = 2$;

$x = 2, -1$ 时, $y = 0$

(图 2.62)

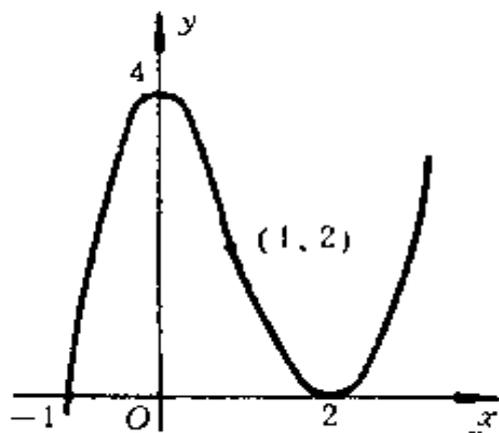
1474. $y = \frac{2 - x^2}{1 + x^4}$.

解 显见图形对称于 Oy 轴.

零点处: $x = \pm \sqrt{2}$.

$$y' = \frac{2x(x^4 - 4x^2 - 1)}{(1 + x^4)^2},$$

图 2.62



令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm \sqrt{2 + \sqrt{5}} \approx \pm 2.06$.

$$y'' = -\frac{2(3x^8 - 20x^6 - 12x^4 + 12x^2 + 1)}{(1 + x^4)^3},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm 2.67$ 或 ± 0.77 . 经判别知它们为拐点, 又因

$y''|_{x=0} = -2 < 0$, 故有极大值 $y = 2$;

$y''|_{x=\pm \sqrt{2+\sqrt{5}}} > 0$, 故有极小值 $y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2} \approx -0.12$.

渐近线为 $y = 0$. 事实上, 它的斜率和截距分别为 k

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{x(1 + x^4)} = 0, \text{它在 } y \text{ 轴上的截距为}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x^2}{1 + x^4} = 0. \text{如图 2.63 所示.}$$

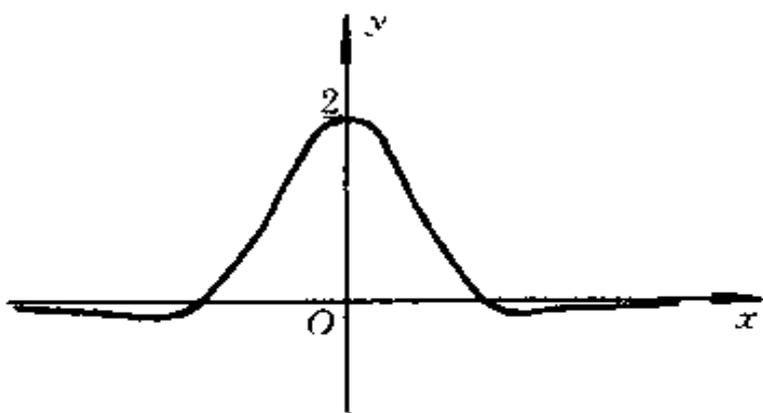


图 2.63

1475. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$.

解 零点处: $x = -1$ 及 $x = 1$.

渐近线: $x = 2, x = 3$ 和 $y = 1$.

$$y' = \frac{-5x^2 + 14x - 5}{(x^2 - 5x + 6)^2}$$

$$y'' = \frac{2(5x^3 - 21x^2 + 15x + 17)}{(x^2 - 5x + 6)^3}$$

令 $y' = 0$ 得 $x \approx 0.42, x \approx 2.38$. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.586$. 经判别知: $y|_{x \approx 0.42} \approx -0.20$ 为极小值, $y|_{x \approx 2.38} \approx -19.80$ 为极大值; $x \approx -0.586, y \approx -0.07$ 为拐点. 由于

$$y = 1 - \frac{3}{x-2} + \frac{8}{x-3}$$

故可用图形相加法作出函数的图形(图 2.64).

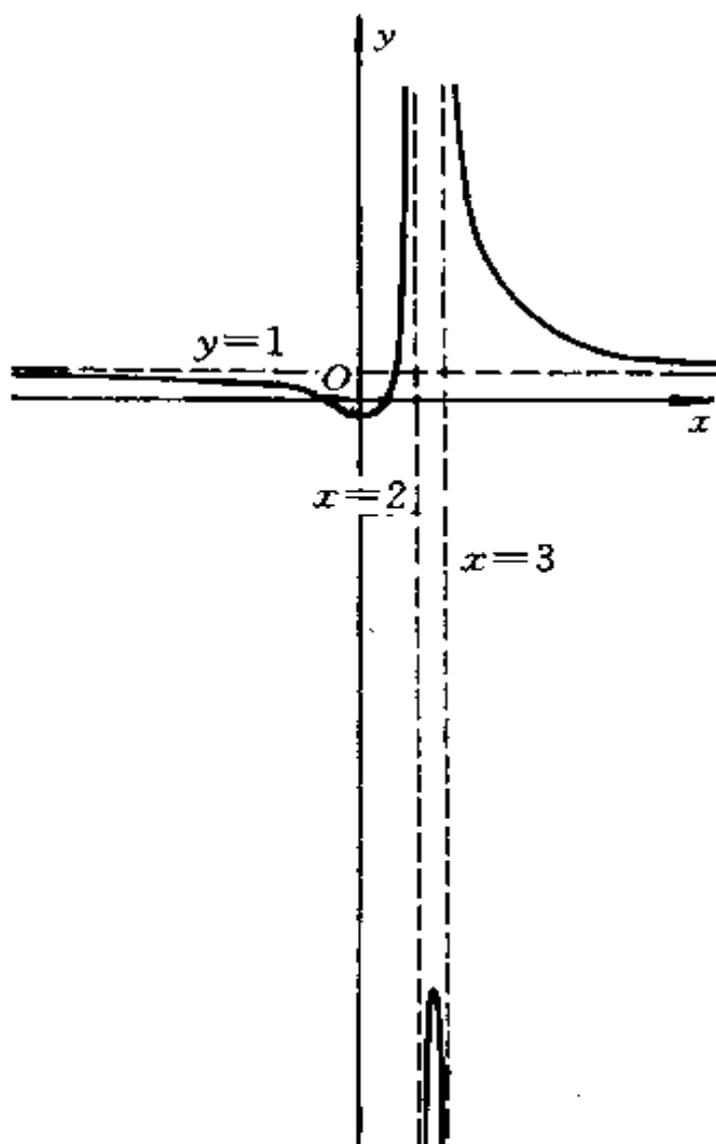


图 2.64

1476. $y = \frac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

解 零点处: $x=0$. 不连续点: $x=-1$ 及 $x=1$. 渐近线: $y=0$. $x=-1$ 和 $x=1$.

$$y' = \frac{2x^2 + x + 1}{(1+x)^2(1-x)^3}$$

$$y'' = \frac{2(3x^3 + 3x^2 + 5x + 1)}{(1+x)^3(1-x)^4},$$

$y' = 0$ 无实根, 无极值点. 令 $y'' = 0$ 得 $x \approx -0.22$, 经判别知它为拐点, 此时 $y = -0.20$.

当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降(图 2.65)

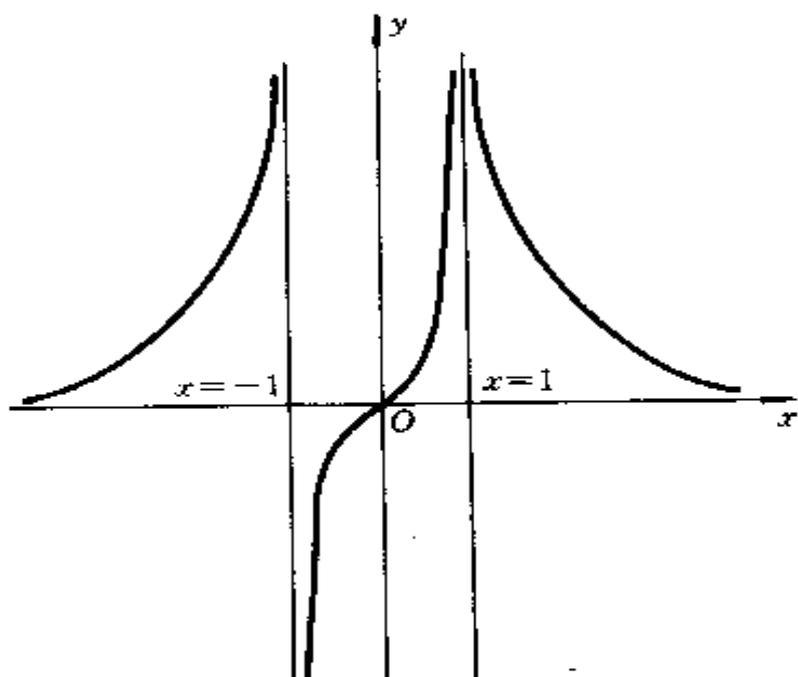


图 2.65

1477. $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$.

解 零点处: $x = 0$. 不连续点: $x = -1$.

斜渐近线: $y = x - 3$, 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

垂直渐近线: $x = -1$.

$$y' = \frac{x^3(x+4)}{(1+x)^4}.$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0$, 或 $x = -4$.

$$y'' = \frac{12x^2}{(1+x)^5}.$$

当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状;

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 图形呈凹状;

又 $y''|_{x=-4} < 0$,

故当 $x = -4$ 时有极大值

$$y = -9\frac{13}{27};$$

由于 y' 经过 $x = 0$ 从负变到正, 故当 $x = 0$ 时取得极小值 $y = 0$ (图 2.66)

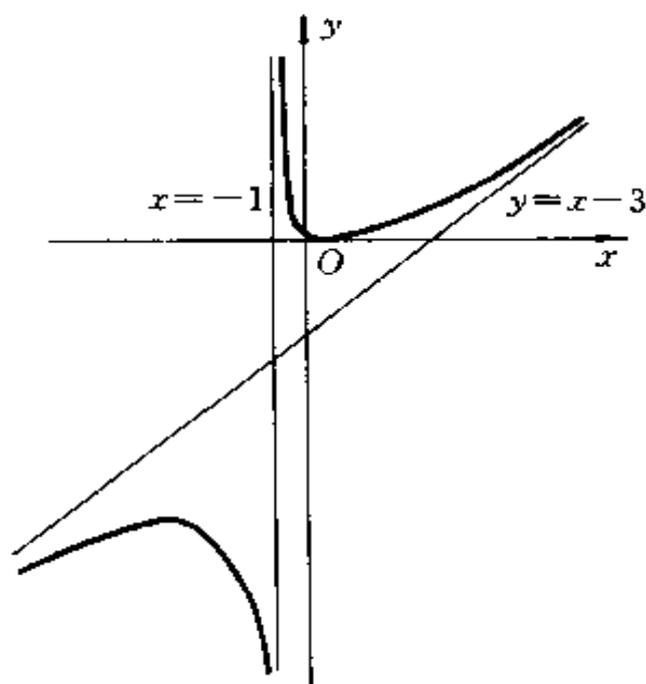


图 2.66

$$1478. y = \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^4.$$

解 零点处: $x = -1$.

垂直渐近线: $x = 1$; 又

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 1.$$

故还有水平渐近线为 $y = 1$.

$$y' = \frac{8(1+x)^3}{(1-x)^5}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1;$$

$$y'' = \frac{16(x+1)^2(x+4)}{(1-x)^6}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或}$$

-4 .

列表

x		-4		-1		1	
y'	$-$	$-$	$-$	0	$+$	∞	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$+$	∞	$+$
y	\searrow	拐点	\searrow	极小点	\nearrow	不连续点	\searrow

当 $x = -4$ 时, $y = \frac{81}{625}$; $x = -1$ 时, $y = 0$; $x = 0$ 时, $y = 1$ (图 2.67).

$$1479. y = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$$

解 零点处: $x = 0$ 及 $x = 1$.

垂直渐近线: $x = -1$;

斜渐近线: $y = x - 3$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -3.$$

当 $x = 0$ 时, 有极大值 $y = 0$;

当 $x = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0.56$ 时, 有极小值

$$y = \frac{34\sqrt{17} - 142}{32} \approx -0.06;$$

当 $x = \frac{1}{5}$ 时, $y = -\frac{1}{45}$ (图 2.68).

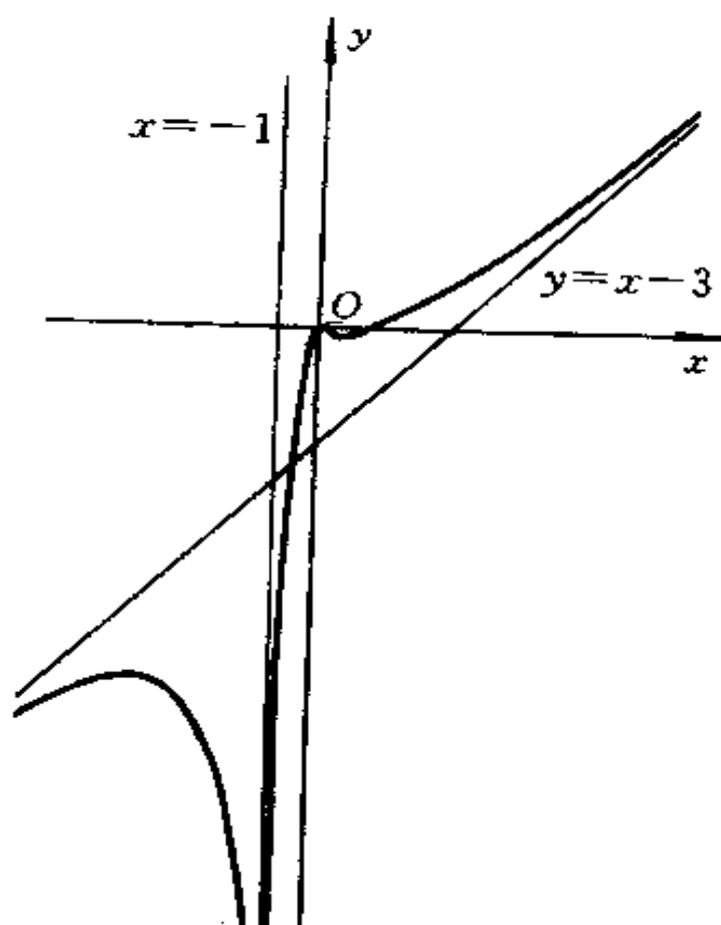


图 2.68

1480. $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$.

解 零点处: $x = 0$. 间断点: $x = -1$ 及 $x = 1$.

渐近线: $x = -1, x = 1$ 及 $y = 0$.

以 $-x$ 替代 x , y 的绝对值不变, 符号改变, 故图形关于原点对称.

$$y' = \frac{3x^2 + 1}{(1 - x^2)^3}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 无实根.}$$

$$y'' = \frac{12x(x^2 + 1)}{(1 - x^2)^4}, \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x = 0.$$

经判别知: 无极值, $x = 0$ 为拐点(图 2.69).

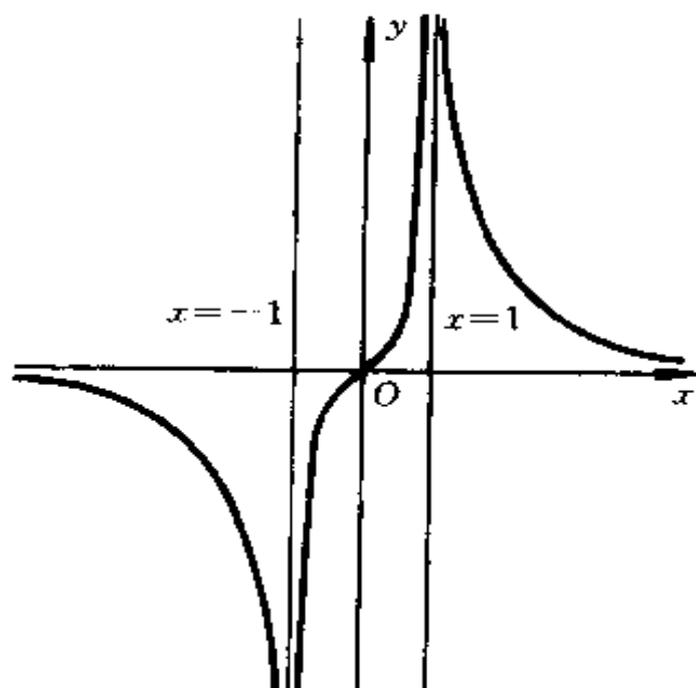


图 2.69

列表

x		-1		0		1	
y'	$-$	∞	$+$	$+$	$+$	∞	$-$
y''	$-$	∞	$-$	0	$+$	∞	$+$
y	\searrow	间断点	\nearrow	拐点	\nearrow	间断点	\searrow

$$1481. y = \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}.$$

解 零点处: $x = -1$. 间断点: $x = 1$.

垂直渐近线: $x = 1$;

斜渐近线: $y = x + 5$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 5.$$

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = -1 \text{ 或 } 5.$$

$$y'' = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = -1.$$

列表

x		-1		1		5	
y'	+	0	+	∞	-	0	+
y''	-	0	+	∞	+	+	+
y	\nearrow	拐点	\nearrow	间断点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -1$ 时, $y = 0$;

当 $x = 5$ 时, $y = 13 \frac{1}{2}$ (图 2.70).

$$1482. y = \frac{x^4 + 8}{x^3 + 1}.$$

解 垂直渐近线: $x = -1$;

斜渐近线: $y = x$. 事实上,

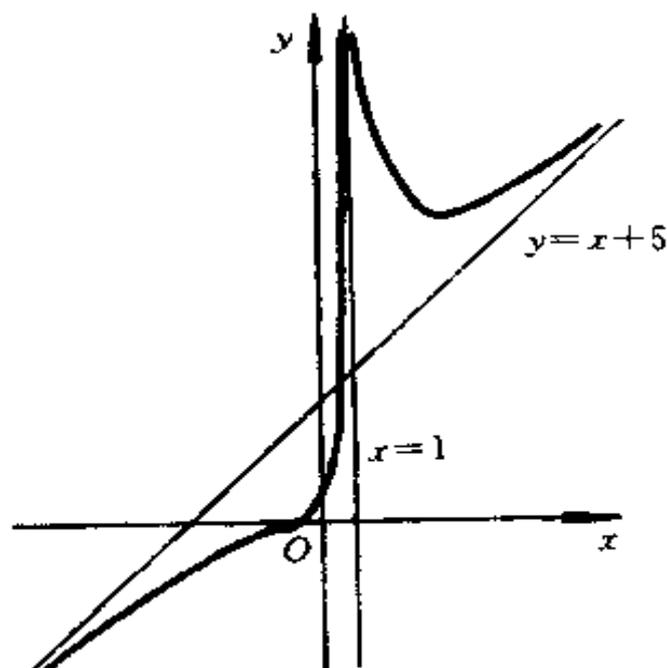


图 2.70

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{x^6 + 4x^3 - 24x^2}{(x^3 + 1)^2},$$

$$y'' = \frac{-6x^5 + 96x^4 + 12x^2 - 48x}{(x^3 + 1)^3},$$

令 $y' = 0$, 得 $x = 0, 2$ 及 $x \approx -2.4$. $y'|_{x=2} > 0$, 故当 x

$= 2$ 时有极小值 $y = 2 \frac{2}{3}$;

$y''|_{x=-2.4} < 0$; 故

当 $x \approx -2.4$ 时有极

大值 $y \approx -3.2$.

经判别知: 当

$x = 0, 0.752, 16.006$

时有拐点. 渐近线 $y = x$ 与曲线交于点 $(8, 8)$. 如图

2.71 所示.

$$1483. \quad y = \frac{1}{1+x} - \frac{10}{3x^2} + \frac{1}{1-x}.$$

解 图形对于 Oy 轴对称.

零点处: $x = \pm$

$$\frac{\sqrt{10}}{4} \approx \pm 0.79.$$

y'

$$\frac{4(8x^4 - 10x^2 + 5)}{3x^3(1-x^2)^2},$$

$y' = 0$ 无实根, 无极值点.

$$y'' = \frac{4(8x^6 - 14x^4 + 15x^2 - 5)}{x^4(1-x^2)^3},$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \approx \pm 0.71$. 经判别, 此为拐点, 相应纵坐标 $y = -2\frac{2}{3}$.

渐近线: $x = 0, x = -1, x = 1$ 和 $y = 0$.

当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 曲线上升.

当 $0 < x < 0.71$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状.

当 $0.71 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 图形呈凹状.

当 $1 < x < +\infty$ 时, $y'' < 0$, 图形呈凸状.

图形如图 2.72 所示.

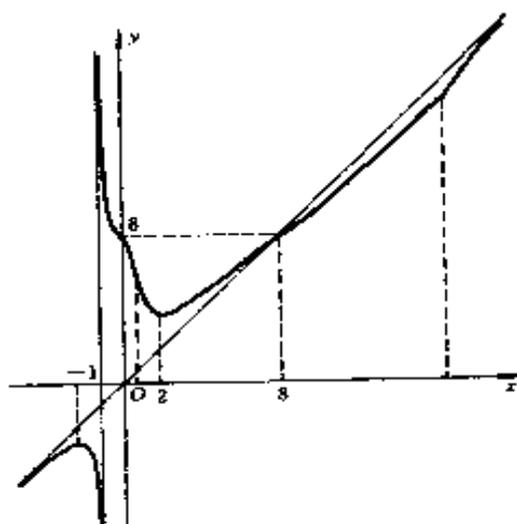


图 2.71

$$1484. \quad y = (x - 3) \sqrt{x}.$$

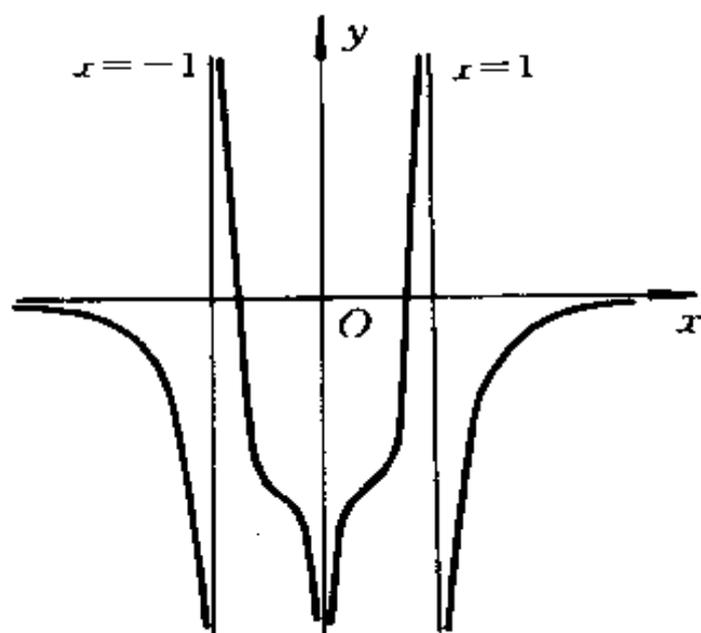


图 2.72

解 存在域: $0 \leq x < +\infty$.

零点处: $x = 0$ 和 $x = 3$.

$$y' = \frac{3(x-1)}{2\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 1;$$

$$y'' = \frac{3(x+1)}{4x\sqrt{x}} > 0 \quad (0 < x < +\infty),$$

所以图形始终是凹的.

由于 $y''|_{x=1} > 0$, 故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = -2$;
当 $x = 0$ 时, 由 $\lim_{x \rightarrow 0^+} y' = -\infty$ 知, 曲线在 $x = 0$ 点与 y
轴相切, 易见它有边界极大值 $y = 0$.

图形如图 2.73 所示.

1485. $y = \pm \sqrt{8x^2 - x^4}$.

解 存在域: 需 $8 - x^2 \geq 0$, 即 $|x| \leq 2\sqrt{2} \approx 2.83$.

零点处: $x = 0$ 和 $x = \pm 2\sqrt{2}$.

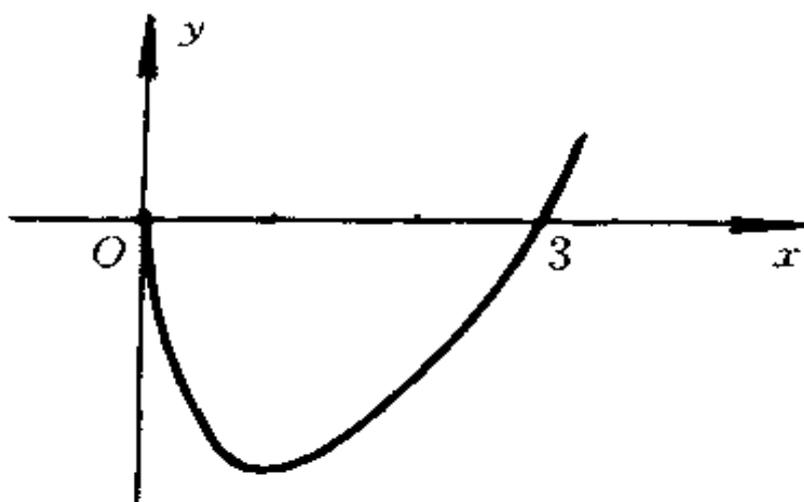


图 2.73

图形关于坐标原点及坐标轴对称.

下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{2(4 - x^2)}{\sqrt{8 - x^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 2.$$

$$y'' = \frac{2x(x^2 - 12)}{(8 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 2\sqrt{3} \text{ 或 } x = 0.$$

然而点 $x = 2\sqrt{3}$ 不在存在域内, 对于 $x = 0$ 来说, 如果将曲线由第三象限穿向第一象限看成一支曲线的话, 则也可理解为拐点, 同样由第四象限到第二象限的那个分支也有同样情况, 故曲线呈双纽状.

当 $0 < x < 2$ 时, $y' > 0$, 当 $2 < x < 2\sqrt{2}$ 时, $y < 0$, 故当 $x = 2$ 时, 有极大值 $y = 4$. 当 $x = 2\sqrt{2}$ 及 $x = 0$ 时, 显然有极小值 $y = 0$.

前者是边界的极小值, 而且曲线在 $x = 2\sqrt{2}$ 处以 $x = 2\sqrt{2}$ 为垂直切线. 图形如图 2.74 所示.

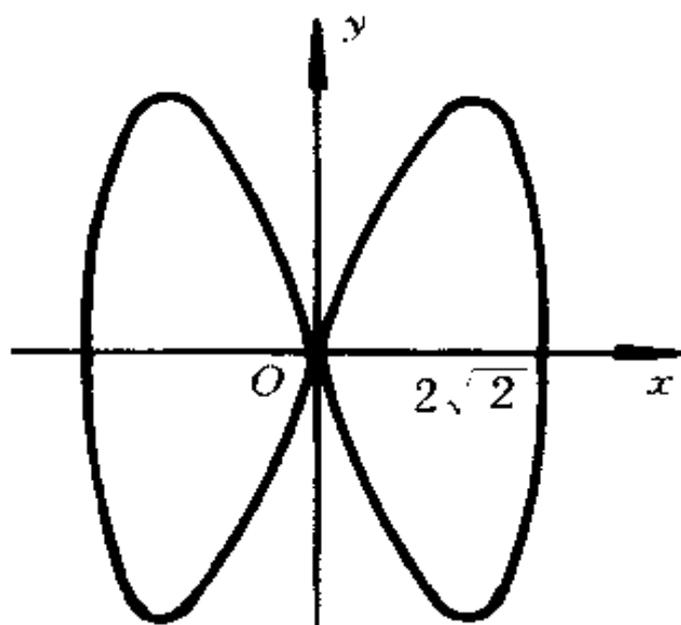


图 2.74

1486. $y = \pm \sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

解 存在域: $1 \leq x \leq 2$ 及 $3 \leq x < +\infty$.

零点处: $x = 1, x = 2$ 和 $x = 3$.

图形关于 Ox 轴对称, 下面就第一象限讨论之:

$$y' = \frac{3x^2 - 12x + 11}{2\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}}, \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x$$

$$= \frac{6 - \sqrt{3}}{3} \approx 1.42 \text{ 经判别此时有极大值 } |y| = \frac{1}{3}$$

• $\sqrt[3]{12} \approx 0.62$.

令 $y = 0$ 解得 $x = 3.468$, 经判别是拐点.

当 $x > 3$ 时,
 $y' > 0$, 曲线上
 升.

当 $x = 1, 2$

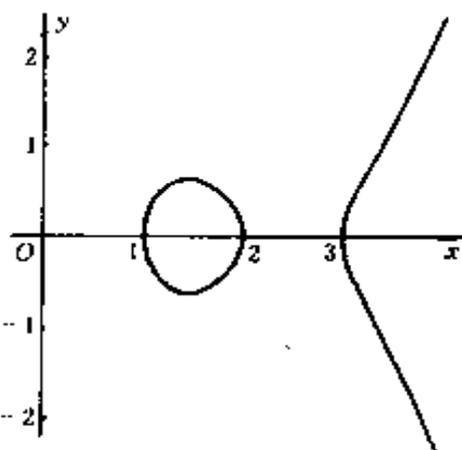
和 3 时有边界
的极小值 $y = 0$
且 $y' = \infty$ (图
2.75).

1487. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

解 零点处: $x = -1$ 和
 $x = 1$. 又当 $x = 0$ 时, $y =$
1.

渐近线: $y = x - \frac{1}{3}$.

图 2.75



事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = -\frac{1}{3}.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 1}{3 \sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = -\frac{1}{3}; \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{-8}{9} \cdot \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}(x+1)^{\frac{5}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y'' = \infty.$$

列表

x		-1		$-\frac{1}{3}$		1	
y'	+	∞	+	0	-	∞	+
y''	+	∞	-	-	-	∞	-
y	\nearrow	拐点	\nearrow	极大点	\searrow	极小点	\nearrow

当 $x = -\frac{1}{3}$ 时,

1489. $y = (x + 2)^{\frac{2}{3}} - (x - 2)^{\frac{2}{3}}$.

解 以 $-x$ 替代 x , y 变成 $-y$, 故图形关于坐标原点对称.

渐近线: $y = 0$.

零点处: $x = 0$.

$$y' = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x - 2)^{\frac{1}{3}} - (x + 2)^{\frac{1}{3}}}{(x + 2)^{\frac{1}{3}}(x - 2)^{\frac{1}{3}}}, \text{ 当 } x = \pm 2 \text{ 时, } y' = \infty.$$

$$y'' = \frac{2}{9} \cdot \frac{(x + 2)^{\frac{1}{3}} - (x - 2)^{\frac{1}{3}}}{(x + 2)^{\frac{4}{3}}(x - 2)^{\frac{4}{3}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

列表

x		-2		0		2	
y'	-	∞	+	+	+	∞	-
y''	-	∞	-	0	+	∞	+
y	\searrow	最小点	\nearrow	拐点	\nearrow	最大点	\searrow

当 $x = -2$ 时, 有最小值 $y = -\sqrt[3]{16}$;

当 $x = 2$ 时, 有最大值 $y = \sqrt[3]{16}$.

图形如图 2.78 所示.

1490. $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}} + (x - 1)^{\frac{2}{3}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称.

$$y' = \frac{2}{3} \left[\frac{1}{(x + 1)^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{(x - 1)^{\frac{1}{3}}} \right], \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = 0; \text{ 当 } x = \pm 1 \text{ 时, } y' = \infty.$$

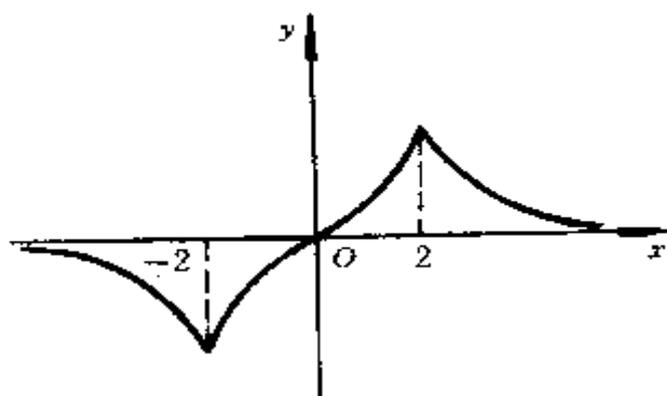


图 2.78

$$y'' = -\frac{2}{9} \left[\frac{1}{(x+1)^{\frac{4}{3}}} + \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}} \right] < 0,$$

图形始终呈凸状.

当 $x = \pm 1$ 时, 取得
最小值 $y = \sqrt[3]{4} \approx 1.59$.

当 $x = 0$ 时, 有极大
值 $y = 2$.

图形如图 2.79 所示.

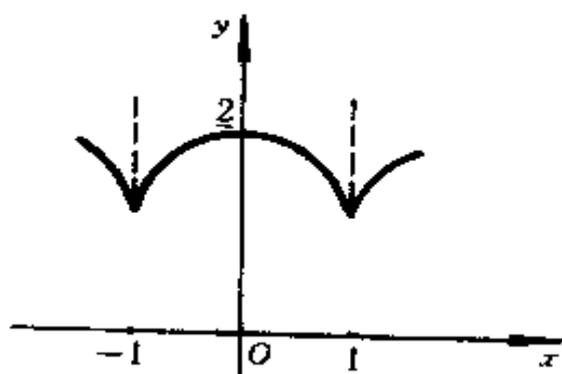


图 2.79

1491. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

解 图形关于坐标原点
对称.

零点处: $x = 0$.

间断点: $x = \pm 1$.

$y' = \frac{x^2 - 3}{3(x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = \pm \sqrt{3}$. 当 $x = \pm 1$ 时, $y' = \infty$.

$y'' = -\frac{2x(x^2 - 9)}{9(x^2 - 1)^{\frac{7}{3}}}$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 3 .

列表

x		-3		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		3	
y'	+	+	+	0	-	∞	-	∞	-	0	+	+	+		
y''	+	0	-	-	-	∞	+	0	-	∞	+	+	+	0	-
y	↗	拐点	↗	极大点	↘	间断点	↘	拐点	↘	间断点	↘	极小点	↗	拐点	↗

渐近线: $x = -1, x = 1$.

当 $x = \pm \sqrt{3}$ 时, $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx \pm 1.38$;

当 $x = \pm 3$ 时, $y = \pm 1\frac{1}{2}$.

图形如图 2.80 所示.

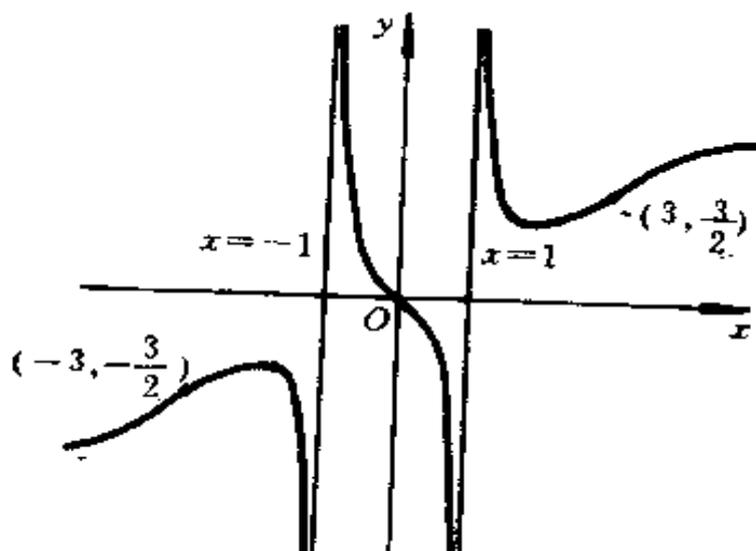


图 2.80

$$1492. y = \frac{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}{2x^2 - 1}.$$

解 存在域: $|x| \geq 1$. 图形关于 Oy 轴对称, 且位于 Ox 轴的上方. 渐近线: $y = \pm \frac{x}{2}$.

$$y' = \frac{2x^5 - 3x^3 + 2x}{(2x^2 - 1)^2 \sqrt{x^2 - 1}},$$

$$y'' = \frac{1}{(2x^2 - 1)^3 (x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} \cdot (-6x^4 + 3x^2 + 2).$$

当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, $y'' < 0$, 故曲线上升, 图形呈凸状.

又当 $x = \pm 1$ 时, 有边界的极小点 $y = 0$ (图 2.81).

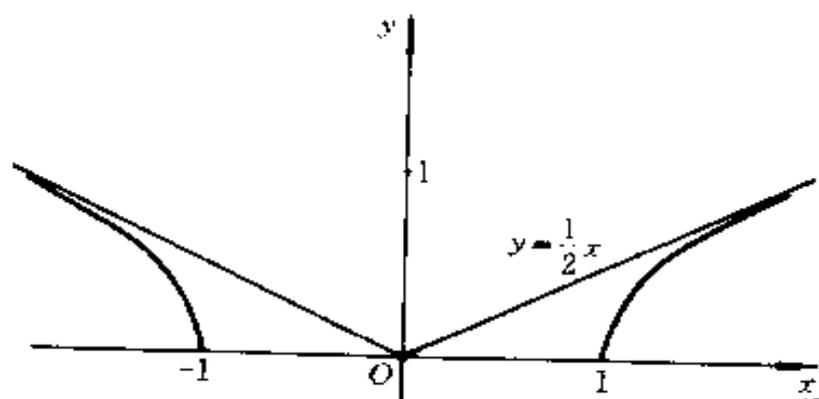


图 2.81

$$1493. y = \frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}.$$

解 存在域: $x > 0$.

渐近线: $x = 0$ 及 $y = x + \frac{3}{2}$.

$$y' = \frac{(2x-1)\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{3}{4x^{\frac{5}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}}} > 0,$$

故图形是凹的.

当 $x = \frac{1}{2}$ 时, 有极小值

$$y = \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 2.60.$$

图形如图 2.82 所示.

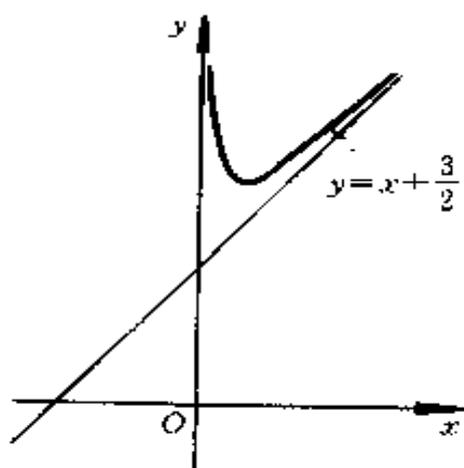


图 2.82

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{3+x}}$.

解 存在域: $x \geq 0$

及 $x < -3$.

零点处: $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \approx 4.30$.

斜渐近线: $y = \frac{5}{2} - 2x$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = -2.$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x+1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+3}} - x - 1} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

水平渐近线: $y = -\frac{1}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - x + \sqrt{\frac{x^3}{x+3}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3}{x+3} - (x-1)^2}{\sqrt{\frac{x^3}{x+1}} + x - 1}$$

$$= -\frac{1}{2}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow -3} y = \infty$, 故垂直渐近线为 $x = -3$.

$$y' = -1 + \frac{\sqrt{x}(2x+9)}{2(x+3)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = -4$;

$$y'' = \frac{27}{4(x+3)^2 \sqrt{x(x+3)}} > 0,$$

故图形呈凹状.

当 $x = -4$ 时有极小值 $y = 13$.

当 $x = 0$ 时有边界极大值 $y = 1$.

图形如图 2.83 所示.

1495. $y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x+1}}$.

解 零点处: $x = 0$.

垂直渐近线: $x = -1$.

$$y' = \frac{x+2}{3(x+1)\sqrt[3]{x(x+1)}},$$

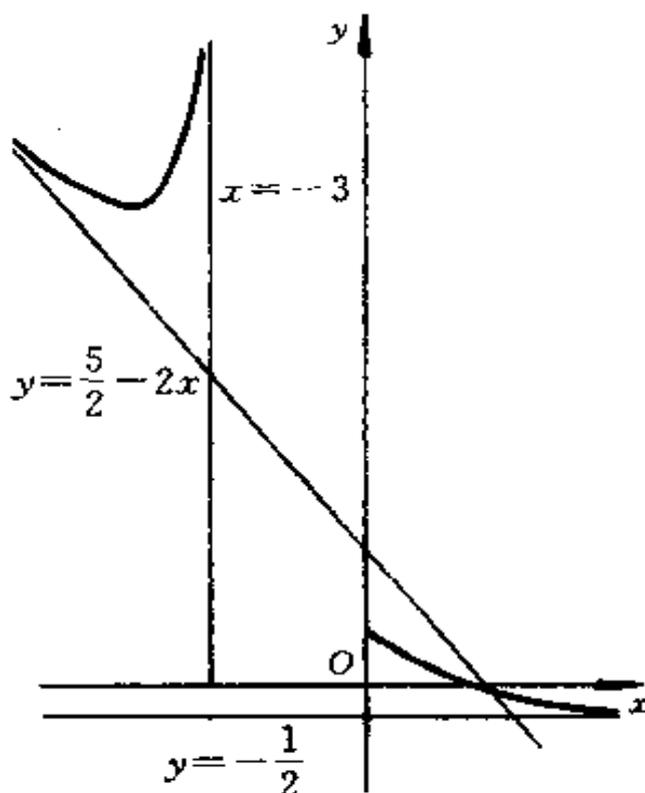


图 2.83

令 $y' = 0$ 得 $x = -2$. 当 $x = 0$ 时 $y' = \infty$.

$$y'' = -\frac{2(x^2 + 4x + 1)}{9x(x+1)^2 \sqrt[3]{x(x+1)}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -2 \pm$

$$\sqrt{3}.$$

经判别:

当 $x = 0$ 时有

极小值 $y = 0$;

当 $x = -2$ 时

有

极大值 $y = -\sqrt[3]{4}$

≈ -1.59 .

拐点:

$x = -(2 -$

$$\sqrt{3})$$

≈ -0.27 , 此时 y

≈ 0.46 ;

$x = -(2 + \sqrt{3})$

≈ -3.73 , 此时 $y \approx -1.72$.

图形如图 2.84 所示.

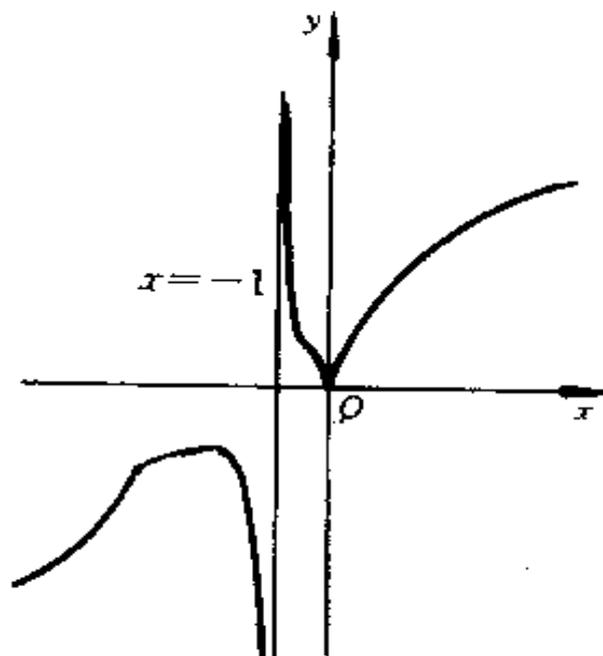


图 2.84

1496. $y = \sqrt{\frac{x^4 + 3}{x^2 + 1}}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数值始终是正的.

渐近线: $y = \pm x$.

$$y' = \frac{x(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x^4+3)^{\frac{1}{2}}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 ± 1 .

$$y'' = \frac{-x^8 + 20x^6 + 18x^4 + 36x^2 - 9}{(x^4 + 3)^{\frac{3}{2}}(x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x \approx \pm 0.47$ 或 ± 4.58 , 经判别均为拐点:

当 $x \approx \pm 0.47$ 时, $y \approx 1.58$;

当 $x \approx \pm 4.58$ 时, $y \approx 4.49$.

当 $x = 0$ 时有极大值 $y = \sqrt{3} \approx 1.73$;

当 $x = \pm 1$ 时有极小值 $y = \sqrt{2} \approx 1.41$.

图形如图 2.85 所示.

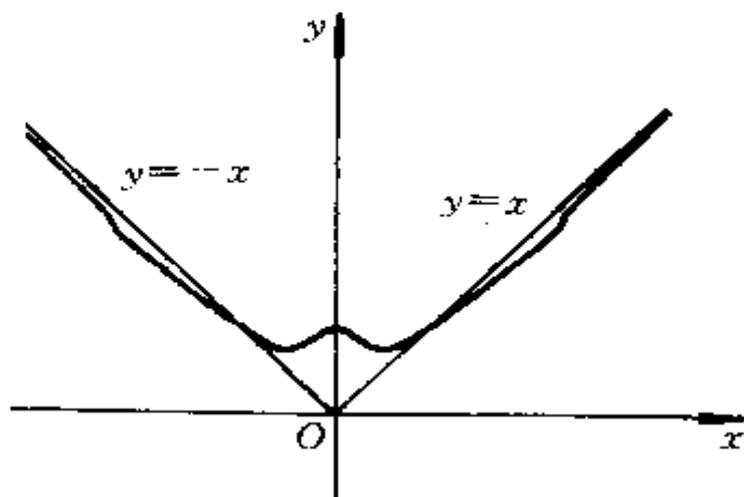


图 2.85

1497. $y = \sin x + \cos^2 x$.

解 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $0 \leq x \leq 2\pi$ 内的图形讨论如下:

零点处: $x = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 1.21\pi$ 及

$x = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 1.79\pi$.

$y' = \cos x(1 - 2\sin x)$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \text{ 及 } \frac{3\pi}{2};$$

$y'' = -\sin x - 2\cos 2x$, 令 $y'' = 0$ 得

$$4\sin^2 x - \sin x - 2 = 0,$$

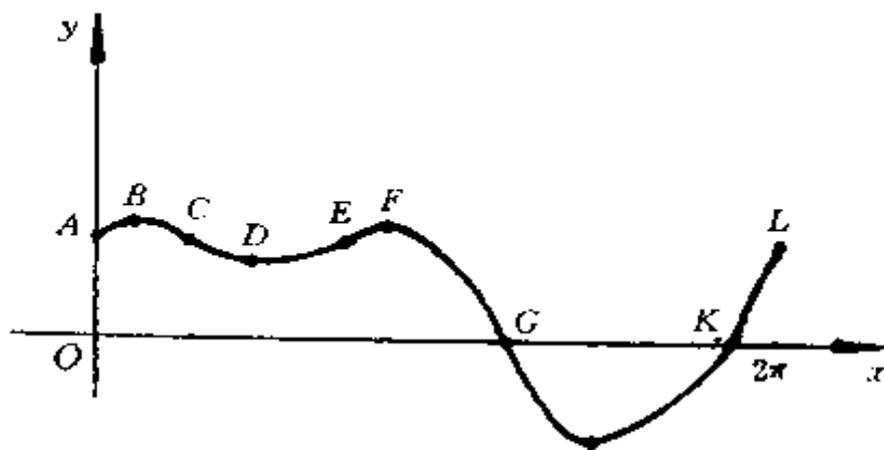


图 2.86

解之得

$$x_1 = \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_1 \approx 1.13;$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \frac{1 + \sqrt{33}}{8}, \text{ 此时 } y_2 \approx 1.13;$$

$$x_3 = \pi + \arcsin \frac{\sqrt{33} - 1}{8}, \text{ 此时 } y_3 \approx 0.055;$$

$$x_4 = 2\pi - \arcsin \frac{\sqrt{33} - 1}{8}, \text{ 此时 } y_4 \approx 0.055,$$

经判断: $x_1 \approx 0.32\pi, x_2 \approx 0.68\pi, x_3 \approx 1.20\pi, x_4 \approx 1.80\pi$ 均为拐点;

当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时有极小值 $y = 1$;

当 $x = \frac{3\pi}{2}$ 时有极小值 $y = -1$;

$$y_{2,3} \approx \pm 2.54;$$

$$x_{4,5} = \pm \pi, \text{ 此时 } y_{4,5} = 0.$$

经判别: 点 x_1, x_2, x_3, x_4 和 x_5 均为拐点;

当 $x = -\arccos \frac{1}{4}$ 时有

$$\text{极小值 } y = -\frac{15}{8} \sqrt{15} \approx -7.3;$$

当 $x = \arccos \frac{1}{4}$ 时有极

$$\text{大值 } y = \frac{15}{8} \sqrt{15} \approx 7.3.$$

图形如图 2.87 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0.42\pi, 7.3), B(0.84\pi, 2.54), C(\pi, 0);$$

$$A'(-0.42\pi, -7.3), B'(-0.84\pi, -2.54),$$

$$C'(-\pi, 0).$$

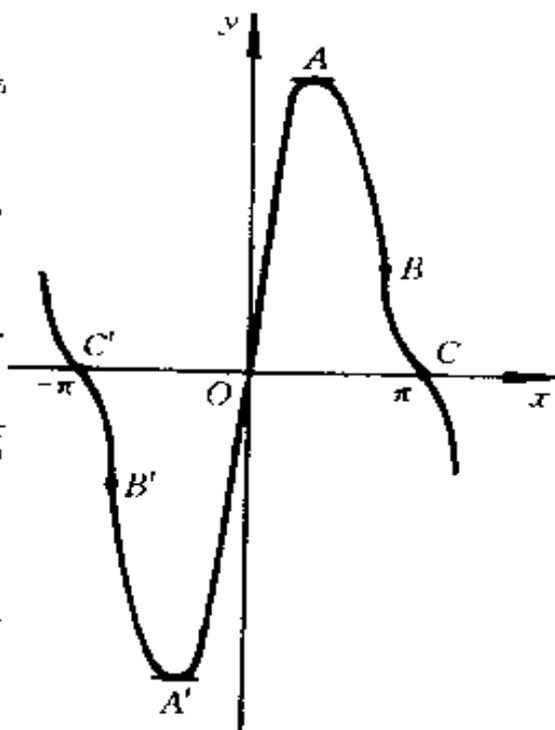


图 2.87

1499. $y = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x.$

解 图形关于坐标原点对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

零点处: $x = 0$ 或 $\pm \pi$.

$y' = \cos x + \cos 3x$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4};$$

$$y'' = -\sin x - 3\sin 3x,$$

令 $y'' = 0$ 得

$$x_1 = 0, y_1 = 0;$$

$$x_{2,3} = \pm \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \approx \pm 0.37\pi,$$

$$y_{2,3} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{4,5} = \pm \left(\pi - \arcsin \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \approx \pm 0.63\pi,$$

$$y_{4,5} = \pm \frac{4}{27} \sqrt{30} = \pm 0.81;$$

$$x_{6,7} = \pm \pi, y_{6,7} = 0.$$

经判别：点 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ 和 x_7 均为拐点；

极小值：当 $x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}$ 时， $y = -\frac{2}{3} \sqrt{2}$
 ≈ -0.94 ；

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = \frac{2}{3};$$

极大值：当 $x = -\frac{\pi}{2}$ 时， $y = -\frac{2}{3}$ ；

$$\text{当 } x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \text{ 时, } y = \frac{2}{3} \sqrt{2} \approx 0.94.$$

图形如图 2.88 所示，图中主要点的坐标：

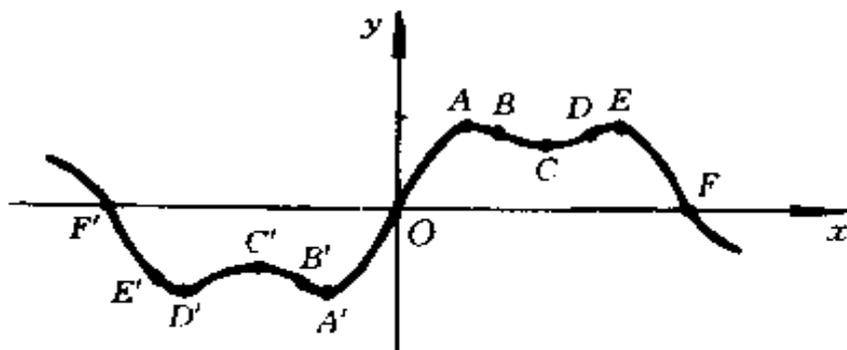


图 2.88

$$A\left(\frac{\pi}{4}, 0.94\right), B(0.37\pi, 0.81), C\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\right),$$

$$D(0.63\pi, 0.81), E\left(\frac{3\pi}{4}, 0.94\right) \text{ 和 } F(\pi, 0);$$

点 A', B', C', D', E', F' , 和点 A, B, C, D, E, F 关于原点对称.

1500. $y = \cos x - \frac{1}{2}\cos 2x.$

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

$$\text{零点处: } x = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{3}}{2} \approx \pm 0.62\pi.$$

$$y' = -\sin x + \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{3}, \pm \pi.$$

$$y'' = -\cos x + 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \arccos \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.18\pi, y_{1,2} \approx 0.63;$$

$$x_{3,4} = \pm \arccos \frac{1 - \sqrt{33}}{8} \approx \pm 0.70\pi, y_{3,4} \\ \approx -0.44.$$

经判别: 点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点;

$$\text{当 } x = 0 \text{ 时有极小值 } y = \frac{1}{2};$$

$$\text{当 } x = \pm \pi \text{ 时有极小值 } y = -\frac{3}{2};$$

$$\text{当 } x = \pm \frac{\pi}{3} \text{ 时有极大值 } y = \frac{3}{4}.$$

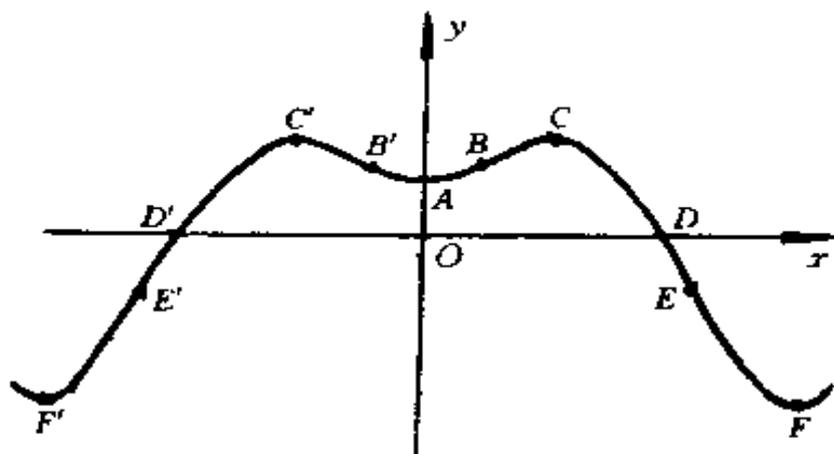


图 2.89

图形如图 2.89 所示, 图中主要点的坐标:

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), B(0.18\pi, 0.63), C\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right),$$

$$D(0.62\pi, 0), E(0.70\pi, -0.44), F\left(\pi, -\frac{3}{2}\right);$$

点 B', C', D', E', F' , 与点 B, C, D, E, F 关于 Oy 轴对称.

1501. $y = \sin^4 x + \cos^4 x.$

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$$\begin{aligned} y &= \sin^4 x + \cos^4 x \\ &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(3 + \cos 4x), \end{aligned}$$

故函数的周期 $T = \frac{\pi}{2}$. 在一周期 $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 内讨论图形.

$$y' = -\sin 4x. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{4}.$$

$$y'' = -4\cos 4x. \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得 } x_{1,2} = \pm \frac{\pi}{8},$$

$$y_{1,2} = \frac{3}{4}.$$

经判别: 点 x_1 和

x_2 均为拐点;

当 $x = 0$ 时有极大值

$$y = 1;$$

当 $x = \pm \frac{\pi}{4}$ 时有极小

$$\text{值 } y = \frac{1}{2}.$$

图形如图 2.90 所示,

图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B\left(\frac{\pi}{8}, \frac{3}{4}\right) \text{ 和 } C\left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right).$$

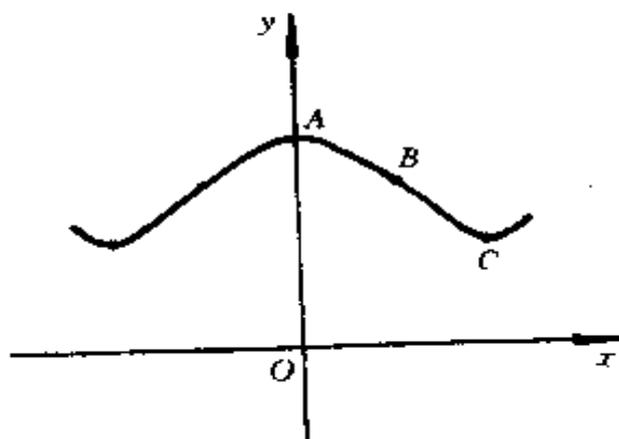


图 2.90

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x.$

解 图形关于 Oy 轴对称.

由于

$$y = \sin x \sin 3x = -\left(\cos 2x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{16}, \text{ 故函数的周期}$$

$$T = \pi. \text{ 在一周期 } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 内讨论图形.}$$

$$\text{零点处: } x = 0 \text{ 或 } \pm \frac{\pi}{3}.$$

$$y' = 2\sin 4x - \sin 2x, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = 0, \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4}.$$

$$y'' = 8\cos 4x - 2\cos 2x, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 + \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.11\pi,$$

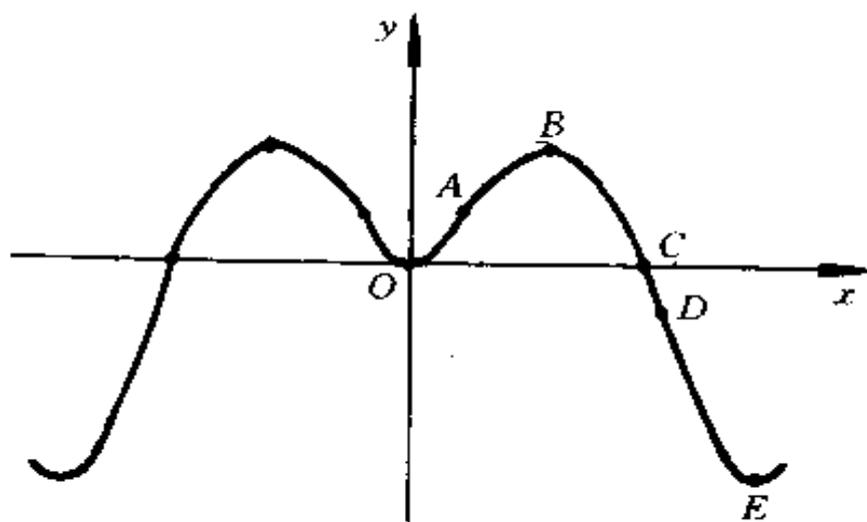


图 2.91

$$y_{1,2} \approx 0.29;$$

$$x_{3,4} = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{129}}{16} \approx \pm 0.36\pi,$$

$$y_{3,4} \approx -0.24.$$

经判别:点 x_1, x_2, x_3 和 x_4 均为拐点;

极小值:当 $x = 0$ 时 $y = 0$,

$$\text{当 } x = \pm \frac{\pi}{2} \text{ 时, } y = -1;$$

极大值:当 $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{4} \approx \pm 0.21\pi$ 时, $y = \frac{9}{16}$

图形如图 2.91 所示,图中主要点的坐标:

$$A(0.11\pi, 0.29), B\left(0.21\pi, \frac{9}{16}\right), C\left(\frac{\pi}{3}, 0\right),$$

$$D(0.36\pi, -0.24), E\left(\frac{\pi}{2}, -1\right).$$

1503. $y = \frac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

解 利用 $\sin(\pi + x) = -\sin x$, 易知函数的周期

$$T = \pi.$$

在一周期 $0 \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

不连续点: $x = \frac{3\pi}{4}$.

零点处: $x = 0$ 或 π .

渐近线: $x = \frac{3\pi}{4}$.

$$y' = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)} > 0,$$

无极值, 函数图形上升.

$$y'' = -\frac{2\sin \frac{\pi}{4} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{\sin^3 \left(x + \frac{\pi}{4} \right)},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \frac{\pi}{4}$, 对应的 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 经判别为拐点.

图形如图 2.92 所示, 图中主要点的坐标:

$$A \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), B(\pi, 0) \text{ 和 } C \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

1504. $y = \frac{\cos x}{\cos 2x}$.

解 图形关于 Oy 轴对称. 函数的周期 $T = 2\pi$. 在一周期 $-\pi \leq x \leq \pi$ 内讨论图形.

零点处: $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

渐近线: $x = \pm \frac{\pi}{4}$.

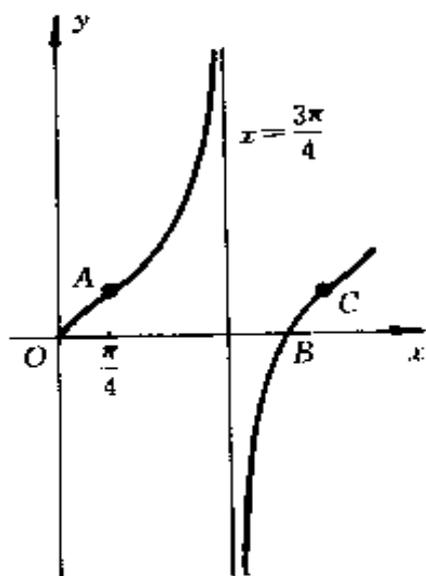


图 2.92

及 $x = \pm \frac{3\pi}{4}$.

$$y' = \frac{\sin x(1 + 2\cos^2 x)}{\cos^2 2x},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $\pm \pi$;

$$y'' = \frac{1}{\cos^3 2x} [3\cos x \cos^2 2x + 4\sin 2x \sin x (1 + 2\cos^2 x)],$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = \pm \frac{\pi}{2}$.

经判别: 当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 1$;

当 $x = \pm \pi$ 时有极大值 $y = -1$;

点 $x = \pm \frac{\pi}{2}$ 均为拐点, 此时 $y = 0$.

当 $0 < x < \pi$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-\pi < x < 0$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

图形如图 2.93 所示.

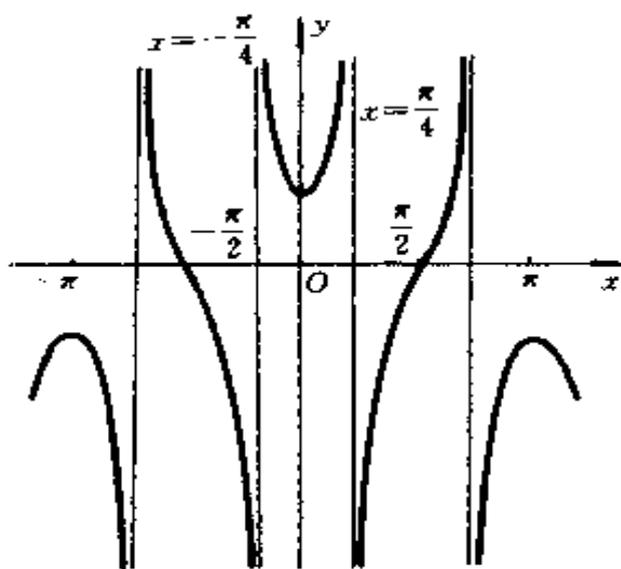


图 2.93

1505. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

解 零点处: $x = 0$ 及 $x \approx \pm 0.37\pi, \dots$

对称中心: $(k\pi, 2k\pi) (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

渐近线: $x = \frac{2k+1}{2}\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

$y' = 2 - \sec^2 x$, 令 $y' = 0$ 得

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \text{ 或 } x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

经判别: 当 $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ 时, 有极大值 $y = \frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi$;

当 $x = -\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ 时, 有极小值 $y = -\left(\frac{\pi}{2} - 1 + 2k\pi\right) (k = 0, 1, 2, \dots)$.

$y'' = -2\sec^2 x \operatorname{tg} x$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

经判别此为拐点. 图形如图 2.94 所示

(仅描绘从 $-\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{3\pi}{2}$ 区间内的图形).

1506. $y = e^{2x-x^2}$.

解 函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴的上方.

$y = e^{-(x-1)^2+1}$, 于是图形关于直线 $x = 1$ 对称.

渐近线: $y = 0$.

$y' = (2-2x) \cdot e^{2x-x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 1$, 经判别知此时有极大值 $y = e$;

$y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x-x^2}$, 令 $y'' = 0$ 得 $x = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$,

经判别为拐点, $y = \sqrt{e} \approx 1.65$.

图形如图 2.95 所示, 图中各点的位置:

$$D\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{e}\right).$$

1507. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$.

解 图形关于 Oy 轴对称, 在 Ox 轴的上方.

渐近线: $y = 0$.

$y' = -2x^3e^{-x^2}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0$, 经过 $x = 0$ 点, 导数 y' 从正变负, 所以当 $x = 0$ 时取极大值 $y = 1$.

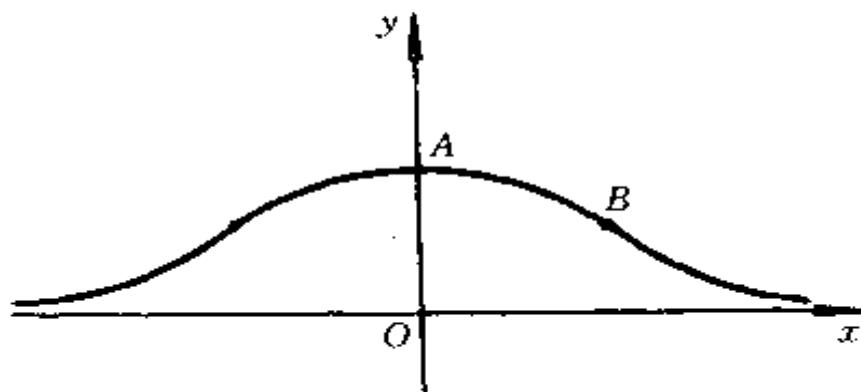


图 2.96

$$y'' = 2x^2e^{-x^2}(2x^2 - 3), \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \approx \pm 1.22,$$

经判别为拐点, 而 $y = \frac{5}{2}e^{-\frac{3}{2}} \approx 0.56$.

图形如图 2.96 所示, 图中主要点的坐标:

$$A(0, 1), B(1.22, 0.56).$$

1508. $y = x + e^{-x}$.

解 $y' = 1 - e^{-x}$, 令 $y' = 0$ 得 $x = 0, y = 1$.

$y'' = e^{-x} > 0$, 图形向上凹, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 1$.

斜渐近线: $y = x$. 事实上,

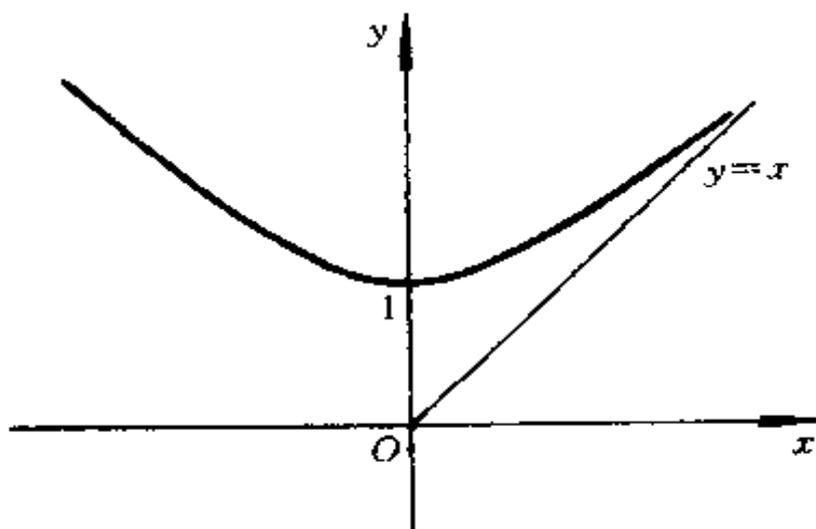


图 2.97

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1, b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0.$$

图形如图 2.97 所示.

1509. $y = x^{\frac{2}{3}}e^{-x}$.

解 零点处: $x = 0$.

渐近线:

$y = 0$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = -x^{-\frac{1}{3}}e^{-x} \left(x - \frac{2}{3} \right),$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{2}{3}$, 当 $x = 0$ 时, $y' = \infty$.

经判别: 当 $x = 0$ 有极小值 $y = 0$, 且 $(0, 0)$ 点为尖点.

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有极大值 $y = \sqrt[3]{\frac{4}{9}}e^{-\frac{2}{3}} \approx 0.39$.

由此可知函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴上方.

$$y'' = \frac{1}{9}e^{-x}x^{-\frac{4}{3}}(9x^2 - 12x - 2), \text{ 令 } y'' = 0, \text{ 得}$$

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{6}}{3} \approx -0.15, y_1 \approx 0.33,$$

$$x_2 = \frac{2 + \sqrt{6}}{3} \approx 1.48, y_2 \approx 0.30,$$

经判别均为拐点.

图形如图 2.98 所示, 图中主要点的坐标:

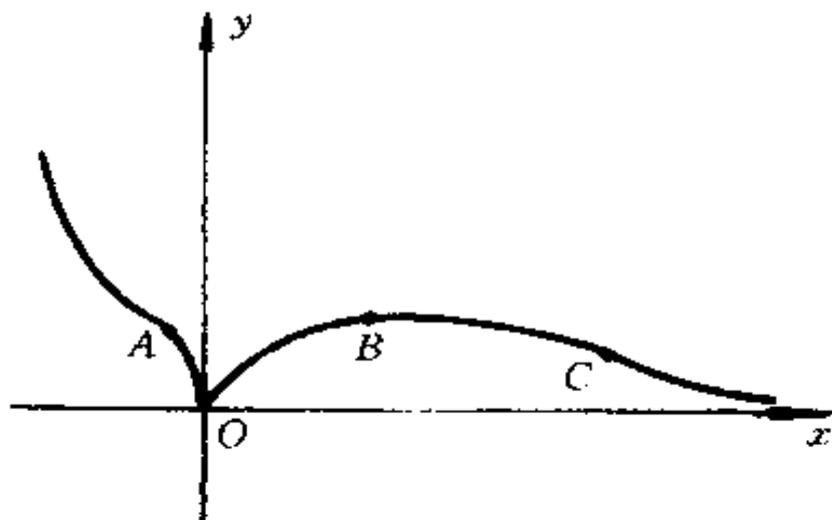


图 2.98

$$A(-0.15, 0.34), B\left(\frac{2}{3}, 0.39\right), C(1.48, 0.30).$$

1510. $y = \frac{e^x}{1+x}$.

解 当 $x < -1$ 时, 函数值为负的,

当 $x > -1$ 时, 函数值为正的.

不连续点: $x = -1$. 垂直渐近线: $x = -1$.

又水平渐近线: $y = 0$ (当 $x \rightarrow -\infty$ 时). 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y}{x} = 0, b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (y - kx) = 0.$$

$$y' = \frac{xe^x}{(1+x)^2},$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

经判别知此时有极小值

$$y = 1.$$

$$y'' = \frac{e^x(x^2 + 1)}{(1+x)^3},$$

当 $x < -1$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的;

当 $x > -1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

图形如图 2.99 所示.

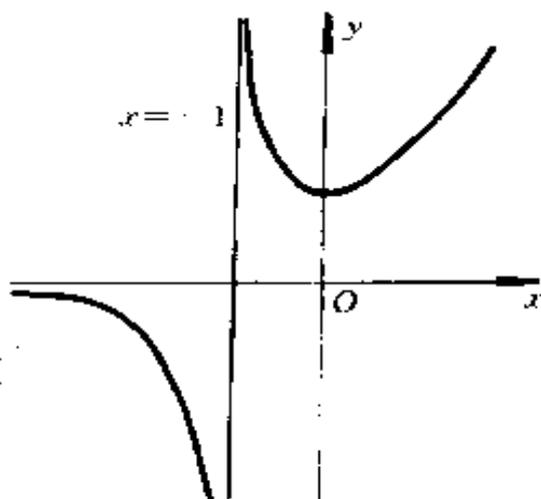


图 2.99

1511. $y = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

解 图形关于 Oy 轴对称.

零点处: $x = 0$.

函数值不为负.

当 $x = 0$ 时有最小值 $y = 0$.

渐近线: $y = 1$.

$$y' = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

当 $x < 0, y' < 0$; 当 $x > 0, y' > 0$.

$$y'' = \frac{e^{-x^2}(1 - 3x^2 - e^{-x^2} + 2x^2e^{-x^2})}{(1 - e^{-x^2})\sqrt{1 - e^{-x^2}}}.$$

令 $g(t) = 1 - 3t - e^{-t} + 2te^{-t}$ ($0 \leq t < +\infty$), 易证 $g(t) \leq 0$. 于是, 对于 $x \neq 0$, 恒有 $y'' < 0$, 即图形呈凸状. 而 $(0, 0)$ 点为尖点(图 2.100).

1512. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$

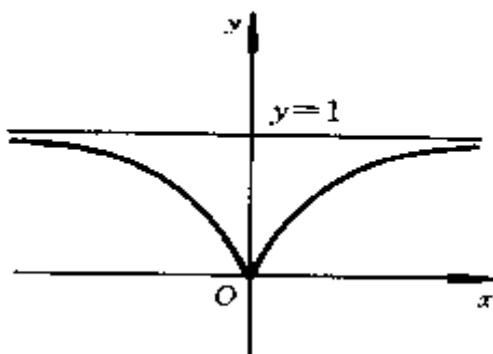


图 2.100

解 存在域: $x > 0$.

零点处: $x = 1$.

渐近线: $x = 0$ ($x \rightarrow +0$), $y = 0$ ($x \rightarrow +\infty$).

$$y' = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^2 \approx 7.39.$$

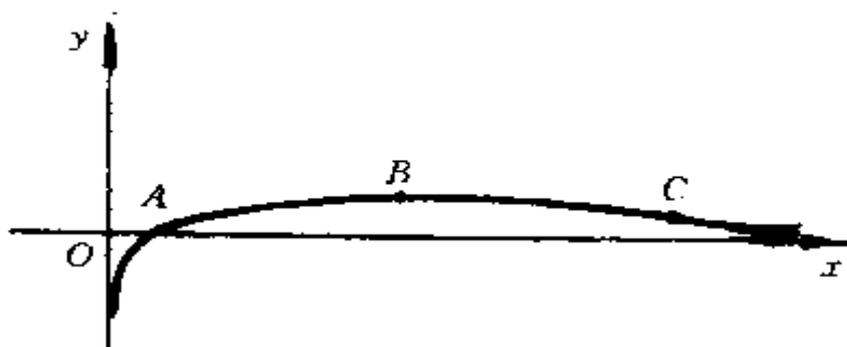


图 2.101

经判别知此时有极大值 $y = \frac{2}{e} \approx 0.74$.

$$y'' = \frac{3\ln x - 8}{4x^{\frac{5}{2}}}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得}$$

$$x = e^{\frac{8}{3}} \approx 14.39,$$

经判别此为拐点, 此时 $y = \frac{8}{3}e^{-\frac{4}{3}} \approx 0.70$.

图形如图 2.101 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(1, 0), B(7.39, 0.74), C(14.39, 0.70).$$

1513. $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 由于 $\ln(\sqrt{x^2 + 1} - x) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$,
故图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \text{ 故图形始终上升, 无极值点.}$$

$$y'' = \frac{-x}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0$,
在此点切线斜率为 $k = 1$.
经判别此为拐点, 此
时 $y = 0$.

图形如图 2.102 所示.

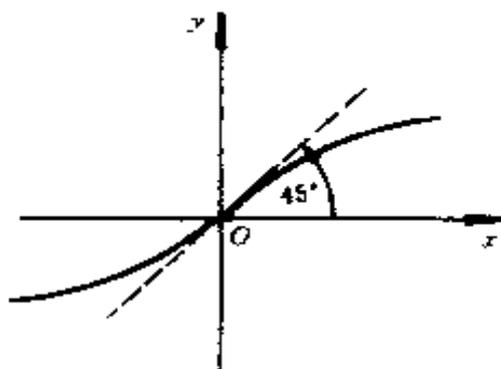


图 2.102

1514. $y = \sqrt{x^2 + 1} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

$$y' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$y'' =$$

$$\frac{\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + x \sqrt{x^2 + 1}}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

当 $x < 0$ 时, 由对称性知图形是凸的.

于是得知 $O(0,0)$ 为拐点, 在此点切线斜率为 $k = 1$.

从而, 函数图形始终上升, 如图 2.103 所示.

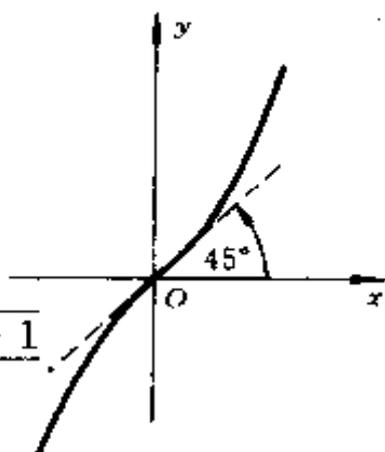


图 2.103

1515. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

存在域: $|x| < 1$.

渐近线: $x = \pm 1$.

$y' =$

$$\frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

> 0 ($|x| < 1$),

故图形始终上升.

$$y'' = \frac{3x}{(1-x^2)^2} +$$

$$\frac{(1+2x^2)\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}},$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $-1 < x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的,

当 $0 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的, $O(0,0)$ 为拐点处, 在此点切线斜率为 $k = 1$.

图形如图 2.104 所示.

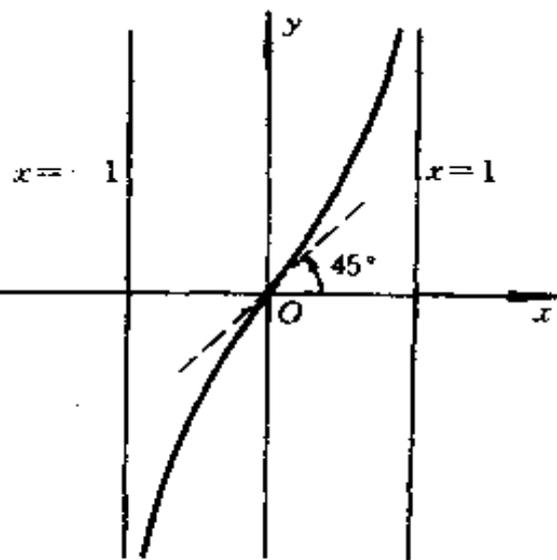


图 2.104

1516. $y = x + \arcsin x$.

解 图形关于坐标原点对称.

零点处: $x = 0$.

渐近线: $y = x - \frac{\pi}{2}$, $y = x + \frac{\pi}{2}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 1, b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - kx) = -\frac{\pi}{2}, b_2 =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \frac{\pi}{2}.$$

$$y' = 1 + \frac{1}{1+x^2} > 0,$$

故图形始终上升,无
极值点.

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = 0$, 判
别知为拐点, 在此点切线
斜率为 $k = 2$.

图形如图 2.105 所示.

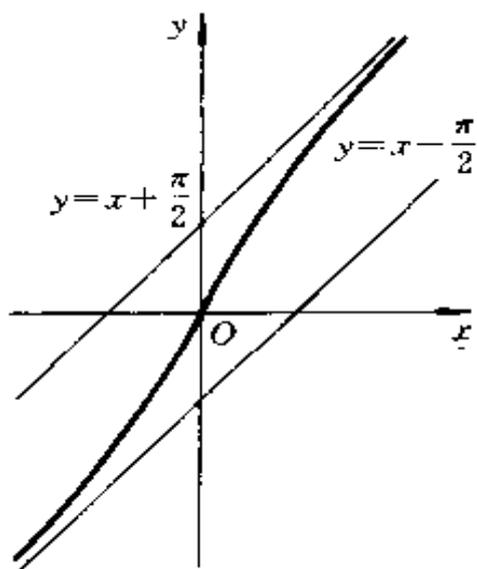


图 2.105

1517. $y = \frac{x}{2} + \text{arc ctg} x.$

解 零点处: $x \approx -5.95.$

渐近线: $y = \frac{x}{2} + \pi.$ 事

实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{2} + \text{arc ctg} x}{x} = \frac{1}{2}.$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{x}{2} + \text{arc ctg} x \right) - \frac{1}{2}x \right] = \pi;$$

同法还可得渐近线 $y = \frac{x}{2}$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时).

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x = \pm 1.$$

当 $x < -1$ 及当 $x > 1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

当 $-1 < x < 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降;

故当 $x = 1$ 时有极小值 $y = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \approx 1.285$, 当 $x = -1$

时有极大值 $y = -\frac{1}{2} + \frac{3\pi}{4} \approx 1.856.$

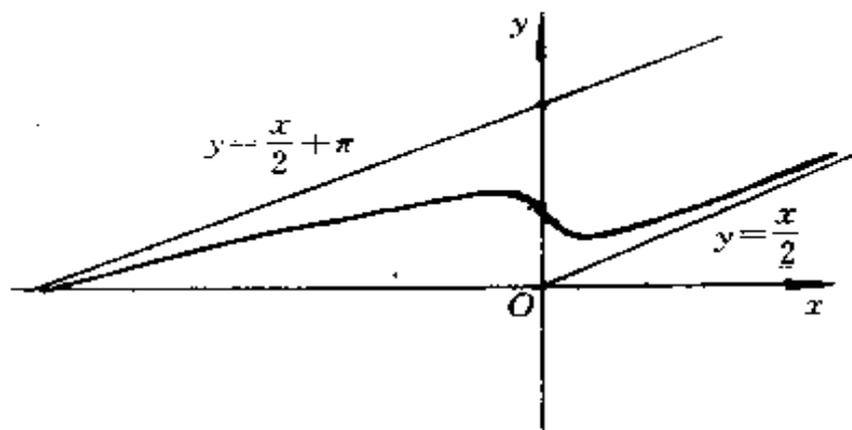


图 2.106

$$y'' = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ 令 } y'' = 0 \text{ 得 } x = 0.$$

当 $x < 0$ 时, $y'' < 0$, 故图形是凸的.

当 $x > 0$ 时, $y'' > 0$, 故图形是凹的.

从而有拐点 $x = 0$, 此时 $y = \frac{\pi}{2}$, $y' = -\frac{1}{2}$.

图形如图 2.106 所示.

1518. $y = x \operatorname{arctg} x$.

解 零点处: $x = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负, 故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线:

$$y = -\frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时);}$$

$$y = \frac{\pi}{2}x - 1 \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时).}$$

$$y' = \frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x,$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$.

当 $x < 0$ 时, $y' < 0$, 图形下降; 当 $x > 0$ 时, $y' > 0$, 图

当 $x = 0$ 时, $y' = 1$.

又点 $x = 0$ 为拐点.

图形如图 2.108 所示.

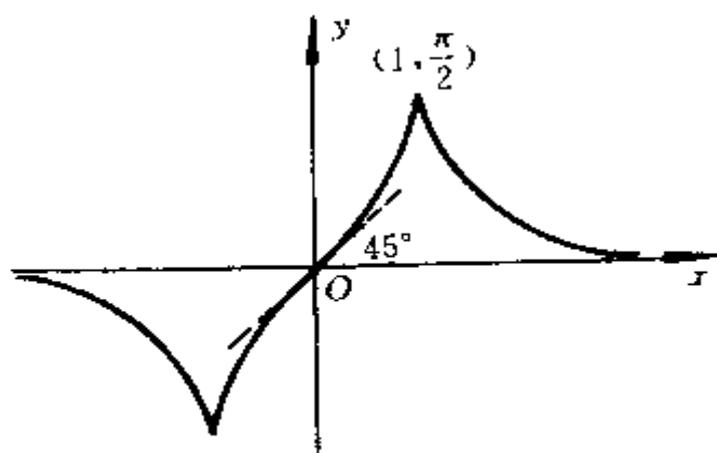


图 2.108

1520. $y = \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}$.

解 零点处: $x = 0$.

图形关于 Oy 轴对称.

函数值不为负, 故图形始终在 Ox 轴上方.

渐近线: $y = \pi$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi.$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2} > 0 \quad (x > 0), \text{ 图形上升.}$$

当 $x = 0$ 时, 直接从定义出发, 得

$$y'_+(0) = 2.$$

由对称性知, $y'(0) = -2$, 且当 $x < 0$ 时, 图形下降, 故当 $x = 0$ 时有极小值 $y = 0$. 此点为角点.

$$y'' = -\frac{4x}{(1+x^2)^2} < 0 \quad (x > 0), \text{ 图形是凸的.}$$

由对称性知, 当 $x < 0$ 时, 图形也是凸的.

图形如图 2.109 所示.

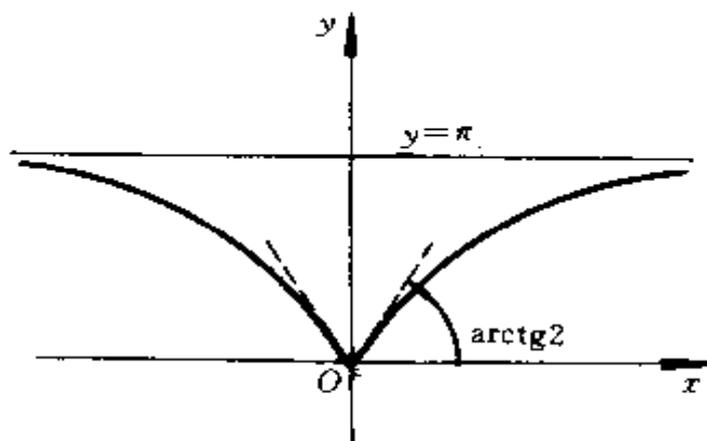


图 2.109

1521. $y = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

解 零点处: $x = -2$.

不连续点: $x = 0$.

渐近线: $y = x + 3$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)e^{\frac{1}{x}}}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x+2)e^{\frac{1}{x}} - x]$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[3 + x + o\left(\frac{1}{x}\right) - x \right] = 3.$$

$$y' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 2$ 或 -1 .

当 $0 < x < 2$ 时, $y' < 0$, 图形下降,

当 $-1 < x < 0$ 时,

$y' < 0$, 图形下降,

当 $x < -1$ 及 $x > 2$

时,

$y' > 0$, 图形上升;

故当 $x = -1$ 时有极

大值 $y = \frac{1}{e} \approx 0.37$.

当 $x = 2$ 时有极小值

$y = 4\sqrt{e} \approx 6.59$.

$$y'' = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x+2}{x^2} \right).$$

令 $y'' = 0$ 得 $x = -$

$$\frac{2}{5},$$

当 $x < -\frac{2}{5}$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的,

当 $x > -\frac{2}{5}$ ($x \neq 0$) 时, $y'' > 0$, 图形是凹的,

故该点是拐点, 此时 $y = \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}} \approx 0.13$.

又 $\lim_{x \rightarrow 0^-} y = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = +\infty$.

图形如图 2.110 所示. 图中各点的位置:

$A(-2, 0)$, $B(-1, 0.37)$,

$C(-0.40, 0.13)$, $D(2, 6.59)$.

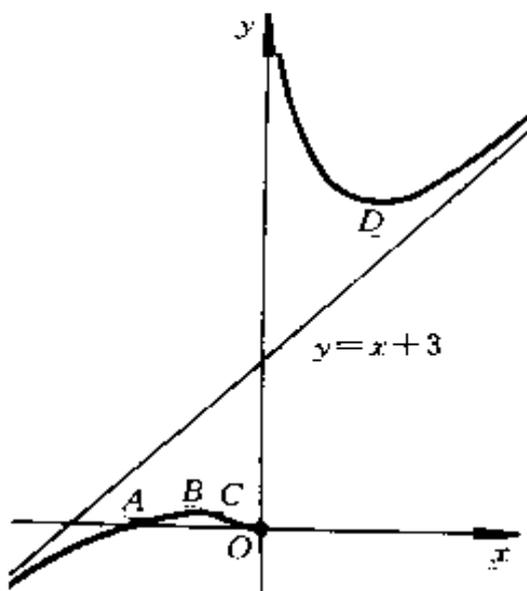


图 2.110

1522. $y = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.

解 存在域: $|x| \geq 1$. 图形关于 Oy 轴对称.

渐近线: $y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (2\sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2+1}) = 1.$$

当 $x = \pm 1$ 时有边界的极大值 $y = 2\sqrt{2} \approx 2.67$.

$$y'_+(1) = -\infty,$$

$$y'_-(-1) = +\infty,$$

$$y'(x) = 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \cdot \ln 2 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right),$$

故当 $x < -1$ 时, $y' > 0$, 曲线上升;

$x > 1$ 时, $y' < 0$, 曲线下降.

$$y''(x) = (\ln 2)^2 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \right)^2 + \ln 2 \cdot 2\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} + \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}} \right) > 0, \text{ 故图形呈凹状.}$$

图形如图 2.111 所示.

1523. $y = \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}.$

解 存在域: $x < 1$ 及 $x > 2$.

与坐标轴的交点: $(0, \ln 2)$ 及 $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

渐近线: $y = 0$; 事实上,

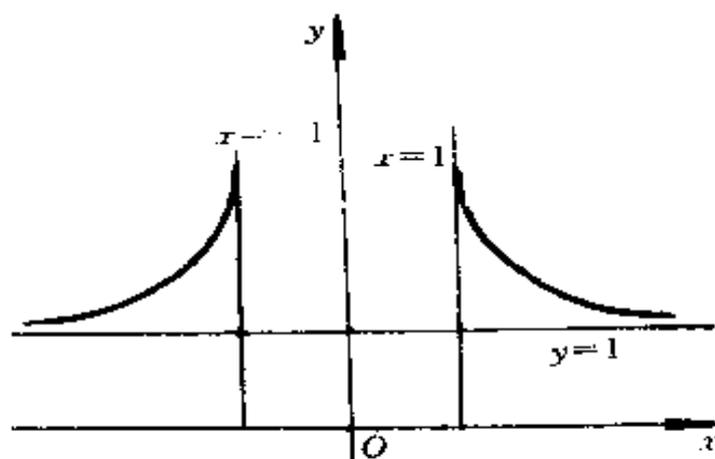


图 2.111

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 1} = 0.$$

$$y' = \frac{3x^2 - 2x - 3}{(x-1)(x-2)(x^2+1)}, \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得 } x =$$

$$\frac{1 - \sqrt{10}}{3} \approx -0.72 \text{ (另一根不在存在域内), 经判别知}$$

当 $x \approx -0.72$ 时有极大值 $y \approx 1.12$.

$$y'' = \frac{-6x^5 + 15x^4 - 30x^2 + 30x - 13}{(x-1)^2(x-2)^2(x^2+1)^2}, \text{ 令 } y'' =$$

0 得 $x \approx -1.52$. 判别知为拐点, 此时 $y \approx 0.99$.

当 $x < -1.49$ 时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

当 $x > 2$ 时, $y'' < 0$, 图形是凸的.

当 $x \rightarrow 1-0$ 及 $x \rightarrow 2+0$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

图形如图 2.112 所示.

图中主要点的坐标: $A(-1.52, 0.99)$, $B(-0.72, 1.12)$, $C(0, \ln 2)$, $D\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

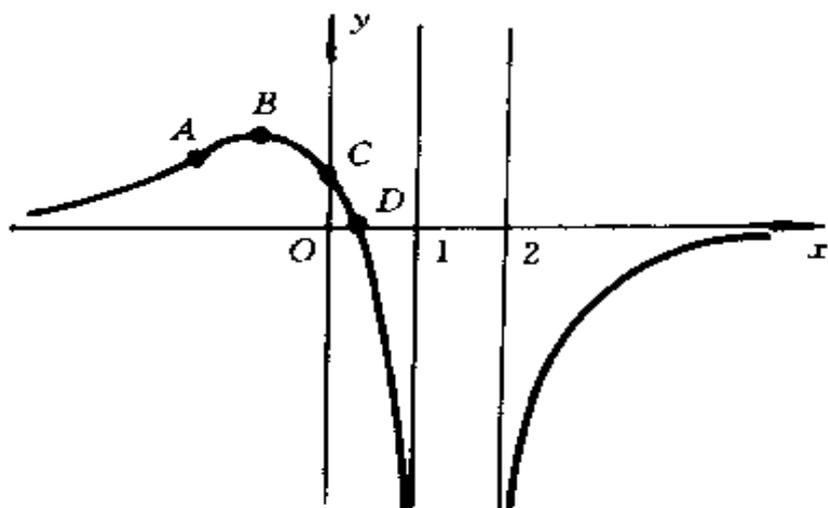


图 2.112

1524. $y = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0)$

解 存在域: $|x| \leq a$.

与坐标轴交点: $(0, -a)$ 及 $(0.67a, 0)$.

当 $x = -a$ 时有边界的极小值 $y = -\frac{\pi}{2}a$.

当 $x = a$ 时有边界的极大值 $y = \frac{\pi}{2}a$.

$$y' = \frac{a+x}{\sqrt{a^2-x^2}} > 0 \text{ (当 } |x| < a \text{ 时)}, \text{ 故图形单调}$$

上升. 又

$$y'_-(a) = +\infty, y'_+(-a) = 0.$$

$$y'' = \frac{a(a+x)}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} > 0 \text{ (} |x| < a \text{)},$$

故图形是凹的.

图形如图 2.113 所示.

图中主要点的坐

标:

$$A\left(-a, -\frac{\pi}{2}a\right),$$

$$B(0, -a),$$

$$C(0.67a, 0),$$

$$D\left(a, \frac{\pi}{2}a\right).$$

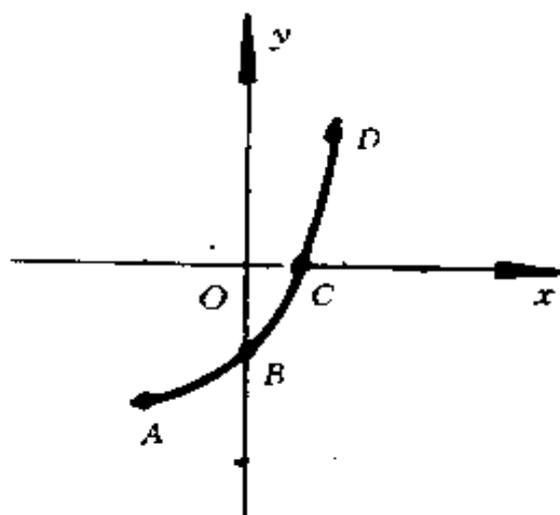


图 2.113

1525. $y = \arccos \frac{1-x}{1-2x}$.

解 存在域: $\left| \frac{1-x}{1-2x} \right| \leq 1$, 两端平方之, 解得

$$x \leq 0 \text{ 或 } x \geq \frac{2}{3}.$$

渐近线: $y = \frac{\pi}{3}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\arccos \frac{1-x}{1-2x}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \arccos \frac{1-x}{1-2x} = \frac{\pi}{3}.$$

当 $x = 0$ 时有边界的极小值 $y = 0$,

当 $x = \frac{2}{3}$ 时有边界的极大值 $y = \pi$.

$$y' = -\frac{\operatorname{sgn}(1-2x)}{(1-2x)\sqrt{3x^2-2x}},$$

$$y'' = \begin{cases} \frac{1}{(3x^2 - 2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - 2x)^2} \cdot (9x - 12x^2 - 1), & \text{当 } x \leq 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{(3x^2 - 2x)^{\frac{3}{2}} \cdot (1 - 2x)^2} (12x^2 - 9x + 1), & \text{当 } x \geq \frac{2}{3} \text{ 时.} \end{cases}$$

当 $x \leq 0$

时, $y'' < 0$, 图形是凸的;

当 $x \geq \frac{2}{3}$

时, $y'' > 0$, 图形是凹的.

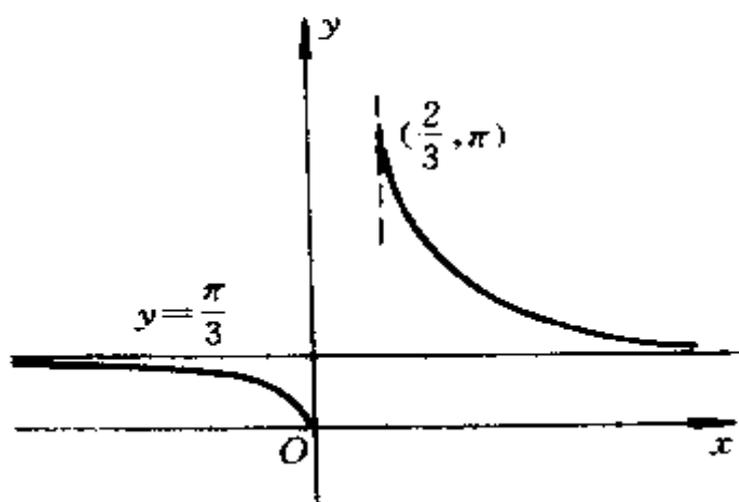


图 2.114

又当 $x < 0$

时, $y' < 0$, 图形

下降;

当 $x > \frac{2}{3}$ 时, $y' < 0$, 图形也下降;

$$y'_{-}(0) = -\infty, y'_{+}\left(\frac{2}{3}\right) = -\infty.$$

图形如图 2.114 所示.

1526. $y = x^x$.

解 一般只讨论 $x > 0$. 函数值始终为正的, 故图形在

Ox 轴的上方.

$$y' = x^x(1 + \ln x).$$

令 $y' = 0$ 得 $x = \frac{1}{e} \approx 0.368$. 经判别知此时有极小值

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \approx 0.692.$$

$$y'' = x^x \left[(1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x} \right] > 0, \text{图形是凹的.}$$

当 $x \rightarrow +0$ 时有边界值 $y = 1$ (利用洛比塔法则求得).

图形如图 2.115 所示.

1527. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

解 一般只讨论 $x > 0$.

渐近线: $y = 1$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}-1} = 0, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$$

当 $x \rightarrow +0$ 时有边界的最小值 $y = 0$.

$$y' = x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \ln x). \text{令 } y' = 0 \text{ 得 } x = e.$$

当 $x < e$ 时, $y' > 0$, 图形上升,

当 $x > e$ 时, $y' < 0$, 图形下降.

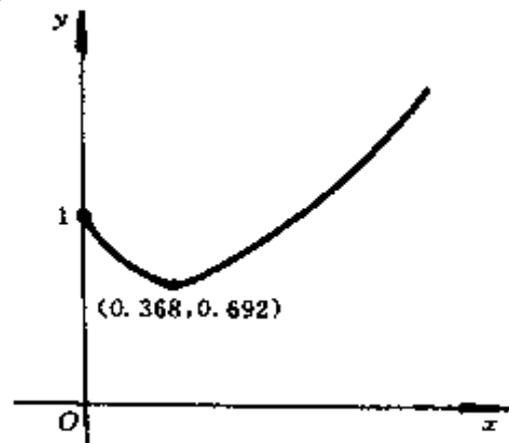


图 2.115

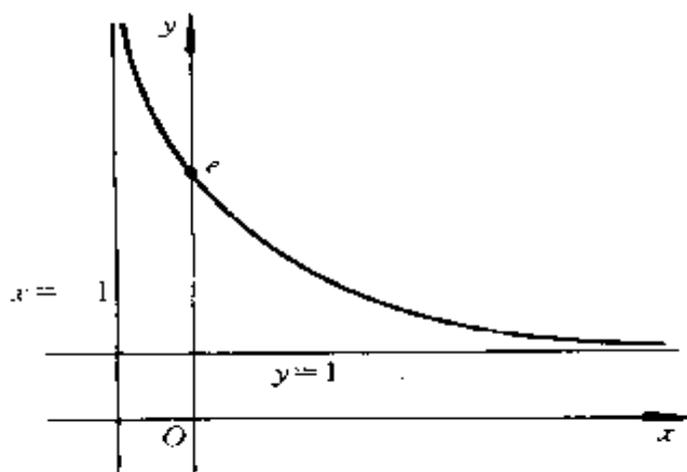


图 2.117

图形如图 2.117 所示.

1529. $y = x\left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad (x > 0).$

解 $y' = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + x\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right] > 0,$

易证 $\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1} > 0 (x > 0)$, 故 $y' > 0$, 从而图形上升.

当 $x \rightarrow +0$ 时, 有边界的最小值 $y = 0$.

渐近线: $y = e\left(x - \frac{1}{2}\right)$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e}{\frac{1}{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right]}{-\frac{1}{x^2}} \\
 &= -e \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}\right. \\
 &\quad \left. + O\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{1}{x+1}\right] = -\frac{e}{2}.
 \end{aligned}$$

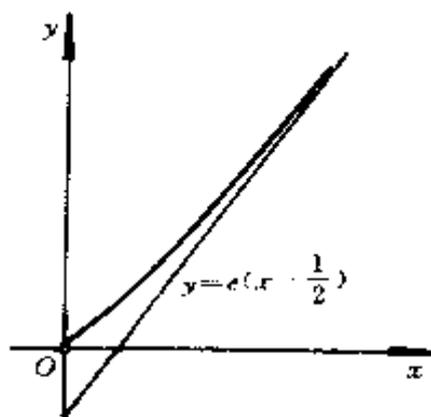


图 2.118

图形如图 2.118 所示.

1530. $y = \frac{1}{1+x^2} e^{1-x^2}$ (不研究凸凹性).

解 函数值始终为正的, 故图形在 Ox 轴的上方. 图形关于 Oy 轴对称.

不连续点: $x = 1$ 及 $x = -1$.

$$y' = \frac{2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} (3-x^2)}{(1-x^2)^2 (1+x^2)^2}$$

令 $y' = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pm \sqrt{3}$.

经判别:

当 $x = 0$ 时有极小值 $y = e$;

当 $x = \pm \sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$;

当 $x = \sqrt{3}$ 时有极大值 $y = \frac{1}{4\sqrt{e}} \approx 0.15$.

渐近线: $y = 0; x = -1$ 及 $x = 1$;

图形如图 2.119 所示. 图中主要点的坐标:

$A(0, e), B(\sqrt{3}, 0.15), C(-\sqrt{3}, 0.15)$.

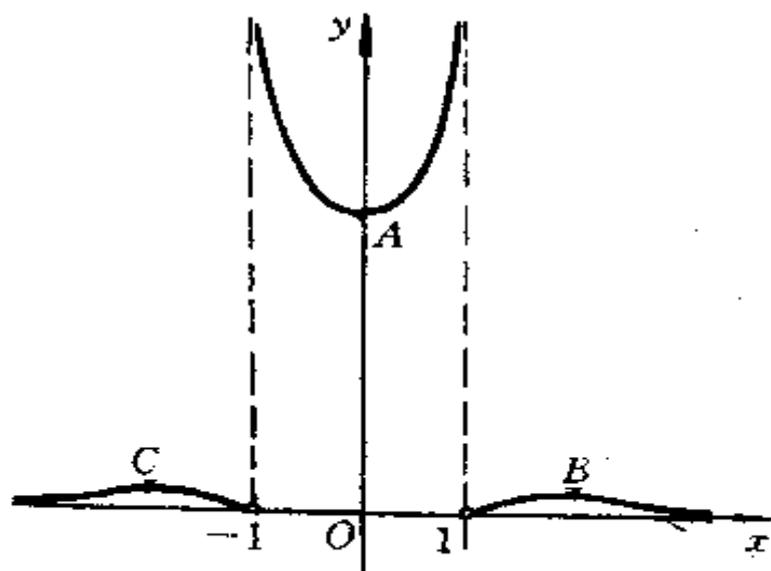


图 2.119

作出下列参数方程所表示的曲线:

1531. $x = \frac{(t+1)^2}{4}, y = \frac{(t-1)^2}{4}$.

解 先把此参数方程化成直角坐标系下的方程.

$$\sqrt{x} = \frac{|t+1|}{2}, \sqrt{y} = \frac{|t-1|}{2}.$$

当 $t \geq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}, \sqrt{y} = \frac{t-1}{2}$. 相减得

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 (x \geq 1, x > y); \quad (1)$$

当 $t \leq -1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{-t-1}{2}$, $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$. 因而

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = 1 (y \geq 1, y > x); \quad (2)$$

当 $-1 \leq t \leq 1$ 时, $\sqrt{x} = \frac{t+1}{2}$, $\sqrt{y} = \frac{1-t}{2}$, 相加得

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 (0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1). \quad (3)$$

由方程(1),(2)及(3)

即得所给曲线的图形. 图形关于 $y = x$ 对称, 如图

2.120 所示.

图中主要点的坐标:

$A(1,0), B(4,1),$

$C(0,1), D(1,4),$

$E\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$

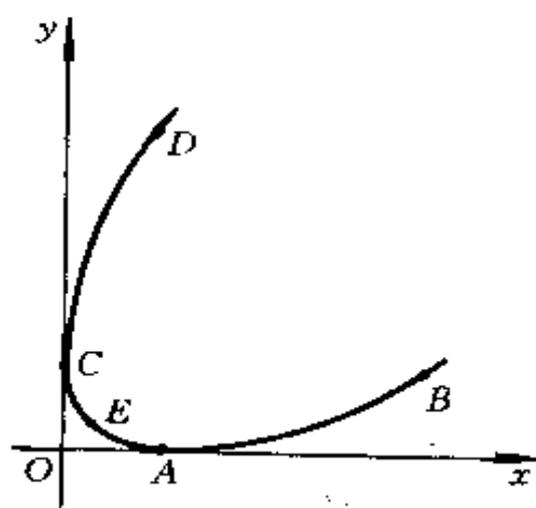


图 2.120

1532. $x = 2t - t^2, y = 3t - t^3.$

解 $x'_t = 2(1-t), y'_t = 3(1-t^2).$ 令 $x'_t = 0, y'_t = 0,$

得 $t = \pm 1.$

作下表：

t 的区间	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -3	由 $+\infty$ 下降到 -2
$(-1, 1)$	+	+	由 -3 上升到 1	由 -2 上升到 2
$(1, +\infty)$	-	-	由 1 下降到 $-\infty$	由 2 下降到 $-\infty$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(1-t^2)}{2(1-t)} = \frac{3}{2}(1+t) \quad (t \neq 1). \text{ 令 } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ 得}$$

$$t = -1, \text{ 此时 } x = -3, y = -2.$$

由于 $t = 1 \pm \sqrt{1-x}$,

故存在域为 $x \leq 1$, 且图

形有两支, 又因 $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$$\frac{3}{4(1-t)}, \text{ 故当 } t > 1 \text{ 时}$$

图形呈凸状, 而当 $t < 1$

时图形呈凹状.

当 $x = 0$ 时, $t = 0$

或 $t = 2$, 此时 $y = 0$ 或 y

$= -2$.

当 $y = 0$ 时, $t = 0, +\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$, 此时 $x = 0,$

0.464 或 -6.464 .

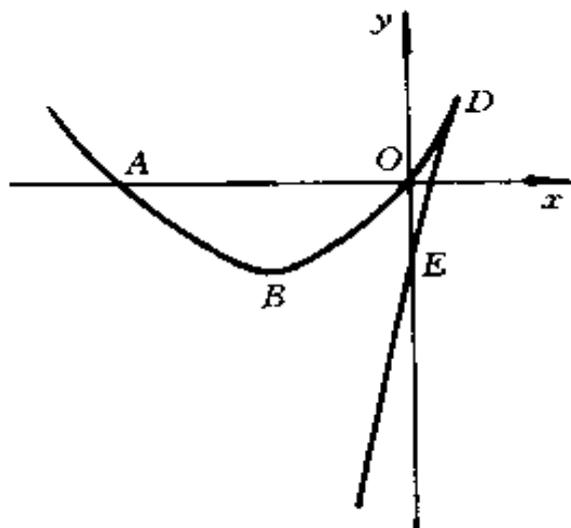


图 2.121

图形如图 2.121 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(-6.464, 0), B(-3, -2), D(1, 2), E(0, -2).$$

1533. $x = \frac{t^2}{t-1}, y = \frac{t}{t^2-1}.$

解 $x'_t = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}, y'_t = -\frac{1+t^2}{(t^2-1)^2}.$ 考虑 $x'_t = 0,$
 $y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值: $t = 0, \pm 1$ 及 $2.$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{1}{2}$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\frac{1}{2}$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, 1)$	-	-	由 0 下降到 $-\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(1, 2)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 4	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{2}{3}$
$(2, +\infty)$	+	-	由 4 上升到 $+\infty$	由 $\frac{2}{3}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+t^2}{t(t-2)(t+1)^2},$$

当 $x \in (-\infty, 0)$ 及 $(4, +\infty)$ 时, $\frac{dy}{dx} < 0,$ 因而曲

线下降.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2(t-1)^3(t^4+3t^2+4t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^4}, \text{ 令 } \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ 得 } t$$

≈ -0.33 , 经判别此时对应于拐点 $(-0.08, 0.30)$.

令 $\frac{dx}{dy} = 0$ 得 $t = 0, 2$ 及 -1 , 其中当 $t = 0$ 及 2 时有垂直切线, 切点为 $(0, 0)$ 及 $(4, \frac{2}{3})$. 当 $t = -1$ 时, $x = -\frac{1}{2}$, 此为垂直渐近线. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} y = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t}{t^2 - 1} = \infty.$$

斜渐近线为 $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(y - \frac{x}{2} \right) = - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t(t+2)}{2(t+1)} = -\frac{3}{4}.$$

又当 $x \rightarrow +\infty$, 即当 $t \rightarrow 1+0$ 时, $y \rightarrow +\infty$ 或当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $y \rightarrow 0$;

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, 即当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow 0$ 或当 $t \rightarrow 1-0$ 时, $y \rightarrow -\infty$.

总之, $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ 或 0 , $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = 0$ 或 $-\infty$. 图形如图

2.122 所示. 图中主要点的坐标:

$$A\left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right), B\left(4, \frac{2}{3}\right).$$

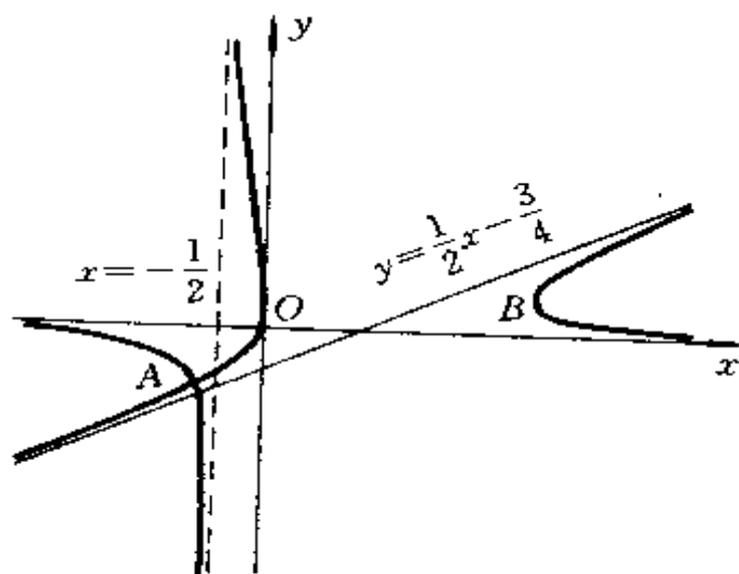


图 2.122

1534. $x = \frac{t^2}{1-t^2}, y = \frac{1}{1+t^2}$.

解 由于以 $-t$ 换 t , x 及 y 值不变, 故只须考虑 t 的正值. 又因 $t^2 = \frac{x}{1+x}$, 故 $x \geq 0$ 或 $x \leq -1$.

$$x'_t = \frac{2t}{(1-t^2)^2}, y'_t = \frac{-2t}{(1+t^2)^2},$$

$$\frac{dy}{dx} = - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2} \right)^2 < 0, \text{ 曲线下降.}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(1-t^2)^3}{(1+t^2)^3}, \text{ 当 } |t| < 1 \text{ 时图形呈凹状, 当 } |t| > 1$$

时图形呈凸状.

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ 的 t 值:

$$t = 0, t = 1.$$

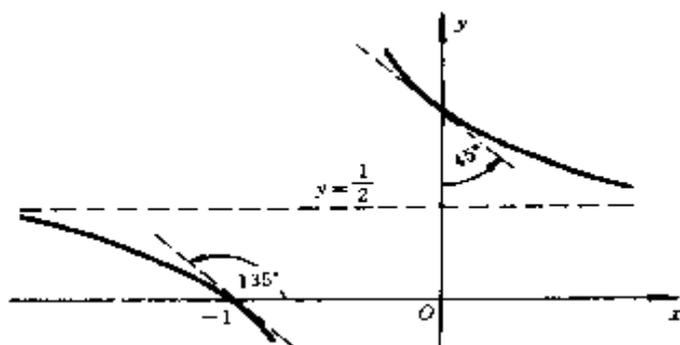


图 2.123

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y
$(0, 1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 1 下降到 $\frac{1}{2}$
$(1, +\infty)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 -1	由 $\frac{1}{2}$ 下降到 0

渐近线为 $y = \frac{1}{2}$. 事实上

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1 - t^2}{t^2(1 + t^2)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow \pm 1} \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{2}.$$

在点 $(-1, 0)$ 处 ($t = +\infty$), $\frac{dy}{dx} = -1$; 而在点 $(0, 1)$ 处

($t = 0$) 仍有 $\frac{dy}{dx} = -1$. 这说明在这两点处的切线均与

Ox 轴成 135° 的角. 这两点且为边界极值点.

图形如图 2.123 所示.

解 由于 $a\cos 2(t+2\pi) = a\cos 2t$ 及 $a\cos 3(t+2\pi) = a\cos 3t$. 因此, 我们只须考虑 t 在 $(0, 2\pi)$ 内变化时, x 及 y 的变化情况.

$$x'_t = -2a\sin 2t,$$

$$y'_t = -3a\sin 3t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\sin 3t}{2\sin 2t}.$$

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 的值:

$$t = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3},$$

$$\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \text{ 及 } 2\pi.$$

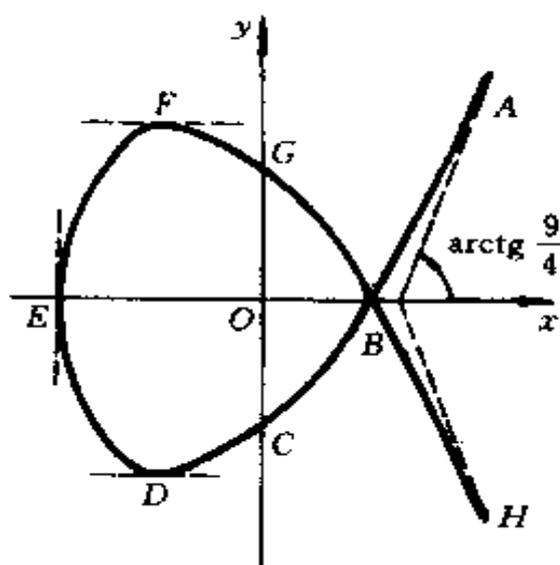


图 2.125

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(0, \frac{\pi}{3})$	-	-	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 a 下降到 $-a$	+	上升
$(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$	-	+	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 $-a$ 上升到 0	-	下降
$(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3})$	+	+	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 上升到 a	+	上升
$(\frac{2\pi}{3}, \pi)$	+	-	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 0 下降到 $-a$	-	下降
$(\pi, \frac{4\pi}{3})$	-	+	由 a 下降到 $-\frac{a}{2}$	由 $-a$ 上升到 a	-	下降

(续表)

t 的范围	x'	y'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2})$	-	-	由 $-\frac{a}{2}$ 下降到 $-a$	由 a 下降到 0	+	上升
$(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3})$	+	-	由 $-a$ 上升到 $-\frac{a}{2}$	由 0 下降到 $-a$	-	下降
$(\frac{5\pi}{3}, 2\pi)$	+	+	由 $-\frac{a}{2}$ 上升到 a	由 $-a$ 上升到 a	+	上升

当 $t = \frac{\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = -a$;

当 $t = \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = \infty$ (t 从小于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = -\infty$;

从大于 $\frac{\pi}{2}$ 趋于 $\frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{dy}{dx} = +\infty$), 此时 $x = -a$, $y = 0$;

当 $t = \frac{2\pi}{3}$ 时, $\frac{dy}{dx} = 0$, 此时 $x = -\frac{a}{2}$, $y = a$;

当 $t = \pi$ 时, 利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx} = -\frac{9}{4}$, 此时 $x = a$, $y = -a$;

当 $t = 0$ 时, 利用洛比塔法则可求得 $\frac{dy}{dx} = \frac{9}{4}$, 此时 $x = y = a$.

图形如图 2.125 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(a, a), B\left(\frac{a}{2}, 0\right), C\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),$$

$$D\left(-\frac{a}{2}, -a\right), E(-a, 0), F\left(-\frac{a}{2}, a\right),$$

$$G\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right), H(a, a).$$

1537. $x = \cos^4 t, y = \sin^4 t.$

解 $\sqrt{x} = \cos^2 t, \sqrt{y} = \sin^2 t,$ 相加即得 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1.$ 图形如图 2.126 所示*).

*) 参看 1531 题.

1538. $x = t \ln t, y = \frac{\ln t}{t}.$

解 当 $t > 0$ 时, x 及 y 才有意义.

当 $0 < t \leq 1$ 时, 令 $t' = \frac{1}{t}$, 则 $t' \geq 1$, 且 $x = -\frac{\ln t'}{t'}$, $y = -t' \ln t'$, 所以, 图形关于直线 $x + y = 0$ 对称.

以下讨论图形的极值点, 凹凸性及拐点, 不妨设 $t \geq 1$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2 \ln^2 t - 4}{t^3(1 + \ln t)^2}.$$

令 $1 - \ln t = 0$, 得 $t = e$. 经判别此时图形有极大值点:

$$A\left(e, \frac{1}{e}\right).$$

令 $\ln^2 t - 2 = 0$, 得 $t = e^{\sqrt{2}}$, 相应的点

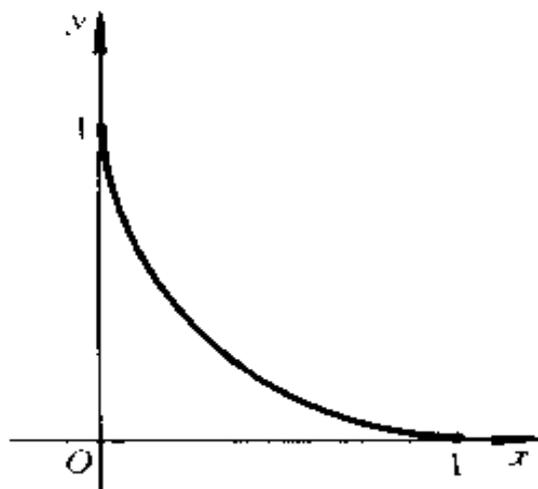


图 2.126

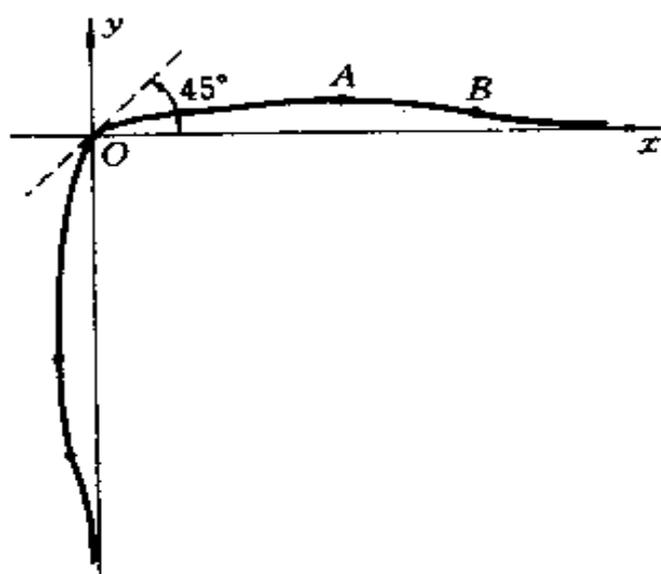


图 2.127

$B\left(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}\right)$ 为图形的拐点.

当 $1 \leq t \leq e^{\sqrt{2}}$, 即当 $0 \leq x \leq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时, 图形呈凸状. 当 $t \geq e^{\sqrt{2}}$, 即当 $x \geq \sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$ 时, 图形呈凹状.

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(0, \frac{1}{e})$	-	+	由 0 下降到 $-\frac{1}{e}$	由 $-\infty$ 上升到 $-e$	-	下降
$(\frac{1}{e}, e)$	+	+	由 $-\frac{1}{e}$ 上升到 e	由 $-e$ 上升到 $\frac{1}{e}$	+	上升
$(e, +\infty)$	+	-	由 e 上升到 $+\infty$	由 $\frac{1}{e}$ 下降到 0	-	下降

曲线通过点(0,0),在此点切线的倾角为 45° .

水平渐近线为 $y = 0$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

垂直渐近线为 $x = 0$. 事实上,

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{t \rightarrow +0} y = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\ln t}{t} = -\infty.$$

图形如图 2.127 所示.

1539. $x = \frac{a}{\cos^3 t}, y = a \operatorname{tg}^3 t (a > 0).$

解 将此参数方程化为直角坐标系下的方程:

$$x^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

显然, $|x| \geq a$. 且图形对于两坐标轴都对称,故只须考虑在第一象限部分的函数图形. 由于

$$y' = x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}, y'' = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} (y^{-\frac{2}{3}} - x^{-\frac{2}{3}}).$$

而当 $x > 0, y > 0$ 时,有 $x > y$. 从而有

$$y' > 0, y'' > 0,$$

故图形上升且呈凹状.

在 $(a, 0)$ 点的切线的倾角为 0° . 图形如图 2.128 所示.

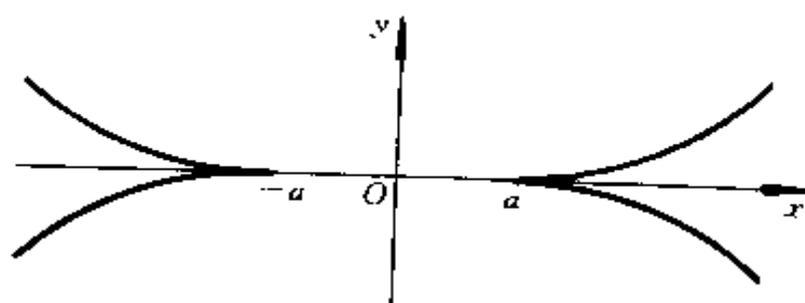


图 2.128

1540. $x = a(\text{sh}t - t), y = a(\text{ch}t - 1) (a > 0)$.

解 当 t 用 $-t$ 换时, x 的大小不变符号相反, 而 y 却不变, 故图形对于 Oy 轴对称.

$$x'_t = a(\text{ch}t - 1), y'_t = a\text{sh}t,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^t + 1}{e^t - 1}, \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{4e^{2t}}{a(e^t - 1)^4}.$$

作下表:

t 的范围	x'_t	y'_t	x	y	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{d^2y}{dx^2}$	图形
$(-\infty, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0	-	-	下降
$(0, +\infty)$	+	+	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 上升到 $+\infty$	+	-	上升

当 $t \rightarrow -0$ 时, $x \rightarrow -0, \frac{dy}{dx} \rightarrow -\infty$;

当 $t \rightarrow +0$ 时, $x \rightarrow +0, \frac{dy}{dx} \rightarrow +\infty$. 因此在 $(0, 0)$ 点的切

线垂直于 Ox 轴.

图形如图 2.129 所示.

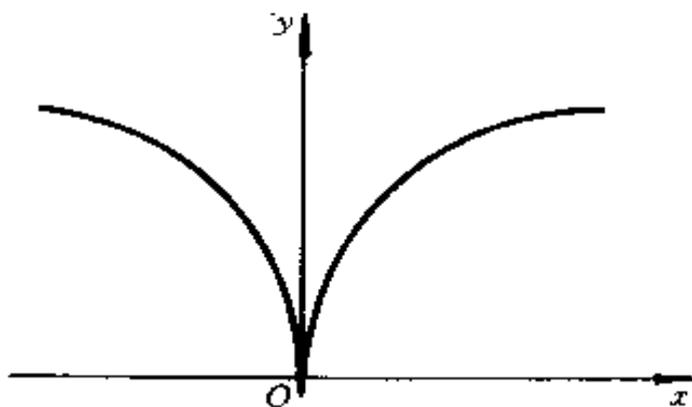


图 2.129

把下列曲线方程变成参数式,然后作出这些曲线:

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 (a > 0)$.

解 设 $y = tx$, 代入方程, 并消去 x^2 , 即得

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$x'_t = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, y'_t = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}.$$

考虑 $x'_t = 0, y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于无穷的 t 值:

$$t = -1, 0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \text{ 及 } \sqrt[3]{2}.$$

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y
$(-\infty, -1)$	+	-	由 0 上升到 $+\infty$	由 0 下降到 $-\infty$
$(-1, 0)$	+	-	由 $-\infty$ 上升到 0	由 $+\infty$ 下降到 0
$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 0 上升到 $\sqrt[3]{4a}$	由 0 上升到 $\sqrt[3]{2a}$
$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	-	+	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 $\sqrt[3]{2a}$	由 $\sqrt[3]{2a}$ 上升到 $\sqrt[3]{4a}$
$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$	-	-	由 $\sqrt[3]{2a}$ 下降到 0	由 $\sqrt[3]{4a}$ 下降到 0

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)},$$

当 $t = 0$ 时, $x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = 0$; 当 $t \rightarrow +\infty$ 时,

$$x = 0, y = 0, \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)} = \infty. \text{ 这说明,}$$

坐标原点是曲线的二重点. 曲线的一支与 Ox 轴相切, 一支与 Oy 轴相切.

渐近线: $x + y + a = 0$. 事实上,

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)} = -1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{3at^2 + 3at}{1 + t^3} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{6at + 3a}{3t^2} \\ = -a.$$

图形如图 2.130 所示. 图中主要点的坐标:

$$A(a \sqrt[3]{4}, a \sqrt[3]{2}),$$

$$B\left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}a\right),$$

$$C(a \sqrt[3]{2}, a \sqrt[3]{4}).$$

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

解 显见曲线关于两坐标轴对称, 同时关于直线 $y = x$ 对称.

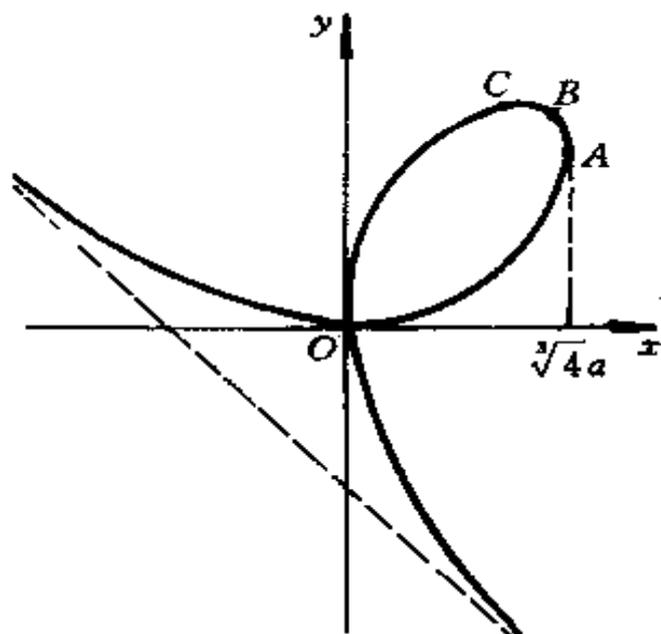


图 2.130

设 $x = ty$, 则当

$y \neq 0$ 时, 得

$$y = \pm \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}.$$

根据对称性, 不妨限于考察方程

$$\begin{cases} x = t \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}, \\ y = \sqrt{\frac{t^2 + 1}{t^4 + 1}}. \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

由于 $0 \leq x \leq 1, x \leq y$, 故曲线界于纵轴正半轴与直线 $y = x$ 之间, 由此根据对称性即可作出全部图形. 当 t 由 0 连续变到 1 时, 曲线上的点 $(0, 1)$ 连续变化到点

t	0	0.2	0.4	0.6	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$	0.8	0.9	1
x	0	0.20	0.42	0.65	0.71	0.86	0.94	1
y	1	1.02	1.06	1.09	1.10	1.08	1.04	1

曲线与两坐标轴的交点为 $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 及 $(0, -1)$, 如图 2.131 所示.

1543. $x^2 y^2 = x^3 - y^3$.

解 设 $y = tx$, 代入原方程, 即得

$$x = \frac{1-t^3}{t^2},$$

$$y = \frac{1-t^3}{t} \quad (t \neq 0).$$

$$x'_t = -\frac{2+t^3}{t^3}, \quad y'_t = -\frac{1+2t^3}{t^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}.$$

令 $x'_t = 0$, $y'_t = 0$ 及 x'_t, y'_t 趋于 ∞ , 得

$$t = \dots \sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0.$$

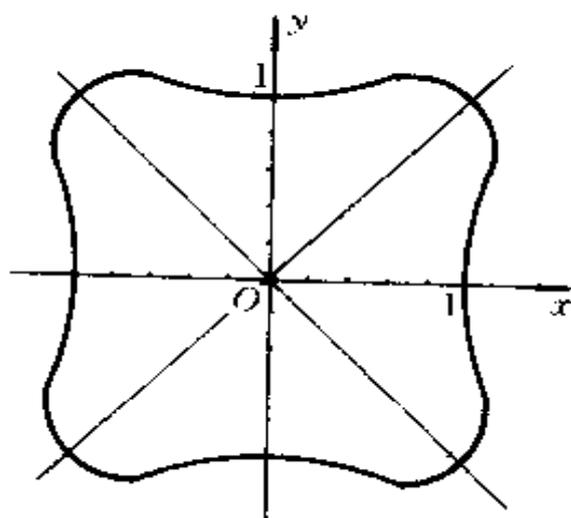


图 2.131

作下表:

t 的范围	x'	y'	x	y	$\frac{dy}{dx}$	图形
$(-\infty, -\sqrt[3]{2})$	-	+	由 $+\infty$ 下降到 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	由 $-\infty$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	-	下降
$(-\sqrt[3]{2}, -\frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	+	+	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 上升到 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$	+	上升
$(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, 0)$	+	-	由 $\frac{3}{\sqrt[3]{2}}$ 上升到 $+\infty$	由 $-\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$ 下降到 $-\infty$	-	下降
$(0, +\infty)$	-	-	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	由 $+\infty$ 下降到 $-\infty$	+	上升

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\sqrt[3]{2}} = \infty, \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} = 0,$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = 1.$$

图形通过点 $A\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)$, $B\left(\frac{3}{\sqrt[3]{2}}, -\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$, 及 $O(0,0)$. 如图 2.132 所示.

1544. $x^y = y^x (x > 0, y > 0)$.

解 由方程显见直线 $y = x$ 是图形的一部分. 对于 $y \neq x$ 的部分, 图形显然关于直线 $y = x$ 对称.

设 $x = (1+t)^{\frac{1}{t}}$, 则 $y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}$, 即当 $x \neq y$ 时, 曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = (1+t)^{\frac{1}{t}}, \\ y = (1+t)^{1+\frac{1}{t}}. \end{cases}$$

由条件 $x > 0, y > 0$ 知, t 满足 $-1 < t < +\infty$,

由于

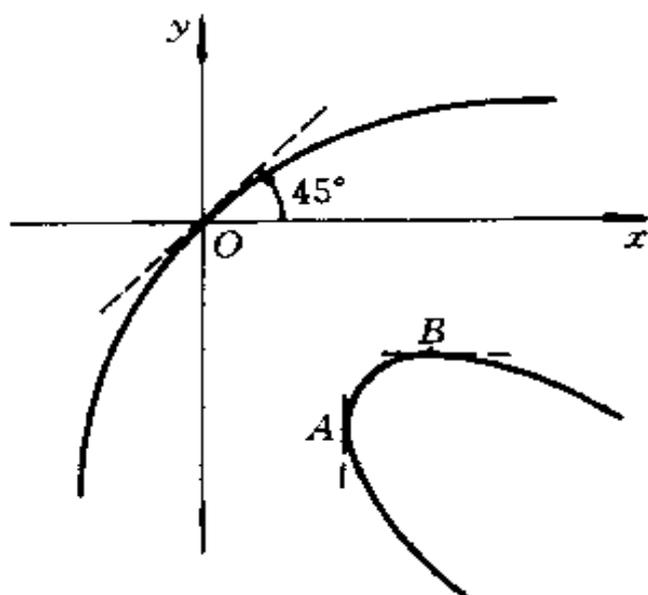


图 2.132

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} x = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = +\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow -1+0} y = \lim_{t \rightarrow -1+0} (1+t)^{1+\frac{1}{t}} = 1;$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x = 1, \lim_{t \rightarrow +\infty} y = +\infty,$$

故直线 $x = 1$ 和 $y = 1$ 是曲线的渐近线. 又因

$$\lim_{t \rightarrow 0} x = \lim_{t \rightarrow 0} y = e,$$

故点 (e, e) 是曲线上的二重点. 由于

$$\frac{dy}{dt} = (1+t)^{1+\frac{1}{t}} \left[\frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \right],$$

$$\frac{dx}{dt} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \left[\frac{t - (1+t)\ln(1+t)}{t^2(1+t)} \right],$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 + \frac{t^2}{t - (1+t)\ln(1+t)} \right].$$

容易证明:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

并且当 $t \in (0, +\infty)$, 从而 $x \in (1, e)$ 时, 恒有 $\frac{dy}{dx} < 0$.

事实上, 设

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t],$$

则 $g(0) = 0$, 并且容易证明

$$g'(t) = 2t - \ln(1+t) > 0,$$

$$(1+t)\ln(1+t) - t > 0.$$

从而, 有

$$g(t) = t^2 - [(1+t)\ln(1+t) - t] > 0,$$

即

$$\frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} > 1.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = (1+t) \left[1 - \frac{t^2}{(1+t)\ln(1+t) - t} \right] < 0.$$

由对称性知, 对于 $t \in (-1, 0)$, 也有 $\frac{dy}{dx} < 0$. 而当 $t = 0$ 时, 有

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = -1,$$

所以, 曲线始终是单调下降的, 并呈凹状, 无极值和拐点. 对应于 t 的变化范围 0 至 1.

计算几点坐标如下:

t	0	-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-0.9	$t \rightarrow -1$
x	e	3.05	3.59	4.50	7.48	12.9	$x \rightarrow +\infty$
y	e	2.44	2.15	1.84	1.49	1.29	$y \rightarrow 1$

综上所述, 曲线的图形由两部分组成, 一部分是直线, 另一部分是对称于直线 $y = x$ 的曲线(图 2.133).

1545. 作出曲线 $\text{ch}^2 x - \text{ch}^2 y = 1$ 的图形.

解 显见曲线的图形关于两坐标轴是对称的, 故只须在第一象限 $x \geq 0, y \geq 0$ 范围内进行讨论. 考虑渐近线:

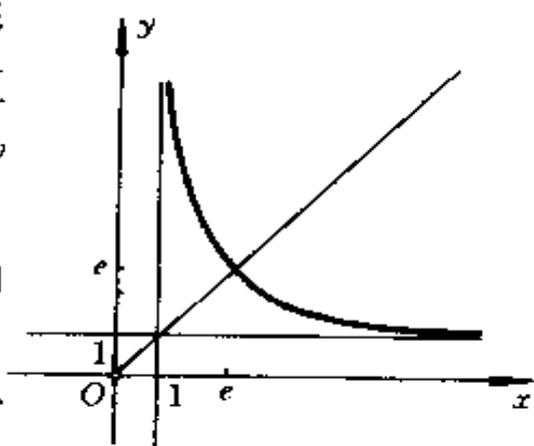


图 2.133

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} \left(\text{ch}x + \frac{\text{sh}x}{\sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} \text{ch}x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}x}{\sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\text{sh}^2 x + 1}{\text{sh}^2 x - 1}} = 1. \end{aligned}$$

为求 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x)$, 令

$$u = y - x = \ln(\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}) - x.$$

因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^u &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}x + \frac{\text{sh}x \text{ch}x}{\sqrt{\text{sh}^2 x - 1}}}{e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{ch}x(\text{sh}x + \sqrt{\text{sh}^2 x - 1})}{e^x \sqrt{\text{sh}^2 x - 1}} = 1, \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (y - x) = 0.$$

因此, 直线 $y = x$ 是原曲线的渐近线.

因为当 $y = 0$ 时 $\operatorname{ch}y$ 取最小值 $\operatorname{ch}y = 1$, 所以, x 必须满足

$$\operatorname{ch}^2 x \geq 2 \text{ 或 } |x| \geq \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88,$$

并且当 $y = 0$ 时, $|x| = \ln(1 + \sqrt{2})$.

曲线方程也可表示成

$$(\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y)(\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y) = 1,$$

从而令

$$\operatorname{ch}x - \operatorname{ch}y = t,$$

即

$$\operatorname{ch}x + \operatorname{ch}y = \frac{1}{t}.$$

所以, 对于第一象限部分的曲线方程可表示为

$$\begin{cases} \operatorname{ch}x = \frac{t + \frac{1}{t}}{2}, \\ \operatorname{ch}y = \frac{\frac{1}{t} - t}{2}, \end{cases} \quad (0 < t \leq \sqrt{2} - 1).$$

由原方程知

$$2\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x - 2\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y \cdot y' = 0$$

或

$$y' = \frac{\operatorname{ch}x\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}y\operatorname{sh}y} > 0.$$

因而, 曲线是单调上升的.

又由于

$$y'' = \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch} y \operatorname{sh} y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \cdot y' \cdot \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^2}$$

$$= \frac{(\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}{(\operatorname{ch} y \operatorname{sh} y)^3},$$

而

$$\begin{aligned} & (\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x) \operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh}^2 y - (\operatorname{sh}^2 y + \operatorname{ch}^2 y) \\ & \quad + \operatorname{ch}^2 x) \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x \\ &= \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{sh}^2 y - \operatorname{sh}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\ &= \operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) \\ &= (\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{ch}^2 x) (\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) \\ &= -(\operatorname{ch}^2 x \operatorname{ch}^2 y + \operatorname{sh}^2 x \operatorname{sh}^2 y) < 0. \end{aligned}$$

于是, $y'' < 0$ 恒成立. 所以, 曲线呈凸状.

计算几点的坐标如下:

t	$\sqrt{2} - 1$	0.4	0.3	0.2	0.1	$t \rightarrow 0$
x	$\ln(1 + \sqrt{2})$	0.92	1.07	1.61	2.31	$x \rightarrow +\infty$
y	0	0.33	0.98	1.53	2.28	$y \rightarrow +\infty$

曲线形状如图

2.134 所示. 作出下列用极坐标 (φ, r) ($r \geq 0$) 表示的函数的图形:

1546. $r = a + b \cos \varphi$

$(0 < a \leq b).$

解 当 $a = b$ 时,
 $r = a(1 + \cos \varphi),$
 这就是心脏线, 如

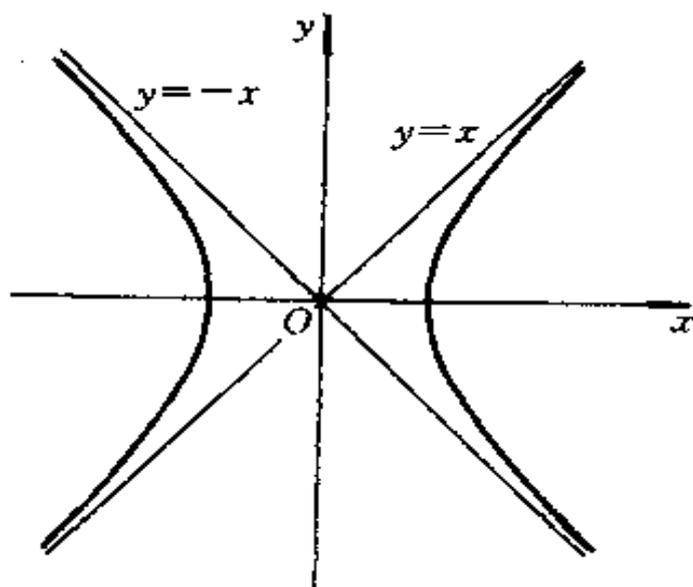


图 2.134

图 2.135 所示.

当 $0 < a < b$ 时, 其几何轨迹叫做蚶线, 由于 $r(-\varphi) = r(\varphi)$, 故图形关于极轴对称. 由于当 $r \geq 0$ 时, $|\varphi| \leq \alpha = \arccos\left[-\frac{a}{b}\right]$, 故当 $\varphi = 0$ 时 r 有极大值 $r = a + b$; 当 $\varphi = \pm\alpha$ 时 r 有边界的极小值 $r = 0$. 又由于 $r' = -b\sin\varphi < 0$, 故当 φ 由 0 变到 α 时, r 由 $a + b$ 变到 0.

当 $r < 0$ 时, $\alpha < |\varphi| \leq \pi$, 仿照上述讨论, r 由 0 下降到 $a - b$.

极点 O 为二重点, 如图 2.136 所示. 如果不考虑 $r < 0$, 则极点 O 不是二重点.

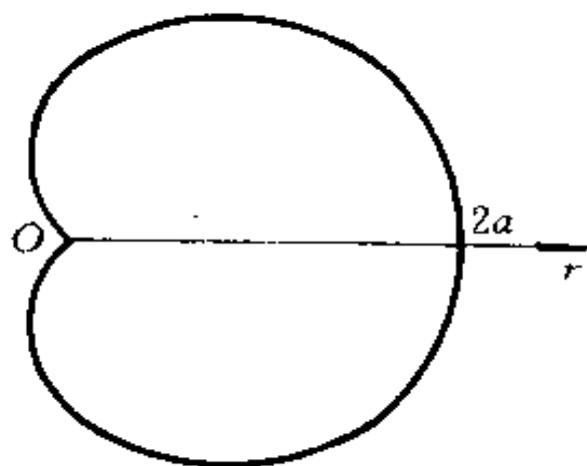


图 2.135

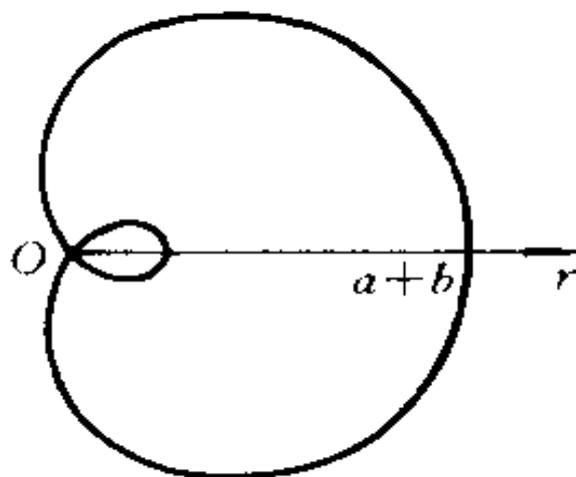


图 2.136

1547. $r = a\sin 3\varphi$ ($a > 0$).

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数.

函数的存在域为:

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}; \quad \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi; \quad \frac{4\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

为此, 只要讨论 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ 即可.

$$r' = 3a \cos 3\varphi \begin{cases} > 0, \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right), \\ < 0, \varphi \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right). \end{cases}$$

故当 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ 时 r

有极大值 $r = a$; 当 $\varphi = 0$ 及 $\frac{\pi}{3}$ 时, r 有极小值 $r = 0$.

射线 $\varphi = \frac{\pi}{6}, \varphi = \frac{5\pi}{6}$ 及 $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ 为图形的三对称轴.

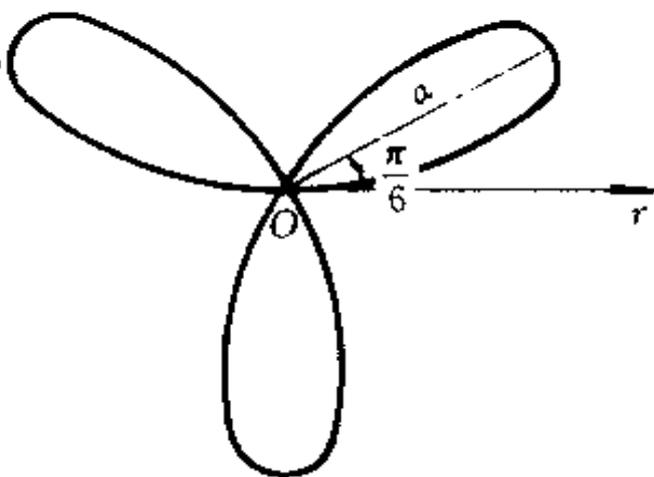


图 2.137

曲线在点 O 自交且为三重点, 整个

图形有三个形状相同的瓣, 如图 2.137 所示.

1548. $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} (a > 0).$

解 由于 $r\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) = r(\varphi)$, 故函数 r 是以 $\frac{2\pi}{3}$ 为周期的函数. 显然图形关于极轴对称.

函数的存在域为:

$$|\varphi| < \frac{\pi}{6} \quad \text{及} \quad \frac{\pi}{2} < |\varphi| < \frac{5\pi}{6}.$$

解 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow 1} r = \lim_{\varphi \rightarrow 1} \frac{a \operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow +\infty} r = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} = \lim_{\varphi \rightarrow +\infty} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \varphi} = 0,$$

从而曲线以 $\varphi = 1$ 为渐近线, 以极点为渐近点. 又

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= a \cdot \frac{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi}(\varphi - 1) - \operatorname{th} \varphi}{(\varphi - 1)^2} \\ &= a \cdot \frac{(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi}{(\varphi - 1)^2 \operatorname{ch}^2 \varphi}, \end{aligned}$$

当 $1 < \varphi < +\infty$ 时恒有 $(\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi < 0$. 事实上, 令

$$y(\varphi) = (\varphi - 1) - \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi.$$

则 $y(1) = -\frac{1}{2} \operatorname{sh} 2 < 0$, 而

$$y'(\varphi) = 1 - \operatorname{ch} 2\varphi < 0,$$

故有 $y(\varphi) \leq y(1) < 0$. 这就证明了当 $1 < \varphi < +\infty$ 时恒有 $\frac{dr}{d\varphi} < 0$, 即当 φ 增大时 r 单调减小.

为考察当 $r \rightarrow +\infty$ 时曲线的变化趋势, 令

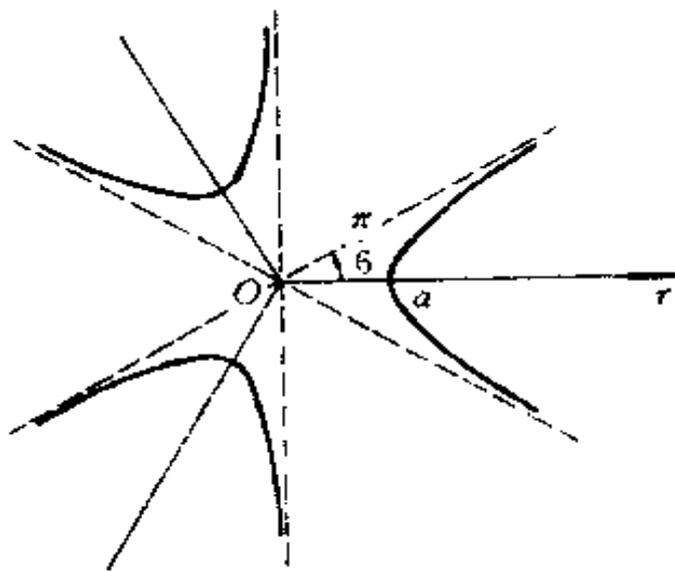


图 2.138

$$y_1 = x \operatorname{tg} l, y_2 = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi.$$

由于

$$\begin{aligned} y_2 - y_1 &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - x \operatorname{tg} l \\ &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \sin \varphi - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \operatorname{tg} l \\ &= a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1} \cos \varphi \operatorname{tg} l \\ &= a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} l}{\varphi - 1}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow l} (y_2 - y_1) &= \lim_{\varphi \rightarrow l} a \operatorname{th} \varphi \cos \varphi \frac{\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} l}{\varphi - 1} \\ &= \frac{a \operatorname{th} l}{\cos l}. \end{aligned}$$

于是, 在直角坐标系下, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线 $r = a \frac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$ 以直线

$$y = x \operatorname{tg} l + a \frac{\operatorname{th} l}{\cos l}$$

为渐近线.

计算几点的坐标如下表:

φ	1.2	1.4	$\frac{\pi}{2}$	1.6	1.8	2	2.5	π	5	$\frac{3\pi}{2}$	2π	10	$\varphi \rightarrow +\infty$
r	$4.15a$	$2.20a$	$1.59a$	$1.53a$	$1.17a$	$0.96a$	$0.65a$	$0.46a$	$0.24a$	$0.21a$	$0.18a$	$0.11a$	$r \rightarrow 0$

综上所述知, 曲线是螺状线, 如图 2.139 所示.

1550. $\cos \varphi = \frac{r-1}{r^2}.$

解 由方程容易判定, 曲线关于极轴对称. 因而只需在 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 范围内研究图形. 方程可化为

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi}.$$

由于必有 $1 - 4\cos\varphi \geq 0$, 故角 φ 的最小值应为

$$\varphi = \arccos \frac{1}{4} \approx$$

$75^\circ 30'$,

对应的 $r = 2$. 由 $r > 0$ 知曲线方程为

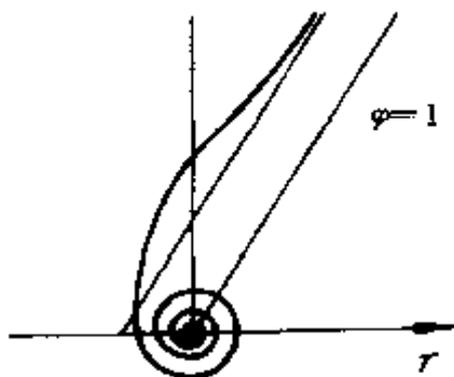


图 2.139

$$r = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \left(\arccos \frac{1}{4} \leq \varphi < \frac{\pi}{2} \right); \quad (1)$$

$$r = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} \quad (2)$$

首先研究方程(1)所表示的曲线的图形. 因为随着 φ 增加, $2\cos\varphi$ 减小, $\sqrt{1 - 4\cos\varphi}$ 增大, 因而 r 随 φ 增加而单调增加, 事实上, 易证 $\frac{dr}{d\varphi} > 0$. 又

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 + \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = +\infty,$$

所以, 当 $r \rightarrow +\infty$ 时有渐近线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$. 又由 $\cos\varphi =$

$\frac{r-1}{r^2}$, 得

$$x = \frac{r-1}{r},$$

故当 $r \rightarrow +\infty$ 时 $x \rightarrow 1$, 即当 $r \rightarrow +\infty$ 时, 曲线与直线 $r = \frac{1}{\cos\varphi}$ 无限接近(直角坐标系下 $x = 1$ 为渐近线).

再来研究拐点, 由

$$\frac{d\cos\varphi}{dr} = \frac{r^2 - 2r(r-1)}{r^4} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$-\sin\varphi \frac{d\varphi}{dr} = \frac{2-r}{r^3},$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{r^3}{r-2}\sin\varphi,$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{d^2r}{d\varphi^2} &= \frac{3r^2(r-2) - r^3}{(r-2)^2} \frac{dr}{d\varphi} \sin\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi \\ &= \frac{r^3(2r^3 - 6r^2)}{(r-2)^3} \sin^2\varphi + \frac{r^3}{r-2} \cos\varphi \\ &= \frac{r^5(2r-6)}{(r-2)^3} \left[1 - \frac{(r-1)^2}{r^4}\right] + \frac{r^3}{r-2} \cdot \frac{r-1}{r^2} \\ &= \frac{r\{(2r-6)[r^4 - (r-1)^2] + (r-2)^2(r-1)\}}{(r-2)^3}. \end{aligned}$$

由 $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2} = 0$ 得 $2r^4 - 3r^2 + 8r - 6 =$

0, 经判别知: 拐点的 r 介于 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 和 1 之间.

再来研究方程(2). 由于

$$\lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} r = \lim_{\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}}{2\cos\varphi} = 1,$$

事实上, 由 $\cos\varphi = \frac{r-1}{r^2}$ 也可得: 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $r = 1$. 因

而点 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 是曲线上的点. 又

$$\begin{aligned} \frac{dr}{d\varphi} &= \frac{1}{(2\cos\varphi)^2} \left[(1 - 4\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}} (-2\sin\varphi) \right. \\ &\quad \left. \cdot (2\cos\varphi) + 2\sin\varphi(1 - \sqrt{1 - 4\cos\varphi}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sin\varphi[(1 - \sqrt{1-4\cos\varphi})\sqrt{1-4\cos\varphi} - 2\cos\varphi]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}} \\
&= \frac{2\sin\varphi[\sqrt{1-4\cos\varphi} - (1 - 2\cos\varphi)]}{(2\cos\varphi)^2\sqrt{1-4\cos\varphi}}. \quad (1)
\end{aligned}$$

容易证明： $f(\varphi) = \sqrt{1-4\cos\varphi} - (1 - 2\cos\varphi) < 0$. 事实上，有

$$f'(\varphi) = 2\sin\varphi\left(\frac{1}{\sqrt{1-4\cos\varphi}} - 1\right) < 0 \quad \text{且} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

又因当 $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 时，(1) 的其它因子均为正，故得 $\frac{dr}{d\varphi} < 0$ ，即 r 随 φ 的增加而单调下降，并且当 $\varphi = \pi$ 时达到极小值

$$r = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

事实上， $\frac{dr}{d\varphi}$ 经过 $\varphi = \pi$ 从负变到正。

计算几点的坐标列表如下：

φ	$75^\circ 30'$	$76^\circ 5'$	$77^\circ 10'$	81°	84°	87°	$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{2} + 0$	90°	105°	140°	155°	180°
r	2	2.5	3	5	8.85	19.7	$r \rightarrow +\infty$	1	0.81	0.66	0.63	0.62

曲线如图 2.140 所示。

作出下列曲线族的图表(a 表参变量)：

1551. $y = x^2 - 2x + a$.

解 将方程变形：

$$y - (a - 1) = (x - 1)^2.$$

作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + (a - 1), \end{cases}$$

即得标准方程

$$y' = x'^2,$$

此为向上凹的抛物线.

当 $a > 1$ 时, 抛物线的顶点位于第一象限; 当 $a < 1$ 时, 抛物线的顶点位于第四象限; 当 $a = 1$ 时, 抛物线的顶点在 $(1, 0)$. 不论 a 为何值, 此抛物线族的顶点位于直线 $x = 1$ 上. 如图 2.141 所示.

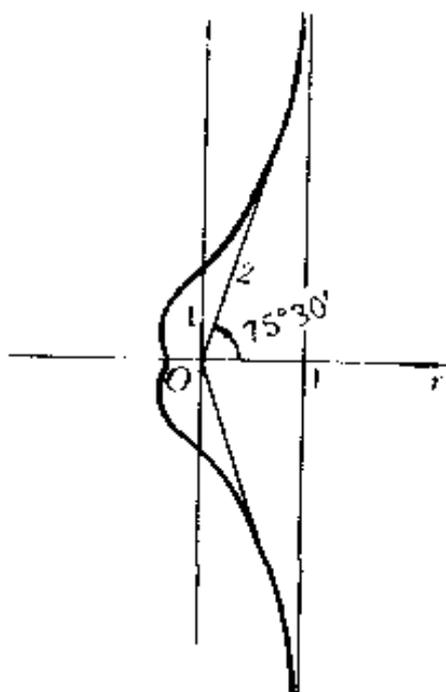


图 2.140

1552. $y = x + \frac{a^2}{x}$.

解 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$. 当 $a \neq 0$ 时为双曲线族, 其图形可由

$$y = x \text{ 和 } y = \frac{a^2}{x} \text{ 相}$$

加而成, 它们均以直线

$y = x$ 和 $x = 0$ 为渐近线.

当 $x = |a|$ 时, 有极小值 $y = 2|a|$; 当 $x = -|a|$ ($a \neq 0$) 时有极大值

$y = -2|a|$. 如图 2.142 所示.

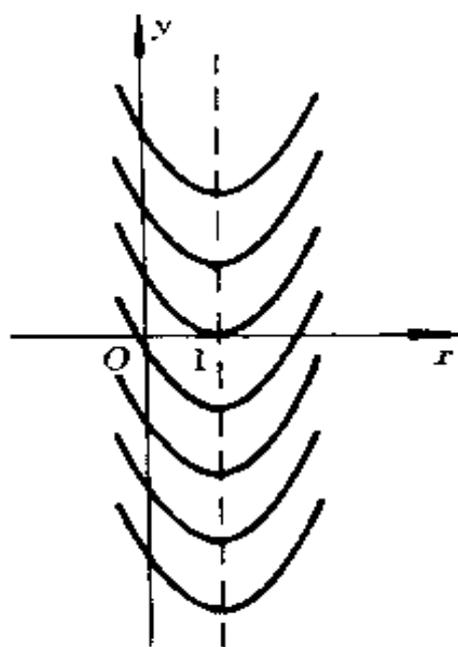


图 2.141

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1-x^2)}$.

解 $y - x = \pm \sqrt{a(1-x^2)}$, 即 $(y-x)^2 + ax^2 = a$.

作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -x + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程变形为

$$\xi_1^2 + a\xi_2^2 = a.$$

当 $0 < a < +\infty$

时为椭圆族; 当 $-\infty$

$< a < 0$ 时为双曲线

族; 当 $a = 0$ 时为直线 $y = x$.

全族曲线均通过点 $(-1, -1)$ 及 $(1, 1)$.

$$y' = 1 \mp \frac{ax}{\sqrt{a(1-x^2)}}. \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x^2 = \frac{1}{1+a},$$

则 $1+a > 0$ 或 $a > -1$.

$$y'' = \mp \frac{a^2}{[a(1-x^2)]^{\frac{3}{2}}},$$

当 $y \geq x$ 时上式取负号; 当 $y \leq x$ 时上式取正号.

于是, 当 $y \geq x$ 时, 有

$$(1) \text{ 若 } a > 0, \text{ 则当 } x = \frac{1}{\sqrt{1+a}} \text{ 时, 由于 } y'' < 0,$$

故取得极大值 $y = \sqrt{1+a}$.

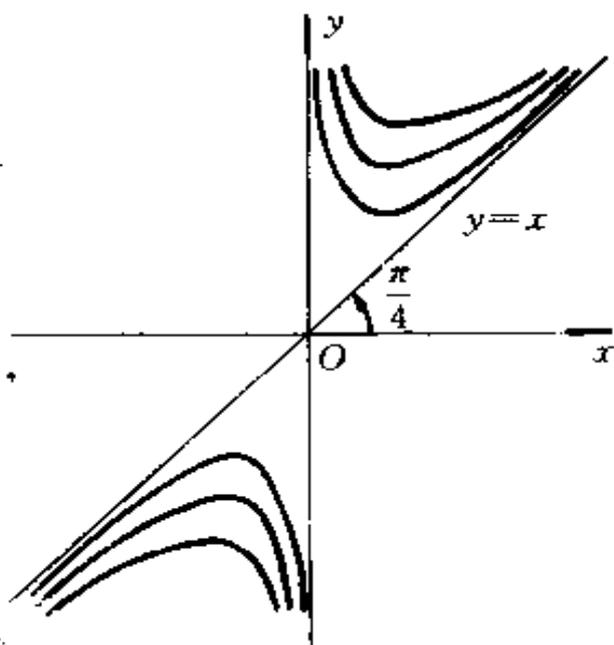


图 2.142

若 $-1 < a < 0$, 则当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时也取得极

大值 $y = -\sqrt{1+a}$.

当 $x = \mp 1$ 时取得边界极小值 $y = \mp 1 (a \neq 0)$.

(2) 由于 $y'' < 0$, 故曲线是凸的.

当 $y \leq x$ 时, 有

(1) 若 $a > 0$, 当 $x = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y = -\sqrt{1+a}.$$

若 $-1 < a < 0$, 当 $x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}$ 时有极小值

$$y = \sqrt{1+a}.$$

当 $x = \mp 1$ 时取得边界极大值 $y = \mp 1$.

(2) 由于 $y'' > 0$, 故曲线是凹的.

此外, 当 $a < 0$ 时, 曲线有渐近线, 容易求得它们为 $y = (1 \pm \sqrt{-a})x$.

椭圆族、双曲线族与直线已为大家所熟悉, 故图略.

1554. $y = \frac{x}{2} + e^{-ax}$.

解 原方程可变形为

$$y - \frac{x}{2} = e^{-ax}.$$

因此, 若作仿射变换

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{x}{2} + y, \\ \xi_2 = x, \end{cases}$$

则原方程化成标准形式

$$\xi_1 = e^{-ax}2.$$

当 $a \neq 0$ 时, 表示一指数曲线族; 当 $a = 0$ 时, 表示直线 $y = 1 + \frac{x}{2}$.

全族曲线均通过点 $(0, 1)$.

$$y' = \frac{1}{2} - ae^{-ax}. \text{ 令 } y' = 0 \text{ 得}$$

$$x = \frac{1}{a} \ln 2a.$$

$y'' = a^2 e^{-ax} > 0$, 故曲线呈凹状.

若 $a > 0$, 则当 $x = \frac{1}{a} \ln 2a$ 时有极小值

$$y = \frac{1}{2a}(1 + \ln 2a);$$

若 $a \leq 0$, 则因 $y' > 0$, 故函数 y 是增大的.

现求渐近线: 当 $a > 0$ 时,

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{xe^{ax}} \right) = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (y - kx) = 0,$$

故渐近线为 $y = \frac{x}{2}$.

同法求得当 $a < 0$ 时, 渐近线也为 $y = \frac{x}{2}$, 然此时应考虑 $x \rightarrow -\infty$.

如图 2.143 所示.

1555. $y = xe^{-\frac{x}{a}}$.

解 全族曲线均通过原点.

$$y' = e^{-\frac{x}{a}} \left(1 - \frac{x}{a} \right). \text{ 令 } y' = 0, \text{ 得}$$

$$x = a.$$

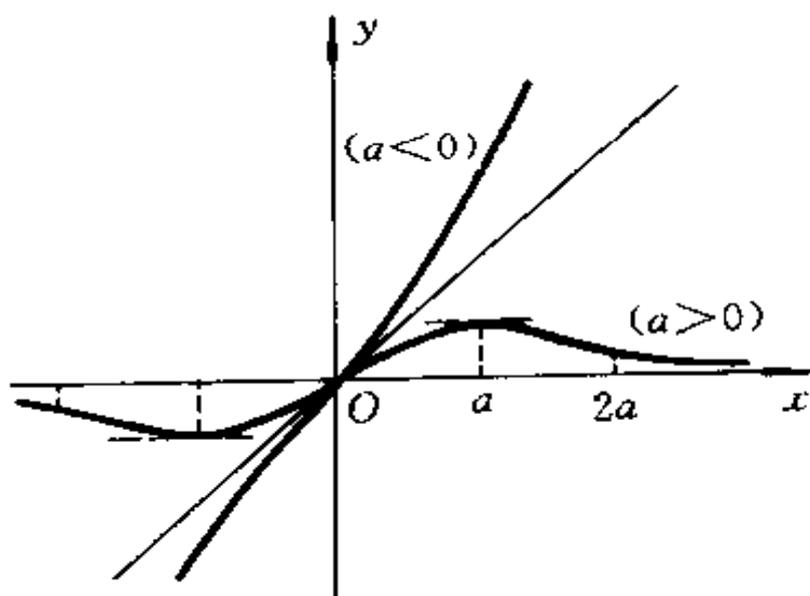


图 2.144

证 如果 x_0 为 $F(x)$ 的极大值点, 则在 x_0 点附近有

$$F(x_0) > F(x) \quad (x \neq x_0) \quad (*)$$

即 $Cf^2(x_0) > Cf^2(x)$. 根据 $C > 0$, 以及 $f(x)$ 不为负, 必有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \text{ 在 } x_0 \text{ 附近, 且 } x \neq x_0)$$

这就证明了 x_0 点也为 $f(x)$ 的极大值点. 反之, 若 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点, 则在 x_0 附近, 有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0).$$

于是,

$$Cf^2(x_0) > Cf^2(x),$$

即 $(*)$ 式成立. 这就证明了 x_0 点也为 $F(x)$ 的极大值点. 同样道理, 若 x_0 为极小值点时, 也可证明 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的极小值点.

1557. 证明: 若当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 单调增加,

则函数

$$f(x) \text{ 与 } \varphi(f(x))$$

有相同的极值点.

证 设 x_0 点为 $f(x)$ 的极值点, 例如是极大值点, 则在 x_0 点附近有

$$f(x_0) > f(x) \quad (x \neq x_0). \quad (1)$$

因为函数 $\varphi(x)$ 为单调增加的, 故也有

$$\varphi(f(x_0)) > \varphi(f(x)) \quad (x \neq x_0). \quad (2)$$

这就证明了 x_0 点也是 $\varphi(f(x))$ 的极大值点. 反之也对, 因为由 (2), 从 $\varphi(x)$ 的单调增加性质知必有 (1). 另一种情形, 即设 x_0 点是极小值点时, 也可类似获证. 于是, 原命题得证.

1558. 二正数的和等于常数 a , 求此二正数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 相乘积的极大值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们须求函数

$f(x) = x^m(a-x)^n$ ($0 < x < a$) 的极大值. 由于

$f'(x) = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[ma - (m+n)x]$, 故若令

$f'(x) = 0$, 即得 $x = \frac{ma}{m+n}$. 当 $0 < x < \frac{ma}{m+n}$ 时,

$f'(x) > 0$; 当 $a > x > \frac{ma}{m+n}$ 时 $f'(x) < 0$. 因此, 当

$x = \frac{ma}{m+n}$ 时, $f(x)$ 有极大值

$$f\left(\frac{ma}{m+n}\right) = \frac{a^{m+n}m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}.$$

1559. 二正数的乘积等于常数 a , 求此二数的 m 次幂与 n 次幂 ($m > 0, n > 0$) 之和的极小值.

解 设一正数为 x , 则按题设, 我们须求函数

$$f(x) = x^m + \left(\frac{a}{x}\right)^n \quad (0 < x < +\infty)$$

的极小值.

由于

$$f'(x) = \frac{mx^{m+n} - na^n}{x^{n+1}}.$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$. 显然, 在此点的左边, $f'(x) < 0$, 而在此点的右边, 有 $f'(x) > 0$, 故知当 $x = \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}$ 时, 函数 $f(x)$ 有极小值

$$f\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{m+n}} a^{\frac{n}{m+n}}\right] = (m+n) \left(\frac{a^{mn}}{m^m n^n}\right)^{\frac{1}{m+n}}.$$

1560. 取怎样的数为对数之底时有一个数, 它本身和它的对数相等?

解 解法一:

设所求之数为 a , 则对于 $0 < a < 1, 1 < a < +\infty$ 及 $x > 0$ 时

$$\log_a x = x$$

或

$$a^x = x. \quad (1)$$

问题即为 a 取怎样的数, 上式才成立.

为研究使(1)式成立的 a 及相应的 x 的取值情况. 我们在直角坐标系内取曲线

$$\begin{cases} y = a^x, \\ y = x. \end{cases} \quad (2)$$

在交点处,方程(1)与(2)等价(图 2.145)

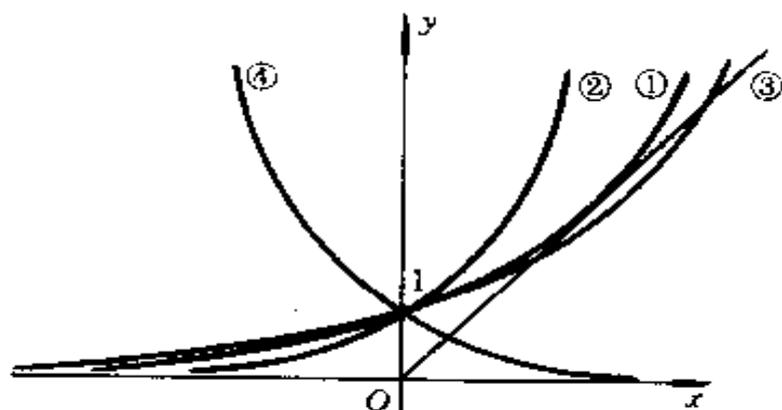


图 2.145

注意,指数曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 是否有公共点,就看其差

$$\Delta = f(x) = a^x - x$$

有无使 $\Delta = f(x) = 0$ 的点 x .

设 $y = a_0^x$ 与 $y = x$ 相切于一点 $(x_0, a_0^{x_0})$, 此时 $f'(x_0) = 0$,

即有

$$a_0^{x_0} \ln a_0 - 1 = 0. \quad (3)$$

从 $\Delta = 0$ 知有(1),即

$$a_0^{x_0} - x_0 = 0. \quad (4)$$

由(3)和(4)可解得

$$a_0 = e^{\frac{1}{x_0}}, x_0 = e. \quad (5)$$

当 $a > a_0$ 时,易见 $y = a^x$ 比 $y = a_0^x$ 远离直线 $y = x$. 故此时无交点. 实际上,注意到有 $a_0^x \geq x$, 并记 $g(a, x) = a^x$, 对于 $x \geq 0$, 只要 $a > a_0$ 就有 $a^x > a_0^x \geq x$, 也即 $g(a_0, x)$ 是 $g(a, x)$ 的极小值. 故当 $a > a_0$ 时, $y = a$ 与 $y =$

x 无交点. 而当 $0 < a \leq a_0$ 时(且要求 $a \neq 1$), 此时(2) 有解, 从而(1) 有解. 如图 2.145 中曲线 ①、②、③、④ 所示.

解法二:

设 $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$, 则由 $f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0$ 得 $x = e$. 显然当 x 通过 e 时 $f'(x)$ 由正变负, 故知 $f(e) = e^{\frac{1}{e}} \approx 1.445$ 为极大值. 从而 $0 < x^{\frac{1}{x}} \leq e^{\frac{1}{e}}$.

因此, 当 $0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ 且 $a \neq 1$ 时, 有 $\log_a x = x$.

1561. 从面积为 S 的一切矩形中, 求其周界为最小者.

解 设矩形的一边长为 x , 则另一边长为 $\frac{S}{x}$, 周界长为

$$f(x) = 2 \left(x + \frac{S}{x} \right),$$

按题设, 我们须求其最小值.

由于 $f'(x) = 2 \left(1 - \frac{S}{x^2} \right)$, 故令 $f'(x) = 0$, 即得 $x = \sqrt{S}$. 由 $f''(\sqrt{S}) > 0$ 知此时 $f(x)$ 有极小值. 又由于极值的唯一性, 故此也为最小值. 因此, 所求的矩形为以 \sqrt{S} 为边的正方形.

1562. 若直角三角形的一直角边与斜边之和为常数, 求有最大面积的直角三角形.

解 设一直角边为 x , 则按题设, 另一直角边为 $\sqrt{(a-x)^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - 2ax}$, 故直角三角形的面积为

$$S(x) = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - 2ax}.$$

利用极值的解法得: 当 $x = \frac{a}{3}$ 时, $S(x)$ 值为极大值. 又

由于极值的唯一性,故知当 $x = \frac{a}{3}$ 时, $S(x)$ 取最大值.

此时斜边为 $a - x = a - \frac{a}{3} = \frac{2}{3}a$, 它为直角边的两倍,故此三角形的两锐角分别为 30° 及 60° .

本题也可用 1556 题结论求得结果.事实上,令 $F(x) = 4S^2(x)$, 则 $F(x)$ 与 $S(x)$ 有相同的极值点,对 $F(x)$ 求极值可得同样的结果.

1563. 当有怎样的长度大小时,容积为 V 的圆柱形闭合罐子有最小的表面积?

解 设底半径为 x , 则高为 $H = \frac{V}{\pi x^2}$, 故圆柱的表面积为

$$S(x) = 2\pi x \cdot \frac{V}{\pi x^2} + 2\pi x^2.$$

由于,

$$S'(x) = \frac{4\pi x^3 - 2V}{x^2},$$

令 $S'(x) = 0$ 得 $x = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 由 $S''\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) > 0$ 知, 当 $x =$

$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时, $S(x)$ 有极小值

$$s\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right) = \sqrt[3]{54\pi V^2}.$$

由于只有一个极值,故知当底半径为 $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, 而高为 $\frac{V}{\pi x^2} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ 时有最小面积 $\sqrt[3]{54\pi V^2}$.

1564. 在不超过半圆的已知弓形内嵌入有最大面积的矩形.

解 由图 2.146 知,不妨设圆的半径为单位长度,则

$$OA = \cos \varphi$$

$$BC = \sin \alpha,$$

$$BA = \cos \alpha - \cos \varphi.$$

从而矩形面积为

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= 2BC \cdot BA \\ &= 2\sin \alpha (\cos \alpha - \cos \varphi) \\ &= \sin 2\alpha - 2\sin \alpha \cos \varphi. \end{aligned}$$

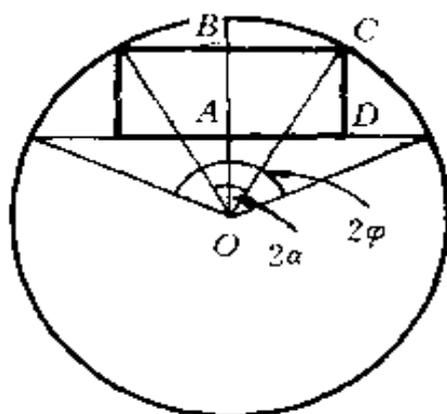


图 2.146

而

$$S'(\alpha) = 2\cos 2\alpha - 2\cos \alpha \cos \varphi = 4\cos^2 \alpha - 2\cos \alpha \cdot \cos \varphi - 2, \text{ 令 } S'(\alpha) = 0, \text{ 可得}$$

$$\cos \alpha = \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}.$$

注意到 $\alpha \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $\cos \varphi \leq \cos \alpha$, 于是有

$$\begin{aligned} S''(\alpha) &= -4\sin 2\alpha + 2\cos \varphi \sin \alpha \leq -4\sin 2\alpha \\ &\quad + 2\cos \alpha \sin \alpha = -3\sin 2\alpha < 0. \end{aligned}$$

这就说明

$$\alpha = \arccos \frac{\cos \varphi + \sqrt{\cos^2 \varphi + 8}}{4}$$

是使 $S(\alpha)$ 达到极大值的点, 也就是说此时弓形内所对应的矩形面积最大.

1565. 在椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

中, 嵌入有最大面积而边平行于椭圆轴的矩形.

解 如图 2.147 所示.

由于点 $M(x, y)$ 在椭圆上, 故适合方程

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ 解之,}$$

$$\text{得 } y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

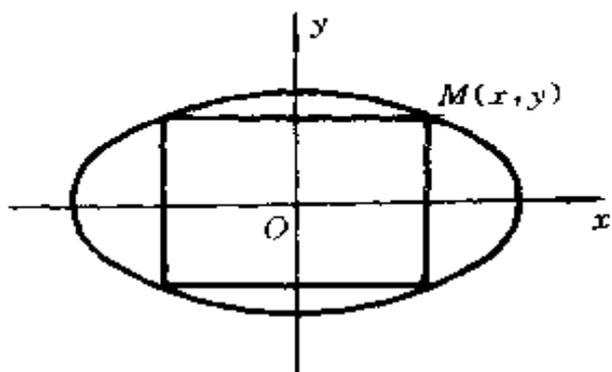


图 2.147

于是按题设, 求函数

$$f(x) = 4x \cdot \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

当 x 为何值时最大, 记 $C = \frac{a^2}{16b^2}$, 利用 1556 题的结果,

$f(x)$ 与 $F(x) = Cf^2(x) = x^2(a^2 - x^2)$ 有相同的极值,

但 $F'(x) = 4x\left(\frac{a^2}{2} - x^2\right)$, 令 $F'(x) = 0$, 则 $x = 0$ (不

合), $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$. 当 $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 时, 有 $F''\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = -4a^2 <$

0, 故 $f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) = 2ab$ 为最大面积. 此时矩形的边为 a

$\sqrt{2}$ 和 $b\sqrt{2}$.

1566. 在底边为 b 及高为 h 的三角形中, 嵌入有最大周长的矩形, 研究此问题有解的可能性.

解 如图 2.148 所示.

$AB = b, CD = h$. 由于 $\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$, 故 $x = \frac{b}{h}(h-y)$.

矩形的周长为

$$p = 2\left[y + \frac{b}{h}(h-y)\right] = 2\left[\left(1 - \frac{b}{h}\right)y + b\right].$$

显见,当 $h = b$ 时,周长 $p = 2b$ 为一定值;当 $h > b$ 时, $p'_y > 0$, p 单调增加,故当 $y = h$ 时有边界的极大值 $p = 2h$;当 $h < b$ 时, $p'_y < 0$, p 单调减少,理论上当 $y = 0$ 时有边界的极大值

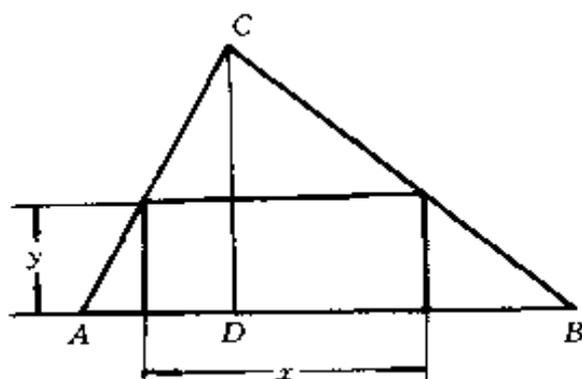


图 2.148

$2b$. 但嵌入的矩形不允许边长为 0, 故当 $h < b$ 时嵌入的矩形有最大周长者是不存在的, 即此时问题无解.

1567. 从直径为 d 的圆形树干切出横断面为矩形的梁, 此矩形的底等于 b , 高等于 h . 若梁的强度与 bh^2 成比例, 问梁的尺寸为如何时, 其强度最大?

解 由于 $b^2 + h^2 = d^2$, 故 $h^2 = d^2 - b^2$, 从而考虑函数

$$f(b) = b(d^2 - b^2)$$

何时取最大值.

$$\text{由于 } f'(b) = d^2 - 3b^2, \text{ 令 } f'(b) = 0 \text{ 得 } b = \frac{d}{\sqrt{3}}.$$

此时 $h = d\sqrt{\frac{2}{3}}$, $f''(b) = -6b < 0$, $f(b)$ 的值最大. 因

此, 所求的矩形的底为 $\frac{d}{\sqrt{3}}$, 高为 $d\sqrt{\frac{2}{3}}$.

1568. 于半径为 R 的半球中, 嵌入有最大体积的底为正方形的直角平行六面体.

解 设底边之一半为 x , 则按题设, 有

$$2x^2 + y^2 = R^2,$$

解 如图 2.149, 圆柱的表面积为

$$\begin{aligned} S &= 2\pi(R\cos\varphi)^2 + 4\pi(R\cos\varphi) \cdot (R\sin\varphi) \\ &= \pi R^2(1 + \cos 2\varphi) + 2\pi R^2 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

由 $\frac{dS}{d\varphi} = 0$ 得 $\operatorname{tg} 2\varphi = 2$. 记其解为

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1} 2, \varphi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right). \text{ 于是}$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos 2\varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}. \text{ 又}$$

由于

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2 S}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_0} &= -4\pi R^2 [2\sin 2\varphi \\ &\quad + \cos 2\varphi]_{\varphi=\varphi_0} \end{aligned}$$

$$= -4\pi R^2 \left[2\sin 2\varphi_0 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_0 \right]$$

$$= -10\pi R^2 \sin 2\varphi_0 < 0,$$

故此时表面积最大, 且最大表面积为

$$\begin{aligned} S &= \pi R^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) + 2\pi R^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ &= \pi R^2 (1 + \sqrt{5}) \\ &\approx 0.81 \times 4\pi R^2. \end{aligned}$$

从而, 球内嵌入圆柱的最大表面积约为球面面积的 81%.

1571. 对于已知球作具有最小体积的外切圆锥.

解 设外切圆锥的底半径为 x , 高为 h , 球的半径为 R ,

则可求得 $h = \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2}$, 于是, 外切圆锥的体积为

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 \cdot \frac{2Rx^2}{x^2 - R^2} = \frac{2}{3} \pi R \cdot \frac{x^4}{x^2 - R^2} (x > 0).$$

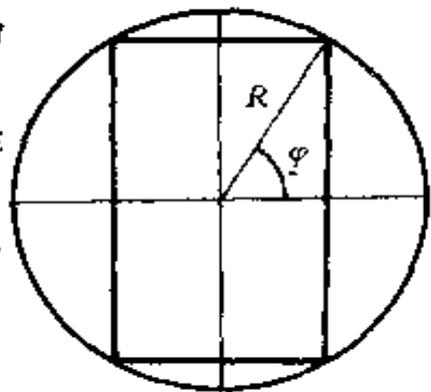


图 2.149

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

由

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4}{3}\pi R \cdot \frac{x^3(x^2 - 2R^2)}{(x^2 - R^2)^2} = 0,$$

得 $x = \sqrt{2}R$, 经检验知此时体积最小, 且

$$V|_{x=\sqrt{2}R} = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi R^3.$$

所以, 外切圆锥的最小体积是球体体积的二倍.

1572. 求母线为 l 的圆锥之最大体积.

解 设圆锥的底半径为 r , 高为 h , 则 $h = \sqrt{l^2 - r^2}$, 圆锥的体积为 $\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{l^2 - r^2}$. 按题设, 只须求函数

$$f(r) = r^3(l^2 - r^2)$$

的最大值.

由于 $f'(r) = 4l^2r^3 - 6r^5$, 令 $f'(r) = 0$ 得 $r = \sqrt{\frac{2}{3}}l$, 此时 $h = \frac{l}{\sqrt{3}}$. 经判别可知 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right)$ 最大, 因此所求的圆锥的底半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}l$, 高为 $\frac{l}{\sqrt{3}}$, 体积最大值为 $f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}l\right) = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$.

1573. 于顶角为 2α 与底半径为 R 的直圆锥中, 嵌入有最大表面积的圆柱.

解 设 r 及 h 为圆柱的底半径与高, H 为圆锥的高(图 2.150). 按题设, 只须求函数

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

的最大值. 由于 $\frac{MN}{BD} = \frac{AN}{AD}$, 即 $\frac{h}{H} = \frac{R-r}{R}$, 故 $h =$

费定晖
郭大钧

周学圣编演
邵品琮主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析 习题集题解

山东科学技术出版社



Б. И. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(三)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б.П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (3)/费定晖
编. - 2版. - 济南:山东科学技术出版社,(2001.3重印)

ISBN 7-5331-0101-4

I. Б… II. 费… III. 数学分析-高等学校-解题 IV. 0
17-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43955 号

Б.П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(三)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琼 主审

山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路 16 号 邮编:250002)
山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路 16 号 电话:2064651)
济南申汇印务有限责任公司印刷

787mm×1092mm 32开本 18.875印张 403千字

2001年3月第2版第10次印刷

印数:229 301-231 300

ISBN 7-5331-0101-4

0·7 定价:17.70元

目 录

第三章 不定积分	1
§ 1. 最简单的不定积分	1
§ 2. 有理函数的积分法	82
§ 3. 无理函数的积分法	137
§ 4. 三角函数的积分法	197
§ 5. 各种超越函数的积分法	245
§ 6. 函数的积分法的各种例子	275
第四章 定积分	309
§ 1. 定积分作为和的极限	309
§ 2. 利用不定积分计算定积分的方法	336
§ 3. 中值定理	403
§ 4. 广义积分	417
§ 5. 面积的计算法	474
§ 6. 弧长的计算法	498
§ 7. 体积的计算法	512
§ 8. 旋转曲面表面积的算法	534
§ 9. 矩的计算法, 重心的坐标	546
§ 10. 力学和物理学中的问题	557
§ 11. 定积分的近似算法	570

第三章 不定积分

§ 1. 最简单的不定积分

1° 不定积分的概念 若 $f(x)$ 为连续函数及 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

式中 C 为任意常数.

2° 不定积分的基本性质:

$$(a) d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx; (b) \int d\Phi(x) = \Phi(x) + C;$$

$$(b) \int Af(x)dx = A\int f(x)dx \quad (A = \text{常数});$$

$$(r) \int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

3° 最简积分表:

$$I. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$II. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C (x \neq 0);$$

$$III. \int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg}x + C, \\ -\operatorname{arctg}x + C; \end{cases}$$

$$IV. \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C;$$

$$V. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \operatorname{arcsin}x + C, \\ -\operatorname{arccos}x + C; \end{cases}$$

$$VI. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C;$$

$$\text{VI. } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1); \int e^x dx = e^x + C;$$

$$\text{VII. } \int \sin x dx = -\cos x + C;$$

$$\text{VIII. } \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$\text{IX. } \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$

$$\text{X. } \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$\text{XI. } \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$

$$\text{XII. } \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$

$$\text{XIII. } \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$$

$$\text{XIV. } \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

4° 积分的基本方法

(a) 引入新变数法 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则 $\int f(u) du = F(u) + C$, 式中 $u = \varphi(x)$.

(b) 分项积分法 若

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

则 $\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$

(c) 代入法 假设

$x = \varphi(t)$, 式中 $\varphi(t)$ 及其导函数 $\varphi'(t)$ 为连续的,

则得 $\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$

(d) 分部积分法 若 u 和 v 为 x 的可微分函数,

则 $\int u dv = uv - \int v du.$

利用最简积分表, 求出下列积分*:

$$1628. \int (3 - x^2)^3 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (3 - x^2)^3 dx &= \int (27 - 27x^2 + 9x^4 - x^6) dx \\ &= 27x - 9x^3 + \frac{9}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + C. \end{aligned}$$

$$1629. \int x^2(5 - x)^4 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2(5 - x)^4 dx &= \int (625x^2 - 500x^3 + 150x^4 - 20x^5 + x^6) dx \\ &= \frac{625}{3}x^3 - 125x^4 + 30x^5 - \frac{10}{3}x^6 + \frac{1}{7}x^7 + C. \end{aligned}$$

$$1630. \int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int (1 - x)(1 - 2x)(1 - 3x) dx &= \int (1 - 6x + 11x^2 - 6x^3) dx \\ &= x - 3x^2 + \frac{11}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^4 + C. \end{aligned}$$

$$1631. \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx.$$

$$\text{解} \quad \int \left(\frac{1-x}{x} \right)^2 dx = \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 \right) dx$$

* 本章在叙述习题及其解答过程中, 凡出现的函数, 无论是被积函数还是原函数, 均默认是在有意义的定义域上进行的. 例如最简积分表中 I 里当 $n \leq -2$ 时, 要求 $x \neq 0$; N 中要求 $|x| \neq 1$; V 中要求 $|x| < 1$; 以及 VI 中, 当取负号时要求 $|x| > 1$; 等等, 就未加声明. 在题解中也有相当多的类似情况. 因此, 如无特别声明, 在一般情形下, 这些定义域是很容易被读者确定的, 此处就不再予以一一指明.

——《题解》编者注.

$$= -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + C.$$

1632. $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx.$

解 $\int \left(\frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2} + \frac{a^3}{x^3} \right) dx = a\ln|x| - \frac{a^2}{x} - \frac{a^3}{2x^2} + C.$

1633. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx.$

解 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx$

$$= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C.$$

1634. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 1}{\sqrt[4]{x}} dx$

$$= \int (x^{\frac{1}{4}} - 2x^{\frac{5}{12}} + x^{-\frac{1}{4}}) dx$$

$$= \frac{4}{5}x\sqrt[4]{x} - \frac{24}{17}x^{\frac{17}{12}} + \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

1635. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx.$

解 $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}} dx$

$$= \int (x^{-\frac{4}{3}} - 3x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}) dx$$

$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \left(1 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{8}x^3 \right) + C.$$

1636. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx &= \int (x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{5}{4}}) dx \\ &= \frac{4}{7} x^{\frac{7}{4}} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C = \frac{4(x^2 + 7)}{7 \sqrt[4]{x}} + C. \end{aligned}$$

$$1637. \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} dx &= \int (2 - 2\sqrt[6]{72}x^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{9}x^{-\frac{1}{3}}) dx \\ &= 2x - \frac{12}{5} \sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2} \sqrt[3]{9x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1638. \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} dx &= \int \frac{x^2 + \frac{1}{x^2}}{x^3} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^5}\right) dx = \ln|x| - \frac{1}{4x^4} + C. \end{aligned}$$

$$1639. \int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2}{1+x^2} dx &= \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx \\ &= x - \arctg x + C. \end{aligned}$$

$$1640. \int \frac{x^2}{1-x^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1-x^2} dx = \int \left(-1 + \frac{1}{1-x^2}\right) dx$$

$$= -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$$

1641. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx.$

解 $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} dx = \int \left(1 + \frac{4}{x^2 - 1} \right) dx$
 $= x + 2 \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$

1642. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^4}} dx$
 $= \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) dx$
 $= \arcsin x + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

1643. $\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}} dx$
 $= \int \left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx$
 $= \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2+1}} \right| + C.$

1644. $\int (2^x + 3^x)^2 dx.$

解 $\int (2^x + 3^x)^2 dx = \int (4^x + 2 \cdot 6^x + 9^x) dx$
 $= \frac{4^x}{\ln 4} + 2 \cdot \frac{6^x}{\ln 6} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$

$$1645. \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{2^{x+1} - 5^{x-1}}{10^x} dx &= \int \left[2 \left(\frac{1}{5} \right)^x - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] dx \\ &= -\frac{2}{\ln 5} \left(\frac{1}{5} \right)^x + \frac{1}{5 \ln 2} \left(\frac{1}{2} \right)^x + C. \end{aligned}$$

$$1646. \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx &= \int (e^{2x} - e^x + 1) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + C. \end{aligned}$$

$$1647. \int (1 + \sin x + \cos x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (1 + \sin x + \cos x) dx = x - \cos x + \sin x + C.$$

$$1648. \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx &= \int \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} dx \\ &= \int [\operatorname{sgn}(\cos x - \sin x)] (\cos x - \sin x) dx \\ &= (\sin x + \cos x) \cdot \operatorname{sgn}(\cos x - \sin x) + C. \end{aligned}$$

$$1649. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\operatorname{csc}^2 x - 1) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

$$1650. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$1651. \int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) dx = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x + C.$$

$$1652. \int \operatorname{th}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{th}^2 x dx = \int \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) dx = x - \operatorname{th} x + C.$$

$$1653. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{cth}^2 x dx = \int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \right) dx = x - \operatorname{cth} x + C.$$

1654. 证明: 若

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

则

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C \quad (a \neq 0).$$

证 由 $\int f(x) dx = F(x) + C$ 得知 $F'(x) = f(x)$. 因

而有 $F'(ax + b) = f(ax + b)$, 且 $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax + b) \right]$
 $= F'(ax + b)$, 于是

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{a} F(ax + b) \right] = f(ax + b),$$

所以

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C.$$

求出下列积分:

$$1655. \int \frac{dx}{x+a}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x} dx \\
 & = \int (1-x)^{-\frac{3}{5}} dx \\
 & = -\frac{5}{2} \sqrt[5]{(1-x)^2} + C.
 \end{aligned}$$

$$1661. \int \frac{dx}{2+3x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{2+3x^2} = \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}x)^2} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left[x \sqrt{\frac{3}{2}} \right] + C.
 \end{aligned}$$

$$1662. \int \frac{dx}{2-3x^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{2-3x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \left(\sqrt{\frac{3}{2}}x \right)^2} \\
 & = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{2}}x}{1 - \sqrt{\frac{3}{2}}x} \right| + C \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + x\sqrt{3}}{\sqrt{2} - x\sqrt{3}} \right| + C.
 \end{aligned}$$

$$1663. \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \left[x \sqrt{\frac{3}{2}} \right] + C.$$

$$1664. \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2-2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right)^2-1}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \left| x \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}x^2-1} \right| + C_1 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln |x \sqrt{3} + \sqrt{3x^2-2}| + C.
 \end{aligned}$$

$$1665. \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (e^{-x} + e^{-2x}) dx = -(e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2x}) + C.$$

$$1666. \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx.$$

$$\text{解} \quad \int (\sin 5x - \sin 5\alpha) dx = -\frac{1}{5} \cos 5x - x \sin 5\alpha + C.$$

$$1667. \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2} \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

$$1668. \int \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1 + \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C.$$

$$1669. \int \frac{dx}{1 - \cos x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1 - \cos x} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{2}} = -\operatorname{ctg} \frac{x}{2} + C.$$

$$1670. \int \frac{dx}{1+\sin x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{1+\sin x} &= \int \frac{dx}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} \\ &= -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C. \end{aligned}$$

$$1671. \int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int [\operatorname{sh}(2x+1)+\operatorname{ch}(2x-1)]dx \\ = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2x+1)+\operatorname{sh}(2x-1)]+C. \end{aligned}$$

$$1672. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} = 2\operatorname{th} \frac{x}{2} + C.$$

$$1673. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2}} = -2\operatorname{cth} \frac{x}{2} + C.$$

用适当地变换被积函数的方法来求下列积分:

$$1674. \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

$$1675. \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx &= \frac{1}{3} \int (1+x^3)^{\frac{1}{3}} d(1+x^3) \\ &= \frac{1}{4} (1+x^3)^{\frac{4}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1676. \int \frac{x dx}{3-2x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{3-2x^2} &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(3-2x^2)}{3-2x^2} \\ &= -\frac{1}{4} \ln|3-2x^2| + C. \end{aligned}$$

$$1677. \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C. \end{aligned}$$

$$1678. \int \frac{x dx}{4+x^4}$$

$$\text{解} \quad \int \frac{x dx}{4+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{2^2+(x^2)^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2}{2} + C.$$

$$1679. \int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8-2} &= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4 - \sqrt{2}}{x^4 + \sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1680. \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2}$$

$$= 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} + C.$$

$$1681. \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2}.$$

$$\text{解} \quad \int \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} = - \int \sin \frac{1}{x} d\left(\frac{1}{x}\right) = \cos \frac{1}{x} + C.$$

$$1682. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{dx}{x|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$= - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{|x|}\right)^2}}$$

$$= - \ln \left[\frac{1}{|x|} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right] + C$$

$$= - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right| + C.$$

$$1683. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - 1}} = \int \frac{dx}{x|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}$$

$$= - \int \frac{d\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = - \operatorname{arc} \sin \frac{1}{|x|} + C.$$

$$1684. \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\operatorname{sgn} x dx}{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\
 &= -\frac{1}{2} \int \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}} \operatorname{sgn} x d\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sgn} x + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C.
 \end{aligned}$$

$$1685. \int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x dx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{2} \int (x^2-1)^{-\frac{3}{2}} d(x^2-1) \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} + C.
 \end{aligned}$$

$$1686. \int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x^2 dx}{(8x^3+27)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{1}{24} \int (8x^3+27)^{-\frac{2}{3}} d(8x^3+27) \\
 &= \frac{1}{8} \sqrt[3]{8x^3+27} + C.
 \end{aligned}$$

$$1687. \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}.$$

解 由 $x(1+x) > 0$ 知: $x > 0$ 或 $x < -1$.

当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} &= 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} \\
 &= 2 \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C;
 \end{aligned}$$

当 $x < -1$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} &= - \int \frac{d[-(1+x)]}{\sqrt{(-x)[-(1+x)]}} \\ &= -2 \int \frac{d(\sqrt{-(1+x)})}{\sqrt{1+(\sqrt{-(1+x)})^2}} \\ &= -2 \ln(\sqrt{-x} + \sqrt{-(1+x)}) + C. \end{aligned}$$

总之,得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} \\ &= 2 \operatorname{sgn} x \cdot \ln(\sqrt{|x|} + \sqrt{|1+x|}) + C. \end{aligned}$$

1688. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$

解 由 $x(1-x) > 0$ 知; $0 < x < 1$. 于是,得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \\ &= 2 \operatorname{arc} \sin \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

1689. $\int x e^{-x^2} dx$.

解 $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2)$
 $= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$

1690. $\int \frac{e^x dx}{2+e^x}$.

解 $\int \frac{e^x dx}{2+e^x} = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x) + C.$

1691. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

解 $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{d(e^x)}{1+(e^x)^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(e^x) + C.$

$$1692. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} &= - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1+(e^{-x})^2}} \\ &= - \ln(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}) + C. \end{aligned}$$

$$1693. \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x d(\ln x) = \frac{1}{3} \ln^3 x + C.$$

$$1694. \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} &= \int \frac{d(\ln x)}{\ln x \ln(\ln x)} \\ &= \int \frac{d[\ln(\ln x)]}{\ln(\ln x)} = \ln |\ln(\ln x)| + C. \end{aligned}$$

$$1695. \int \sin^5 x \cos x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \sin^5 x \cos x dx = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{1}{6} \sin^6 x + C.$$

$$1696. \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} dx &= - \int (\cos x)^{-\frac{3}{2}} d(\cos x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\cos x}} + C. \end{aligned}$$

$$1697. \int \operatorname{tg} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

$$1698. \int \operatorname{ctg} x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{ctg} x dx &= \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} \\ &= \ln |\sin x| + C. \end{aligned}$$

$$1699. \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}} dx \\ &= \int (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) \\ &= \frac{3}{2} \sqrt[3]{(\sin x - \cos x)^2} + C = \frac{3}{2} \sqrt[3]{1 - \sin 2x} + C. \end{aligned}$$

$$1700. \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx.$$

解 当 $|a| = |b| \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \\ &= \frac{1}{|a|} \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x + C; \end{aligned}$$

当 $|a| \neq |b|$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin^2 x)}{\sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2}} \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2} \sqrt{(a^2 - b^2) \sin^2 x + b^2} + C \\ &= \frac{\sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{a^2 - b^2} + C. \end{aligned}$$

$$1701. \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\text{sh}x} &= \int \frac{\frac{1}{2\text{ch}^2 \frac{x}{2}}}{\text{th} \frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\left(\text{th} \frac{x}{2}\right)}{\text{th} \frac{x}{2}} \\ &= \ln \left| \text{th} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

1706. $\int \frac{dx}{\text{ch}x}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\text{ch}x} &= \int \frac{2dx}{e^x + e^{-x}} = 2 \int \frac{d(e^x)}{1 + (e^x)^2} \\ &= 2 \arctg(e^x) + C. \end{aligned}$$

1707. $\int \frac{\text{sh}x \text{ch}x}{\sqrt{\text{sh}^4x + \text{ch}^4x}} dx$.

解 因为

$$\begin{aligned} \text{sh}^4x + \text{ch}^4x &= (\text{sh}^2x + \text{ch}^2x)^2 - 2\text{sh}^2x\text{ch}^2x \\ &= \text{ch}^22x - \frac{1}{2}\text{sh}^22x = \frac{1 + \text{ch}^22x}{2}, \end{aligned}$$

所以,得

$$\begin{aligned} \int \frac{\text{sh}x \text{ch}x}{\sqrt{\text{sh}^4x + \text{ch}^4x}} dx &= \int \frac{\frac{1}{4}d(\text{ch}2x)}{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \text{ch}^22x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln(\text{ch}2x + \sqrt{1 + \text{ch}^22x}) + C_1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(\frac{\text{ch}2x}{\sqrt{2}} + \sqrt{\text{sh}^4x + \text{ch}^4x}\right) + C. \end{aligned}$$

1708. $\int \frac{dx}{\text{ch}^2x \cdot \sqrt[3]{\text{th}^2x}}$:

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{\text{ch}^2x \cdot \sqrt[3]{\text{th}^2x}} = \int (\text{th}x)^{-\frac{2}{3}} d(\text{th}x)$$

$$= 3 \sqrt[3]{\operatorname{th} x} + C.$$

1709. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

解 $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x)$
 $= \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C.$

1710. $\int \frac{dx}{(\operatorname{arc} \sin x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$

解 $\int \frac{dx}{(\operatorname{arc} \sin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\operatorname{arc} \sin x)}{(\operatorname{arc} \sin x)^2}$
 $= -\frac{1}{\operatorname{arc} \sin x} + C.$

1711. $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx.$

解 $\int \sqrt{\frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{1+x^2}} dx$
 $= \int (\ln(x + \sqrt{1+x^2}))^{\frac{1}{2}} d(\ln(x + \sqrt{1+x^2}))$
 $= \frac{2}{3} \ln^{\frac{3}{2}}(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$

1712. $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

解 $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + C.$

$$1713. \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx &= \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1714^+. \int \frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^{14} dx}{(x^5+1)^4} &= \int \frac{x^{14} dx}{x^{20}(1+x^{-5})^4} \\ &= -\frac{1}{5} \int (1+x^{-5})^{-4} d(1+x^{-5}) \\ &= \frac{1}{15} (1+x^{-5})^{-3} + C_1 = \frac{x^{15}}{15(x^5+1)^3} + C_1 \\ &= \frac{(x^5+1)^3 - 3x^{10} - 3x^5 - 1}{15(x^5+1)^3} + C_1 \\ &= -\frac{3x^{10} + 3x^5 + 1}{15(x^5+1)^3} + C \end{aligned}$$

$$1715. \int \frac{x^{\frac{n}{2}} dx}{\sqrt{1+x^{n+2}}}.$$

解 当 $n = -2$ 时,

$$\int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln|x| + C;$$

当 $n \neq -2$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1+x^{n+2}}} dx &= \frac{2}{n+2} \int \frac{d\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)}{\sqrt{1+\left(x^{\frac{n+2}{2}}\right)^2}} \\ &= \frac{2}{n+2} \ln\left(x^{\frac{n+2}{2}} + \sqrt{1+x^{n+2}}\right) + C. \end{aligned}$$

$$1716^+. \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{1}{1-x^2} \ln \frac{1+x}{1-x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d\left(\ln \frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \frac{1}{4} \ln^2 \frac{1+x}{1-x} + C. \end{aligned}$$

$$1717. \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}} = \int \frac{d(\sin x)}{\sqrt{3-2\sin^2 x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \sin x \right] + C. \end{aligned}$$

$$1718. \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\sin 2x dx}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{d(\cos 2x)}{\frac{1+\cos^2 2x}{2}} \\ &= -\frac{1}{2} \arcsin(\cos 2x) + C. \end{aligned}$$

$$1719. \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{2^x \cdot 3^x}{9^x - 4^x} dx = \int \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x}{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^x\right]^2 - 1} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\ln 3 - \ln 2} \int \frac{d\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)}{\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x\right)^2 - 1} \\
&= \frac{1}{2(\ln 3 - \ln 2)} \ln \left| \frac{3^x - 2^x}{3^x + 2^x} \right| + C.
\end{aligned}$$

1720. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}.$

解 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{(1+x^2)^3}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \\
&= \int \frac{d(1+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}} \\
&= 2\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}} + C.
\end{aligned}$$

用分项积分法计算下列积分：

1721. $\int x^2(2-3x^2)^2 dx.$

解 $\int x^2(2-3x^2)^2 dx = \int (4x^2 - 12x^4 + 9x^6) dx$

$$= \frac{4}{3}x^3 - \frac{12}{5}x^5 + \frac{9}{7}x^7 + C.$$

1722. $\int \frac{1+x}{1-x} dx.$

解 $\int \frac{1+x}{1-x} dx = \int \left(-1 + \frac{2}{1-x}\right) dx$

$$= -x - 2\ln|1-x| + C.$$

1723. $\int \frac{x^2}{1+x} dx.$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x^2}{1+x} dx &= \int \left(x-1 + \frac{1}{1+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + \ln|1+x| + C.\end{aligned}$$

$$1724. \int \frac{x^3}{3+x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x^3}{3+x} dx &= \int \left(x^2 - 3x + 9 - \frac{27}{3+x} \right) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 9x - 27\ln|3+x| + C.\end{aligned}$$

$$1725. \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{(1+x)^2}{1+x^2} dx &= \int \left(1 + \frac{2x}{1+x^2} \right) dx \\ &= x + \ln(1+x^2) + C.\end{aligned}$$

$$1726. \int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{(2-x)^2}{2-x^2} dx &= \int \frac{(x^2-2) - 4x + 6}{2-x^2} dx \\ &= \int \left(-1 - \frac{4x}{2-x^2} + \frac{6}{2-x^2} \right) dx \\ &= -x + 2\ln|2-x^2| + \frac{3}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}+x}{\sqrt{2}-x} \right| + C.\end{aligned}$$

$$1727. \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int \frac{x^2}{(1-x)^{100}} dx &= \int \frac{(x-1+1)^2}{(1-x)^{100}} dx \\ &= \int [(1-x)^{-98} - 2(1-x)^{-99} + (1-x)^{-100}] dx \\ &= \frac{1}{97(1-x)^{97}} - \frac{1}{49(1-x)^{98}} + \frac{1}{99(1-x)^{99}} + C.\end{aligned}$$

$$1728. \int \frac{x^5}{x+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^5}{x+1} dx &= \int \left(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{5} x^5 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + x - \ln|1+x| + C. \end{aligned}$$

$$1729. \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} &= \int \frac{1}{2} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) dx \\ &= \frac{1}{3} \left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)^{\frac{3}{2}} \right] + C. \end{aligned}$$

$$1730. \int x \sqrt{2-5x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \sqrt{2-5x} dx &= \int \left[-\frac{1}{5} (2-5x) + \frac{2}{5} \right] (2-5x)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \int \left[-\frac{1}{5} (2-5x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} (2-5x)^{\frac{1}{2}} \right] dx \\ &= \frac{2}{125} (2-5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75} (2-5x)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= -\frac{8+30x}{375} (2-5x)^{\frac{3}{2}} + C. \end{aligned}$$

$$1731. \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1-3x}} &= -\frac{1}{3} \int \frac{(1-3x)-1}{(1-3x)^{\frac{4}{3}}} dx \\ &= -\frac{1}{3} \int \left[(1-3x)^{-\frac{2}{3}} - (1-3x)^{-\frac{4}{3}} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{15}(1-3x)^{\frac{5}{3}} - \frac{1}{6}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C \\
&= -\frac{1+2x}{10}(1-3x)^{\frac{2}{3}} + C.
\end{aligned}$$

1732. $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx.$

解 $\int x^3 \sqrt[3]{1+x^2} dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int [(x^2+1)-1](1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) \\
&= \frac{1}{2} \int [(1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}] d(1+x^2) \\
&= \frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C \\
&= \frac{12x^2-9}{56}(1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.
\end{aligned}$$

1733. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

解 $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)} = \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+3} \right) dx$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+3} \right| + C.$$

1734. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}.$

解 $\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} \right) dx$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C.$$

1735. $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}.$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \right) dx$

$$= \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$1736. \int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{(x^2-2)(x^2+3)} &= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x^2-2} - \frac{1}{x^2+3} \right) dx \\ &= \frac{1}{10\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} \right| - \frac{1}{5\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1737. \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{(x+2)(x+3)} &= \int \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right) dx \\ &= \ln \frac{|x+3|^3}{(x+2)^2} + C. \end{aligned}$$

$$1738. \int \frac{x dx}{x^4+3x^2+2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{x^4+3x^2+2} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2+1)(x^2+2)} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2} \right) d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2+1}{x^2+2} + C. \end{aligned}$$

$$1739. \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} \quad (a \neq b).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{(x+a)^2(x+b)^2} &= \frac{1}{(a-b)^2} \int \left(\frac{1}{x+a} - \frac{1}{x+b} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{(a-b)^2} \int \left[\frac{1}{(x+a)^2} + \frac{1}{(x+b)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{(x+a)(x+b)} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int [\cos \alpha - \cos(2x + \alpha)] dx \\
&= \frac{x}{2} \cos \alpha - \frac{1}{4} \sin(2x + \alpha) + C.
\end{aligned}$$

1744. $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx.$

解 $\int \sin 3x \cdot \sin 5x dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x - \cos 8x) dx$
 $= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{1}{16} \sin 8x + C.$

1745. $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx.$

解 $\int \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{3} dx = \frac{1}{2} \int \left(\cos \frac{5x}{6} + \cos \frac{x}{6} \right) dx$
 $= \frac{3}{5} \sin \frac{5x}{6} + 3 \sin \frac{x}{6} + C.$

1746. $\int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx.$

解 $\int \sin \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) \cdot \cos \left(3x + \frac{\pi}{4} \right) dx$
 $= \frac{1}{2} \int \left[\sin \left(5x + \frac{\pi}{12} \right) - \sin \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) \right] dx$
 $= -\frac{1}{10} \cos \left(5x + \frac{\pi}{12} \right) + \frac{1}{2} \cos \left(x + \frac{5\pi}{12} \right) + C.$

1747. $\int \sin^3 x dx.$

解 $\int \sin^3 x dx = \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x)$
 $= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$

1748. $\int \cos^3 x dx.$

解 $\int \cos^3 x dx = \int (1 - \sin^2 x) d(\sin x)$

$$= \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$

1749. $\int \sin^4 x dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 - 4\cos 2x + \cos 4x) dx \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

1750. $\int \cos^4 x dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (3 + 4\cos 2x + \cos 4x) dx \\ &= \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + C. \end{aligned}$$

1751. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx.$

解
$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\operatorname{csc}^2 x - 1) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

1752. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg} x \cdot (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln |\cos x| + C, \end{aligned}$$

其中第二个积分见 1697 题.

$$1753. \int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x dx.$$

解 因为

$$\begin{aligned} \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x &= \frac{1}{2}(1 - \cos 6x) \cdot \frac{1}{4}(3\sin 2x - \sin 6x) \\ &= \frac{1}{8}(3\sin 2x - 3\cos 6x \cdot \sin 2x - \sin 6x \\ &\quad + \sin 6x \cdot \cos 6x) \\ &= \frac{3}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}\sin 4x - \frac{1}{8}\sin 6x - \frac{3}{16}\sin 8x \\ &\quad + \frac{1}{16}\sin 12x \end{aligned}$$

所以,得

$$\begin{aligned} \int \sin^2 3x \cdot \sin^3 2x dx &= -\frac{3}{16}\cos 2x - \frac{3}{64}\cos 4x \\ &\quad + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{3}{128}\cos 8x - \frac{1}{192}\cos 12x + C. \end{aligned}$$

$$1754. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \right) dx \\ &= -\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

$$1755. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos x} &= \int \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right) dx \\ &= \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| - \frac{1}{\sin x} + C, \end{aligned}$$

其中第一个积分见 1704 题.

$$1756. \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos^3 x} &= \int \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{1}{\sin x \cos x} \right) dx \\ &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + \int \frac{d(2x)}{\sin 2x} \\ &= \frac{1}{2\cos^2 x} + \ln |\operatorname{tg} x| + C, \end{aligned}$$

其中第二个积分见 1703 题.

$$1757. \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\cos^3 x}{\sin x} dx &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \cos x dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) d(\sin x) \\ &= \ln |\sin x| - \frac{1}{2} \sin^2 x + C. \end{aligned}$$

$$1758. \int \frac{dx}{\cos^4 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \sec^2 x \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + \operatorname{tg}^2 x) d(\operatorname{tg} x) \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C. \end{aligned}$$

$$1759. \int \frac{dx}{1+e^x}.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{dx}{1+e^x} = \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = x - \ln(1+e^x) + C.$$

$$1760. \int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}} dx = \int \left(1 + \frac{2e^x}{1+e^{2x}} \right) dx$$

$$= x + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(e^x) + C.$$

1761. $\int \operatorname{sh}^2 x dx.$

解 $\int \operatorname{sh}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2} + C.$

1762. $\int \operatorname{ch}^2 x dx.$

解 $\int \operatorname{ch}^2 x dx = \int \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} dx = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + \frac{x}{2} + C.$

1763. $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x dx.$

解 $\int \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} 2x dx = 2 \int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x dx = 2 \int \operatorname{sh}^2 x d(\operatorname{sh} x)$
 $= \frac{2}{3} \operatorname{sh}^3 x + C.$

1764. $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx.$

解 $\int \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} 3x dx = \frac{1}{2} \int (\operatorname{ch} 4x + \operatorname{ch} 2x) dx$
 $= \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x + C.$

1765. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x}.$

解 $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch}^2 x} = \int \left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \right) dx$
 $= -(\operatorname{cth} x + \operatorname{th} x) + C.$

用适当的代换,求下列积分:

1766. $\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx.$

解 设 $1-x=t$, 则 $x=1-t, dx=-dt$, 故得

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sqrt[3]{1-x} dx &= - \int (1-t)^2 t^{\frac{1}{3}} dt \\
&= - \int (t^{\frac{1}{3}} - 2t^{\frac{4}{3}} + t^{\frac{7}{3}}) dt \\
&= - \frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7} t^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{10} t^{\frac{10}{3}} + C \\
&= - \frac{3}{140} (9 + 12x + 14x^2) (1-x)^{\frac{4}{3}} + C.
\end{aligned}$$

1767. $\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx.$

解 设 $1-5x^2=t$, 则 $x^2 = \frac{1}{5}(1-t)$, 从而 $x^3 dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} x^2 d(x^2) = \frac{1}{10} (1-t) \left(-\frac{1}{5} \right) dt \\
&= -\frac{1}{50} (1-t) dt, \text{ 故得} \\
\int x^3 (1-5x^2)^{10} dx &= -\frac{1}{50} \int (t^{10} - t^{11}) dt \\
&= -\frac{1}{550} t^{11} + \frac{1}{600} t^{12} + C \\
&= -\frac{1+55x^2}{6600} (1-5x^2)^{11} + C.
\end{aligned}$$

1768. $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx.$

解 设 $2-x=t$, 则 $x=2-t$, $dx=-dt$, 故得

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx &= - \int t^{-\frac{1}{2}} (2-t)^2 dt \\
&= - \int (4t^{-\frac{1}{2}} - 4t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt \\
&= -8t^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + C \\
&= -\frac{2}{15} (32 + 8x + 3x^2) \sqrt{2-x} + C.
\end{aligned}$$

$$1769. \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

解 设 $1-x^2=t$, 则 $x^2=1-t$, 从而 $x^5 dx = \frac{1}{2}(x^2)^2$

$\cdot d(x^2) = -\frac{1}{2}(1-t)^2 dt$, 故得

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx &= -\frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^2 dt \\ &= -\frac{1}{2} \int (t^{-\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}) dt \\ &= -t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}t^{\frac{5}{2}} + C \\ &= -\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1770. \int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx.$$

解 设 $2-5x^3=t$, 则 $x^3 = \frac{1}{5}(2-t)$, 从而

$$x^5 dx = \frac{1}{3}x^3 d(x^3) = -\frac{1}{75}(2-t)dt,$$

故得

$$\begin{aligned} \int x^5(2-5x^3)^{\frac{2}{3}} dx &= -\frac{1}{75} \int t^{\frac{2}{3}}(2-t) dt \\ &= -\frac{1}{75} \int (2t^{\frac{2}{3}} - t^{\frac{5}{3}}) dt = -\frac{2}{125}t^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{200}t^{\frac{8}{3}} + C \\ &= -\frac{6+25x^3}{1000}(2-5x^3)^{\frac{5}{3}} + C. \end{aligned}$$

$$1771^+. \int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx.$$

解 设 $\sin x = t$, 则 $\cos^5 x dx = (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$
 $= (1-t^2)^2 dt$,

故得

$$\begin{aligned}
\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx &= \int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int (t^{\frac{1}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}} + t^{\frac{9}{2}}) dt \\
&= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7} t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11} t^{\frac{11}{2}} + C \\
&= \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7} \sin^2 x + \frac{2}{11} \sin^4 x \right) \sqrt{\sin^3 x} + C.
\end{aligned}$$

1772. $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$

解 设 $\cos^2 x = t$, 则 $\sin x \cos x dx = -\frac{1}{2} dt$, 故得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1 + \cos^2 x} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{t}{1+t} dt \\
&= -\frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt = -\frac{1}{2} t + \frac{1}{2} \ln(1+t) + C \\
&= -\frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{1}{2} \ln(1 + \cos^2 x) + C.
\end{aligned}$$

1773. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx.$

解 设 $\operatorname{tg} x = t$, 则 $\frac{1}{\cos^4 x} dx = (1+t^2) dt$, 故得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx &= \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{3} t^3 + C \\
&= \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + C.
\end{aligned}$$

1774. $\int_x \frac{\ln x dx}{\sqrt{1 + \ln x}}.$

解 设 $1 + \ln x = t$, 则 $\frac{\ln x dx}{x}$
 $= (1 + \ln x - 1) d(1 + \ln x)$
 $= (t - 1) dt$, 故得

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln x dx}{x \sqrt{1+\ln x}} &= \int t^{-\frac{1}{2}}(t-1) dt \\ &= \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}(\ln x - 2) \sqrt{1+\ln x} + C. \end{aligned}$$

1775. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x}$.

解 设 $e^{\frac{x}{2}} = t$, 则 $e^x = t^2$, $dx = \frac{2dt}{t}$, 故得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} + e^x} &= 2 \int \frac{dt}{t^2(1+t)} = 2 \int \left(\frac{1-t}{t^2} + \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= -\frac{2}{t} - 2\ln t + 2\ln(1+t) + C \\ &= -2e^{-\frac{x}{2}} - x + 2\ln(1+e^{\frac{x}{2}}) + C. \end{aligned}$$

1776. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

解 设 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则 $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2t}{t^2 - 1} dt$,

故得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}} &= 2 \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \ln \left(\frac{t-1}{t+1} \right) + C \\ &= \ln \left[\frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right] + C \\ &= x - 2\ln(1 + \sqrt{1+e^x}) + C. \end{aligned}$$

1777. $\int \frac{\arctg \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{1+x}$.

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} &= 2 \int \sec^3 t dt = 2 \int \frac{d(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1+\sin t} + \frac{1}{1-\sin t} \right)^2 d(\sin t) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(1+\sin t)}{(1+\sin t)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-\sin t)}{(1-\sin t)^2} \\ &\quad + \int \frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\sin t} - \frac{1}{1+\sin t} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+\sin t}{1-\sin t} \right| + C_1 \\ &= \operatorname{tg} t \cdot \operatorname{sect} + \ln(\operatorname{sect} + \operatorname{tgt}) + C_1 \\ &= \frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln(x + \sqrt{x^2-2}) + C.\end{aligned}$$

(2) 当 $x < -\sqrt{2}$ 时, 仍设 $x = \sqrt{2} \operatorname{sect}$, 但限制 $\pi < t < \frac{3\pi}{2}$. 其余步骤与上相同, 注意到, 此时 $\operatorname{sect} + \operatorname{tgt} < 0$, 因此在对数符号里要加绝对值, 即结果为

$$\frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$$

总之, 当 $|x| > \sqrt{2}$ 时,

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-2}} = \frac{x}{2} \sqrt{x^2-2} + \ln|x + \sqrt{x^2-2}| + C.$$

1780. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx.$

解 被积函数的存在域为 $-a \leq x \leq a$, 因此设 $x = a \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{a^2-x^2} = a \cos t, dx = a \cos t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) + C \\ &= \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.\end{aligned}$$

*) 利用 1742 题的结果.

1781. $\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}}$.

解 被积函数的存在域为 $-\infty < x < +\infty$, 因此可设

$x = a \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}} = a^3 \sec^3 t, dx = a \sec^2 t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C \\ &= \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} + C = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} + C.\end{aligned}$$

1782. $\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$.

解 被积函数的存在域为 $-a \leq x < a$, 因此可设 $x =$

$a \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = \sqrt{\frac{1+\sin t}{1-\sin t}} = \frac{1+\sin t}{\cos t}, dx = a \cos t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx \\ &= a \int (1 + \sin t) dt = a(t - \cos t) + C \\ &= a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + C \quad (-a < x < a). \end{aligned}$$

注意, 上式在端点 $x = -a$ 也成立. 即函数 $F(x) = a \arcsin \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$ 在点 $x = -a$ 的(右)导数等于被

积函数 $f(x) = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$ 在点 $x = -a$ 之值. 事实上, 由于 $F(x)$ 和 $f(x)$ 都在 $-a \leq x < a$ 连续, 且 $F'(x) = f(x)$ 在 $-a < x < a$ 成立. 故由中值定理, 知当 $-a < x < a$ 时, 有

$$\frac{F(x) - F(-a)}{x + a} = F'(\xi) = f(\xi), \quad -a < \xi < x.$$

由此可知, (右)导数

$$\begin{aligned} F'(-a) &= \lim_{x \rightarrow -a+0} \frac{F(x) - F(-a)}{x + a} \\ &= \lim_{\xi \rightarrow -a+0} f(\xi) = f(-a). \end{aligned}$$

下面有些题目在端点的情况可类似地进行讨论, 从略.

1783. $\int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx.$

解 被积函数的存在域为 $0 \leq x < 2a$, 因此可设

$x = 2a \sin^2 t$, 并限制 $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} = \frac{2a \sin^3 t}{\cos t}, \quad dx = 4a \sin t \cos t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} \\ &= 8a^2 \int \sin^4 t dt \\ &= 8a^2 \left(\frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t \right) + C. \end{aligned}$$

注意到 $\sin 2t = 2\sin t \cos t = 2 \sqrt{\frac{x}{2a}} \cdot \sqrt{1 - \frac{x}{2a}} = \frac{1}{a} \cdot \sqrt{x(2a-x)}$ 及 $\sin 4t = 2\sin 2t \cos 2t = 4\sin t \cos t (1 - 2\sin^2 t) = \frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)}$, 最后得

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{\frac{x}{2a-x}} dx &= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - 2a^2 \cdot \\ & \frac{1}{a} \sqrt{x(2a-x)} + \frac{1}{4}a^2 \cdot \frac{2}{a^2}(a-x)\sqrt{x(2a-x)} + C \\ &= 3a^2 \arcsin \sqrt{\frac{x}{2a}} - \frac{3a+x}{2} \sqrt{x(2a-x)} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1749 题的结果.

1784. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$

解 不妨设 $a < b$. 被积函数的存在域为 $a < x < b$,

因此可设 $x-a = (b-a)\sin^2 t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$. 从而

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = (b-a)\sin t \cos t,$$

$$dx = 2(b-a)\sin t \cos t dt.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \int dt = 2t + C$$

$$= 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

1785. $\int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx.$

解 与上题相同, 作同一代换, 并注意到 $\sin 4t = 4 \sin t$

$$\cdot \cos t (1 - 2 \sin^2 t) = 4 \sqrt{\frac{x-a}{b-a}}.$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 - \frac{x-a}{b-a}} \left(1 - 2 \cdot \frac{x-a}{b-a} \right) \\ = & -4 \cdot \frac{2x - (a+b)}{(b-a)^2} \sqrt{(x-a)(b-x)}, \text{ 即得} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx &= 2(b-a)^2 \int \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{(b-a)^2}{2} \int \sin^2 2t dt = \frac{(b-a)^2}{4} \int (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \left(t - \frac{1}{4} \sin 4t \right) + C \\ &= \frac{(b-a)^2}{4} \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \\ & \quad + \frac{2x - (a+b)}{4} \sqrt{(x-a)(b-x)} + C. \end{aligned}$$

用双曲线代换 $x = a \operatorname{sh} t, x = a \operatorname{ch} t$ 等等, 求下列积分 (参数为正的):

1786. $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx.$

解 被积函数的存在域为 $-\infty < x < +\infty$, 因此可设 $x = a \operatorname{sh} t$. 从而

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \operatorname{ch} t, dx = a \operatorname{ch} t dt.$$

代入得

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t dt$$

$$= a^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t \right) + C_1.$$

注意到 $x + \sqrt{a^2 + x^2} = a(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = ae^t$, 即 $t = \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}$ 及 $\operatorname{sh} 2t = 2\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = \frac{2x \sqrt{a^2 + x^2}}{a^2}$,

最后得

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$$

$$+ \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

*) 利用 1762 题的结果.

1787. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx.$

解 与上题相同, 设 $x = a \operatorname{sh} t$, 则

$$\frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch} t}, dx = a \operatorname{ch} t dt.$$

代入得

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} dx = a^2 \int \operatorname{sh}^2 t dt$$

$$= a^2 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{t}{2} \right) + C_1$$

$$= \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) + C.$$

*) 利用 1761 题的结果.

1788⁺. $\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx.$

解 被积函数的存在域为 $x \geq a$ 及 $x < -a$.

(1) 当 $x > a$ 时, 可设 $x = a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$.

从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\operatorname{cht} - 1}{\operatorname{sh} t}, dx = a \operatorname{sh} t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= a \int (\operatorname{cht} - 1) dt \\ &= a \operatorname{sh} t - at + C_1 = a \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} - at + C_1 \\ &= a \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - a \ln \left[\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} + \frac{x}{a} \right] + C_1 \\ &= \sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} + x) + C_2 \\ &= \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{x-a} + \sqrt{x+a}) + C. \end{aligned}$$

(2) 当 $x < -a$ 时, 可设 $x = -a \operatorname{ch} t$, 并限制 $t > 0$.

从而

$$\sqrt{\frac{x-a}{x+a}} = \frac{\operatorname{cht} + 1}{\operatorname{sh} t}, dx = -a \operatorname{sh} t dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx &= -a \int (\operatorname{cht} + 1) dt \\ &= -a \operatorname{sh} t - at + C_1 \\ &= -a \cdot \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} \\ &\quad - a \ln \left[\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} - \frac{x}{a} \right] + C_1 \\ &= -\sqrt{x^2 - a^2} - a \ln(\sqrt{x^2 - a^2} - x) + C_2 \end{aligned}$$

$$= -\sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{-x + a} + \sqrt{-x - a}) + C.$$

总之,当 $|x| > a$ 时,

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}} dx = \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{x^2 - a^2} - 2a \ln(\sqrt{|x-a|} + \sqrt{|x+a|}) + C.$$

1789. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$

解 不妨设 $a < b$. 被积函数的存在域为 $x > -a$ 及 $x < -b$.

(1) 当 $x > -a$ 时,可设 $x+a = (b-a)\operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$. 从而

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+a)(x+b)} &= (b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, dx \\ &= 2(b-a)\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t dt. \end{aligned}$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = 2 \int dt = 2t + C_1.$$

注意到 $\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} = \sqrt{b-a}(\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) = \sqrt{b-a}e^t$, 就有 $t = \ln \frac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}}{\sqrt{b-a}}$, 最后得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \\ = 2 \ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}) + C. \end{aligned}$$

(2) 当 $x < -b$ 时,可设 $x+b = (a-b)\operatorname{sh}^2 t$, 并限制 $t > 0$. 从而

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+a)(x+b)} &= (b-a)\operatorname{sh}t \operatorname{cht}, dx \\ &= -(b-a)2\operatorname{sh}t \operatorname{cht} dt. \end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} &= -2 \int dt = -2t + C_1 \\ &= -2\ln(\sqrt{-(x+a)} + \sqrt{-(x+b)}) + C. \end{aligned}$$

总之,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} = \begin{cases} 2\ln(\sqrt{x+a} + \sqrt{x+b}), \\ \quad \text{若 } x+a > 0 \text{ 及 } x+b > 0; \\ -2\ln(\sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b}), \\ \quad \text{若 } x+a < 0 \text{ 及 } x+b < 0. \end{cases}$$

1790. $\int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx.$

解 与上题相同,作同一代换,只是在求积分的过程中变动个别地方.今以 $x > -a$ 时为例,解法如下:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{(x+a)(x+b)} dx &= 2(b-a)^2 \int \operatorname{sh}^2 t \operatorname{ch}^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} (b-a)^2 \int \operatorname{sh}^2 2t dt \\ &= \frac{1}{4} (b-a)^2 \int (\operatorname{ch} 4t - 1) dt \\ &= \frac{1}{4} (b-a)^2 \left(\frac{1}{4} \operatorname{sh} 4t - t \right) + C_1 \\ &= \frac{1}{4} (b-a)^2 [\operatorname{sh}t \operatorname{cht} (1 + 2\operatorname{sh}^2 t) - t] + C_1 \\ &= \frac{1}{4} (b-a)^2 \left[\sqrt{\frac{x+a}{b-a}} \cdot \sqrt{1 + \frac{x+a}{b-a}} \right. \end{aligned}$$

$$\text{解} \quad \int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x(\ln x - 1) + C.$$

$$1792. \quad \int x^n \ln x dx \quad (n \neq -1).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^n \ln x dx &= \frac{1}{n+1} \int \ln x d(x^{n+1}) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x \\ &\quad - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1793. \quad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx &= - \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x} \right) \\ &= - \frac{1}{x} \ln^2 x + \int \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= - \frac{1}{x} \ln^2 x - 2 \int \ln x d\left(\frac{1}{x} \right) = - \frac{1}{x} \ln^2 x - \frac{2}{x} \ln x \\ &\quad + 2 \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = - \frac{1}{x} (\ln^2 x + 2 \ln x + 2) + C. \end{aligned}$$

$$1794. \quad \int \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{x} \ln^2 x dx &= \frac{2}{3} \int \ln^2 x d(x^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{4}{3} \int x^{\frac{3}{2}} \ln x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} \int \ln x d(x^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \ln^2 x - \frac{8}{9} x^{\frac{3}{2}} \ln x + \frac{8}{9} \int x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \left(\ln^2 x - \frac{4}{3} \ln x + \frac{8}{9} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1795. \quad \int x e^{-x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x e^{-x} dx &= - \int x d(e^{-x}) = - x e^{-x} + \int e^{-x} dx \\ &= - e^{-x}(x+1) + C.\end{aligned}$$

$$1796. \quad \int x^2 e^{-2x} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x^2 e^{-2x} dx &= - \frac{1}{2} \int x^2 d(e^{-2x}) \\ &= - \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \cdot 2x dx \\ &= - \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} \int x d(e^{-2x}) \\ &= - \frac{1}{2} x^2 e^{-2x} - \frac{1}{2} x e^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} dx \\ &= - \frac{1}{2} e^{-2x} \left(x^2 + x + \frac{1}{2} \right) + C.\end{aligned}$$

$$1797. \quad \int x^3 e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x^3 e^{-x^2} dx &= - \frac{1}{2} \int x^2 d(e^{-x^2}) \\ &= - \frac{1}{2} x^2 e^{-x^2} + \frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(x^2) = - \frac{x^2 + 1}{2} e^{-x^2} + C.\end{aligned}$$

$$1798. \quad \int x \cos x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x \cos x dx &= \int x d(\sin x) \\ &= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

$$1799. \quad \int x^2 \sin 2x dx.$$

$$\begin{aligned}\text{解} \quad \int x^2 \sin 2x dx &= - \frac{1}{2} \int x^2 d(\cos 2x) \\ &= - \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} \int x d(\sin 2x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}x^2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int\sin 2x dx \\
&= -\frac{2x^2-1}{4}\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + C.
\end{aligned}$$

1800. $\int x\operatorname{sh}x dx.$

解 $\int x\operatorname{sh}x dx = \int x d(\operatorname{ch}x)$
 $= x\operatorname{ch}x - \int \operatorname{ch}x dx = x\operatorname{ch}x - \operatorname{sh}x + C.$

1801. $\int x^3\operatorname{ch}3x dx.$

解 $\int x^3\operatorname{ch}3x dx = \frac{1}{3}\int x^3 d(\operatorname{sh}3x)$
 $= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \int x^2\operatorname{sh}3x dx$
 $= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}\int x^2 d(\operatorname{ch}3x)$
 $= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x + \frac{2}{3}\int x\operatorname{ch}3x dx$
 $= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x + \frac{2}{9}\int x d(\operatorname{sh}3x)$
 $= \frac{1}{3}x^3\operatorname{sh}3x - \frac{1}{3}x^2\operatorname{ch}3x + \frac{2}{9}x\operatorname{sh}3x - \frac{2}{9}\int \operatorname{sh}3x dx$
 $= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x}{9}\right)\operatorname{sh}3x - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2}{27}\right)\operatorname{ch}3x + C.$

1802. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg}x dx.$

解 $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg}x dx = x\operatorname{arc} \operatorname{tg}x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$
 $= x\operatorname{arctg}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$

1803. $\int \operatorname{arc} \sin x dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1804. \int x \arctan x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x \arctan x dx &= \frac{1}{2} \int \arctan x d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arctan x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= \frac{1+x^2}{2} \arctan x - \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

$$1805. \int x^2 \arccos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 \arccos x dx &= \frac{1}{3} \int \arccos x d(x^3) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x + \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{6} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \right) \\ &\quad d(1-x^2) \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{1}{3} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{9} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{1}{3} x^3 \arccos x - \frac{x^2+2}{9} \sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1806. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx &= - \int \arcsin x d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= - \frac{1}{x} \arcsin x + \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

作代换 $x = \sin t$, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{dt}{\sin t} \\ &= \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right|^{*}) + C \\ &= \ln \left| \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right| + C = - \ln \left| \frac{1 + \cos t}{\sin t} \right| + C \\ &= - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C, \end{aligned}$$

最后得

$$\begin{aligned} \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx &= - \frac{1}{x} \arcsin x \\ &\quad - \ln \left| \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1703 题的结果.

$$1807. \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C. \end{aligned}$$

$$1808. \quad \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx$$

$$\text{解} \quad \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d(x^2)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2}\right) dx \\
&= x - \frac{1-x^2}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + C.
\end{aligned}$$

1809. $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx.$

解 $\int \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} dx = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x}$
 $- \frac{1}{2} \int \frac{x}{\sqrt{x}(1+x)} dx$
 $= x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \int \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) d(\sqrt{x})$
 $= (x+1) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$

1810. $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx.$

解 $\int \sin x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) dx = - \int \ln(\operatorname{tg} x) d(\cos x)$
 $= - \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \int \cos x \cdot \operatorname{ctg} x \cdot \sec^2 x dx$
 $= - \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \int \frac{dx}{\sin x}$
 $= - \cos x \cdot \ln(\operatorname{tg} x) + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

求下列积分：

1811. $\int x^5 e^{x^3} dx.$

解 $\int x^5 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int x^3 d(e^{x^3})$
 $= \frac{1}{3} x^3 e^{x^3} - \frac{1}{3} \int e^{x^3} d(x^3)$

$$= \frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{x^3} + C.$$

1812. $\int (\arcsin x)^2 dx.$

解 $\int (\arcsin x)^2 dx = x(\arcsin x)^2 - 2 \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= x(\arcsin x)^2 + 2 \int \arcsin x d(\sqrt{1-x^2})$
 $= x(\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2 \int dx$
 $= x(\arcsin x)^2 + 2 \sqrt{1-x^2} \arcsin x - 2x + C.$

1813. $\int x(\arctg x)^2 dx.$

解 $\int x(\arctg x)^2 dx = \frac{1}{2} \int (\arctg x)^2 d(x^2)$
 $= \frac{1}{2} x^2 (\arctg x)^2 - \int \frac{x^2 \arctg x}{1+x^2} dx$
 $= \frac{x^2}{2} (\arctg x)^2 - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \arctg x dx$
 $= \frac{x^2}{2} (\arctg x)^2 - \int \arctg x dx$
 $\quad + \int \arctg x d(\arctg x)$
 $= \frac{x^2}{2} (\arctg x)^2 - x \arctg x + \int \frac{x dx}{1+x^2}$
 $\quad + \frac{1}{2} (\arctg x)^2$
 $= \frac{x^2 + 1}{2} (\arctg x)^2 - x \arctg x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
 $\quad + C.$

1814. $\int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int x^2 \ln \frac{1-x}{1+x} dx \\
&= \frac{1}{3} \int \ln \frac{1-x}{1+x} d(x^3) \\
&= \frac{1}{3} x^3 \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{1-x^2} dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln \frac{1-x}{1+x} + \frac{2}{3} \int \left(-x + \frac{x}{1-x^2} \right) dx \\
&= \frac{x^3}{3} \ln \frac{1-x}{1+x} - \frac{1}{3} x^2 - \frac{1}{3} \ln(1-x^2) + C.
\end{aligned}$$

$$1815. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2}) \\
&= \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&\quad - \int \sqrt{1+x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \\
&= \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - x + C.
\end{aligned}$$

$$1816. \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{x}{(1+x^2)^2} d(1+x^2) \\
&= -\frac{1}{2} \int x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x^2} \\
&= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C.
\end{aligned}$$

$$1817. \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$$

解 当 $a = 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C;$$

当 $a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^2} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{(a^2 + x^2) - x^2}{(a^2 + x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{a^2 + x^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^2} dx \\ &= \frac{1}{a^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} - \frac{1}{a^3} \int \frac{\left(\frac{x}{a}\right)^2 d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left[1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^2} \\ &= \frac{1}{a^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} \\ &\quad - \frac{1}{a^3} \left[-\frac{\frac{x}{a}}{2\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} \right] + C \\ &= \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2 + x^2)} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1816 题的结果.

1818. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{arc} \sin \frac{x}{|a|} \\ &\quad - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{4} \left[\frac{1}{3} x(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} - \frac{a^2}{3} \int \sqrt{a^2 + x^2} dx \right] \\
&= \frac{1}{4} x(a^2 + x^2) \sqrt{a^2 + x^2} \\
&\quad - \frac{a^2}{4} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}) \right] + C \\
&= \frac{x(2x^2 + a^2)}{8} \sqrt{a^2 + x^2} \\
&\quad - \frac{a^4}{8} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1786 题的结果.

1821. $\int x \sin^2 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int x dx - \frac{1}{2} \int x \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \int x d(\sin 2x) \\
&= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{4} \int \sin 2x dx \\
&= \frac{1}{4} x^2 - \frac{x}{4} \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

1822. $\int e^{\sqrt{x}} dx.$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$, 代入得

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2 \int t d(e^t) \\
&= 2t e^t - 2 \int e^t dt \\
&= 2t e^t - 2e^t + C = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

1823. $\int x \sin \sqrt{x} dx.$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$, 代入得

$$\begin{aligned} \int x \sin \sqrt{x} dx &= 2 \int t^3 \sin t dt = -2 \int t^3 d(\cos t) \\ &= -2t^3 \cos t + 6 \int t^2 \cos t dt \\ &= -2t^3 \cos t + 6 \int t^2 d(\sin t) \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t - 12 \int t \sin t dt \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12 \int t d(\cos t) \\ &= -2t^3 \cos t + 6t^2 \sin t + 12t \cos t - 12 \int \cos t dt \\ &= -2(t^2 - 6)t \cos t + 6(t^2 - 2) \sin t + C \\ &= 2(6 - x) \sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2 - x) \sin \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

1824. $\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\operatorname{arctg} x}) \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} - \int e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\operatorname{arctg} x}) \\ &= \frac{x-1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} - \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx. \end{aligned}$$

于是得

$$\int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C.$$

$$1825. \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} d(e^{\operatorname{arctg} x}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + \int \frac{x e^{\operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C \\ &= \frac{x+1}{2\sqrt{1+x^2}} e^{\operatorname{arctg} x} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1824 题的结果.

$$1826. \int \sin(\ln x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin(\ln x) dx &= x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= x \sin(\ln x) - x \cos(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx, \end{aligned}$$

于是得

$$\int \sin(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C.$$

$$1827. \int \cos(\ln x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos(\ln x) dx &= x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \\ &= x \cos(\ln x) + \frac{x}{2} [\sin(\ln x) - \cos(\ln x)] + C \\ &= \frac{x}{2} [\sin(\ln x) + \cos(\ln x)] + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1826 题的结果.

$$1828. \int e^{ax} \cos bx dx.$$

解 如果 a, b 同时为零, 积分显然为 $x + C$; 若 $a = 0, b \neq 0$, 积分显然为 $\frac{1}{b} \sin bx + C$; 以下设 $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{1}{a} \int \cos bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} \int \sin bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx dx \end{aligned}$$

于是得

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx \right] \\ &+ C = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2 + b^2} + C. \end{aligned}$$

1829. $\int e^{ax} \sin bx dx.$

解 若 $a = b = 0$, 则积分为 $x + C$; 以下设 $a^2 + b^2 \neq 0$, 则有

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{1}{a} \int \sin bx d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx dx \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} \int \cos bx d e^{ax} \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx, \end{aligned}$$

故 $\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$

1830. $\int e^{2x} \sin^2 x dx.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int e^{2x} \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int e^{2x} (1 - \cos 2x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int e^{2x} dx - \frac{1}{2} \int e^{2x} \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{2} \left(\frac{2 \cos 2x + 2 \sin 2x e^{2x}}{8} \right)^{**) + C \\
 &= \frac{1}{8} e^{2x} (2 - \cos 2x - \sin 2x) + C.
 \end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

$$1831. \int (e^x - \cos x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int (e^x - \cos x)^2 dx &= \int (e^{2x} - 2e^x \cos x + \cos^2 x) dx \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} - 2 \cdot \frac{e^x (\cos x + \sin x)^{**})}{2} + \\
 &\quad \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x \right)^{***}) + C \\
 &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x (\cos x + \sin x) + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

**) 利用 1742 题的结果.

$$1832. \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x}{e^x} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x}{e^x} dx &= - \int \operatorname{arc} \operatorname{ctg} e^x d(e^{-x}) \\
 &= - e^{-x} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(e^x) - \int \frac{dx}{1 + e^{2x}} \\
 &= - e^{-x} \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(e^x) - \frac{1}{2} [2x - \ln(1 + e^{2x})]^{**}) + C. \\
 &= - e^{-x} \operatorname{arc} \operatorname{ctg}(e^x) - x + \frac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) + C.
 \end{aligned}$$

*) 利用 1759 题的结果.

$$1833. \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x} dx &= - \int \ln(\sin x) d(\operatorname{ctg} x) \\ &= - \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) + \int \operatorname{ctg}^2 x dx \\ &= - \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x) + (- \operatorname{ctg} x - x)^{*)} + C \\ &= - [x + \operatorname{ctg} x \cdot \ln(\sin x)] + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1649 题或 1751 题的结果.

$$1834. \int \frac{x dx}{\cos^2 x}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{\cos^2 x} &= \int x d(\operatorname{tg} x) = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx \\ &= x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x|^{*)} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1697 题的结果.

$$1835. \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx &= - \int x e^x d\left(\frac{1}{1+x}\right) \\ &= - \frac{x}{1+x} e^x + \int - \frac{1}{1+x} e^x (x+1) dx \\ &= - \frac{x}{1+x} e^x + e^x + C = \frac{e^x}{1+x} + C. \end{aligned}$$

下列积分的求法需要把二次三项式化成正则型, 并利用下列公式:

$$I. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{a} + C \quad (a \neq 0);$$

$$II. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C \quad (a \neq 0);$$

$$III. \int \frac{x dx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln |a^2 \pm x^2| + C;$$

$$\text{IV. } \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0);$$

$$\text{V. } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

$$\text{VI. } \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C;$$

$$\begin{aligned} \text{VII. } \int \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C \quad (a > 0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{VIII. } \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx \\ = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C. \end{aligned}$$

求下列积分:

$$1836^+. \int \frac{dx}{a + bx^2} \quad (ab \neq 0)$$

解 当 $ab > 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{a + bx^2} \\ &= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 + (\sqrt{|b|x})^2} \\ &= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left[x \sqrt{\frac{b}{a}} \right] + C; \end{aligned}$$

当 $ab < 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{a + bx^2} = \operatorname{sgn} a \cdot \int \frac{dx}{|a| - |b|x^2} \\ &= \operatorname{sgn} a \cdot \frac{1}{\sqrt{|b|}} \int \frac{d(\sqrt{|b|x})}{(\sqrt{|a|})^2 - (\sqrt{|b|x})^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{sgn} a}{2\sqrt{-ab}} \ln \left| \frac{\sqrt{|a|} + x\sqrt{|b|}}{\sqrt{|a|} - x\sqrt{|b|}} \right| + C.$$

$$1837. \int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x^2 - x + 2} &= \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x - 1}{\sqrt{7}} + C. \end{aligned}$$

$$1838. \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1} &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{3}\right)}{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \ln \left| \frac{\frac{2}{3} + \left(x - \frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3} - \left(x - \frac{1}{3}\right)} \right| + C_1 \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x - 1}{3x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1839. \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{x^4 - 2x^2 - 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^2 - (\sqrt{2} + 1)}{x^2 + (\sqrt{2} - 1)} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1840. \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x+1}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{\frac{1}{2}(2x+1) + \frac{1}{2}}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1841. \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x dx}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1} &= \int \frac{x - \cos \alpha + \cos \alpha}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d[(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha]}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \\ &\quad + \cos \alpha \cdot \int \frac{d(x - \cos \alpha)}{(x - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x \cos \alpha + 1) \\ &\quad + \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) + C \\ &\quad (a \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$1842. \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^3 dx}{x^4 - x^2 + 2} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6} \ln |x^6 - x^3 - 2| \\
&\quad - \frac{1}{18} \ln \left| \frac{\frac{3}{2} + \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2} - \left(x^3 - \frac{1}{2}\right)} \right| + C \\
&= \frac{1}{9} \ln \{ |x^3 + 1| \cdot (x^3 - 2)^2 \} + C.
\end{aligned}$$

如果本题不化成正则型来作, 则有更简单的作法, 事实上,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5 dx}{x^6 - x^3 - 2} &= \frac{1}{3} \int \frac{x^3 d(x^3)}{(x^3 - 2)(x^3 + 1)} \\
&= \frac{1}{9} \int \left(\frac{2}{x^3 - 2} + \frac{1}{x^3 + 1} \right) d(x^3) \\
&= \frac{1}{9} \ln \{ |x^3 + 1| \cdot (x^3 - 2)^2 \} + C.
\end{aligned}$$

1844. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$

解 $\int \frac{dx}{3\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 5\cos^2 x}$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{3\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 5} \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{d\left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)}{\left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\frac{1}{3} - \left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)}{\frac{1}{3} + \left(\operatorname{tg} x - \frac{4}{3}\right)} \right| + C_1 \\
&= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{3\sin x - 5\cos x}{\sin x - \cos x} \right| + C.
\end{aligned}$$

$$1845. \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x + 3} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 4 + \sec^2 \frac{x}{2}} \\ &= 2 \int \frac{d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)}{\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1\right)^2 + 4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{2} \right] + C. \end{aligned}$$

$$1846. \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} \quad (b \neq 0).$$

解 当 $b > 0$ 时,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln |x \sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}| + C;$$

当 $a > 0$ 及 $b < 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx^2}} &= \frac{1}{\sqrt{-b}} \int \frac{d(\sqrt{-bx})}{\sqrt{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{-bx})^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{-b}} \operatorname{arc} \sin \left(x \sqrt{-\frac{b}{a}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1847. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 2x - x^2}} &= \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{2 - (x+1)^2}} \\ &= \operatorname{arc} \sin \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1848. \int \frac{dx}{\sqrt{x + x^2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}} &= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}} \\ &= \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2} \right| + C. \end{aligned}$$

本题即 1687 题, 注意不同的解法及不同形式的结果.

$$1849. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - x + 2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{4}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{15}{16}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| x - \frac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \frac{x}{2} + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

1850. 证明: 若

$$y = ax^2 + bx + c (a \neq 0),$$

$$\text{则当 } a > 0 \text{ 时, } \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C;$$

$$\text{当 } a < 0 \text{ 时, } \int \frac{dx}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C.$$

证 当 $a > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| x + \frac{b}{2a} + \sqrt{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}} \right| + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{y'}{2} + \sqrt{ay} \right| + C;
\end{aligned}$$

当 $a < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{y}} &= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - \frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \int \frac{d\left(x + \frac{b}{2a}\right)}{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2} - \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{x + \frac{b}{2a}}{\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{-2a}} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \left(\frac{-y'}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \right) + C.
\end{aligned}$$

1851. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5 + x - x^2}}.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{x dx}{\sqrt{5 + x - x^2}} &= \int \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} dx \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d\left[\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{21}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
& = -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{21}}\right) + C.
\end{aligned}$$

1852. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx &= \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\
&= \sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{2} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right) \\
&+ C.
\end{aligned}$$

1853. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}.$

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{d\left(x^2 + \frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\frac{17}{16} - \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{4x^2+3}{\sqrt{17}}\right) + C.
\end{aligned}$$

$$1854. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 d(x^2)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 1) d(x^2 - 1)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 2}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 - 1)}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 2}} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ln |x^2 - 1 + \sqrt{x^4 - 2x^2 - 1}| + C. \end{aligned}$$

$$1855. \int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x + x^3}{\sqrt{1 + x^2 - x^4}} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{(1 + x^2) d(x^2)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &\quad + \frac{3}{4} \int \frac{d\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{1 + x^2 - x^4} + \frac{3}{4} \arcsin \left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1856. \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}}$$

解 作代换 $t = \frac{1}{x}$, 则

$x \sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\operatorname{sgn} t}{t^2} \sqrt{t^2 + t + 1}, dx = -\frac{dt}{t^2}$. 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}} &= -(\operatorname{sgn} t) \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + t + 1}} \\ &= -(\operatorname{sgn} t) \ln \left| t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 + t + 1} \right| + C_1 \\ &= -(\operatorname{sgn} x) \ln \left| \frac{x + 2 + 2(\operatorname{sgn} x) \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x} \right| \\ &\quad + C_1. \end{aligned}$$

故当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= -\ln \left| \frac{x + 2 + 2 \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= -\ln \left| \frac{2x}{x + 2 - 2 \sqrt{x^2 + x + 1}} \right| + C_1 \\ &= -\ln \left| \frac{2x(x + 2 + 2 \sqrt{x^2 + x + 1})}{(x + 2)^2 - 4(x^2 + x + 1)} \right| + C_1 \\ &= -\ln \left| \frac{x + 2 + 2 \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

总之, 不论 x 为正或为负, 均有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= -\ln \left| \frac{x + 2 + 2 \sqrt{x^2 + x + 1}}{x} \right| + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1850 题的结果.

$$1857. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

解 作代换 $t = \frac{1}{x}$, 则 $x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}$

$$= \operatorname{sgnt} \cdot \frac{\sqrt{-t^2 + t + 1}}{t^3}, dx = -\frac{dt}{t^2}. \text{ 于是}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 + x - 1}} &= -(\operatorname{sgnt}) \int \frac{t}{\sqrt{-t^2 + t + 1}} dt \\ &= -(\operatorname{sgnt}) \cdot \left(-\frac{1}{2} \int \frac{d(-t^2 + t + 1)}{\sqrt{-t^2 + t + 1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{-t^2 + t + 1}} \right) \\ &= -(\operatorname{sgnt}) \cdot \left(-\sqrt{-t^2 + t + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{2t - 1}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= (\operatorname{sgn} x) \cdot \left[\frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{|x|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \left(\frac{x - 2}{x \sqrt{5}} \right) \right] + C \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + x - 1}}{x} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \left(\frac{x - 2}{|x| \sqrt{5}} \right) + C. \end{aligned}$$

其存在域为 $\left| x + \frac{1}{2} \right| > \frac{\sqrt{5}}{2}$.

*) 利用 1850 题的结果.

$$1858. \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2 + 1}}.$$

解 设 $y = x + 1$, 本题即转化为 1856 题的类型. 由于解法类似, 且 $x + 1$ 的符号对结果没有影响, 故仅就

$x + 1 > 0$ 列出解法的主要步骤如下:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{dy}{y\sqrt{y^2-2y+2}} \\ &= - \int \frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{\sqrt{\frac{2}{y^2} - \frac{2}{y} + 1}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{y^2-2y+2}}{y\sqrt{2}} \right| + C_1 \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

1859. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$

解 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 则

$$(x-1)\sqrt{x^2-2} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t|t|}, dx = -\frac{1}{t^2}dt,$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} &= - \int \frac{\operatorname{sgnt} dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} \\ &= - \operatorname{sgnt} \cdot \arcsin\left(\frac{t-1}{\sqrt{2}}\right) + C \\ &= \arcsin\left(\frac{x-2}{|x-1|\sqrt{2}}\right) + C \quad (|x| > \sqrt{2}). \end{aligned}$$

1860+. $\int \frac{dx}{(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5}}$

解 设 $x+2 = \frac{1}{t}$, 则

$$(x+2)^2\sqrt{x^2+2x-5} = \frac{\sqrt{1-2t-5t^2}}{t^2|t|},$$

$$\begin{aligned}
& \text{解 } \int \sqrt{2+x+x^2} dx \\
&= \int \sqrt{\frac{7}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} d\left(x + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{2x+1}{4} \sqrt{2+x+x^2} \\
&\quad + \frac{7}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{2+x+x^2}\right) + C.
\end{aligned}$$

$$1863. \int \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} x dx.$$

$$\begin{aligned}
& \text{解 } \int \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} x dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sqrt{(x^2 + 1)^2 - 2} d(x^2 + 1) \\
&= \frac{x^2 + 1}{4} \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1 + \sqrt{x^4 + 2x^2 - 1}) + C.
\end{aligned}$$

$$1864. \int \frac{1-x+x^2}{x \sqrt{1+x-x^2}} dx.$$

解 由于

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{x \sqrt{1+x-x^2}} \\
&= -\ln \left| \frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x} \right| + C_1
\end{aligned}$$

(可仿照 1856 题求得),

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
&= \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_2,
\end{aligned}$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}} = \int \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} d\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\sqrt{1+x-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C_3,$$

所以

$$\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}} dx = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}} + \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$$

$$= -\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|$$

$$+ \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) - \sqrt{1+x-x^2} + C,$$

其中存在域为满足不等式 $1+x-x^2 > 0$ 且 $x \neq 0$ 的一切 x 值, 即 $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ 及 $x \neq 0$.

1865. $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx.$

解 $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}} dx.$

$$= \int \frac{\operatorname{sgn} x \cdot \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}} dx = \int \frac{\operatorname{sgn} x d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}}$$

$$= \operatorname{sgn} x \cdot \ln\left|x - \frac{1}{x} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2}\right| + C_1$$

$$= \ln\left|\frac{x^2 - 1 + \sqrt{x^4 + 1}}{x}\right| + C.$$

§ 2. 有理函数的积分法

利用待定系数法,求下列积分:

$$1866. \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx.$$

解 设 $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+5}$, 通分后应有
 $2x+3 \equiv A(x+5) + B(x-2).$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x=2, \text{ 得 } 7=7A, A=1;$$

$$\text{令 } x=-5, \text{ 得 } -7=-7B, B=1.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx &= \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+5} \right) dx \\ &= \ln |(x-2)(x+5)| + C. \end{aligned}$$

*) 注意,这是一种习惯的说法. 实际上,不能直接令 $x=2$ (因为上述恒等式是当 $x \neq 2, x \neq -5$ 时得出来的), 而应令 $x \rightarrow 2$ 取极限, 得 $7=7A$, 以下类似情况都作此理解.

$$1867. \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

解 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$,

通分后应有

$$x \equiv A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)$$

$$\cdot (x + 2).$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } -1 = 2A, A = -\frac{1}{2};$$

$$\text{令 } x = -2, \text{ 得 } -2 = -B, B = 2;$$

$$\text{令 } x = -3, \text{ 得 } -3 = 2C, C = -\frac{3}{2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &= \int \left[\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3} \right] dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln|x+1| + 2 \ln|x+2| - \frac{3}{2} \ln|x+3| \\ & \quad + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+2)^4}{(x+1)(x+3)^3} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1868. \int \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2} dx.$$

$$\text{解 } \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2} = x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4$$

$$- 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 + \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2},$$

$$\text{设 } \frac{-341x + 342}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}, \text{ 通分后应有}$$

$$-341x + 342 \equiv A(x-1) + B(x+2).$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x = -2, \text{ 得 } 1024 = -3A, A = -\frac{1024}{3};$$

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } 1 = 3B, B = \frac{1}{3}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{10}}{x^2 + x - 2} dx &= \int \left[x^8 - x^7 + 3x^6 - 5x^5 + 11x^4 \right. \\ &\quad \left. - 21x^3 + 43x^2 - 85x + 171 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1024}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)} \right] dx \\ &= \frac{x^9}{9} - \frac{x^8}{8} + \frac{3x^7}{7} - \frac{5x^6}{6} + \frac{11x^5}{5} - \frac{21x^4}{4} + \frac{43x^3}{3} - \frac{85x^2}{2} \\ &\quad + 171x + \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{(x+2)^{1024}} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1869. \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} &= 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} \\ &= 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}. \end{aligned}$$

设 $\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3}$, 通分后应有

$$5x^2 - 6x + 1 \equiv A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2).$$

在这恒等式中,

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } 1 = 6A, A = \frac{1}{6};$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } 9 = -2B, B = -\frac{9}{2};$$

$$\text{令 } x = 3, \text{ 得 } 28 = 3C, C = \frac{28}{3}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)} \right) dx \\
&= x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| \\
&\quad + C.
\end{aligned}$$

1870. $\int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$

解 $\frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} = 1 + \frac{-(5x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}.$

设 $\frac{-(5x^2 + 4)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} = \frac{A_1x + B_1}{x^2 + 1} + \frac{A_2x + B_2}{x^2 + 4}.$

通分后应有

$$\begin{aligned}
-(5x^2 + 4) &\equiv (A_1x + B_1)(x^2 + 4) + (A_2x \\
&\quad + B_2)(x^2 + 1).
\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & A_1 + A_2 = 0, \\
x^2 & B_1 + B_2 = -5, \\
x^1 & 4A_1 + A_2 = 0, \\
x^0 & 4B_1 + B_2 = -4.
\end{array}$$

由此, $A_1 = 0, B_1 = \frac{1}{3}, A_2 = 0, B_2 = -\frac{16}{3}.$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\
&= \int \left(1 + \frac{1}{3(x^2 + 1)} - \frac{16}{3(x^2 + 4)} \right) dx \\
&= x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.
\end{aligned}$$

$$1871. \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2}$$

解 $\frac{x}{x^3 - 3x + 2} = \frac{x}{(x-1)^2(x+2)}$
 $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$, 通分后应有
 $x \equiv A(x-1)(x+2) + B(x+2) + C(x-1)^2$.

在这恒等式中,

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } 1 = 3B, B = \frac{1}{3};$$

$$\text{令 } x = -2, \text{ 得 } -2 = 9C, C = -\frac{2}{9},$$

比较 x^2 的系数, 得 $A + C = 0$, 从而 $A = \frac{2}{9}$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{x^3 - 3x + 2} &= \int \left(\frac{2}{9(x-1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3(x-1)^2} - \frac{2}{9(x+2)} \right) dx \\ &= -\frac{1}{3(x-1)} + \frac{2}{9} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$1872. \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx.$$

解 设 $\frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-1}$, 通分后应有

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\equiv A(x+1)(x-1) + B(x-1) \\ &\quad + C(x+1)^2. \end{aligned}$$

在这恒等式中,

令 $x = -1$, 得 $2 = -2B, B = -1$;

令 $x = 1$, 得 $2 = 4C, C = \frac{1}{2}$;

比较 x^2 的系数, 得 $A + C = 1$, 从而 $A = \frac{1}{2}$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx \\ &= \int \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{2(x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x^2 - 1| + \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

1873. $\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx.$

解 $\left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 = \frac{x^2}{(x-1)^2(x-2)^2}$
 $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2}$, 通分后
应有

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x-1)(x-2)^2 + B(x-2)^2 \\ &\quad + C(x-2)(x-1)^2 + D(x-1)^2. \end{aligned}$$

在这恒等式中,

令 $x = 1$ 得 $B = 1$;

令 $x = 2$, 得 $D = 4$;

比较 x^3 及 x^2 的系数, 得

$$A + C = 0 \text{ 及 } -5A + B - 4C + D = 1;$$

由此, $A = 4, C = -4$.

于是,

$$\int \left(\frac{x}{x^2 - 3x + 2} \right)^2 dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(\frac{4}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{4}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} \right) dx \\
&= 4\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - 4\ln|x-2| - \frac{4}{x-2} \\
&\quad + C \\
&= 4\ln \left| \frac{x-1}{x-2} \right| - \frac{5x-6}{x^2-3x+2} + C.
\end{aligned}$$

1874. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} \\
&\quad + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3}, \text{通分后应有} \\
&1 \equiv A(x+2)^2(x+3)^3 \\
&\quad + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 \\
&\quad + C(x+1)(x+3)^3 \\
&\quad + D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 \\
&\quad + E(x+1)(x+2)^2(x+3) \\
&\quad + F(x+1)(x+2)^2.
\end{aligned}$$

在这恒等式中,

令 $x = -1$, 得 $1 = 8A, A = \frac{1}{8}$;

令 $x = -2$, 得 $1 = -C, C = -1$;

令 $x = -3$, 得 $1 = -2F, F = -\frac{1}{2}$.

比较 x^5, x^4 及 x^3 的系数, 得

$$\text{令 } x = 1, \text{ 得 } 1 = 8B, B = \frac{1}{8}.$$

$$\text{令 } x = -1, \text{ 得 } 1 = 4E, E = \frac{1}{4}.$$

$$\text{令 } x = 0, \text{ 得 } -A + B + C + D + E = 1;$$

$$\text{令 } x = 2, \text{ 得 } 27A + 27B + 9C + 3D + E = 1;$$

$$\text{令 } x = -2, \text{ 得 } 3A - B + 9C - 9D + 9E = 1;$$

$$\text{由此, } A = -\frac{3}{16}, C = \frac{3}{16}, D = \frac{1}{4}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^5 + x^4 - 2x^3 - 2x^2 + x + 1} \\ &= \int \left[-\frac{3}{16(x-1)} + \frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{16(x+1)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{4(x+1)^3} \right] dx \\ &= -\frac{3}{16} \ln|x-1| - \frac{1}{8(x-1)} + \frac{3}{16} \ln|x+1| \\ & \quad - \frac{1}{4(x+1)} - \frac{1}{8(x+1)} + C \\ &= \frac{3}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{3x^2 + 3x - 2}{8(x-1)(x+1)^2} + C. \end{aligned}$$

$$1876. \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

解 设 $\frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$, 通分后

应有

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 4 &\equiv (Ax + B)(x^2 + 4) \\ & \quad + (Cx + D)(x^2 + 1). \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + C = 0, \\ x^2 & B + D = 1, \\ x^1 & 4A + C = 5, \\ x^0 & 4B + D = 4. \end{array}$$

由此, $A = \frac{5}{3}, B = 1, C = -\frac{5}{3}, D = 0$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\ &= \int \left(\frac{\frac{5}{3}x + 1}{x^2 + 1} + \frac{-\frac{5}{3}x}{x^2 + 4} \right) dx \\ &= \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} + \text{arc } \text{tg} x + C. \end{aligned}$$

本题如不直接用待定系数法将被积函数进行分解, 而使用其它技巧, 也可有更简单的方法. 事实上,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx \\ &= \int \frac{x^2 + 4}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx + 5 \int \frac{x dx}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} \\ &= \int \frac{dx}{x^2 + 1} + \frac{5}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 4)(x^2 + 1)} \\ &= \text{arc } \text{tg} x + \frac{5}{6} \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) d(x^2) \\ &= \text{arc } \text{tg} x + \frac{5}{6} \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4} + C. \end{aligned}$$

1877. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

解 设 $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$, 通分

后应有

$$1 \equiv A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂的系数, 得

$$\begin{array}{l} x^2 \mid A + B = 0, \\ x^1 \mid B + C = 0, \\ x^0 \mid A + C = 1. \end{array}$$

$$\text{由此, } A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \int \left[\frac{1}{2(x+1)} - \frac{x-1}{2(x^2+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{4} \ln(x^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2+1} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C. \end{aligned}$$

$$1878. \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \text{由于} \frac{1}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} \\ &= \frac{(x^2 - 4x + 5) - (x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} \\ &= \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 4x + 5}, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} \\ &= \int \left[\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 4x + 5} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{x-2} - \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2 + 1} \\
&= -\frac{1}{x-2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x-2) + C.
\end{aligned}$$

本题若用待定系数法,较麻烦一些,也可获得同样的结果,此处从略.

1879. $\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$

解 设 $\frac{x}{(x-1)^2(x^2+2x+2)}$
 $= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$
 $+ \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}$, 通分后应有

$$\begin{aligned}
x &\equiv A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x^2+2x+2) \\
&\quad + (Cx+D)(x-1)^2.
\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & A + C = 0, \\
x^2 & A + B - 2C + D = 0, \\
x^1 & 2B + C - 2D = 1, \\
x^0 & -2A + 2B + D = 0.
\end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{25}, B = \frac{1}{5}, C = -\frac{1}{25}, D = -\frac{8}{25}$.

于是,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x dx}{(x-1)^2(x^2+2x+2)} \\
&= \int \left[\frac{1}{25(x-1)} + \frac{1}{5(x-1)^2} - \frac{x+8}{25(x^2+2x+2)} \right] dx \\
&= \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{7}{25} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} \\
& = \frac{1}{25} \ln|x-1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50} \ln(x^2+2x+2) \\
& \quad - \frac{7}{25} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) + C \\
& = \frac{1}{50} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+2} - \frac{1}{5(x-1)} \\
& \quad - \frac{7}{25} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+1) + C.
\end{aligned}$$

1880. $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

解 设 $\frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}$
 $= \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1},$

通分后应有

$$\begin{aligned}
1 & \equiv A(x+1)(1+x+x^2) + Bx(1+x+x^2) \\
& \quad + x(x+1)(Cx+D).
\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l}
x^3 & A+B+C=0, \\
x^2 & 2A+B+C+D=0, \\
x^1 & 2A+B+D=0, \\
x^0 & A=1.
\end{array}$$

由此, $A=1, B=-1, C=0, D=-1$.

于是,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)} \\
& = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2} \right) dx
\end{aligned}$$

$$= \ln \left| \frac{x}{1+x} \right| - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

本题也可以不用待定系数法. 事实上,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)} \\ &= \frac{1}{(x+x^2)(1+x+x^2)} \\ &= \frac{1}{x+x^2} - \frac{1}{1+x+x^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+x^2}. \end{aligned}$$

1881. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$

解 设 $\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$, 通分后应有

$$1 \equiv A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l} x^2 \mid A+B=0, \\ x^1 \mid -A+B+C=0, \\ x^0 \mid A+C=1. \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{2}{3}$,

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left[\frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d(x-\frac{1}{2})}{(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1882. $\int \frac{x dx}{x^3-1}.$

解 设 $\frac{x}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$, 通分后应有

$$x \equiv A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^2 & A+B=0, \\ x^1 & A-B+C=1, \\ x^0 & A-C=0 \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3}.$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^3-1} dx &= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{x-1}{3(x^2+x+1)} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C. \end{aligned}$$

1883. $\int \frac{dx}{x^4-1}.$

解 $\int \frac{dx}{x^4-1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + C.$$

本题若用待定系数法,则较麻烦.从略.

1884. $\int \frac{dx}{x^4 + 1}$

解 本题如用待定系数法来作,主要步骤如下:

$$\text{设 } \frac{1}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 - x\sqrt{2} + 1},$$

则经计算可求得 $A = \frac{\sqrt{2}}{4}, B = \frac{1}{2}, C = -\frac{\sqrt{2}}{4},$

$D = \frac{1}{2}.$ 于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 + 1} &= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} dx \\ &+ \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &- \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ &+ \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} [\ln(x^2 + x\sqrt{2} + 1) - \ln(x^2 - x\sqrt{2} + 1)] \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \left[\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \right] + C \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} \right) + C.
\end{aligned}$$

如应用下列解法,则更简单些.

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + 1} dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} \right)^{**} \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 - x\sqrt{2} + 1^{**}}{x^2 + x\sqrt{2} + 1} + C_1,
\end{aligned}$$

注意到 $\operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} \right)$, 最后
即得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^4 + 1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x\sqrt{2}}{1 - x^2} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1712 题的结果.

**) 利用 1713 题的结果.

1885. $\int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1}$.

$$\begin{aligned}
& + C_1 \\
& = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2} \right) + C_1 \\
& = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} \right) + C.
\end{aligned}$$

如不用待定系数法解本题,则更简单些,解法与上题类似:

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{x^4 + x^2 + 1} \\
& = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \\
& = \frac{1}{2} \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{x^2 + 1 + \frac{1}{x^2}} dx \\
& = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 3} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 1} \\
& = \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x^2 - 1}{x\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} + C.
\end{aligned}$$

1886. $\int \frac{dx}{x^6 + 1}$.

解 本题如用待定系数法来作,运算较麻烦,经计算可得

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^6 + 1} & = \frac{1}{3(x^2 + 1)} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 + x\sqrt{3} + 1} \\
& \quad + \frac{-\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{3}}{x^2 - x\sqrt{3} + 1},
\end{aligned}$$

积分步骤与 1884 题与 1885 题完全类似,不再详解,其

结果为 $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}(x^3)$

$$+ \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.$$

本题如不用待定系数法来作,则更简单些.下面列举两种解法:

解法一:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^6 + 1} &= \frac{1}{2} \int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^4 - 1}{x^6 + 1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2 + (x^4 - x^2 + 1)}{x^6 + 1} dx \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^6 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{d(x^3)}{1 + (x^3)^2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}x - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} \\ &= \frac{1}{6} \operatorname{arctg}(x^3) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}x + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - \sqrt{3} + 1} \\ &\quad + C. \end{aligned}$$

解法二:

仿照 1881 题的分解法,可得

$$\frac{1}{x^6 + 1} = \frac{1}{3(x^2 + 1)} - \frac{x^2 - 2}{3(x^4 - x^2 + 1)}.$$

于是,

$$\int \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \frac{1}{3} \int \frac{(x^2 - 2)dx}{x^4 - x^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} \int \frac{(x^2 + 1) + (x^2 - 1)}{x^4 - x^2 + 1} dx \\
&\quad + \frac{1}{3} \int \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{x^4 - x^2 + 1} dx \\
&= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \int \frac{x^2 + 1}{x^4 - x^2 + 1} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1}{x^4 - x^2 + 1} dx \\
&= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3} \\
&= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^2 - 1}{x}\right) \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.
\end{aligned}$$

两种答案形式不同,实质上是一致的.

1887. $\int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)}.$

解 设 $\frac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{x^2-x+1},$

通分后应有

$$\begin{aligned}
1 &\equiv A(x+1)(x^2+1)(x^2-x+1) + B(x^2+1) \\
&\quad (x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)^2(x^2-x+1) \\
&\quad + (Ex+F)(x+1)^2(x^2+1).
\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,得

$$\begin{array}{l}
 x^5 \mid A + C + E = 0, \\
 x^4 \mid B + C + D + 2E + F = 0, \\
 x^3 \mid A + D + 2E + 2F - B = 0, \\
 x^2 \mid A + 2B + C + 2E + 2F = 0, \\
 x^1 \mid -B + C + D + E + 2F = 0, \\
 x^0 \mid A + B + D + F = 1.
 \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{6}$, $C = 0$, $D = \frac{1}{2}$, $E = -\frac{1}{3}$,
 $F = 0$.

于是,

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{(1+x)(1+x^2)(1+x^3)} \\
 &= \int \left[\frac{1}{3(x+1)} + \frac{1}{6(x+1)^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2(x^2+1)} - \frac{x}{3(x^2-x+1)} \right] dx \\
 &= \frac{1}{3} \ln|1+x| - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \\
 & \quad - \frac{1}{6} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} - \frac{1}{6} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
 &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \\
 & \quad - \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

1888. $\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$

解 设 $\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)} \\
&= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1},
\end{aligned}$$

通分后应有

$$\begin{aligned}
1 \equiv & A(x^2+x+1)(x^2-x+1) + (Bx+C)(x-1)(x^2-x+1) \\
& + (Dx+E)(x-1)(x^2+x+1).
\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l}
x^4 & A + B + D = 0, \\
x^3 & -2B + C + E = 0, \\
x^2 & A + 2B - 2C = 0 \\
x^1 & -B + 2C - D = 0, \\
x^0 & A - C - E = 1.
\end{array}$$

因此, $A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{1}{6}, D = 0, E = -\frac{1}{2}$,

于是,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} \\
&= \int \left[\frac{1}{3(x-1)} - \frac{2x+1}{6(x^2+x+1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2(x^2-x+1)} \right] dx \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + C.
\end{aligned}$$

1889. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1}$.

解 设 $\frac{x^2}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2}$

+ $\frac{Cx + D}{x^2 + x + \frac{1}{2}}$, 通分后应有

$$x^2 \equiv (Ax + B)(x^2 + x + \frac{1}{2}) + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & A + C = 0, \\ x^2 & A + B + 2C + D = 1, \\ x^1 & \frac{A}{2} + B + 2C + 2D = 0, \\ x^0 & \frac{B}{2} + 2D = 0. \end{array}$$

由此, $A = \frac{4}{5}, B = \frac{12}{5}, C = -\frac{4}{5}, D = -\frac{3}{5}$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 dx}{x^4 + 3x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 3x + 1} \\ &= \int \left[\frac{4(x+3)}{5(x^2 + 2x + 2)} - \frac{4x+3}{5(x^2 + x + \frac{1}{2})} \right] dx \\ &= \frac{2}{5} \int \frac{(2x+2)dx}{x^2 + 2x + 2} + \frac{8}{5} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} \\ & \quad - \frac{2}{5} \int \frac{(2x+1)dx}{x^2 + x + \frac{1}{2}} - \frac{1}{5} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5} \ln \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + x + \frac{1}{2}} + \frac{8}{5} \operatorname{arctg}(x + 1) - \frac{2}{5} \operatorname{arctg}(2x + 1) + C.$$

1890. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

为有理函数?

解 设 $\frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x-1} + \frac{E}{(x-1)^2},$

通分后应有

$$ax^2 + bx + c \equiv Ax^2(x-1)^2 + Bx(x-1)^2 + C(x-1)^2 + Dx^3(x-1) + Ex^3.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^4 & A + D = 0, \\ x^3 & -2A + B - D + E = 0, \\ x^2 & A - 2B + C = a \\ x^1 & B - 2C = b, \\ x^0 & C = c. \end{array}$$

由此, $A = a + 2b + 3c, B = b + 2c, C = c,$

$$D = -(a + 2b + 3c), E = a + b + c.$$

当 $A = D = 0$, 即 $a + 2b + 3c = 0$ 时, 积分

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

为有理函数.

利用奥斯特洛格拉得斯基方法^{*}, 计算积分:

$$1891. \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } Q &= (x-1)^2(x+1)^3, \\ Q_1 &= (x-1)(x+1)^2 \\ &= x^3 + x^2 - x - 1, \\ Q_2 &= (x-1)(x+1) \\ &= x^2 - 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{设 } \frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3} &= \left(\frac{Ax^2 + Bx + C}{x^3 + x^2 - x - 1} \right)' + \frac{Dx + E}{x^2 - 1}, \text{ 从而} \\ x &\equiv (2Ax + B)(x-1)(x+1) - (3x-1) \\ &\quad \cdot (Ax^2 + Bx + C) + (Dx + E)(x-1)(x+1)^2. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

^{*} 所谓奥氏方法, 是指关于有理真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分, 可以借助代数方法来分离成一个真分式与另一个真分式积分的和, 使得在新的被积真分式函数中, 其分母次数达到最低状态, 也即在公式

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx \quad (1)$$

中, 如果 $P(x), Q(x)$ 已知, 且设分母 $Q(x)$ 可以分解成一次与二次类型的实因式:

$$Q(x) = (x-a)^k \cdots (x^2 + px + q)^m \cdots,$$

其中 k, \dots, m, \dots 是自然数. 在公式(1)的右端分母已知, 形如:

$$Q_1(x) = (x-a)^{k-1} \cdots (x^2 + px + q)^{m-1} \cdots,$$

$$Q_2(x) = (x-a) \cdots (x^2 + px + q) \cdots.$$

且满足 $Q_1(x) \cdot Q_2(x) = Q(x)$. 而 $P_1(x)$ 和 $P_2(x)$ 为相应比 $Q_1(x)$ 和 $Q_2(x)$ 更低次的多项式, 一般可用待定系数法求得. 这种利用公式(1)来求积分的方法, 就是所谓的奥斯特洛格拉得斯基方法. 详细可以参见 Г. М. 菲赫金哥尔茨著(北大译), 微积分学教程, 第二卷一分册, 第 264 目. ———《题解》编者注

$$\begin{array}{l|l} x^4 & D = 0, \\ x^3 & -A + D + E = 0, \\ x^2 & A - 2B - D + E = 0, \\ x^1 & -2A - 3C + B - D - E = 1, \\ x^0 & -B + C - E = 0. \end{array}$$

由此, $A = -\frac{1}{8}$, $B = -\frac{1}{8}$, $C = -\frac{1}{4}$, $D = 0$,

$$E = -\frac{1}{8}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x dx}{(x-1)^2(x+1)^3} \\ &= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} - \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x^2-1} \\ &= -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

1892. $\int \frac{dx}{(x^3+1)^2}$

解 $Q = (x+1)^2(x^2-x+1)^2$,

$$Q_1 = Q_2 = x^3 + 1.$$

设 $\frac{1}{(x^3+1)^2} = \left(\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} \right)' + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3+1}$, 从而

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (2Ax+B)(x^3+1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) \\ &\quad + (Dx^2+Ex+F)(x^3+1). \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^5 & E = 0, \\ x^4 & -A + F = 0, \\ x^3 & -2B + 2E = 0, \\ x^2 & 3A - 3C + 2F = 0, \\ x^1 & 2B - 4D + E = 0, \\ x^0 & C + F = 1. \end{array}$$

由此, $A = \frac{3}{8}, B = 0, C = \frac{5}{8}, D = 0, E = 0, F = \frac{3}{8}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3} &= \frac{x(3x^2 + 5)}{8(x^2 + 1)^3} + \frac{3}{8} \int \frac{dx}{x^2 + 1} \\ &= \frac{x(3x^2 + 5)}{8(x^2 + 1)^3} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

1894. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}$.

解 $Q = (x^2 + 2x + 2)^2, Q_1 = Q_2 = x^2 + 2x + 2$.

设 $\frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 2x + 2} \right)' + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 2}$,

从而

$$\begin{aligned} x^2 &\equiv A(x^2 + 2x + 2) - 2(x + 1)(Ax + B) \\ &\quad + (Cx + D)(x^2 + 2x + 2). \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & C = 0, \\ x^2 & -A + 2C + D = 1, \\ x^1 & -2B + 2C + 2D = 0, \\ x^0 & 2A - 2B + 2D = 0. \end{array}$$

由此, $A = 0, B = 1, C = 0, D = 1$.

于是,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} \\
& + \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \\
& = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} \\
& = \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \operatorname{arctg}(x+1) + C.
\end{aligned}$$

本题如不用奥斯特洛格拉得斯基方法, 则更容易得出上述结果. 事实上,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\
& = \int \frac{(x^2 + 2x + 2) - (2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx \\
& = \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} - \int \frac{(2x + 2) dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\
& = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + 1} - \int \frac{d(x^2 + 2x + 2)}{(x^2 + 2x + 2)^2} \\
& = \operatorname{arctg}(x+1) + \frac{1}{x^2 + 2x + 2} + C.
\end{aligned}$$

1895. $\int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2}$.

解 $Q = (x^4 + 1)^2, Q_1 = Q_2 = x^4 + 1,$

设 $\frac{1}{(x^4 + 1)^2} = \left(\frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 + 1} \right) + \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4 + 1}$, 从而

$$1 \equiv (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4 + 1) - 4x^3(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + (Ex^3 + Fx^2 + Gx + H)(x^4 + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l}
 x^7 & E = 0, \\
 x^6 & -A + F = 0, \\
 x^5 & -2B + G = 0, \\
 x^4 & -3C + H = 0, \\
 x^3 & -4D + E = 0, \\
 x^2 & 3A + F = 0, \\
 x^1 & 2B + G = 0, \\
 x^0 & C + H = 1.
 \end{array}$$

由此, $A = 0, B = 0, C = \frac{1}{4}, D = 0, E = 0, F = 0,$

$$G = 0, H = \frac{3}{4}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x^4 + 1)^2} &= \frac{x}{4(x^4 + 1)} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^4 + 1} \\
 &= \frac{x}{4(x^4 + 1)} + \frac{3}{16\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{2} + 1}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} \\
 &\quad - \frac{3}{8\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1} + C
 \end{aligned}$$

*) 利用 1884 题的结果.

1896. $\int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} dx.$

解 $Q = (x-1)(x^2 + x + 1)^2, Q_1 = x^2 + x + 1,$

$$Q_2 = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

设 $\frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2} = \left(\frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} \right)$
 $+ \frac{Cx^2 + Dx + E}{(x-1)(x^2 + x + 1)},$ 从而

$$x^2 + 3x - 2 \equiv A(x-1)(x^2+x+1) - (2x+1) \\ \cdot (Ax+B)(x-1) + (Cx^2+Dx+E)(x^2+x+1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^4 & C = 0, \\ x^3 & -A + C + D = 0, \\ x^2 & A - 2B + C + D + E = 1, \\ x^1 & A + B + D + E = 3, \\ x^0 & -A + B + E = -2. \end{array}$$

由此, $A = \frac{5}{3}, B = \frac{2}{3}, C = 0, D = \frac{5}{3}, E = -1.$

再将 $\frac{\frac{5}{3}x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ 分解, 可得

$$\frac{\frac{5}{3}x - 1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{2}{9(x-1)} \\ - \frac{2x-11}{9(x^2+x+1)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^2 + 3x - 2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} dx \\ &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9} \int \frac{dx}{x-1} \\ & \quad - \frac{1}{9} \int \frac{2x-11}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9} \ln|x-1| \\ & \quad - \frac{1}{9} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{4}{3} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C.$$

1897. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^3}$.

解 $Q = (x^4-1)^3, Q_1 = (x^4-1)^2, Q_2 = x^4-1$.

设 $\frac{1}{(x^4-1)^3} = \left[\frac{P(x)}{(x^4-1)^2} \right]' + \frac{P_1(x)}{x^4-1}$, 其中

$$P(x) = Ax^7 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H,$$

$$P_1(x) = A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1,$$

从而利用待定系数法, 解出 $A=0, B=0, C=\frac{7}{32}$,

$D=0, E=0, F=0, G=-\frac{11}{32}, H=0, A_1=0,$

$B_1=0, C_1=0, D_1=\frac{21}{32}$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^4-1)^3} &= \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{32} \int \frac{dx}{x^4-1} \\ &= \frac{7x^5-11x}{32(x^4-1)^2} + \frac{21}{128} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{21}{64} \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1883 题的结果.

分出下列积分的代数部分:

1898. $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx$.

解 设 $\int \frac{x^2+1}{(x^4+x^2+1)^2} dx$

$$= \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 + x^2 + 1} + \int \frac{A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$$

上述等式右端的积分为非代数部分,因此,只需要求出 A, B, C, D 就可以了. 等式两端求导并通分,得

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &\equiv (3Ax^2 + 2Bx + C)(x^4 + x^2 + 1) \\ &- (4x^3 + 2x)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \\ &+ (A_1x^3 + B_1x^2 + C_1x + D_1)(x^4 + x^2 + 1). \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,解出 $A = \frac{1}{6}, B = 0, C = \frac{1}{3}, D = 0, A_1 = 0, B_1 = \frac{1}{6}, C_1 = 0, D_1 = \frac{2}{3}$. 因此,所求积分的代数部分为

$$\frac{x^3 + 2x}{6(x^4 + x^2 + 1)}.$$

$$1899^+. \int \frac{dx}{(x^3 + x + 1)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad &\text{设} \int \frac{dx}{(x^3 + x + 1)^3} \\ &= \frac{Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F}{(x^3 + x + 1)^2} \\ &+ \int \frac{Gx^2 + Hx + L}{x^3 + x + 1} dx. \end{aligned}$$

对上述等式两端求导再通分,得

$$\begin{aligned} 1 &\equiv (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E) \\ &(x^3 + x + 1) - 2(3x^2 + 1)(Ax^5 + Bx^4 \\ &+ Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) + (Gx^2 + Hx + L) \\ &(x^3 + x + 1)^2. \end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A = -\frac{243}{961}, B = \frac{357}{1922}, C = -\frac{405}{961}, D = -\frac{315}{1922}, E = \frac{156}{961}, F = -\frac{224}{961}, G = 0, H = -\frac{243}{961}, L = \frac{357}{961}$. 因此, 所求积分的代数部分为

$$-\frac{486x^5 - 357x^4 + 810x^3 + 315x^2 - 312x + 448}{1922(x^3 + x + 1)^2}$$

1900. $\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx.$

解 设 $\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} dx$
 $= \frac{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E}{x^5 + x + 1}$
 $+ \int \frac{Fx^4 + Gx^3 + Hx^2 + Lx + M}{x^5 + x + 1} dx.$

对上述等式两端求导再通分, 得

$$4x^5 - 1 \equiv (4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D)(x^5 + x + 1) - (5x^4 + 1)(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E) + (Fx^4 + Gx^3 + Hx^2 + Lx + M)(x^5 + x + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A = 0, B = 0, C = 0, D = -1, E = 0, F = 0, G = 0, H = 0, L = 0, M = 0$. 因此, 所求积分的代数部分为

$$-\frac{x}{x^5 + x + 1} \text{ (全部积分).}$$

1901. 计算积分

$$\int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}.$$

解 $Q = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 + x + 1)^2,$

$$Q_1 = Q_2 = x^2 + x + 1.$$

设 $\frac{1}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1}$

$$= \left(\frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} \right)' + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}, \text{ 从而}$$

$$1 \equiv A(x^2 + x + 1) - (2x + 1)(Ax + B) + (Cx + D)(x^2 + x + 1).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 解出 $A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3},$

$C = 0, D = \frac{2}{3}.$ 于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} \\ &= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \\ &= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{2}{3} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{2x + 1}{3(x^2 + x + 1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C. \end{aligned}$$

1902⁺. 在甚么条件下, 积分

$$\int \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(\alpha x^2 + 2bx + c)^2} dx$$

为有理函数?

解 (1) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2 - ac = 0$ 时, $\alpha x^2 + 2bx + c = a(x - x_0)^2$, 其中 x_0 为实数. 此时

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(\alpha x^2 + 2bx + c)^2}$$

$$= \frac{\alpha(x-x_0)^2 + 2\alpha x_0(x-x_0) + \alpha x_0^2 + 2\beta(x-x_0) + 2\beta x_0 + \gamma}{a^2(x-x_0)^4}$$

$$= \frac{\alpha}{a^2(x-x_0)^2} + \frac{2\alpha x_0 + 2\beta}{a^2(x-x_0)^3} + \frac{\alpha x_0^2 + 2\beta x_0 + \gamma}{a^2(x-x_0)^4}$$

从而积分为有理函数.

(2) 当 $a \neq 0$ 且 $b^2 - ac \neq 0$ 时, 则设

$$\frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2} = \left(\frac{Ax + B}{ax^2 + 2bx + c} \right)' + \frac{Cx + D}{ax^2 + 2bx + c},$$

从而

$$\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma \equiv A(ax^2 + 2bx + c) - (2ax + 2b)$$

$$(Ax + B) + (Cx + D)(ax^2 + 2bx + c).$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 可解得 $C = 0$,

$$D = \frac{2b\beta - a\gamma - ca}{2(b^2 - ac)}. \text{ 从而当 } a\gamma + ca = 2b\beta \text{ 时 } D = 0,$$

此时积分为有理函数.

(3) 当 $a = 0, b \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma}{(ax^2 + 2bx + c)^2} \\ &= \frac{\alpha \left(x + \frac{c}{2b}\right)^2 - \frac{ac}{b} \left(x + \frac{c}{2b}\right) + \frac{ac^2}{4b^2} + 2\beta \left(x + \frac{c}{2b}\right) - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2 \left(x + \frac{c}{2b}\right)^2} \\ &= \frac{\alpha}{4b^2} + \frac{2\beta - \frac{ac}{b}}{4b^2 \left(x + \frac{c}{2b}\right)} + \frac{\frac{ac^2}{4b^2} - \frac{\beta c}{b} + \gamma}{4b^2 \left(x + \frac{c}{2b}\right)^2}. \end{aligned}$$

$$1905. \int \frac{x^3 dx}{x^8 + 3}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8 + 3} &= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2 + 3} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x^4}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

$$1906. \int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2 + x}{x^6 + 1} dx &= \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2)^3 + 1} \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(x^3) + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 - x^2 + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}} \right) \right]^{*}) + C \\ &= \frac{1}{3} \operatorname{arc\,tg}(x^3) + \frac{1}{12} \ln \frac{(x^2 + 1)^2}{x^4 - x^2 + 1} \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x^2 - 1}{\sqrt{3}} \right) + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1881 题的结果.

$$1907. \int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^4 - 3}{x(x^8 + 3x^4 + 2)} dx &= \int \frac{\left(1 - \frac{3}{x^4}\right) dx}{x^5 \left(1 + \frac{3}{x^4} + \frac{2}{x^8}\right)} \\ &= \int \frac{-\frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{x^4}\right) d\left(\frac{1}{x^4}\right)}{\frac{2}{x^8} + \frac{3}{x^4} + 1} \\ &= -\frac{1}{4} \int \left[\frac{5}{\frac{2}{x^4} + 1} - \frac{4}{\frac{1}{x^4} + 1} \right] d\left(\frac{1}{x^4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{5}{8} \ln\left(\frac{2}{x^4} + 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x^4} + 1\right) + C \\
&= \frac{5}{8} \ln \frac{x^4}{x^4 + 2} - \ln \frac{x^4}{x^4 + 1} + C.
\end{aligned}$$

1908. $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2}$

解 $\int \frac{x^4 dx}{(x^{10} - 10)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5)}{[(x^5 - \sqrt{10})(x^5 + \sqrt{10})]^2} \\
&= \frac{1}{200} \int \frac{[(x^5 + \sqrt{10}) - (x^5 - \sqrt{10})]^2 d(x^5)}{[(x^5 - \sqrt{10})(x^5 + \sqrt{10})]^2} \\
&= \frac{1}{200} \int \left(\frac{1}{x^5 - \sqrt{10}} - \frac{1}{x^5 + \sqrt{10}} \right)^2 d(x^5) \\
&= \frac{1}{200} \int \frac{d(x^5 - \sqrt{10})}{(x^5 - \sqrt{10})^2} - \frac{1}{100} \int \frac{d(x^5)}{(x^5)^2 - 10} \\
&\quad + \frac{1}{200} \int \frac{d(x^5 + \sqrt{10})}{(x^5 + \sqrt{10})^2} \\
&= -\frac{1}{200(x^5 - \sqrt{10})} - \frac{1}{200\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + \sqrt{10}} \right| \\
&\quad - \frac{1}{200(x^5 + \sqrt{10})} + C \\
&= -\frac{1}{100} \left[\frac{x^5}{x^{10} - 10} + \frac{1}{2\sqrt{10}} \ln \left| \frac{x^5 - \sqrt{10}}{x^5 + \sqrt{10}} \right| \right] + C.
\end{aligned}$$

1909. $\int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}$

解 $\int \frac{x^{11}}{x^8 + 3x^4 + 2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{x^8 d(x^4)}{(x^4 + 1)(x^4 + 2)}$

$$= \frac{1}{4} \int \left[1 - \frac{3x^4 + 2}{(x^4 + 1)(x^4 + 2)} \right] d(x^4)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int \left(1 + \frac{1}{x^4 + 1} - \frac{4}{x^4 + 2} \right) d(x^4) \\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4 + 1}{(x^4 + 2)^4} + C.
\end{aligned}$$

1910. $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2}$.

解 $\int \frac{x^9 dx}{(x^{10} + 2x^5 + 2)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{x^5 d(x^5)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{5} \int \frac{(x^5 + 1)d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} \\
&= \frac{1}{10} \int \frac{d[(x^5 + 1)^2 + 1]}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 + 1)}{[(x^5 + 1)^2 + 1]^2} \\
&= -\frac{1}{10[(x^5 + 1)^2 + 1]} - \frac{1}{5} \left\{ \frac{x^5 + 1}{2[(x^5 + 1)^2 + 1]} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^5 + 1) \right\} + C \\
&= \frac{x^5 + 2}{10(x^{10} + 2x^5 + 2)} - \frac{1}{10} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^5 + 1) + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1817 题的结果.

1911. $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx$.

解 当 $n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx &= \int \frac{x^n \cdot x^{n-1} dx}{x^n + 1} \\
&= \frac{1}{n} \int \frac{x^n d(x^n)}{x^n + 1} \\
&= \frac{1}{n} \int \left(1 - \frac{1}{x^n + 1} \right) d(x^n) \\
&= \frac{1}{n} (x^n - \ln|x^n + 1|) + C;
\end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时,

$$\int \frac{x^{2n-1}}{x^n + 1} dx = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2} \ln|x| + C.$$

1912. $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx.$

解 当 $n \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx &= \int \frac{x^{2n} \cdot x^{n-1} dx}{(x^{2n} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{n} \int \frac{x^{2n} d(x^n)}{(x^{2n} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{n} \int \frac{(x^{2n} + 1) - 1}{(x^{2n} + 1)^2} d(x^n) \\ &= \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{x^{2n} + 1} - \frac{1}{n} \int \frac{d(x^n)}{(x^{2n} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{n} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^n) - \frac{1}{n} \left[\frac{x^n}{2(x^{2n} + 1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^n) \right]^* + C \\ &= \frac{1}{2n} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^n) - \frac{x^n}{x^{2n} + 1} \right] + C. \end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时,

$$\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n} + 1)^2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x} = \frac{1}{4} \ln|x| + C.$$

*) 利用 1817 题的结果.

1913. $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)}$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x(x^{10} + 2)} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10} + 2} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{20} \int \frac{d(x^{10} + 2)}{x^{10} + 2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x| - \frac{1}{20} \ln(x^{10} + 2) + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{20} \ln \frac{x^{10}}{x^{10} + 2} + C.$$

1914. $\int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)^2}.$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^{10} + 1)^2} &= \frac{x^{10} + 1 - x^{10}}{x(x^{10} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{x(x^{10} + 1)} - \frac{x^9}{(x^{10} + 1)^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10} + 1} - \frac{x^9}{(x^{10} + 1)^2}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x(x^{10} + 1)^2} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x^9}{x^{10} + 1} - \frac{x^9}{(x^{10} + 1)^2} \right) dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10} + 1)}{x^{10} + 1} - \frac{1}{10} \int \frac{d(x^{10} + 1)}{(x^{10} + 1)^2} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{10} \ln(x^{10} + 1) + \frac{1}{10(x^{10} + 1)} + C \\ &= \frac{1}{10} \ln \frac{x^{10}}{x^{10} + 1} + \frac{1}{10(x^{10} + 1)} + C. \end{aligned}$$

1915. $\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx.$

解 $\int \frac{1 - x^7}{x(1 + x^7)} dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2x^6}{1 + x^7} \right) dx$

$$\begin{aligned} &= \ln|x| - \frac{2}{7} \int \frac{d(1 + x^7)}{1 + x^7} \\ &= \ln|x| - \frac{2}{7} \ln|1 + x^7| + C \\ &= \frac{1}{7} \ln \frac{|x|^7}{(1 + x^7)^2} + C. \end{aligned}$$

1916. $\int \frac{x^4 - 1}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)} dx.$

$$\begin{aligned}
& \text{解} \quad \int \frac{x^4 - 1}{x(x^4 - 5)(x^5 - 5x + 1)} dx \\
&= \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 - 5x)}{(x^5 - 5x)(x^5 - 5x + 1)} \\
&= \frac{1}{5} \int \left(\frac{1}{x^5 - 5x} - \frac{1}{x^5 - 5x + 1} \right) d(x^5 - 5x) \\
&= \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 - 5x)}{x^5 - 5x} - \frac{1}{5} \int \frac{d(x^5 - 5x + 1)}{x^5 - 5x + 1} \\
&= \frac{1}{5} \ln \left| \frac{x(x^4 - 5)}{x^5 - 5x + 1} \right| + C.
\end{aligned}$$

1917. $\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx.$

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} &= \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2 - x^2} \\
&= \frac{x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} \right),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2 + x + 1} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C, \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x \sqrt{3}} + C.
\end{aligned}$$

$$1918. \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x^2 - 1}{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} dx \\ &= \int \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) dx}{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) + 1} \\ &= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1} \\ &= \int \frac{d\left(x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{5}{4}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}}{x + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \ln \frac{2x^2 + (1 - \sqrt{5})x + 2}{2x^2 + (1 + \sqrt{5})x + 2} + C. \end{aligned}$$

$$1919. \int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x^5 - x}{x^8 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2)^2 - 1}{(x^2)^4 + 1} d(x^2) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^4 - x^2\sqrt{2} + 1}{x^4 + x^2\sqrt{2} + 1} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1713 题的结果.

$$1920. \int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx &= \int \frac{(x^4 - x^2 + 1) + x^2}{x^6 + 1} dx \\
 &= \int \frac{x^4 - x^2 + 1}{(x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)} dx + \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 1} \\
 &= \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2 + 1} \\
 &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg}(x^3) + C.
 \end{aligned}$$

1921. 试导出计算积分

$$I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} \quad (a \neq 0)$$

的递推公式.

利用这个公式计算

$$I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^3}.$$

解 由于

$$\begin{aligned}
 4a(ax^2 + bx + c) &= (2ax + b)^2 + (4ac - b^2) \\
 &= t^2 + \Delta, \text{ 其中 } t = 2ax + b, \Delta = 4ac - b^2. \text{ 于是}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \int \frac{(4a)^n dx}{[(2ax + b)^2 + \Delta]^n} \\
 &= 2^{2n-1} a^{n-1} \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n}.
 \end{aligned}$$

当 $\Delta \neq 0$ 时, 对于积分 $\int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n}$ 施用分部积分法, 即有

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n} &= \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + \Delta)^{n+1}} \\
 &= \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n \int \frac{(t^2 + \Delta) - \Delta}{(t^2 + \Delta)^{n+1}} dt \\
 &= \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n} - 2n\Delta \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^{n+1}}.
 \end{aligned}$$

若令 $\bar{I}_n = \int \frac{dt}{(t^2 + \Delta)^n}$, 则得

$$\bar{I}_n = \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + 2n\bar{I}_n - 2n\Delta\bar{I}_{n+1},$$

或 $\bar{I}_{n+1} = \frac{1}{2n\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2 + \Delta)^n} + \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{I}_n,$

$$\begin{aligned} \text{从而 } \bar{I}_n &= \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2 + \Delta)^{n-1}} \\ &\quad + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \bar{I}_{n-1}. \end{aligned}$$

代入 I_n , 即得

$$\begin{aligned} I_n &= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \cdot \left\{ \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{t}{(t^2 + \Delta)^{n-1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \bar{I}_{n-1} \right\} \\ &= 2^{2n-1} \cdot a^{n-1} \left\{ \frac{1}{2(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(4a)^{n-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{1}{\Delta} \cdot \frac{2a}{(4a)^{n-1}} \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} \right\} \\ &= \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}, \end{aligned}$$

最后得递推公式

$$I_n = \frac{1}{(n-1)\Delta} \cdot \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{\Delta} I_{n-1}.$$

当 $\Delta = 0$ 时, 则有

代入 I , 即得

$$I = \frac{1}{(b-a)^{m+n-1}} \int \frac{(1-t)^{m+n-2}}{t^m} dt \quad (a \neq b).$$

将 $(1-t)^{m+n-2}$ 展开, 即可分项积分求得 I .

如果 $b = a$, 则

$$I = \int \frac{dx}{(x+a)^{m+n}} = \frac{1}{1-m-n} (x+a)^{1-m-n} + C.$$

令 $a = -2, b = 3, m = 2$ 及 $n = 3$, 并设 $t = \frac{x-2}{x+3}$, 即得

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3} \\ &= \frac{1}{5^4} \int \frac{(1-t)^3}{t^2} dt \\ &= \frac{1}{5^4} \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{3}{t} + 3 - t \right) dt \\ &= \frac{1}{625} \left(-\frac{1}{t} - 3 \ln |t| + 3t - \frac{t^2}{2} \right) + C \\ &= \frac{1}{625} \left[-\frac{x+3}{x-2} - 3 \ln \left| \frac{x-2}{x+3} \right| + \frac{3(x-2)}{x+3} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(x-2)^2}{2(x+3)^2} \right] + C. \end{aligned}$$

1923. 若 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 计算

$$\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx.$$

解 由于 $P_n(x)$ 为 x 的 n 次多项式, 故得

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k,$$

其中 $P_n^{(0)}(a) = P_n(a), 0! = 1$.

于是,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} P_n^{(k)}(a) \int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}} \\
&\quad + \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(a) \int \frac{dx}{x-a} \\
&= - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}} \\
&\quad + \frac{1}{n!} P_n^{(n)}(a) \ln|x-a| + C,
\end{aligned}$$

其中 $\frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} = a_0$ 为 $P_n(x)$ 的首项系数, 即

$$\begin{aligned}
P_n(x) &= a_0(x-a)^n + a_1(x-a)^{n-1} + \dots \\
&\quad + a_{n-1}(x-a) + a_n.
\end{aligned}$$

1924⁺. 设 $R(x) = R^*(x^2)$, 其中 R^* 为有理函数, 则函数 $R(x)$ 分解为有理分式时有甚么特性?

解 设 $R^*(x) = P(x) + H(x)$,

其中 $P(x)$ 是多项式; 若 $R^*(x)$ 本身也为多项式时, 则 $H(x) \equiv 0$; 否则 $H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是真分式, 而 $P_1(x), Q_1(x)$ 也均为多项式.

设 $Q_1(x)$ 有非负实根为 a_i^2 , 其重数为 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, m)$; 负根为 $-b_k^2$, 其重数为 $\beta_k (k = 1, 2, \dots, t)$; 二次因式为 $x^2 + C_p x + D_p$, 其重数为 $\gamma_p (p = 1, 2, \dots, s)$. 其中 $C_p^2 - 4D_p < 0$, 于是,

$$Q_1(x) = \begin{cases} a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i} \cdot \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k} \cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\gamma_p}, & \text{当 } m \neq 0, t \neq 0, s \neq 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k} \cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\gamma_p}, & \text{当 } m = 0, t \neq 0, s \neq 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i} \cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\gamma_p}, & \text{当 } m \neq 0, t = 0, s \neq 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i} \cdot \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k}, & \text{当 } m \neq 0, t \neq 0, s = 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i^2)^{\alpha_i}, & \text{当 } m \neq 0, t = 0, s = 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{k=1}^t (x + b_k^2)^{\beta_k}, & \text{当 } m = 0, t \neq 0, s = 0 \text{ 时;} \\ a_0 \prod_{p=1}^s (x^2 + C_p x + D_p)^{\gamma_p}, & \text{当 } m = 0, t = 0, s \neq 0 \text{ 时;} \end{cases}$$

以下就 $Q_1(x)$ 表达式中的第一种情形予以论证.

由 $C_p^2 - 4D_p < 0$, 必有

$$x^2 + C_p x + D_p = (x^2 + E_p x + F_p) \cdot (x^2 - E_p x + F_p)$$

($p = 1, 2, \dots, s$), 则此时有

$$Q_1(x^2) = a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{\alpha_i} (x + a_i)^{\alpha_i} \cdot \prod_{k=1}^t (x^2 + b_k^2)^{\beta_k} \\
 \cdot \prod_{p=1}^s (x^2 + E_p x + F_p)^{\gamma_p} (x^2 - E_p x + F_p)^{\gamma_p}, \text{ 以及}$$

$$\begin{aligned}
 H(x^2) &= \frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)} = \sum_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^{a_i} \left[\frac{A_{i\nu}}{(a_i - x)^\nu} + \frac{A'_{i\nu}}{(a_i + x)^\nu} \right] \\
 &+ \sum_{k=1}^t \sum_{\nu=1}^{\beta_k} \frac{B_{k\nu}x + C_{k\nu}}{(x^2 + b_k^2)^\nu} + \sum_{p=1}^s \sum_{\nu=1}^{\gamma_p} \left[\frac{M_{p\nu}x + N_{p\nu}}{(x^2 + E_p x + F_p)^\nu} \right. \\
 &\left. + \frac{M'_{p\nu}x + N'_{p\nu}}{(x^2 - E_p x + F_p)^\nu} \right].
 \end{aligned}$$

显然有 $H(x^2) = H((-x)^2)$, 由 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性, 比较系数, 即得常数关系为:

$$A'_{i\nu} = A_{i\nu}, M'_{p\nu} = -M_{p\nu}, N'_{p\nu} = N_{p\nu}, B_{k\nu} = 0,$$

($t_1 = 1, 2, \dots, a_i, i = 1, 2, \dots, m; t_2 = 1, 2, \dots, \gamma_p, p = 1, 2, \dots, s; t_3 = 1, 2, \dots, \beta_k, k = 1, 2, \dots, t$). 最后得

$$R(x) = P(x^2) + H(x^2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= P(x^2) + \sum_{i=1}^m \sum_{\nu=1}^{a_i} A_{i\nu} \left[\frac{1}{(a_i - x)^\nu} + \frac{1}{(a_i + x)^\nu} \right] \\
 &+ \sum_{k=1}^t \sum_{\nu=1}^{\beta_k} \frac{C_{k\nu}}{(x^2 + b_k^2)^\nu} + \sum_{p=1}^s \sum_{\nu=1}^{\gamma_p} \left[\frac{M_{p\nu}x + N_{p\nu}}{(x^2 + E_p x + F_p)^\nu} \right. \\
 &\left. - \frac{M_{p\nu}x - N_{p\nu}}{(x^2 - E_p x + F_p)^\nu} \right].
 \end{aligned}$$

如若 $H(x) \neq 0$, 而 $m = 0$, 但 $t \neq 0, s \neq 0$ 时, 则在上述表达式中就应该缺乏第二项的和式, 形如

$$R(x) = P(x^2) + \sum_{k=1}^t \sum_{\nu=1}^{\beta_k} + \sum_{p=1}^s \sum_{\nu=1}^{\gamma_p},$$

其它情形可以类似推演, 此处不再一一细叙. 至于当 $H(x) \equiv 0$ 时, 当然有 $R(x) = P(x^2)$.

另外, 本题也可在复数域上作分解考虑.

仍记 $R^*(x) = P(x) + H(x)$, 其中 $P(x)$ 为多项

式, 而 $H(x)$ 要么是零(当 $R^*(x)$ 为多项式时), 要么是一个真分式, 例如 $H(x) \neq 0$ 时, 记 $H(x) = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ 是其真分式. $P_1(x), Q_1(x)$ 为多项式. 若记 $Q_1(x)$ 在复数域中的根为 a_i , 其相应重数记为 $n_i (i = 1, 2, \dots, m; \text{显然 } m \geq 1)$. 即

$$Q_1(x) = a_0 \prod_{i=1}^m (x - a_i)^{n_i},$$

那么 $Q_1(x^2)$ 中的每一项 $x^2 - a_i$ 可分解为一次式乘积

$$x^2 - a_i = (x - b_i)(x + b_i),$$

于是

$$Q_1(x^2) = a_0 \prod_{i=1}^m (x - b_i)^{n_i} (x + b_i)^{n_i}.$$

相应地有

$$\begin{aligned} H(x^2) &= \frac{P_1(x^2)}{Q_1(x^2)} = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{B_{ik}}{(x - b_i)^k} + \frac{B'_{ik}}{(x + b_i)^k} \right], \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \left[\frac{A_{ik}}{(x - b_i)^k} + \frac{A'_{ik}}{(x + b_i)^k} \right]. \end{aligned}$$

由 $H(x^2) = H((-x)^2)$, 从 $H(x^2)$ 的分解式的唯一性, 比较系数, 即得 $A'_{ik} = A_{ik} (k = 1, 2, \dots, n_i; i = 1, 2, \dots, m)$. 最后得到

$$\begin{aligned} R(x) &= P(x^2) + H(x^2) = P(x^2) + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^{n_i} \\ &\left[\frac{A_{ik}}{(b_i - x)^k} + \frac{A_{ik}}{(b_i + x)^k} \right], \text{ 其中 } b_i \text{ 为分母 } Q_1(x^2) \text{ 的根,} \\ &A_{ik} \text{ 为常系数.} \end{aligned}$$

1925. 计算

$$\int \frac{dx}{1+x^{2n}},$$

式中 n 为正整数.

解 先将被积函数分解成部分分式之和, 我们可以证明

$$\frac{1}{1+x^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + 1}.$$

事实上, 记多项式 $x^{2n} + 1$ 的 $2n$ 个根为 $a_k (k = 1, 2, \dots, 2n)$, 显然 $a_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi + j \sin \frac{2k-1}{2n} \pi$, 其中 $j = \sqrt{-1}$ 为虚数单位.

于是, $|a_k| = 1, a_k^{2n} = -1, \bar{a}_k = a_{2n-k+1}$,

$$a_k \cdot \bar{a}_k = 1, a_k + \bar{a}_k = 2 \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

$$\text{设 } \frac{1}{1+x^{2n}} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k}{x - a_k}$$

$$\text{即 } 1 = \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x - a_k}$$

令 $x \rightarrow a_i$ 并应用洛比塔法则, 即得

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{x \rightarrow a_i} \sum_{k=1}^{2n} \frac{A_k(1+x^{2n})}{x - a_k} = \lim_{x \rightarrow a_i} \frac{A_i(1+x^{2n})}{x - a_i} \\ &= \lim_{x \rightarrow a_i} (2nA_i x^{2n-1}) \\ &= 2nA_i \cdot \frac{a_i^{2n}}{a_i} = -\frac{2nA_i}{a_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 2n), \end{aligned}$$

$$\text{即 } A_k = -\frac{a_k}{2n} \quad (k = 1, 2, \dots, 2n).$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^{2n}} &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} \frac{a_k}{x-a_k} \\
&= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a_k}{x-a_k} + \frac{\bar{a}_k}{x-\bar{a}_k} \right) \\
&= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \frac{(a_k + \bar{a}_k)x - 2a_k\bar{a}_k}{x^2 - (a_k + \bar{a}_k)x + a_k \cdot \bar{a}_k} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1}.
\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+x^{2n}} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \int \frac{1 - x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1} dx \\
&= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[\cos \frac{2k-1}{2n}\pi \cdot \int \frac{2x - 2 \cos \frac{2k-1}{2n}\pi}{x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1} dx \right] \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sin^2 \frac{2k-1}{2n}\pi \cdot \int \frac{dx}{\left(x - \cos \frac{2k-1}{2n}\pi \right)^2 + \sin^2 \frac{2k-1}{2n}\pi} \right] \\
&= -\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \left[\cos \frac{2k-1}{2n}\pi \cdot \ln \left(x^2 - 2x \cos \frac{2k-1}{2n}\pi + 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[\sin \frac{2k-1}{2n} \pi \cdot \operatorname{arctg} \frac{x - \cos \frac{2k-1}{2n} \pi}{\sin \frac{2k-1}{2n} \pi} \right] + C.$$

§ 3. 无理函数的积分法

化被积函数为有理函数,以求下列积分:

1926. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}.$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$.

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= 2 \int \frac{t dt}{1 + t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t} \right) dt \\ &= 2(t - \ln(1+t)) + C = 2\sqrt{x} - 2\ln(1 + \sqrt{x}) \\ &\quad + C. \end{aligned}$$

1927. $\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}.$

解 设 $\sqrt[3]{x} = t$, 则 $x = t^3, dx = 3t^2 dt$.

代入得

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{x(1 + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})} \\ &= 6 \int \frac{dt}{t(1 + 2t^3 + t^2)} \\ &= 6 \int \frac{dt}{t(1+t)(2t^2 - t + 1)} \\ &= 6 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{4(1+t)} - \frac{6t-1}{4(2t^2-t+1)} \right] dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 6 \left\{ \ln t - \frac{1}{4} \ln(1+t) - \frac{3}{8} \int \frac{4t-1}{2t^2-t+1} dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{16} \int \frac{d\left(t - \frac{1}{4}\right)}{\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{7}{16}} \right\} \\
&= 6 \left\{ \ln|t| - \frac{1}{4} \ln|1+t| - \frac{3}{8} \ln(2t^2-t+1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4t-1}{\sqrt{7}} \right\} + C \\
&= \frac{3}{4} \ln \frac{t^8}{(1+t)^2(2t^2-t+1)^3} \\
&\quad - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4t-1}{\sqrt{7}} + C \\
&= \frac{3}{4} \ln \frac{x \cdot \sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2(2\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x}+1)^3} \\
&\quad - \frac{3}{2\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{7}} + C.
\end{aligned}$$

1928⁺. $\int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx.$

解 设 $\sqrt[3]{2+x} = t$, 则 $x = t^3 - 2, dx = 3t^2 dt$.

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x + \sqrt[3]{2+x}} dx &= 3 \int \frac{t^6 - 2t^3}{t^3 + t - 2} dt \\
&= 3 \int \left(t^3 - t + \frac{t^2 - 2t}{t^3 + t - 2} \right) dt \\
&= \frac{3}{4} t^4 - \frac{3}{2} t^2 + 3 \int \left[-\frac{1}{4(t-1)} + \frac{\frac{5}{4}t - \frac{1}{2}}{t^2 + t + 2} \right] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int \left[\frac{1}{(1+t)^2} - \frac{1}{(1+t)^3} \right] dt \\
&= -\frac{4}{1+t} + \frac{2}{(1+t)^2} + C \\
&= \frac{2}{(1+\sqrt{x})^2} - \frac{4}{1+\sqrt{x}} + C.
\end{aligned}$$

1931. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$

解 设 $\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = t$, 则

$$x = \frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}, dx = -\frac{4t}{(t^2 - 1)^2} dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx &= \int \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1} dx \\
&= -4 \int \frac{t dt}{(t-1)(t+1)^3} \\
&= \int \left[-\frac{2}{(t+1)^3} + \frac{1}{(t+1)^2} + \frac{1}{2(t+1)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2(t-1)} \right] dt \\
&= \frac{1}{(t+1)^2} - \frac{1}{t+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t+1}{t-1} \right| + C_1 \\
&= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - 1} + \frac{1}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - 1}| + C.
\end{aligned}$$

如果不限制将被积函数化为有理函数, 本题的解法可简单些. 事实上,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx \\
&= \int \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})^2}{(x+1) - (x-1)} dx \\
&= \int (x - \sqrt{x^2-1}) dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln|x + \sqrt{x^2-1}| + C.
\end{aligned}$$

1932. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$

解 设 $\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} = t$, 则

$$x = \frac{t^3 + 1}{t^3 - 1}, dx = -\frac{6t^2}{(t^3 - 1)^2} dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}} &= -\frac{3}{2} \int dt = -\frac{3}{2}t + C \\
&= -\frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + C.
\end{aligned}$$

1933. $\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} \quad (a > 0).$

解 设 $\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}} = t$, 则 $x = \frac{a}{1+t^4}$,

$$dx = -\frac{4at^3}{(1+t^4)^2} dt.$$

代入得

$$\int \frac{x dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}}$$

$$\begin{aligned}
&= -4a \int \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt \\
&= -4a \int \left[\frac{t}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} \right]^2 dt \\
&= -\frac{a}{2} \int \left(\frac{1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} - \frac{1}{t^2 + t\sqrt{2} + 1} \right)^2 dt \\
&= -\frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)^2} - \frac{a}{2} \int \frac{dt}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)^2} \\
&\quad + a \int \frac{dt}{t^4 + 1}.
\end{aligned}$$

现在分别求上述积分, 利用 1921 题的递推公式, 即得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dt}{(t^2 - t\sqrt{2} + 1)^2} = \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} \\
&\quad + \int \frac{dt}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\
&= \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{d\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t - 1) + C_1
\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dt}{(t^2 + t\sqrt{2} + 1)^2} \\
&= \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{dt}{t^2 + t\sqrt{2} + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \int \frac{d\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(t + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} + \sqrt{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{2}t + 1) \\
&\quad + C_2.
\end{aligned}$$

利用 1884 题的结果, 即得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dt}{t^4 + 1} &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} + C_3.
\end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}
\int \frac{x dx}{\sqrt{x^3(a-x)}} &= -\frac{a}{2} \left[\frac{2t - \sqrt{2}}{2(t^2 - t\sqrt{2} + 1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2t + \sqrt{2}}{2(t^2 + t\sqrt{2} + 1)} \right] - \frac{a\sqrt{2}}{2} \{ \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t - 1) \\
&\quad + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}t + 1) \} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\
&\quad + \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} \right) + C_4 \\
&= -\frac{at^3}{1 + t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \\
&\quad - \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{t\sqrt{2}}{1 - t^2} \right) + C_4 \\
&= -\frac{at^3}{1 + t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{a}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1-t^2}{t\sqrt{2}}\right) + C,$$

其中 $t = \sqrt[4]{\frac{a-x}{x}}$ ($0 < x < a$).

1934. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n 为自然数).

解 当 $a=b$ 时, 显然被积函数为 $(x-a)^{-2}$, 因此积分

为 $-\frac{1}{x-a} + C$; 当 $a \neq b$ 时, 设 $\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} = t$, 则

$$x = a + \frac{a-b}{t^n - 1}, dx = -\frac{n(a-b)t^{n-1}}{(t^n - 1)^2} dt,$$

$$x - a = \frac{a-b}{t^n - 1}, x - b = \frac{(a-b)t^n}{t^n - 1},$$

代入得

$$\int \frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = -\frac{n}{a-b} \int dt$$

$$= -\frac{n}{a-b} t + C$$

$$= -\frac{n}{a-b} \sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C.$$

1935. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{1+x}}$.

解 设 $\sqrt{x} = \frac{t^2 - 1}{2t}$ 并限制 $t > 1$, 则

$$x = \left(\frac{t^2 - 1}{2t}\right)^2, dx = \frac{t^4 - 1}{2t^3} dt, \sqrt{x+1} = \frac{t^2 + 1}{2t},$$

$$t = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x} + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2} \int \frac{t^4 - 1}{t^3(t+1)} dt \\
&= \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) dt \\
&= \frac{1}{2} \left(t - \ln t - \frac{1}{t} + \frac{1}{2t^2} \right) + C_1 \\
&= \sqrt{x} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}) \\
&\quad + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{x(x+1)} + C.
\end{aligned}$$

1936. 证明: 若

$$p + q = kn,$$

式中 k 为整数, 则积分

$$\int R\left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right] dx$$

(式中 R 为有理函数及 p, q, n 为整数) 为初等函数.

证 当 $a = b$ 时, $(x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}} = (x-a)^k$, 则积分显然为初等函数.

当 $a \neq b$ 时, 设 $\frac{x-a}{x-b} = y (\neq 1)$, 则

$$x = \frac{a-by}{1-y}, dx = \frac{a-b}{(1-y)^2} dy,$$

$$x-a = \frac{(a-b)y}{1-y}, x-b = \frac{a-b}{1-y}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int R\left[x, (x-a)^{\frac{p}{n}}(x-b)^{\frac{q}{n}}\right] dx \\
&= (a-b) \int R\left[\frac{a-by}{1-y}, y^{\frac{p}{n}} \left(\frac{a-b}{1-y}\right)^k\right] \frac{dy}{(1-y)^2}.
\end{aligned}$$

再设 $\sqrt[n]{y} = t$, 则 $y = t^n$, $dy = nt^{n-1}dt$. 从而上述积分化为

$$\int R[x, (x-a)^{\frac{k}{n}}(x-b)^{\frac{l}{n}}]dx$$

$$= n(a-b) \int R\left[\frac{a-bt^n}{1-t^n}, t^p\left(\frac{a-b}{1-t^n}\right)^k\right] \frac{t^n-1}{(1-t^n)^2} dt,$$

因为被积函数为 t 的有理函数, 所以积分是初等函数, 求最简单二次无理式的积分:

1937. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx.$

解 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}} dx = \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x+x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$$

$$= \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} d\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$- \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x+x^2)}{\sqrt{1+x+x^2}} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{2x+1}{4} \sqrt{1+x+x^2} + \frac{3}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right) - \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{2} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right) + C$$

$$= \frac{2x-3}{4} \sqrt{1+x+x^2} - \frac{1}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+x+x^2}\right) + C.$$

$$1938^+. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

解 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则

$$x = \frac{1-t}{t}, dx = -\frac{1}{t^2} dt,$$

$$\sqrt{x^2+x+1} = \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{|t|} = \text{sgnt} \cdot \frac{\sqrt{t^2-t+1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= -\text{sgnt} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-t+1}} \\ &= -\text{sgnt} \cdot \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2-t+1} \right| + C_1 \\ &= -\text{sgn}(x+1) \\ & \quad \cdot \ln \left| \frac{1-x+2[\text{sgn}(x+1)] \cdot \sqrt{x^2+x+1}}{2(x+1)} \right| \\ & \quad + C_1. \end{aligned}$$

当 $x+1 > 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C_1 \end{aligned}$$

当 $x+1 < 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \ln \left| \frac{1-x-2\sqrt{x^2+x+1}}{2(1+x)} \right| + C_1 \end{aligned}$$

$$= \ln \left| \frac{-3(x+1)}{2(1-x+2\sqrt{x^2+x+1})} \right| + C_1$$

$$= -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C.$$

总之,

$$\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$= -\ln \left| \frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1} \right| + C,$$

1939. $\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}}.$

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$, 则

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = -\frac{4t}{(1+t^2)^2} dt,$$

$$1-x = \frac{2t^2}{1+t^2}, \sqrt{1-x^2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{t^4} dt$$

$$= \frac{1}{6t^3} + \frac{1}{2t} + C$$

$$= \frac{2-x}{3(1-x)^2} \sqrt{1-x^2} + C.$$

1940. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x} dx.$

解 设 $\sqrt{x^2+2x+2} = t-x$, 则

$$x = \frac{t^2-2}{2(t+1)}, dx = \frac{t^2+2t+2}{2(t+1)^2} dt,$$

$$= \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + [\operatorname{sgn}(1+x)] \\ \cdot \ln\left|\frac{3+x+2[\operatorname{sgn}(x+1)]\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right| + C_1.$$

当 $x+1 > 0$ 时,

$$\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \\ + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right| + C;$$

当 $x+1 < 0$ 时,

$$\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \\ - \ln\left|\frac{3+x-2\sqrt{1-x-x^2}}{2(1+x)}\right| + C_1 \\ = \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right| + C.$$

总之,

$$\int \frac{xdx}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}} = \arcsin\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) \\ + \ln\left|\frac{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}{1+x}\right| + C.$$

以后诸题中,出现二次无理式时也会碰到用 *sgnt* 的问题,可参照 1938 题及 1941 题类似地处理.在解这类习题时,不妨就开方后取正值求解.如无特殊情况,今后不再另加说明.

1942. $\int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \frac{1-x+x^2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx = \int \frac{(x^2-x-1)+2}{\sqrt{1+x-x^2}} dx \\
& = - \int \sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{1}{2}\right) \\
& \quad + 2 \int \frac{d\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} \\
& = \frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{5}{8} \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) \\
& \quad + 2 \arcsin\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right) + C \\
& = \frac{1-2x}{4} \sqrt{1+x-x^2} - \frac{11}{8} \arcsin\left(\frac{1-2x}{\sqrt{5}}\right) + C.
\end{aligned}$$

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y} dx = Q_{n-1}(x)y + \lambda \int \frac{dx}{y},$$

式中 $y = \sqrt{ax^2+bx+c}$, $P_n(x)$ 为 n 次多项式, $Q_{n-1}(x)$ 为 $n-1$ 次多项式及 λ 为常数, 求下列积分:

1943. $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \text{设} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx \\
& = (ax^2+bx+c) \sqrt{1+2x-x^2} \\
& \quad + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}},
\end{aligned}$$

两边对 x 求导数, 得

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (2ax+b) \sqrt{1+2x-x^2}$$

$$+ \frac{(ax^2+bx+c)(1-x)}{\sqrt{1+2x-x^3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1+2x-x^2}}.$$

从而有

$$x^3 \equiv (2ax+b)(1+2x-x^2) + (ax^2+bx+c) \\ \cdot (1-x) + \lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 得

$$\begin{array}{l|l} x^3 & -3a=1, \\ x^2 & 5a-2b=0, \\ x^1 & 2a+3b-c=0, \\ x^0 & b+c+\lambda=0. \end{array}$$

由此, $a = -\frac{1}{3}$, $b = -\frac{5}{6}$, $c = -\frac{19}{6}$, $\lambda = 4$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx &= -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} \\ &+ 4 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\ &= -\frac{19+5x+2x^2}{6} \sqrt{1+2x-x^2} \\ &+ 4 \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) + C. \end{aligned}$$

1944. $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

解 设 $\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx = (ax^9+bx^8+cx^7+dx^6+ex^5 \\ +fx^4+gx^3+hx^2+lx+m) \sqrt{1+x^2} \\ + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$

从而有

$$\begin{aligned}x^{10} &\equiv (9ax^8 + 8bx^7 + 7cx^6 + 6dx^5 + 5ex^4 + 4fx^3 + 3gx^2 \\ &\quad + 2hx + l)(1 + x^2) \\ &\quad + x(ax^9 + bx^8 + cx^7 + dx^6 + ex^5 + fx^4 + gx^3 \\ &\quad + hx^2 + lx + m) + \lambda.\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数, 求得

$$a = \frac{1}{10}, b = 0, c = -\frac{9}{80}, d = 0,$$

$$e = \frac{21}{160}, f = 0, g = -\frac{21}{128}, h = 0,$$

$$l = \frac{63}{256}, m = 0, \lambda = -\frac{63}{256}.$$

于是,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{10}}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \left(\frac{63}{256}x - \frac{21}{128}x^3 + \frac{21}{160}x^5 - \frac{9}{80}x^7 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{10}x^9 \right) \sqrt{1+x^2} - \frac{63}{256} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.\end{aligned}$$

1945. $\int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx.$

解
$$\begin{aligned}\int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int \frac{x^4(a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) \sqrt{a^2 - x^2} \\ &\quad + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}x^4(a^2 - x^2) &\equiv (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx \\ &\quad + E)(a^2 - x^2) - x(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 \\ &\quad + Ex + F) + \lambda.\end{aligned}$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,求得

$$A = \frac{1}{6}, B = 0, C = -\frac{a^2}{24}, D = 0,$$

$$E = -\frac{a^4}{16}, F = 0, \lambda = \frac{a^4}{16}.$$

于是,

$$\int x^4 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left(\frac{1}{6} x^5 - \frac{a^2}{24} x^3 - \frac{a^4}{16} x \right) \sqrt{a^2 - x^2} \\ + \frac{a^4}{16} \arcsin \frac{x}{|a|} + C \quad (a \neq 0).$$

1946. $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx.$

解 设 $\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx$

$$= (ax^2 + bx + c) \sqrt{x^2 + 4x + 3}$$

$$+ \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}},$$

从而有

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (2ax + b)(x^2 + 4x + 3)$$

$$+ (x + 2)(ax^2 + bx + c) + \lambda.$$

比较等式两端 x 的同次幂系数,求得

$$a = \frac{1}{3}, b = -\frac{14}{3}, c = 37, \lambda = -66.$$

于是,

$$\int \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} dx \\ = \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{14}{3} x + 37 \right) \sqrt{x^2 + 4x + 3} \\ - 66 \ln |x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C.$$

$$1947. \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}}.$$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$, 这里碰到二次无理式

$\sqrt{x^2+1}$ 需引用 *sgnt* 的问题, 不妨设

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \quad (t > 0).$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2+1}} &= - \int \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= - \int \frac{(t^2+1) - 1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ &= - \int \sqrt{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} \\ &= -\frac{t}{2} \sqrt{t^2+1} - \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{t^2+1}| \\ &\quad + \ln |t + \sqrt{t^2+1}| + C \\ &= -\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{x^2+1}}{|x|} + C. \end{aligned}$$

$$1948^+. \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}}.$$

解 不妨设 $x = \frac{1}{t} > 0$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 由 $|x| > 1$ 知必有 $|t| < 1$, 则有

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \quad (0 < t < 1).$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2-1}} = - \int \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{t(1-t^2) - t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int t \sqrt{1-t^2} dt - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= -\frac{1}{2} \int (1-t^2)^{\frac{1}{2}} d(1-t^2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} d(1-t^2) \\
&= -\frac{1}{3} (1-t^2)^{\frac{3}{2}} + (1-t^2)^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{1+2x^2}{3x^3} \sqrt{x^2-1} + C.
\end{aligned}$$

1949⁺. $\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}}$.

解 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2+3x+1} = \frac{\sqrt{5t^2+5t+1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}} &= - \int \frac{t^2}{\sqrt{5t^2+5t+1}} dt \\
&= (at+b) \sqrt{5t^2+5t+1} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}},
\end{aligned}$$

从而

$$-t^2 \equiv a(1+5t+5t^2) + (5t + \frac{5}{2})(at+b) + \lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数, 求得

$$a = -\frac{1}{10}, b = \frac{3}{20}, \lambda = -\frac{11}{40}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{(x-1)^3 \sqrt{x^2+3x+1}} \\
 &= \left(-\frac{t}{10} + \frac{3}{20}\right) \sqrt{5t^2+5t+1} \\
 &\quad - \frac{11}{40} \int \frac{dt}{\sqrt{5t^2+5t+1}} \\
 &= \frac{3-2t}{20} \sqrt{5t^2+5t+1} - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| t + \frac{1}{2} \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{t^2+t+\frac{1}{5}} \right| + C_1 \\
 &= \frac{3x-5}{20(x-1)^2} \sqrt{x^2+3x+1} \\
 &\quad - \frac{11}{40\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5}(x+1)+2\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1} \right| \\
 &\quad + C.
 \end{aligned}$$

1950+. $\int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}}$

解 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 先设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2+2x} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} &= - \int \frac{t^4}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
 &= (at^3 + bt^2 + ct + e) \sqrt{1-t^2} + \lambda \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.
 \end{aligned}$$

从而有

$$-t^4 \equiv (3at^2 + 2bt + c)(1 - t^2) - t(at^3 + bt^2 + ct + e) + \lambda.$$

比较等式两端 t 的同次幂系数, 求得

$$a = \frac{1}{4}, b = 0, c = \frac{3}{8}, e = 0, \lambda = -\frac{3}{8}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} &= \left(\frac{1}{4}t^3 + \frac{3}{8}t\right) \\ &\cdot \sqrt{1-t^2} - \frac{3}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x} - \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{x+1} + C. \end{aligned}$$

再设 $t < 0$, 则答案前一项不改变符号, 但后一项要改变符号. 因此, 最后得到

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+1)^5 \sqrt{x^2+2x}} &= \frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4} \sqrt{x^2+2x} \\ &- \frac{3}{8} \arcsin \frac{1}{|x+1|} + C, \end{aligned}$$

其中 $x > 0$ 或 $x < -2$.

1951. 在什么条件下, 积分

$$\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

是代数函数?

解 设 $\int \frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$

$$= (Ax + B) \sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}},$$

从而有

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 \equiv A(ax^2 + bx + c)$$

$$\begin{aligned}
&= - \int \frac{t dt}{\sqrt{2t^2 - 1}} - \int \frac{dt}{\sqrt{2t^2 - 1}} \\
&= - \frac{1}{2} \sqrt{2t^2 - 1} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \sqrt{2} t + \sqrt{2t^2 - 1} \right| + C \\
&= \frac{\sqrt{1 + 2x - x^2}}{2(1 - x)} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + 2x - x^2}}{1 - x} \right| + C.
\end{aligned}$$

1953. $\int \frac{x dx}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 - x - 1}}$

解 $\int \frac{x dx}{(x^2 - 1) \sqrt{x^2 - x - 1}}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x - 1}} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2 - x - 1}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-1) \sqrt{x^2 - x - 1}} \\
&= \frac{1}{2} I_1 + \frac{1}{2} I_2.
\end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x + 1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2} dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2 - x - 1} = \frac{\sqrt{t^3 - 3t + 1}}{t}.$$

代入 I_1 , 得

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x+1) \sqrt{x^2 - x - 1}} = - \int \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 3t + 1}}$$

$$= -\ln\left|t - \frac{3}{2} + \sqrt{t^2 - 3t + 1}\right| + C_1$$

$$= -\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right| + C_2;$$

对于 I_2 , 设 $x-1 = \frac{1}{t}$, 同上可得

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= \arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right) + C_3. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-x-1}} \\ &= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3x+1-2\sqrt{x^2-x-1}}{x+1}\right| \\ &\quad + \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{x-3}{|x-1|\sqrt{5}}\right) + C. \end{aligned}$$

1954. $\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad &\int \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{(x+1)^2} dx \\ &= \int \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \int \frac{(x+1)^2 - (x+1) + 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &\quad + \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+x+1}} = I_1 - I_2 + I_3. \end{aligned}$$

对于 I_1 , 显然有

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) + C_1;$$

对于 I_2 , 利用 1938 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= -\ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C_2; \end{aligned}$$

对于 I_3 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 则 $dx = -\frac{1}{t^2}dt$. 不妨设 $t > 0$, 则有

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\sqrt{t^2 - t + 1}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned} I_3 &= -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - t + 1}} \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{(2t-1)dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - t + 1}} \\ &= -\sqrt{t^2 - t + 1} - \frac{1}{2} \ln\left|t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + 1}\right| \\ &\quad + C_3 \\ &= -\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x+1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1-x+2\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}\right| + C_4. \end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x+1)^2} dx$$

$$= \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) - \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} \\ + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 - x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}\right| + C.$$

如用下述解法更简单些:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x + 1)^2} dx \\ = - \int \sqrt{x^2 + x + 1} d\left(\frac{1}{x + 1}\right) \\ = - \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} + \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ = - \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} + \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ = - \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1} \\ + \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1}\right) \\ + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1 - x + 2\sqrt{x^2 + x + 1}}{x + 1}\right| + C.$$

*) 利用 1938 题的结果.

1955. $\int \frac{x^3}{(1 + x)\sqrt{1 + 2x - x^2}} dx.$

解 $\int \frac{x^3}{(1 + x)\sqrt{1 + 2x - x^2}} dx \\ = \int \frac{(x^3 + 1) - 1}{(1 + x)\sqrt{1 + 2x - x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{x^2 - x + 1}{\sqrt{1 + 2x - x^2}} dx - \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= - \int \frac{1+2x-x^2}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&\quad + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{1+2x-x^2}} - \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= - \int \sqrt{2-(x-1)^2} d(x-1) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+2x-x^2)}{\sqrt{1+2x-x^2}} + 3 \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2-(x-1)^2}} - I_1 \\
&= \frac{1-x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} - \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad - \sqrt{1+2x-x^2} + 3 \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1 \\
&= -\frac{x+1}{2} \sqrt{1+2x-x^2} + 2 \arcsin\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) - I_1.
\end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x+1 = \frac{1}{t}$, 可得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right) + C_1.
\end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^3}{(x+1)\sqrt{1+2x-x^2}} dx \\
&= -\frac{1+x}{2} \sqrt{1+2x-x^2} - 2 \arcsin\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x}\right) + C.
\end{aligned}$$

$$1956. \int \frac{xdx}{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{xdx}{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\ &= \int \left(\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\ &= \int \frac{2dx}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\ &\quad - \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\ &= 2I_1 - I_2. \end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x - 2 = \frac{1}{t}$, 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\ &= -\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) + C_1; \end{aligned}$$

对于 I_2 , 设 $x - 1 = \frac{1}{t}$, 可得

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x-1} + C_2. \end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned} & \int \frac{xdx}{(x^2 - 3x + 2)\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \\ &= -2\arcsin\left(\frac{1}{|x-2|}\right) - \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}{x-1} + C, \end{aligned}$$

其中 $x < 1$ 或 $x > 3$.

1957. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$.

解 设 $x = \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \cos t dt, \sqrt{1-x^2} = \cos t.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{dt}{1+\sin^2 t} \\ &= \int \frac{dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2} \operatorname{tg} t)}{(\sqrt{2} \operatorname{tg} t)^2 + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{x \sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} \right] + C. \end{aligned}$$

1958. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

解 当 $x > 1$ 时, 设 $x = \sec t$, 并限制 $0 < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \sec t \cdot \operatorname{tg} t dt, \sqrt{x^2-1} = \operatorname{tg} t.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} &= \int \frac{\sec t dt}{1+\sec^2 t} \\ &= \int \frac{\cos t}{\cos^2 t + 1} dt = \int \frac{d(\sin t)}{2-\sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \sin t}{\sqrt{2} - \sin t} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{x^2-1}}{\sqrt{2}x - \sqrt{x^2-1}} \right| + C. \end{aligned}$$

当 $x < -1$ 时, 仍设 $x = \sec t$, 但限制 $\pi < t < \frac{3}{2}\pi$,
经计算可获得同样的结果.

总之, 当 $|x| > 1$ 时,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^2 - 1}}{x\sqrt{2} - \sqrt{x^2 - 1}} \right| + C.$$

1959. $\int \frac{dx}{(1 - x^4)\sqrt{1 + x^2}}$

解 设 $x = \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ 且 $|t| \neq \frac{\pi}{4}$, 则

$$dx = \sec^2 t dt, \sqrt{1 + x^2} = \sec t.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(1 - x^4)\sqrt{x^2 + 1}} = \int \frac{\sec^2 t dt}{(1 - \operatorname{tg}^4 t)\sec t}$$

$$= \int \frac{\cos^3 t dt}{1 - 2\sin^2 t} = \int \frac{1 - \sin^2 t}{1 - 2\sin^2 t} d(\sin t)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{1 - 2\sin^2 t}{1 - 2\sin^2 t} d(\sin t) + \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t)}{1 - 2\sin^2 t}$$

$$= \frac{1}{2} \sin t + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin t}{1 - \sqrt{2} \sin t} \right| + C$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{1 + x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1 + x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x^2} - x\sqrt{2}} \right| + C \quad (|x| \neq 1).$$

1960. $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx.$

解 $\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx = \int \frac{(x^2 + 2)dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}}$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} \\
&= \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} + \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}} \\
&= \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) + I_1.
\end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $x = \sqrt{2} \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \sqrt{2} \sec^2 t dt, \quad \sqrt{x^2 + 2} = \sqrt{2} \sec t.$$

代入得

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int \frac{dx}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 2}} = \int \frac{\sec t dt}{1 + 2 \operatorname{tg}^2 t} \\
&= \int \frac{\cos t dt}{1 + \sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1 + \sin^2 t} = \operatorname{arctg}(\sin t) + C_1 \\
&= \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2 + x^2}}\right) + C_1 \\
&= -\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}\right) + C.
\end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 1} dx &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) \\
&\quad - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2}}{x}\right) + C.
\end{aligned}$$

化二次三项式为正则型, 以计算下列积分:

1961. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}.$

解 $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x - 1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{(2x+1)\sqrt{2} + \sqrt{3(x^2+x-1)}}{(2x+1)\sqrt{2} - \sqrt{3(x^2+x-1)}} \right| + C.$$

1962. $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$

解 $\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$
 $= \int \frac{(x-1)^2 + 2(x-1) + 1}{(3+(x-1)^2)\sqrt{3-(x-1)^2}} dx.$

设 $x-1 = \sqrt{3} \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$dx = \sqrt{3} \cos t dt, \sqrt{2+2x-x^2} = \sqrt{3} \cos t.$$

代入得

$$\int \frac{x^2 dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$= \int \frac{1 + 2\sqrt{3} \sin t + 3\sin^2 t}{3(1 + \sin^2 t)} dt$$

$$= \int dt + \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{\sin t}{1 + \sin^2 t} dt - \frac{2}{3} \int \frac{dt}{1 + \sin^2 t}$$

$$= t - \frac{2}{\sqrt{3}} \int \frac{d(\cos t)}{2 - \cos^2 t} - \frac{2}{3} \int \frac{d(\operatorname{tg} t)}{1 + 2\operatorname{tg}^2 t}$$

$$= t - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{2} + \cos t}{\sqrt{2} - \cos t} \right|$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} t) + C$$

$$= \operatorname{arc} \sin \frac{x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{(x-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2+2x-x^2}} + C.$$

1963. $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

解 $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$

$$= \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} d\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \int \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x + \frac{1}{2}\right)}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]}{\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4} \sqrt{x^2+x+1}} \quad *)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{2x+1}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C$$

$$= \frac{2(x-1)}{3\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

*) 利用 1781 题的结果.

1964⁺ 利用线性分式的代换 $x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$, 计算积分:

$$\int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$$

解 线性分式的代换

$$x = \frac{\alpha + \beta t}{1+t}$$

给出

$$x^2 \pm x + 1$$

$$= \frac{(\beta^2 \pm \beta + 1)t^2 + [2\alpha\beta \pm (\alpha + \beta) + 2]t + (\alpha^2 \pm \alpha + 1)}{(1+t)^2}$$

要求 $2\alpha\beta \pm (\alpha + \beta) + 2 = 0$ 即化成正则型. 当 $\alpha + \beta = 0$ 及 $\alpha\beta = -1$ 时即得上式. 例如, 取

$$\alpha = -1, \beta = 1,$$

我们有

$$x = \frac{t-1}{1+t} \text{ 或 } t = \frac{1+x}{1-x},$$

$$dx = \frac{2dt}{(1+t)^2}, x^2 - x + 1 = \frac{t^2 + 3}{(t+1)^2},$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{\sqrt{1+3t^2}}{t+1},$$

其中不妨设 $t+1 > 0$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{(x^2 - x + 1) \sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= 2 \int \frac{t+1}{(t^2+3) \sqrt{1+3t^2}} dt \\ &= 2 \int \frac{t dt}{(t^2+3) \sqrt{1+3t^2}} + 2 \int \frac{dt}{(t^2+3) \sqrt{1+3t^2}} \\ &= 2(I_1 + I_2). \end{aligned}$$

对于 I_1 , 设 $u = \sqrt{1+3t^2}$, 则

$$du = \frac{3t dt}{\sqrt{1+3t^2}}, t^2 + 3 = \frac{u^2 + 8}{3}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int \frac{tdt}{(t^2 + 3)\sqrt{1 + 3t^2}} = \int \frac{du}{u^2 + 8} \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{u}{2\sqrt{2}} \right) + C_1 \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left[\frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(1-x)\sqrt{2}} \right] + C_1.
 \end{aligned}$$

对于 I_2 , 设 $u = \frac{3t}{\sqrt{1 + 3t^2}}$, 则

$$\frac{dt}{\sqrt{1 + 3t^2}} = \frac{du}{3 - u^2}, t^2 + 3 = \frac{27 - 8u^2}{3(3 - u^2)},$$

代入得

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int \frac{dt}{(t^2 + 3)\sqrt{1 + 3t^2}} = 3 \int \frac{du}{27 - 8u^2} \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{3\sqrt{3} + 2\sqrt{2}u}{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}u} \right| + C_2 \\
 &= \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} + (x + 1)\sqrt{2}}{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} - (x + 1)\sqrt{2}} \right| \\
 &\quad + C_2 \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} - (x + 1)\sqrt{2}} \right| \\
 &\quad + C_2.
 \end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{dx}{(x^2 - x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}} \\
 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{x^2 + x + 1}}{(x - 1)\sqrt{2}} \right\}
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 - x + 1}}{\sqrt{3(x^2 + x + 1)} - (x + 1)\sqrt{2}} \right| + C.$$

1965⁺. 求

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}.$$

解 此题与 1964 题均属于下述类型的积分

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^m \sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

【参看微积分学教程(Г. М. 菲赫金哥尔茨)第二卷第一分册 55 页“272. 其它的计算方法”】

设 $x = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t}$, 适当选择 α 与 β , 使得在两个三

项式中同时消去一次项. 为此, 将 $x = \frac{\alpha + \beta t}{1 + t}$ 分别代入 $x^2 + 2$ 及 $2x^2 - 2x + 5$ 中, 并令一次项的系数等于零, 求得

$$\alpha = -1, \beta = 2,$$

即设

$$x = \frac{2t - 1}{1 + t}.$$

从而有

$$dx = \frac{3}{(t + 1)^2} dt, x^2 + 2 = \frac{3(2t^2 + 1)}{(t + 1)^2},$$

$$\sqrt{2x^2 - 2x + 5} = \frac{3\sqrt{t^2 + 1}}{|t + 1|}.$$

以下不妨设 $t + 1 > 0$.

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{(x^2 + 2) \sqrt{2x - 2x + 5}} \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{t + 1}{(2t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1}} dt \\
&= \frac{1}{3} \int \frac{tdt}{(2t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1}} \\
&\quad + \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(2t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1}}.
\end{aligned}$$

对于右端的第一个积分, 设 $u = \sqrt{t^2 + 1}$, 代入后

计算得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \int \frac{tdt}{(2t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{2u^2 - 1} \\
&= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}u - 1}{\sqrt{2}u + 1} + C_1 \\
&= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2 - 2x + 5)} + (x - 2)}{\sqrt{2(2x^2 - 2x + 5)} - (x - 2)} + C_1.
\end{aligned}$$

对于右端的第二个积分, 设 $u = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$, 代入后

计算得

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(2t^2 + 1) \sqrt{t^2 + 1}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{1 + u^2} \\
&= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} u + C_2 = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{1 + x}{\sqrt{2x^2 - 2x + 5}} \right) + C_2 \\
&= -\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}{x + 1} \right) + C_3.
\end{aligned}$$

于是, 最后得到

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2) \sqrt{2x^2 - 2x + 5}}$$

$$= \frac{1}{6\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2(2x^2 - 2x + 5)} + (x - 2)}{\sqrt{2(2x^2 - 2x + 5)} - (x - 2)}$$

$$- \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 5}}{x + 1} \right) + C.$$

利用尤拉代换

(1) 若 $a > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{ax} + z$;

(2) 若 $c > 0$, $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xz \pm \sqrt{c}$;

(3) $\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = z(x - x_1)$.

以求下列积分:

1966. $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$.

解 设 $\sqrt{x^2 + x + 1} = z - x$, 则

$$x = \frac{z^2 - 1}{1 + 2z}, dx = \frac{2(z^2 + z + 1)}{(1 + 2z)^2} dz,$$

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = \frac{z^2 + z + 1}{1 + 2z}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{2} \int \frac{z^2 + z + 1}{x \left(z + \frac{1}{2} \right)^2} dz$$

$$= \frac{1}{2} \int \left[\frac{4}{z} - \frac{3}{z + \frac{1}{2}} - \frac{3}{2 \left(z + \frac{1}{2} \right)^2} \right] dz$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{\left| z + \frac{1}{2} \right|^3} + \frac{3}{4 \left(z + \frac{1}{2} \right)} + C_1$$

$$= \frac{1}{2} \ln \frac{z^4}{|2z+1|^3} + \frac{3}{2(2z+1)} + C,$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

1967. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}$.

解 设 $\sqrt{1 - 2x - x^2} = xz - 1$, 则

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}, x = \frac{2(z-1)}{z^2+1},$$

$$dx = \frac{2(1+2z-z^2)}{(z^2+1)^2} dz,$$

$$\sqrt{1-2x-x^2} + 1 = \frac{2z(z-1)}{z^2+1}.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}} &= \int \frac{1 + 2z - z^2}{z(z-1)(z^2+1)} dz \\ &= \int \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} - \frac{2}{z^2+1} \right) dz \\ &= \ln \left| \frac{z-1}{z} \right| - 2 \operatorname{arctg} z + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{1 + \sqrt{1 - 2x - x^2}}{x}$.

1968. $\int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx.$

解 设 $\sqrt{x^2 - 2x + 2} = z - x$, 则

$$x = \frac{z^2 - 2}{2(z-1)}, dx = \frac{z^2 - 2z + 2}{2(z-1)^2} dz,$$

$$\sqrt{x^2 - 2x + 2} = \frac{z^2 - 2z + 2}{2(z-1)}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int x \sqrt{x^2 - 2x + 2} dx \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{(z^2 - 2)(z^2 - 2z + 2)^2}{(z - 1)^4} dz \\
&= \frac{1}{8} \int \frac{[(z - 1)^2 + 2(z - 1) - 1] \cdot [(z - 1)^2 + 1]^2}{(z - 1)^4} dz \\
&= \frac{1}{8} \int \left\{ \left[(z - 1)^2 - (z - 1)^{-4} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[2(z - 1) + 2(z - 1)^{-3} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[1 - (z - 1)^{-2} \right] + 4(z - 1)^{-1} \right\} d(z - 1) \\
&= \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{3} \left[(z - 1)^3 + (z - 1)^{-3} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[(z - 1)^2 - (z - 1)^{-2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[(z - 1) + (z - 1)^{-1} \right] \right\} + \frac{1}{2} \ln |z - 1| + C,
\end{aligned}$$

其中 $z = x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

1969. $\int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx.$

解 设 $\sqrt{x^2 + 3x + 2} = z(x + 1)$, 则

$$x = \frac{2 - z^2}{z^2 - 1}, dx = -\frac{2z}{(z^2 - 1)^2} dz,$$

$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} = \frac{z}{z^2 - 1}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{x - \sqrt{x^2 + 3x + 2}}{x + \sqrt{x^2 + 3x + 2}} dx \\
&= \int \frac{2z(2 - z - z^2)}{(z^2 - z - 2)(z^2 - 1)^2} dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + z + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - z - \frac{1}{2}} \right| \\
&\quad + \frac{2}{1-z-z^2} - \frac{4(2z+1)}{5(1-z-z^2)} + C \\
&= \frac{2}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2z + 1}{\sqrt{5} - 2z - 1} \right| + \frac{2(3-4z)}{5(1-z-z^2)} + C,
\end{aligned}$$

其中 $z = \sqrt{x(1+x)} - x$.

*) 利用 1921 题的递推公式.

利用各种方法, 计算下列积分:

1971. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$

解
$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}} \\
&= \int \frac{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}}{(x^2+1) - (x^2-1)} dx \\
&= \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+1} dx + \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2-1} dx \\
&= \frac{x}{4} (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2-1}} \right| + C.
\end{aligned}$$

1972. $\int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}}.$

解 设 $\frac{1+x}{1-x} = z$, 则

$$x = \frac{z-1}{z+1}, dx = \frac{2}{(z+1)^2} dz,$$

代入得

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x dx}{(1-x^3)\sqrt{1-x^2}} \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{(z^2-1)dz}{\sqrt{z}(3z^2+1)} \\
 &= \int \frac{(z^2-1)d(\sqrt{z})}{3z^2+1} \\
 &= \int \left[\frac{1}{3} - \frac{4}{3(3z^2+1)} \right] d(\sqrt{z}) \\
 &= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \int \frac{d(\sqrt[4]{3z^2})}{(\sqrt[4]{3z^2})^4+1} \\
 &= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{4}{3\sqrt[4]{3}} \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{z\sqrt{3} + \sqrt[4]{12z^2} + 1}{z\sqrt{3} - \sqrt[4]{12z^2} + 1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{1-z\sqrt{3}} \right] \right] + C \\
 &= \frac{\sqrt{z}}{3} - \frac{1}{3\sqrt[4]{12}} \left[\ln \frac{z\sqrt{3} + \sqrt[4]{12z^2} + 1}{z\sqrt{3} - \sqrt[4]{12z^2} + 1} \right. \\
 &\quad \left. - 2\operatorname{arctg} \left[\frac{\sqrt[4]{12z^2}}{z\sqrt{3} - 1} \right] \right] + C,
 \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{1+x}{1-x}$.

*) 利用 1884 题的结果.

1973.
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}.$$

解
$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}} \\
 &= \int \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{(\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{1}{(-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x})} dx \\
&= \int \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}}{2\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin x + \sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} + C.
\end{aligned}$$

1974. $\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx.$

解 $\int \frac{x + \sqrt{1+x+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x+x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(x + \sqrt{1+x+x^2})(1+x - \sqrt{1+x+x^2})}{(1+x)^2 - (1+x+x^2)} dx \\
&= \int \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{x} dx \\
&= \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx - \ln|x|.
\end{aligned}$$

对于积分 $\int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx$, 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$dx = -\frac{1}{t^2} dt, \quad \sqrt{1+x+x^2} = \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{|t|}.$$

不妨设 $t > 0$, 代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\sqrt{1+x+x^2}}{x} dx \\
&= - \int \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{t^2} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \sqrt{t^2 + t + 1} d\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= \frac{\sqrt{t^2 + t + 1}}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{2t + 1}{t \sqrt{1 + t + t^2}} dt \\
&= \sqrt{x^2 + x + 1} - \int \frac{dt}{\sqrt{1 + t + t^2}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t \sqrt{1 + t + t^2}} \\
&= \sqrt{x^2 + x + 1} - \ln\left(t + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + t + t^2}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(\frac{1}{t}\right) + 1}} \\
&= \sqrt{x^2 + x + 1} - \ln \frac{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{2x} \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln\left[\frac{1}{t} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t} + 1}\right] + C_1 \\
&= \sqrt{x^2 + x + 1} - \ln \frac{2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{2x} \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln \frac{2x + 1 + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{2} + C_1 \\
&= \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{2x + 1 + 2\sqrt{1 + x + x^2}}{(2 + x + 2\sqrt{1 + x + x^2})^2} \\
&\quad + \ln x + C.
\end{aligned}$$

于是,当 $x > 0$ 时,最后得到

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x + \sqrt{1 + x + x^2}}{1 + x + \sqrt{1 + x + x^2}} dx \\
&= \sqrt{x^2 + x + 1}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2} \ln \frac{2x+1+2\sqrt{1+x+x^2}}{(2+x+2\sqrt{1+x+x^2})^2} + C,$$

当 $x < 0$ 时, 可获同样的结果.

1975. $\int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx.$

解
$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{x(x+1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \frac{\sqrt{x(x+1)} \cdot (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{(x+1) - x} dx \\ &= \int [(x+1)\sqrt{x} - x\sqrt{x+1}] dx \\ &= \int [x^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{1}{2}} - (x+1)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}] dx \\ &= \frac{2}{3} [(x+1)^{\frac{3}{2}} + x^{\frac{3}{2}}] - \frac{2}{5} [(x+1)^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{5}{2}}] + C. \end{aligned}$$

1976. $\int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}}.$

解
$$\begin{aligned} \int \frac{(x^2-1)dx}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} &= \int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx}{\sqrt{\frac{x^4+1}{(x^2+1)^2}}} \\ &= \int \frac{\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2+1}\right)^2}} \end{aligned}$$

下面我们先考虑积分 $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} dx$. 设 $x = \operatorname{tgt}$,

$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则有 $dx = \sec^2 t dt$.

代入得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 t - 1}{\sec^4 t} \cdot \sec^2 t dt \\ &= \int (\sin^2 t - \cos^2 t) dt = - \int \cos 2t dt \\ &= - \frac{1}{2} \sin 2t + C_1 = - \frac{x}{1 + x^2} + C_1,\end{aligned}$$

从而, 可得 $\frac{x^2 - 1}{(x^2 + 1)^2} dx = - \frac{1}{\sqrt{2}} d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2}\right)$.

于是,

$$\begin{aligned}\int \frac{(x^2 - 1) dx}{(x^2 + 1) \sqrt{x^4 + 1}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2}\right)^2}} \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin\left(\frac{x\sqrt{2}}{1 + x^2}\right) + C.\end{aligned}$$

1977. $\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1) \sqrt{x^4 + 1}} dx.$

解 仿照 1976 题, 可得

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1) \sqrt{x^4 + 1}} dx &= \int \frac{\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}}{\sqrt{\frac{x^4 + 1}{(x^2 - 1)^2}}} dx \\ &= - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2 - 1}\right)^2}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2}}{x^2-1} + \sqrt{1 + \left(\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}\right)^2} \right| + C \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x\sqrt{2} + \sqrt{x^4+1}}{x^2-1} \right| + C.
\end{aligned}$$

1978. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}}$

解 作变换 $\frac{1}{x} = \sqrt{t}$ (这里设 $x > 0$. 若 $x < 0$, 则作变换 $\frac{1}{x} = -\sqrt{t}$. 最后结果相同), 则

$$dx = \frac{1}{2t\sqrt{t}} dt, \quad \sqrt{x^4+2x^2-1} = \frac{\sqrt{1+2t-t^2}}{t}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+2x^2-1}} &= -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d(1-t)}{\sqrt{2-(1-t)^2}} \\
&= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1-t}{\sqrt{2}}\right) + C \\
&= \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C \quad (|x| > \sqrt{\sqrt{2}-1}).
\end{aligned}$$

1979. $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

解 $\int \frac{(x^2+1)dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$

$$= \int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+x^2+1}} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2+1}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2 + \frac{1}{2} + \sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{x^4 + x^2 + 1}{x^4}}} + C \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2(1 + 2x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1})}{2 + x^2 + 2\sqrt{x^4 + x^2 + 1}} + C.
\end{aligned}$$

1980. 证明积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

(式中 R 为有理函数) 的求法, 归结为有理函数的积分法.

证 当 a, c 中至少有一个为零时, 则积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

的求法显然可归结为有理函数的积分法.

当 $a \neq 0, c \neq 0$ 时, 设 $\sqrt{ax+b} = z$, 则

$$x = \frac{z^2 - b}{a}, dx = \frac{2}{a} z dz,$$

$$\sqrt{cx+d} = \sqrt{\frac{c}{a}x^2 + d - \frac{bc}{a}} = \sqrt{c_1 z^2 + d_1},$$

式中 $c_1 = \frac{c}{a}, d_1 = d - \frac{bc}{a}$.

代入得

$$\begin{aligned} & \int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx \\ &= \int R\left(\frac{z^2-b}{a}, z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}\right) \frac{2}{a} z dz, \\ &= \int R_1(z, \sqrt{c_1 z^2 + d_1}) dz, \end{aligned}$$

其中 R_1 为有理函数.

再设 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = \pm \sqrt{c_1} z + u (c_1 > 0)$ 或 $\sqrt{c_1 z^2 + d_1} = zu \pm \sqrt{d_1} (d_1 > 0)$ —— 尤拉代换, 就可将被积函数有理化. 于是, 积分

$$\int R(x, \sqrt{ax+b}, \sqrt{cx+d}) dx$$

的求法可归结为有理函数的积分法.

二项微分式

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

(式中 m, n 和 p 为有理数) 仅在下列三种情形可化为有理函数的积分 (契比协夫定理):

第一种情形, p 为整数. 假定 $x = z^N$, 其中 N 为分数 m 和 n 的公分母.

第二种情形, $\frac{m+1}{n}$ 为整数. 假定 $a + bx^n = z^N$, 其中 N 为分数 p 的分母.

第三种情形, $\frac{m+1}{n} + p$ 为整数. 利用代换: ax^{-n}

$$+ \frac{1}{8} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C \quad (x > 0).$$

*) 利用 1921 题的结果.

$$1982. \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

$$\text{解} \quad \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} = x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-2}, m = \frac{1}{2}, n = \frac{1}{3},$$

$p = -2$; p 为整数, 这是二项微分式的第一种情形.

设 $x = z^6$, 则

$$dx = 6z^5 dz, \sqrt{x} = z^3, \sqrt[3]{x} = z^2.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx &= 6 \int \frac{z^3}{(z^2 + 1)^2} dz \\ &= 6 \int \left[z^4 - 2z^2 + 3 - \frac{4}{z^2 + 1} + \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \right] dz \\ &= \frac{6}{5} z^5 - 4z^3 + 18z - 24 \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \\ &\quad + 6 \left[\frac{z}{2(z^2 + 1)} + \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z \right]^{**} + C \\ &= \frac{6}{5} x^{\frac{5}{6}} - 4x^{\frac{1}{2}} + 18x^{\frac{1}{6}} + \frac{3x^{\frac{1}{6}}}{1 + x^{\frac{1}{3}}} - 21 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x^{\frac{1}{6}}) \\ &\quad + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的结果.

$$1983. \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}.$$

$$\text{解} \quad \frac{x}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} = x(1 + x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}, m = 1, n = \frac{2}{3}, p$$

$= -\frac{1}{2}; \frac{m+1}{n} = 3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1 + x^{\frac{2}{3}} = z^2$, 则

$$x = (z^2 - 1)^{\frac{3}{2}}, dx = 3z(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}} &= 3 \int (z^2 - 1)^2 dz \\ &= \frac{3}{5} z^5 - 2z^3 + 3z + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}$.

1984. $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $\frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} = x^5(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. $m = 5, n = 2, p = -\frac{1}{2}; \frac{m+1}{n} = 3$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $\sqrt{1-x^2} = z$ (不妨设 $x > 0$), 则

$$x = \sqrt{1-z^2}, dx = -\frac{z}{\sqrt{1-z^2}} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= - \int (1-z^2)^2 dz \\ &= -z + \frac{2}{3} z^3 - \frac{1}{5} z^5 + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \sqrt{1-x^2}$.

1985. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}.$

解 $\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} = x^0(1+x^3)^{-\frac{1}{3}}, m=0, n=3,$

$p = -\frac{1}{3}; \frac{m+1}{n} + p = 0,$ 这是二项微分式的第三种情形.

设 $x^{-3} + 1 = z^3,$ 则

$$x = (z^3 - 1)^{-\frac{1}{3}}, dx = -z^2(z^3 - 1)^{-\frac{4}{3}}dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} &= -\int \frac{z}{z^3-1} dz \\ &= -\frac{1}{3} \int \frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3} \int \frac{z-1}{z^2+z+1} dz \\ &= -\frac{1}{3} \ln|z-1| + \frac{1}{6} \ln(z^2+z+1) \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}.$

1986. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

解 $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} = x^0(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}, m=0, n=4, p =$

$-\frac{1}{4}; \frac{m+1}{n} + p = 0,$ 这是二项微分式的第三种情

形.

设 $x^{-4} + 1 = z^4$, 则

$$z = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x} (z > 0, x > 0),$$

$$x = (z^4 - 1)^{-\frac{1}{4}}, dx = -z^3(z^4 - 1)^{-\frac{5}{4}} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} &= - \int \frac{z^2}{z^4 - 1} dz \\ &= \int \left[\frac{1}{4(z+1)} - \frac{1}{4(z-1)} - \frac{1}{2(z^2+1)} \right] dz \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{z+1}{z-1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} z + C, \end{aligned}$$

其中 $z = \frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

1987⁺. $\int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^6}}$.

解 $\frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^6}} = x^{-1}(1+x^6)^{-\frac{1}{6}}, m = -1, n = 6,$

$p = -\frac{1}{6}; \frac{m+1}{n} = 0$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^6 = z^6$, 则

$$z = \sqrt[6]{1+x^6} (z > 0, x > 0),$$

$$x = \sqrt[6]{z^6 - 1}, dx = z^5(z^6 - 1)^{-\frac{5}{6}} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x \sqrt[6]{1+x^6}} &= \int \frac{z^4 dz}{z^6 - 1} \\ &= \int \left[-\frac{1}{6(z+1)} + \frac{z+1}{6(z^2 - z + 1)} \right] dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{6(z-1)} + \frac{-z+1}{6(z^2+z+1)} \Big) dz \\
& = \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2z+1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\
& + C_1 \\
& = \frac{1}{6} \ln \frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{12} \ln \frac{z^2-z+1}{z^2+z+1} \\
& + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{z^2-1}{z\sqrt{3}} \right) + C,
\end{aligned}$$

其中 $z = \sqrt[6]{1+x^6}$.

1988. $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}}$.

解 $\frac{1}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} = x^{-3} (1+x^{-1})^{-\frac{1}{5}}, m = -3,$

$n = -1, p = -\frac{1}{5}; \frac{m+1}{n} = 2$, 这是二项微分式的第二种情形.

设 $1+x^{-1} = z^5$, 则

$$x = (z^5 - 1)^{-1}, dx = -5z^4(z^5 - 1)^{-2} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x^3 \sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}} & = -5 \int z^3 (z^5 - 1) dz \\
& = -\frac{5}{9} z^9 + \frac{5}{4} z^4 + C,
\end{aligned}$$

其中 $z = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{x}}$.

1989. $\int \sqrt[3]{3x - x^3} dx.$

解 $\sqrt[3]{3x - x^3} = x^{\frac{1}{3}}(3 - x^2)^{\frac{1}{3}}, m = \frac{1}{3}, n = 2,$

$p = \frac{1}{3}; \frac{m+1}{n} + p = 1$, 这是二项微分式的第三种情形.

设 $3x^{-2} - 1 = z^3$ (不妨设 $x > 0$), 则

$$z = \frac{\sqrt[3]{3x - x^3}}{x}, x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{z^3 + 1}},$$

$$dx = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{z^2}{(z^3 + 1)^{\frac{3}{2}}} dz.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \sqrt[3]{3x - x^3} dx &= -\frac{9}{2} \int \frac{z^3}{(z^3 + 1)^2} dz \\ &= -\frac{9}{2} \int \frac{dz}{z^3 + 1} + \frac{9}{2} \int \frac{dz}{(z^3 + 1)^2} \\ &= -\frac{9}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2 - z + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) \right]^{**} \\ &\quad + \frac{9}{2} \left[\frac{z}{3(z^3 + 1)} + \frac{1}{9} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2 - z + 1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) \right]^{***} + C \\ &= \frac{3z}{2(z^3 + 1)} - \frac{1}{4} \ln \frac{(z+1)^2}{z^2 - z + 1} \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2z-1}{\sqrt{3}} \right) + C, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } z = \frac{\sqrt[3]{3x - x^3}}{x}.$$

*) 利用 1881 题的结果.

**) 利用 1892 题的结果.

1990. 在甚么情形下, 积分

$$\int \sqrt{1 + x^m} dx$$

(式中 m 为有理数) 为初等函数?

解 $\sqrt{1 + x^m} = x^0(1 + x^m)^{\frac{1}{2}}$. 由于 $p = \frac{1}{2}$, 故由契比协夫定理知, 仅在下述两种情形, 此函数的积分可化为有理函数的积分.

第一种情形, $\frac{1}{m}$ 为整数, 即 $m = \frac{1}{k_1} = \frac{2}{2k_1}$, 其中 $k_1 = \pm 1, \pm 2, \dots$;

第二种情形, $\frac{1}{m} + \frac{1}{2}$ 为整数, 即 $m = \frac{2}{2k_2 - 1}$, 其中 $k_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

综上所述, 即得: 当

$$m = \frac{2}{k}$$

(式中 $k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 积分

$$\int \sqrt{1 + x^m} dx$$

为初等函数.

§ 4. 三角函数的积分法

形如

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

的积分(式中 m 及 n 为整数), 可利用巧妙的变换或运用递推公式计算.

求下列积分:

1991. $\int \cos^5 x dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos^5 x dx &= \int \cos^4 x \cos x dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)^2 d(\sin x) \\ &= \int (1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x) d(\sin x) \\ &= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C. \end{aligned}$$

1992. $\int \sin^6 x dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin^6 x dx &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx \\ &\quad - \frac{1}{8} \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx \\ &= \frac{x}{8} - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3x}{16} + \frac{3}{64} \sin 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{16}\int(1-\sin^2 2x)d(\sin 2x) \\
& =\frac{5x}{16}-\frac{3}{16}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x \\
& \quad -\frac{1}{16}\sin 2x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C \\
& =\frac{5x}{16}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C
\end{aligned}$$

1993. $\int \cos^6 x dx.$

解 $\int \cos^6 x dx = \int \sin^6\left(x - \frac{\pi}{2}\right) d\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned}
& =\frac{5}{16}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{4}\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\
& \quad + \frac{3}{64}\sin 4\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{48}\sin^3 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{*}) + C_1 \\
& =\frac{5x}{16} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{64}\sin 4x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1992 题的结果.

1994. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx.$

解 $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x \cos^2 x dx$

$$\begin{aligned}
& =\frac{1}{8} \int \sin^2 2x(1+\cos 2x) dx \\
& =\frac{1}{8} \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) \\
& =\frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.
\end{aligned}$$

1995. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx.$

解 $\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x)^2 d(\sin x)$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\operatorname{ctg} x}{\sin x} - \int \operatorname{ctg} x \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\
&= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^3 x} dx \\
&= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\sin^3 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|,
\end{aligned}$$

于是,

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

2000. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin^3\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} \\
&= -\frac{\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{2\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \right|^{*}) + C \\
&= \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1999 题的结果.

2001. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x} &= 16 \int \frac{dx}{\sin^4 2x} \\
&= -8 \int \operatorname{csc}^2 2x d(\operatorname{ctg} 2x) \\
&= -8 \int (1 + \operatorname{ctg}^2 2x) d(\operatorname{ctg} 2x) \\
&= -8 \operatorname{ctg} 2x - \frac{8}{3} \operatorname{ctg}^3 2x + C.
\end{aligned}$$

$$2002. \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^5 x} dx \\
 &= \int \frac{dx}{\sin x \cos^5 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^3 x} \\
 &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^5 x} dx + \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^3 x \cos^3 x} dx \\
 &= \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx + 2 \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x} + \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x} \\
 &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^5 x} + 2 \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx \\
 &\quad + 3 \int \frac{dx}{\sin x \cos x} + \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx \\
 &= \frac{1}{4 \cos^4 x} - 2 \int \frac{d(\cos x)}{\cos^3 x} + 3 \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} + \int \frac{d(\sin x)}{\sin^3 x} \\
 &= \frac{1}{4 \cos^4 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + 3 \ln |\operatorname{tg} x| - \frac{1}{2 \sin^2 x} + C_1 \\
 &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + \frac{3}{2} \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + 3 \ln |\operatorname{tg} x| + C.
 \end{aligned}$$

$$2003. \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos^4 x} dx \\
 &= \int \frac{\sin x}{\cos^4 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x} \\
 &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^4 x} + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx + \int \frac{dx}{\sin x} \\
 &= \frac{1}{3 \cos^3 x} - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\
 &= \frac{1}{3 \cos^3 x} + \frac{1}{\cos x} + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.
 \end{aligned}$$

2004. $\int \operatorname{tg}^5 x dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^5 x dx &= \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1)^2 dx \\ &= \int \sec^4 x \operatorname{tg} x dx - 2 \int \sec^2 x \operatorname{tg} x dx + \int \operatorname{tg} x dx \\ &= \int \sec^3 x d(\sec x) - 2 \int \sec x d(\sec x) - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} \\ &= \frac{1}{4} \sec^4 x - \sec^2 x - \ln |\cos x| + C_1 \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x - \ln |\cos x| + C. \end{aligned}$$

2005. $\int \operatorname{ctg}^6 x dx.$

解
$$\begin{aligned} \int \operatorname{ctg}^6 x dx &= \int \operatorname{ctg}^2 x (\csc^2 x - 1)^2 dx \\ &= \int \operatorname{ctg}^2 x \csc^4 x dx - 2 \int \operatorname{ctg}^2 x \csc^2 x dx + \int \operatorname{ctg}^2 x dx \\ &= - \int \operatorname{ctg}^2 x (1 + \operatorname{ctg}^2 x) d(\operatorname{ctg} x) \\ &\quad + 2 \int \operatorname{ctg}^2 x d(\operatorname{ctg} x) + \int (\csc^2 x - 1) dx \\ &= -\frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{2}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C \\ &= -\frac{1}{5} \operatorname{ctg}^5 x + \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{ctg} x - x + C. \end{aligned}$$

2006. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx.$

解
$$\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx = \int \operatorname{tg}^4 x d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{5} \operatorname{tg}^5 x + C.$$

2007. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} = \int \frac{\sin^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} \\
 & + \int \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt{\sin^3 x \cos^5 x}} \\
 & = \int \sqrt{\operatorname{tg} x} d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{d(\operatorname{ctg} x)}{\sqrt{\operatorname{ctg} x}} \\
 & = \frac{2}{3} \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} - 2 \sqrt{\operatorname{ctg} x} + C.
 \end{aligned}$$

$$2008^+. \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

解 设 $t = \sqrt[3]{\sin x}$, 不妨只考虑 $\cos x$ 为正的情况, 即 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 且 $x \neq 0$, 则有

$$dx = \frac{3t^2}{\sqrt{1-t^6}} dt, \cos x = \sqrt{1-t^6}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{dx}{\cos x \sqrt[3]{\sin^2 x}} = 3 \int \frac{dt}{1-t^6} \\
 & = \frac{3}{2} \int \left(\frac{1}{1-t^3} + \frac{1}{1+t^3} \right) dt \\
 & = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{t+2}{1+t+t^2} \right) dt + \frac{3}{2} \int \frac{dt}{1+t^3} \\
 & = \frac{-1}{2} \ln|1-t| + \frac{1}{4} \int \frac{2t+1}{t^2+t+1} \\
 & \quad + \frac{3}{4} \int \frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right] + C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(t+1)^2(t^2+t+1)}{(1-t)^2(t^2-t+1)} \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) \right] + C \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(1+t)^3(1-t^3)}{(1-t)^3(1+t^3)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2} \right) \\
&\quad + C,
\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\sin x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

2009. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}$.

解 设 $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, 则

$$x = \operatorname{arctg} t^2, dx = \frac{2t}{1+t^4} dt,$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} &= 2 \int \frac{dt}{1+t^4} \\
&= 2 \left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} \right]^{*}) + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{t^2 + t\sqrt{2} + 1}{t^2 - t\sqrt{2} + 1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t\sqrt{2}}{1-t^2} + C.
\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

*) 利用 1884 题的结果.

2010. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}}$.

解 设 $\sqrt[3]{\operatorname{tg}x} = t$, 则

$$x = \operatorname{arctg}t^3, dx = \frac{3t^2}{1+t^6}dt,$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}} &= 3 \int \frac{tdt}{1+t^6} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2)}{1+(t^2)^3} \\ &= \frac{3}{2} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}} \right] + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{(t^2+1)^2}{t^4-t^2+1} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{arctg} \frac{2t^2-1}{\sqrt{3}} + C, \end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\operatorname{tg}x}$.

*) 利用 1881 题的结果.

2011. 推出下列积分的递推公式

$$(a) I_n = \int \sin^n x dx; \quad (b) K_n = \int \cos^n x dx \quad (n > 2).$$

并利用推得的公式来计算

$$\int \sin^6 x dx \text{ 及 } \int \cos^8 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) I_n &= \int \sin^n x dx = - \int \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx \\ &= - \cos x \sin^{n-1} x + (n-1) I_{n-2} + (1-n) I_n, \end{aligned}$$

于是,

$$I_n = - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2};$$

利用此公式及

$$I_0 = \int dx = x + C,$$

即得

$$\begin{aligned} I_6 &= \int \sin^6 x dx = -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} + \frac{5}{6} I_4 \\ &= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24} + \frac{5}{8} I_2 \\ &= -\frac{\cos x \sin^5 x}{6} - \frac{5 \cos x \sin^3 x}{24} \\ &\quad - \frac{5 \cos x \sin x}{16} + \frac{5}{16} x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad K_n &= \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x d(\sin x) \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\ &= \sin x \cos^{n-1} x + (n-1) K_{n-2} - (n-1) K_n \end{aligned}$$

于是,

$$K_n = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} K_{n-2};$$

利用此公式及

$$K_0 = x + C$$

即得

$$\begin{aligned} K_8 &= \int \cos^8 x dx = \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{8} K_6 = \dots \\ &= \frac{1}{8} \sin x \cos^7 x + \frac{7}{48} \sin x \cos^5 x + \frac{35}{192} \sin x \cos^3 x \\ &\quad + \frac{35}{128} \sin x \cos x + \frac{35}{128} x + C. \end{aligned}$$

2012. 推出下列积分的递推公式

$$(a) I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}; \quad (6) K_n = \int \frac{dx}{\cos^n x} \quad (n > 2)$$

并利用推得的公式计算

$$\int \frac{dx}{\sin^5 x} \text{ 及 } \int \frac{dx}{\cos^7 x}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 (a)} \quad I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^n x} dx \\ &= I_{n-2} - \frac{1}{n-1} \int \cos x d\left(\frac{1}{\sin^{n-1} x}\right) \\ &= I_{n-2} - \frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} I_{n-2} \\ &= -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}; \end{aligned}$$

利用此公式及

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

即得

$$\begin{aligned} I_5 &= \int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} + \frac{3}{4} I_3 = \dots \\ &= -\frac{\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad K_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^n x} dx \\ &= \frac{1}{n-1} \int \sin x d\left(\frac{1}{\cos^{n-1} x}\right) + K_{n-2} \\ &= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} - \frac{1}{n-1} K_{n-2} + K_{n-2} \\ &= \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} K_{n-2}; \end{aligned}$$

利用此公式及

$$K_1 = \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C,$$

即得

$$\begin{aligned} K_7 &= \int \frac{dx}{\cos^7 x} = \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5}{6}K_5 = \dots \\ &= \frac{\sin x}{6\cos^6 x} + \frac{5\sin x}{24\cos^4 x} + \frac{5\sin x}{16\cos^2 x} \\ &\quad + \frac{5}{16} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C. \end{aligned}$$

运用公式

$$\text{I} \quad \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)];$$

$$\text{II} \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)];$$

$$\text{III} \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)]$$

来计算下列的积分.

求积分:

$$2013. \int \sin 5x \cos x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sin 5x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin 4x + \sin 6x] dx \\ &= -\frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{12} \cos 6x + C. \end{aligned}$$

$$2014. \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 2x (\cos 4x + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\cos 6x + \cos 2x) dx + \frac{1}{4} \int (1 + \cos 4x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int \cos^2 ax \cos^2 bx dx = \int (\cos ax \cos bx)^2 dx \\
& = \frac{1}{4} \int [\cos(a-b)x + \cos(a+b)x]^2 dx \\
& = \frac{1}{4} \int [\cos^2(a-b)x + \cos^2(a+b)x \\
& \quad + 2\cos(a-b)x\cos(a+b)x] dx. \\
& = \frac{1}{8} \int [2 + \cos 2(a+b)x + \cos 2(a-b)x] dx \\
& \quad + \frac{1}{4} \int (\cos 2ax + \cos 2bx) dx \\
& = \frac{x}{4} + \frac{\sin 2(a+b)x}{16(a+b)} + \frac{\sin 2(a-b)x}{16(a-b)} \\
& \quad + \frac{1}{8a} \sin 2ax + \frac{1}{8b} \sin 2bx + C.
\end{aligned}$$

2018. $\int \sin^3 2x \cos^2 3x dx.$

解 先利用三角公式化简 $\sin^3 2x \cos^2 3x$, 得

$$\begin{aligned}
\sin^3 2x \cos^2 3x & = -\frac{1}{16} \sin 12x + \frac{3}{16} \sin 8x \\
& \quad - \frac{1}{8} \sin 6x - \frac{3}{16} \sin 4x + \frac{3}{8} \sin 2x,
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
& \int \sin^3 2x \cos^2 3x dx \\
& = \frac{1}{192} \cos 12x - \frac{3}{128} \cos 8x + \frac{1}{48} \cos 6x \\
& \quad + \frac{3}{64} \cos 4x - \frac{3}{16} \cos 2x + C.
\end{aligned}$$

运用恒等式

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin[(x + \alpha) - (x + \beta)]$$

及 $\cos(\alpha - \beta) = \cos[(x + a) - (x + \beta)]$
来计算积分.

求积分:

$$2019. \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sin(x+a)\sin(x+b)} \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(a+x) - (x+b)]}{\sin(x+a)\sin(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)} - \frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} \right] dx \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)} \right| + C, \end{aligned}$$

其中设 $\sin(a-b) \neq 0$.

$$2020. \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)} \\ &= \frac{1}{\cos(a-b)} \int \frac{\cos[(x+a) - (x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)} dx \\ &= \frac{1}{\cos(a-b)} \int \left[\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)} + \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right] dx \\ &= \frac{1}{\cos(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)} \right| + C, \end{aligned}$$

其中设 $\cos(a-b) \neq 0$.

$$2021. \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} \\ &= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \frac{\sin[(x+a) - (x+b)] dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \int \left(\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+a)} - \frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)} \right) dx \\
&= \frac{1}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\cos(x+b)}{\cos(x+a)} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\sin(a-b) \neq 0^*$).

*) 当 $a-b = 2k\pi (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 时, 是更简单的积分, 2019 题及 2020 题与本题类似, 解法从略.

2022. $\int \frac{dx}{\sin x - \sin a}$.

解
$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sin x - \sin a} &= \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos\left(\frac{x+a}{2} - \frac{x-a}{2}\right)}{\sin x - \sin a} dx \\
&= \frac{1}{\cos a} \int \frac{\cos \frac{x+a}{2} \cos \frac{x-a}{2} + \sin \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}}{2 \cos \frac{x+a}{2} \sin \frac{x-a}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2 \cos a} \int \left(\frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} + \frac{\sin \frac{x+a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right) dx \\
&= \frac{1}{\cos a} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\cos a \neq 0$.

2023. $\int \frac{dx}{\cos x + \cos a}$.

解
$$\int \frac{dx}{\cos x + \cos a} = \int \frac{d\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\cos\left(a + \frac{3}{2}\pi\right)} \ln \left| \frac{\sin \frac{x-a-\pi}{2}}{\cos \frac{x+a+2\pi}{2}} \right|^{*}) + C \\
&= \frac{1}{\sin a} \ln \left| \frac{\cos \frac{x-a}{2}}{\cos \frac{x+a}{2}} \right| + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\sin a \neq 0$.

*) 利用 2022 题的结果.

2024. $\int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx.$

$$\begin{aligned}
&\text{解 } \int \operatorname{tg} x \operatorname{tg}(x+a) dx \\
&= \int \frac{\sin x \sin(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx \\
&= \int \frac{\cos x \cos(x+a) + \sin x \sin(x+a) - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx \\
&= \int \frac{\cos a - \cos x \cos(x+a)}{\cos x \cos(x+a)} dx \\
&= -x + \cos a \cdot \int \frac{dx}{\cos(x+a) \cos x} \\
&= -x + \operatorname{ctg} a \cdot \ln \left| \frac{\cos x}{\cos(x+a)} \right|^{*}) + C,
\end{aligned}$$

其中设 $\sin a \neq 0$.

*) 利用 2021 题的结果.

形如

$$\int R(\sin x, \cos x) dx$$

(式中 R 为有理函数) 的积分的一般情形可利用代换

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ 化为有理函数的积分.

(a) 若等式

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

或 $R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$

成立, 则最好利用代换 $\cos x = t$ 或对应的 $\sin x = t$.

(6) 若等式

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$$

成立, 则最好利用代换 $\operatorname{tg} x = t$.

求积分:

$$2025. \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}.$$

解 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$,

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} &= \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left(\frac{3t+1}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \left[\frac{3\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} \right] + C. \end{aligned}$$

$$2026. \int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x}.$$

解 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 同 2025 题, 得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2 + \cos x)\sin x} &= \int \frac{1+t^2}{t(3+t^2)} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{3t} + \frac{2t}{3(3+t^2)} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \ln |t(3+t^2)| + C_1 \\
&= \frac{1}{6} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3} + C.
\end{aligned}$$

*) 由于

$$\begin{aligned}
t(3+t^2) &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(2 + \sec^2 \frac{x}{2} \right) \\
&= \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos^3 \frac{x}{2}} \left(1 + 2\cos^2 \frac{x}{2} \right) \\
&= \frac{\left(\frac{1-\cos x}{2} \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1+\cos x}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} (\cos x + 2) \\
&= 2 \left[\frac{(1-\cos x)(\cos x + 2)^2}{(1+\cos x)^3} \right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

因而

$$\ln |t(3+t^2)| = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}.$$

2027. $\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$

解 设 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, 同 2025 题, 得

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx &= 4 \int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2(1+t-t^2)} \\
&= \frac{4}{5} \int \left[\frac{1}{1+t^2} + \frac{-2+t}{(1+t^2)^2} + \frac{1}{1+t-t^2} \right] dt \\
&= \frac{4}{5} \int \frac{dt}{1+t^2} - \frac{8}{5} \int \frac{dt}{(1+t^2)^2} + \frac{2}{5} \int \frac{2t dt}{(1+t^2)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{5} \int \frac{d\left(t - \frac{1}{2}\right)}{\frac{5}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \\
& = \frac{4}{5} \operatorname{arctg} t - \frac{8}{5} \left(\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) *) \\
& \quad - \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + t - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(t - \frac{1}{2}\right)} \right| + C_1 \\
& = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2t}{1+t^2} + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} + t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - t} \right| + C_1 \\
& = -\frac{1}{5} (\cos x + 2\sin x) **) \\
& \quad + \frac{4}{5\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2} \right) \right| ***) + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1817 题的结果.

$$\begin{aligned}
**) \quad & -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2t}{1+t^2} = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sec^2 \frac{x}{2}} \\
& = -\frac{2}{5} \cdot \frac{1+2 \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x}}{2} \\
& = -\frac{1}{5} (\cos x + 2\sin x) - \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots) \ln \left| \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2} + t}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} - t} \right| \\
&= \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right) - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} \right| \\
&= \ln \left| \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}} \right| + \ln \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arctg}2}{2}\right)} \\
&= \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right) \right| - \ln \left(\operatorname{ctg}\left(\frac{\operatorname{arc\,tg}2}{2}\right) \right).
\end{aligned}$$

2028. $\int \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x}$;

(a) $0 < \epsilon < 1$; (b) $\epsilon > 1$.

解 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. 同 2025 题, 得

$$\int \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} = 2 \int \frac{dt}{(1 + \epsilon) + (1 - \epsilon)t^2} = I.$$

(a) $0 < \epsilon < 1$,

$$\begin{aligned}
I &= \frac{2}{1 + \epsilon} \int \frac{dt}{1 + \left(\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}\right)t^2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(t \sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \right) + C \\
&= \frac{2}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C;
\end{aligned}$$

(b) $\epsilon > 1$,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{2}{\epsilon - 1} \int \frac{dt}{\left(\frac{\epsilon + 1}{\epsilon - 1}\right) - t^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{\epsilon + 1} + \sqrt{\epsilon - 1}t}{\sqrt{\epsilon + 1} - \sqrt{\epsilon - 1}t} \right| + C \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \ln \left| \frac{\epsilon + \cos x + \sqrt{\epsilon^2 - 1} \sin x}{1 + \epsilon \cos x} \right|^{*}) \\
 &\quad + C.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 *) &\frac{\sqrt{\epsilon + 1} + t \sqrt{\epsilon - 1}}{\sqrt{\epsilon + 1} - t \sqrt{\epsilon - 1}} \\
 &= \frac{\epsilon + 1 + 2t \sqrt{\epsilon^2 - 1} + (\epsilon - 1)t^2}{(\epsilon + 1) - (\epsilon - 1)t^2} \\
 &= \frac{\epsilon(1 + t^2) + (1 - t^2) + 2 \sqrt{\epsilon^2 - 1}t}{\epsilon(1 - t^2) + (1 + t^2)} \\
 &= \frac{\epsilon(1 + t^2) + (1 + t^2)\cos x + 2t \sqrt{\epsilon^2 - 1}}{\epsilon(1 + t^2)\cos x + (1 + t^2)} \\
 &= \frac{\epsilon + \cos x + \sqrt{\epsilon^2 - 1} \cdot \frac{2t}{1 + t^2}}{\epsilon \cos x + 1} \\
 &= \frac{\epsilon + \cos x + \sqrt{\epsilon^2 - 1} \sin x}{\epsilon \cos x + 1}.
 \end{aligned}$$

2029. $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + \sin^2 x} \right) dx \\
 &= x - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\sec^2 x + \operatorname{tg}^2 x} = x - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{1 + 2\operatorname{tg}^2 x} \\
 &= x - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) \right| + C.$$

2033. $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2}$

解 $\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(atgx + b)}{(atgx + b)^2}$
 $= -\frac{1}{atgx + b} + C = -\frac{\cos x}{a(a \sin x + b \cos x)} + C.$

2034. $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

解 $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$
 $= \int \frac{\sin x dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{(\sin x - \cos x) dx}{(\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)}$
 $+ \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \sin x \cos x}$
 $= \frac{1}{3} \int \frac{-(\cos x - \sin x) dx}{\sin x + \cos x}$
 $+ \frac{1}{6} \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{1 - \sin x \cos x} dx + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 - \sin x \cos x}$
 $= -\frac{1}{3} \int \frac{d(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} + \frac{1}{6} \int \frac{d(1 - \sin x \cos x)}{1 - \sin x \cos x}$
 $- \frac{1}{\sqrt{3}} \int d \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right)$
 $= -\frac{1}{6} \ln \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 - \sin x \cos x}$
 $- \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{2 \cos x - \sin x}{\sqrt{3} \sin x} \right) + C.$

2035. $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int \frac{2dx}{2 - \sin^2 2x} \\
 & = \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{2 \sec^2 2x - \operatorname{tg}^2 2x} \\
 & = \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{2 + \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

$$2036. \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx = \int \frac{2 \sin^2 2x dx}{\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + 8} \\
 & = \int \frac{\operatorname{tg}^2 2x d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^4 2x - 8 \operatorname{tg}^2 2x \sec^2 2x + 8 \sec^4 2x} \\
 & = \int \frac{\operatorname{tg}^2 2x d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^4 2x + 8 \operatorname{tg}^2 2x + 8} \\
 & = \frac{\sqrt{2}}{4} (2 + \sqrt{2}) \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^2 2x + 4 + 2\sqrt{2}} \\
 & \quad - \frac{\sqrt{2}}{4} (2 - \sqrt{2}) \int \frac{d(\operatorname{tg} 2x)}{\operatorname{tg}^2 2x + 4 - \sqrt{2}} \\
 & = \frac{1}{4} \left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}} \right] \right. \\
 & \quad \left. - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} \right] \right] + C.
 \end{aligned}$$

$$2037. \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = - \int \frac{\cos 2x}{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x} dx \\
 & = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \left(\frac{2 \cos 2x}{\sqrt{2} - \sin 2x} + \frac{2 \cos 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} \right) dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} - \sin 2x}{\sqrt{2} + \sin 2x} + C.$$

2038. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$

解 $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx = \int \frac{\operatorname{tg} x \sec^2 x}{\sec^4 x + \operatorname{tg}^4 x} dx$
 $= \frac{1}{2} \int \frac{d(\operatorname{tg}^2 x)}{2\operatorname{tg}^4 x + 2\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1 + 2\operatorname{tg}^2 x)$
 $+ C.$

2039. $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x}.$

解 $\int \frac{dx}{\sin^6 x + \cos^6 x} = \int \frac{dx}{1 - 3\sin^2 x \cos^2 x}$
 $= \int \frac{dx}{1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x} = \int \frac{2d(\operatorname{tg} 2x)}{4\sec^2 2x - 3\operatorname{tg}^2 2x}$
 $= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{2} \right) + C.$

2040. $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2}.$

解 $\int \frac{dx}{(\sin^2 x + 2\cos^2 x)^2} = \int \frac{\frac{1}{\cos^4 x} dx}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$
 $= \int \frac{\sec^2 x d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$
 $= \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$
 $= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x + 2) - 2}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2} d(\operatorname{tg} x) + \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$
 $= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg}^2 x + 2} - \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{(\operatorname{tg}^2 x + 2)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)} \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right)' + C \\
&= \frac{3}{4\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) - \frac{\operatorname{tg} x}{4(\operatorname{tg}^2 x + 2)} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1817 题的结果.

2041. 求积分

$$\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$$

先化分母为对数的形状.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \int \frac{dx}{\sin(x + \varphi)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x + \varphi}{2} \right) \right| + C,
\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

并设 $a^2 + b^2 \neq 0$.

2042. 证明

$$\begin{aligned}
&\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx \\
&= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C.
\end{aligned}$$

式中 A, B, C 为常数.

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad a_1 \sin x + b_1 \cos x &= A(a \sin x + b \cos x) \\
&\quad + B(a \cos x - b \sin x),
\end{aligned}$$

$$\text{式中 } A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}, a^2 + b^2 \neq 0.$$

于是

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin x + b \cos x} dx \\ &= A \int dx + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{a \sin x + b \cos x} \\ &= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x| + C. \end{aligned}$$

求积分:

2043. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx.$

解 此为 2042 题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -1, a = 1, b = 2;$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 2}{1 + 4} = -\frac{1}{5},$$

$$B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} = \frac{-1 - 2}{1 + 4} = -\frac{3}{5}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + 2 \cos x} dx \\ &= -\frac{x}{5} - \frac{3}{5} \ln |\sin x + 2 \cos x| + C. \end{aligned}$$

2044. $\int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x}.$

解 $\int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x}{5 \sin x + 3 \cos x} dx.$

此为 2042 题的特例, 这里

$$a_1 = 0, b_1 = 1, a = 5, b = 3;$$

$$A = \frac{3}{34}, B = \frac{5}{34}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{3 + 5 \operatorname{tg} x} = \frac{3}{34} x + \frac{5}{34} \ln |5 \sin x + 3 \cos x| + C.$$

$$2045. \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \text{仿 2042 题, } \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \\ &= A \int \frac{a \sin x + b \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \\ & \quad + B \int \frac{a \cos x - b \sin x}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \\ &= A \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x} + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x)}{(a \sin x + b \cos x)^2} dx \\ &= \frac{A}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right|^{*}) \\ & \quad - \frac{B}{a \sin x + b \cos x} + C \\ &= \frac{aa_1 + bb_1}{(a^2 + b^2)^{\frac{3}{2}}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\varphi}{2} \right) \right| \\ & \quad - \frac{ab_1 - a_1 b}{(a^2 + b^2)(a \sin x + b \cos x)} + C, \end{aligned}$$

$$\text{式中 } A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1 b}{a^2 + b^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$a^2 + b^2 \neq 0$ (显然按题意 a, b 不同时为零).

*) 利用 2041 题的结果.

2046. 证明:

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx \\ &= Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| \\ & \quad + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}, \end{aligned}$$

式中 A, B, C 都是常系数.

证 按题意 a, b 不同时为零. 设

$$a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1 \equiv A(a \sin x + b \cos x + c) \\ + B(a \cos x - b \sin x) + C,$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2}, \\ C = \frac{a(ac_1 - a_1c) + b(bc_1 - b_1c)}{a^2 + b^2}.$$

代入得

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a \sin x + b \cos x + c} dx \\ = A \int dx + B \int \frac{d(a \sin x + b \cos x + c)}{a \sin x + b \cos x + c} \\ + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c} \\ = Ax + B \ln |a \sin x + b \cos x + c| \\ + C \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x + c}.$$

求积分:

2047. $\int \frac{\sin x + 2 \cos x - 3}{\sin x - 2 \cos x + 3} dx.$

解 此为 2046 题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = -3, a = 1, b = -2, c = 3;$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 - 4}{1 + 4} = -\frac{3}{5},$$

$$B = \frac{ab_1 - a_1b}{a^2 + b^2} = \frac{2 + 2}{1 + 4} = \frac{4}{5},$$

$$C = \frac{a(ac_1 - a_1c) + b(bc_1 - b_1c)}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{(-3-3) + (-2)(6-6)}{1+4} = -\frac{6}{5}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x + 2\cos x - 3}{\sin x - 2\cos x + 3} dx \\ &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln|\sin x - 2\cos x + 3| \\ & \quad - \frac{6}{5} \int \frac{dx}{\sin x - 2\cos x + 3} \\ &= -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\ln|\sin x - 2\cos x + 3| \\ & \quad - \frac{6}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1 + 5\operatorname{tg} \frac{x}{2}^{*})}{2} + C. \end{aligned}$$

*) 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

2048. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}.$

解 此为 2046 题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 0, c_1 = 0, a = 1, b = 1, c = \sqrt{2};$$

$$A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \\ & \quad - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x} \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\ln|\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{2} + \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \\
& = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \\
& - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2\cos^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right)} \\
& = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{2} + \sin x + \cos x| \\
& - \frac{1}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) + C.
\end{aligned}$$

2049. $\int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx.$

解 本题也是 2046 题之特例, 这里

$$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = 0, a = 3, b = 4, c = -2;$$

$$A = \frac{2}{5}, B = -\frac{1}{5}, C = \frac{4}{5}.$$

代入得

$$\begin{aligned}
& \int \frac{2\sin x + \cos x}{3\sin x + 4\cos x - 2} dx \\
& = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln |3\sin x + 4\cos x - 2| \\
& + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x - 2} \\
& = \frac{2}{5}x - \frac{1}{5} \ln |3\sin x + 4\cos x - 2| \\
& + \frac{4}{5\sqrt{21}} \ln \left| \frac{\sqrt{7} + \sqrt{3} \left(2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)}{\sqrt{7} - \sqrt{3} \left(2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)} \right|^{*}) \\
& + C.
\end{aligned}$$

解 此为 2050 题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -2, c_1 = 3, a = 1, b = 1;$$

$$A = \frac{bc_1 - a_1b + 2ab_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 - 4}{1 + 1} = -1,$$

$$B = \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2 + b^2} = \frac{3 - 1 + 4}{1 + 1} = 3,$$

$$C = \frac{a_1b^2 + a^2c_1 - 2abb_1}{a^2 + b^2} = \frac{1 + 3 + 4}{1 + 1} = 4.$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= -\sin x + 3\cos x + 4 \int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \\ &= -\sin x + 3\cos x + \frac{4}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= -\sin x + 3\cos x + 2\sqrt{2} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) \right| + C. \end{aligned}$$

$$2052. \int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx.$$

解 本题也是 2050 题的特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = -\frac{1}{2}, c_1 = 2, a = 1, b = 2;$$

$$A = \frac{1}{5}, B = \frac{3}{5}, C = \frac{8}{5}$$

代入得

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sin^2 x - \sin x \cos x + 2\cos^2 x}{\sin x + 2\cos x} dx \\ &= \frac{1}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x + \frac{8}{5} \int \frac{dx}{\sin x + 2\cos x} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{5}(\sin x + 3\cos x).$$

$$+ \frac{8}{5\sqrt{5}} \ln \left| \frac{\sqrt{5} + 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1}{\sqrt{5} - 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right|^{*}) + C.$$

*) 设 $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, 积分即得所求式子.

2053. 证明: 若 $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$, 则

$$\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx$$

$$= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2},$$

式中 A, B 为未定系数, λ_1, λ_2 为下方程式的根

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2)$$

及

$$u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x, k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} (i = 1, 2).$$

证 记

$$\begin{aligned} & a^2 \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x \\ &= (a - \lambda_i) \sin^2 x + 2b \sin x \cos x \\ & \quad + (c - \lambda_i) \cos^2 x + \lambda_i \\ &= \frac{1}{a - \lambda_i} [(a - \lambda_i)^2 \sin^2 x + 2b(a - \lambda_i) \sin x \cos x \\ & \quad + (c - \lambda_i)(a - \lambda_i) \cos^2 x] + \lambda_i, \end{aligned}$$

其中 $\lambda_i (i = 1, 2)$ 为 $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$ 的根.

由假定 $(a - c)^2 + b^2 \neq 0$, 从而 $(a - c)^2 + 4b^2 \neq 0$,

因此 $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

再设 $k_i = \frac{1}{a - \lambda_i}$ ($i = 1, 2$) 及

$$u_i = (a - \lambda_i)\sin x + b\cos x.$$

由于 $(a - \lambda_1)(c - \lambda_1) - b^2 = 0$, 即 $b^2 = (a - \lambda_1)(c - \lambda_1)$.

于是,

$$\begin{aligned} & a^2\sin^2x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2x \\ &= k_i[(a - \lambda_i)^2\sin^2x + 2b(a - \lambda_i)\sin x\cos x \\ & \quad + b^2\cos^2x] + \lambda_i = k_i[(a - \lambda_i)\sin x + b\cos x]^2 \\ & \quad + \lambda_i = k_i u_i^2 + \lambda_i. \end{aligned} \quad (1)$$

其次, 设

$$\begin{aligned} a_1\sin x + b_1\cos x &= A[(a - \lambda_1)\cos x - b\sin x] \\ & \quad + B[(a - \lambda_2)\cos x - b\sin x], \end{aligned} \quad (2)$$

比较等式两端同类项的系数, 则有

$$-b(A + B) = a_1,$$

$$A(a - \lambda_1) + B(a - \lambda_2) = b_1,$$

$$A = -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)},$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

由(1)式及(2)式即得

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{a^2\sin^2x + 2b\sin x\cos x + c\cos^2x} dx \\ &= A \int \frac{(a - \lambda_1)\cos x - b\sin x}{k_1[(a - \lambda_1)\sin x + b\cos x]^2 + \lambda_1} dx \\ & \quad + B \int \frac{(a - \lambda_2)\cos x - b\sin x}{k_2[(a - \lambda_2)\sin x + b\cos x]^2 + \lambda_2} dx \end{aligned}$$

$$= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}.$$

*) 按题意, $b \neq 0$. 因若 $b = 0$, 则 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = c$, 从而 k_i 无意义. 不过, 当 $b = 0$ 时, 仍能化为所要求的类似形式. 事实上, 当 $b = 0$ 时, $a \neq c$,

我们有

$$\begin{aligned} & \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + 2b \sin x \cos x + c \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx \\ &= a_1 \int \frac{\sin x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx + b_1 \int \frac{\cos x}{a \sin^2 x + c \cos^2 x} dx \\ &= a_1 \int \frac{d(\cos x)}{(c-a)\cos^2 x + a} + b_1 \int \frac{d(\sin x)}{(a-c)\sin^2 x + c} \\ &= A \int \frac{du_1}{k_1 u_1^2 + \lambda_1} + B \int \frac{du_2}{k_2 u_2^2 + \lambda_2}, \end{aligned}$$

式中 $A = -a_1, B = b_1, k_1 = c - a, k_2 = a - c$,

$$u_1 = \cos x, u_2 = \sin x, \lambda_1 = a, \lambda_2 = c.$$

本题也可用下法另证: 命 $u_i = (a - \lambda_i) \sin x + b \cos x$,

$k_i = \frac{1}{a - \lambda_i} (i = 1, 2)$, 代入积分等式. 然后两边求导,

整理并比较系数, 便可知 λ_i 必为 $\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$

的根, 相应可求出系数, A, B .

求积分:

2054. $\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx.$

解 $\int \frac{2 \sin x - \cos x}{3 \sin^2 x + 4 \cos^2 x} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2\sin x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{3\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx \\
&= -2 \int \frac{d(\cos x)}{3 + \cos^2 x} - \int \frac{d(\sin x)}{4 - \sin^2 x} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right) - \frac{1}{4} \ln \frac{2 + \sin x}{2 - \sin x} + C.
\end{aligned}$$

2055. $\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} dx.$

解 此为 2053 题之特例, 这里

$$a_1 = 1, b_1 = 1, a = 2, b = -2, c = 5.$$

由

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0,$$

求得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$. 从而

$$\begin{aligned}
A &= -\frac{a_1(\lambda_1 - \lambda_2) + b_1 b + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} \\
&= \frac{(1 - 6) - 2 + (2 - 1)}{-2(1 - 6)} = \frac{3}{5},
\end{aligned}$$

$$B = \frac{bb_1 + a_1(a - \lambda_1)}{b(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{-2 + 1}{10} = -\frac{1}{10};$$

$$u_1 = (a - \lambda_1)\sin x + b\cos x = \sin x - 2\cos x,$$

$$u_2 = (a - \lambda_2)\sin x + b\cos x = -4\sin x - 2\cos x;$$

$$k_1 = \frac{1}{a - \lambda_1} = 1,$$

$$k_2 = \frac{1}{a - \lambda_2} = -\frac{1}{4}.$$

代入得

$$\int \frac{\sin x + \cos x}{2\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{5} \int \frac{d(\sin x - 2\cos x)}{(\sin x - 2\cos x)^2 + 1} \\
&\quad + \frac{1}{10} \int \frac{d(4\sin x + 2\cos x)}{6 - \frac{1}{4}(4\sin x + 2\cos x)^2} \\
&= \frac{3}{5} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x - 2\cos x) \\
&\quad + \frac{1}{10\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6} + 2\sin x + \cos x}{\sqrt{6} - 2\sin x - \cos x} \right| + C.
\end{aligned}$$

2056. $\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx.$

解 本题也是 2053 题的特例, 因为

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx \\
&= \int \frac{\sin x - 2\cos x}{\sin^2 x + 4\sin x \cos x + \cos^2 x} dx,
\end{aligned}$$

这里,

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a = 1, b = 2, c = 1;$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -1; k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = \frac{1}{2};$$

$$A = \frac{1}{4}, B = -\frac{3}{4};$$

$$u_1 = 2(\cos x - \sin x), u_2 = 2(\cos x + \sin x).$$

代入得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\sin x - 2\cos x}{1 + 4\sin x \cos x} dx \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{2d(\cos x - \sin x)}{-2(\cos x - \sin x)^2 + 3} \\
&\quad - \frac{3}{4} \int \frac{2d(\cos x + \sin x)}{2(\cos x + \sin x)^2 - 1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) + 1}{\sqrt{2}(\sin x + \cos x) - 1} \right| - \frac{1}{4\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3} - \sqrt{2}(\sin x - \cos x)} \right| + C.$$

2057. 证明

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

式中 A, B, C 为未定系数.

证 $a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \alpha)$,

式中 $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$,

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} &= (a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{dx}{\sin^n(x + \alpha)} \\ &= - (a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \int \frac{1}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} d[\operatorname{ctg}(x + \alpha)] \\ &= - (a^2 + b^2)^{-\frac{n}{2}} \frac{\operatorname{ctg}(x + \alpha)}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} \\ &\quad - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{\operatorname{ctg}(x + \alpha) \cos(x + \alpha)}{\sin^{n-2}(x + \alpha)} dx \\ &= \frac{\frac{b}{a^2 + b^2} \sin x - \frac{a}{a^2 + b^2} \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} \\ &\quad - \frac{n-2}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}} \int \frac{1 - \sin^2(x + \alpha)}{\sin^n(x + \alpha)} dx. \end{aligned}$$

设 $I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n}$, 则由上式可得

$$I_n = \frac{\frac{b}{a^2 + b^2} \sin x - \frac{a}{a^2 + b^2} \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + (2-n)I_n + \frac{n-2}{a^2 + b^2} I_{n-2}.$$

于是,

$$I_n = \frac{\frac{b}{(n-1)(a^2 + b^2)} \sin x - \frac{a}{(n-1)(a^2 + b^2)} \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + \frac{n-2}{(n-1)(a^2 + b^2)} I_{n-2},$$

即

$$\int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n} = \frac{A \sin x + B \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^{n-2}},$$

$$\text{式中 } A = \frac{b}{(n-1)(a^2 + b^2)}, B = \frac{a}{(n-1)(a^2 + b^2)},$$

$$C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2 + b^2)}.$$

2058. 求 $\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3}$.

解 此为 2057 题之特例, 这里

$$a = 1, b = 2, n = 3;$$

$$A = \frac{2}{10}, B = -\frac{1}{10}, C = \frac{1}{10}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(\sin x + 2 \cos x)^3} = \frac{2 \sin x - \cos x}{10(\sin x + 2 \cos x)^2} + \frac{1}{10} \int \frac{dx}{\sin x + 2 \cos x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} + \frac{1}{10\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} \\
&= \frac{2\sin x - \cos x}{10(\sin x + 2\cos x)^2} \\
&\quad + \frac{1}{10\sqrt{5}} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\alpha}{2} \right) \right| + C.
\end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\alpha = \operatorname{arctg} 2$.

2059. 若 n 为大于 1 的自然数, 证明

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} \\
&\quad + B \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^{n-2}} \\
&\quad (|a| \neq |b|),
\end{aligned}$$

并求出系数 A, B 和 C .

证 设 $I_n = \int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n}$, 先考虑 I_{n-1} .

$$\begin{aligned}
I_{n-1} &= \frac{1}{a} \int \frac{(a + b\cos x) - b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}} dx \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b}{a} \int \frac{d(\sin x)}{(a + b\cos x)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a + b\cos x)^{n-1}} \\
&\quad + \frac{(n-1)b^2}{a} \int \frac{\sin^2 x}{(a + b\cos x)^n} dx \\
&= \frac{1}{a} I_{n-2} - \frac{b\sin x}{a(a + b\cos x)^{n-1}} \\
&\quad + \frac{n-1}{a} \int \frac{(b^2 - a^2)}{(a + b\cos x)(a - b\cos x)} dx
\end{aligned}$$

$$+ B \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} + C \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}}.$$

$$\text{式中 } A = -\frac{b}{(n-1)(a^2 - b^2)}, B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)},$$

$$C = -\frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)} (|a| \neq |b|; n > 1 \text{ 且 } a \neq 0).$$

若 $a = 0$, 则 $b \neq 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} &= \frac{1}{b^n} \int \frac{dx}{\cos^n x} \\ &= \frac{1}{b^n} \left[\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2}x} \right]^{**}. \end{aligned}$$

*) 利用 2012 题(6) 的结果.

求积分:

$$2060. \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}} &= \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x \sqrt{2 - \cos^2 x}} \\ &= - \int \frac{d(\cos x)}{\cos^2 x \sqrt{2 \sec^2 x - 1}} = \int \frac{d(\sec x)}{\sqrt{2 \sec^2 x - 1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln | \sqrt{2} \sec x + \sqrt{2 \sec^2 x - 1} | + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \sin^2 x}}{|\cos x|} + C. \end{aligned}$$

$$2061. \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} dx &= \int \frac{\sin^2 x d(\operatorname{tg} x)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \\ &= 2 \int \sin^2 x d(\sqrt{\operatorname{tg} x}) = 2 \int (1 - \cos^2 x) d(\sqrt{\operatorname{tg} x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{\operatorname{tg}x} - 2\int \frac{d(\sqrt{\operatorname{tg}x})}{1 + \operatorname{tg}^2x} \\
&= 2\sqrt{\operatorname{tg}x} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}x + \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1}{\operatorname{tg}x - \sqrt{2\operatorname{tg}x} + 1} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2\operatorname{tg}x}}{\operatorname{tg}x - 1} + C \quad (\operatorname{tg}x > 0).
\end{aligned}$$

*) 利用 1884 题的结果.

2062. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}}$

解 由于

$$\begin{aligned}
2 + \sin 2x &= 1 + (\sin x + \cos x)^2 \\
&= 3 - (\sin x - \cos x)^2.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}} &= \int \frac{\cos x - (\cos x - \sin x)}{\sqrt{1 + (\sin x + \cos x)^2}} dx \\
&= \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} dx \\
&\quad - \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) \\
&= - \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}} + \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} \\
&\quad - \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}),
\end{aligned}$$

因而,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2 + \sin 2x}} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt{3 - (\sin x - \cos x)^2}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{3}} \right)
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \ln(\sin x + \cos x + \sqrt{2 + \sin 2x}) + C.$$

2063. $\int \frac{dx}{(1 + \epsilon \cos x)^2} (0 < \epsilon < 1).$

解 此为 2059 题之特例, 这里

$$a = 1, b = \epsilon, n = 2,$$

$$A = -\frac{\epsilon}{1 - \epsilon^2}, B = \frac{1}{1 - \epsilon^2}, C = 0.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1 + \epsilon \cos x)^2} &= -\frac{\epsilon \sin x}{(1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos x)} \\ &+ \frac{1}{1 - \epsilon^2} \int \frac{1}{1 + \epsilon \cos x} \\ &= -\frac{\epsilon \sin x}{(1 - \epsilon^2)(1 + \epsilon \cos x)} \\ &+ \frac{2}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right]^{*}) + C. \end{aligned}$$

*) 利用 2028 题(a) 的结果.

2064⁺. $\int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx$

解 设 $t = \frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}}$, 则

$$dt = \frac{-\frac{1}{2} \cos a}{\sin^2 \frac{x-a}{2}} dx, \quad \frac{dx}{\sin^2 \frac{x-a}{2}} = -\frac{2}{\cos a} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int \frac{\cos^{n-1} \frac{x+a}{2}}{\sin^{n+1} \frac{x-a}{2}} dx = -\frac{2}{\cos a} \int t^{n-1} dt \\
& = -\frac{2}{n \cos a} t^n + C \\
& = -\frac{2}{n \cos a} \left(\frac{\cos \frac{x+a}{2}}{\sin \frac{x-a}{2}} \right)^n + C (\cos a \neq 0).
\end{aligned}$$

2065. 推出积分

$$I_n = \int \left(\frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}} \right)^n dx$$

的递推公式(n 为自然数).

证 方法一:

$$\text{设 } t = \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\sin \frac{x+a}{2}}, \text{ 则}$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{1+t}{1-t} \cdot \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right),$$

$$dx = \frac{4 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} dt.$$

由于

$$\frac{4t^n \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{\sec^2 \frac{a}{2}} t^{n-2} + \frac{-4\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \left(\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} \\
&\quad \cdot \frac{2 \left(\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 1 \right)}{\sec^2 \frac{a}{2}} t^{n-1} \\
&\quad + \frac{-4\operatorname{tg} \frac{a}{2}}{t^2 \sec^2 \frac{a}{2} + 2t \cdot \left(\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} - 1 \right) + \sec^2 \frac{a}{2}} \\
&\quad \cdot t^{n-2} \quad (n > 2),
\end{aligned}$$

两端对 t 积分, 即得递推公式

$$I_n = \frac{2\sin a}{n-1} t^{n-1} + 2I_{n-1} \cos a - I_{n-2}.$$

方法二:

设 $y = \frac{x+a}{2}$, 则 $\frac{x-a}{2} = y-a$, 从而

$$\begin{aligned}
I_n &= 2 \int \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^n dy \\
&= 2 \int \frac{\sin(y-a)}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy \\
&= 2 \int \frac{\sin y \cos a - \cos y \sin a}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy \\
&= \cos a I_{n-1} - 2 \sin a \int \frac{\cos y}{\sin y} \left[\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right]^{n-1} dy.
\end{aligned}$$

再设

$$\frac{\sin(y-a)}{\sin y} = t = \frac{\sin \left(\frac{x-a}{2} \right)}{\sin \frac{x+a}{2}}, \quad J_n = 2 \int \frac{\cos y}{\sin y} t^n dy,$$

则

$$I_n = \cos a I_{n-1} - \sin a J_{n-1}, J_{n-1} = \frac{\cos a I_{n-1} - I_n}{\sin a}. \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} J_n &= 2 \int \frac{\cos y}{\sin y} \left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right)^n dy \\ &= -\frac{2}{n} \int \sin^n(y-a) d\left(\frac{1}{\sin^n y} \right) \\ &= -\frac{2}{n} \left(\frac{\sin(y-a)}{\sin y} \right)^n \\ &\quad + 2 \int \frac{\sin^{n-1}(y-a)}{\sin^n y} \cos(y-a) dy \\ &= -\frac{2}{n} t^n + 2 \int t^{n-1} \frac{\cos y \cos a + \sin y \sin a}{\sin y} dy \\ &= -\frac{2}{n} t^n + \cos a J_{n-1} + \sin a I_{n-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式和(2)式解得

$$\begin{aligned} I_n &= I_{n-1} \cos a - \sin a J_{n-1} \\ &= I_{n-1} \cos a - \sin a \left(-\frac{2}{n-1} t^{n-1} \right. \\ &\quad \left. + \cos a J_{n-2} + I_{n-2} \sin a \right) \\ &= I_{n-1} \cos a + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1} \\ &\quad - \sin a \cos a \left(\frac{I_{n-2} \cos a - I_{n-1}}{\sin a} \right) - \sin^2 a I_{n-2} \\ &= 2 I_{n-1} \cos a - I_{n-2} + \frac{2 \sin a}{n-1} t^{n-1}. \end{aligned}$$

§ 5. 各种超越函数的积分法

2066. 证明若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + C.$$

证

$$\begin{aligned} \int P(x)e^{ax}dx &= \frac{1}{a} \int P(x)d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} P(x)e^{ax} - \frac{1}{a} \int e^{ax} P'(x)dx \\ &= \frac{1}{a} P(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2} \int P'(x)d(e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} P(x)e^{ax} - \frac{1}{a^2} P'(x)e^{ax} + \frac{1}{a^2} \int e^{ax} P''(x)dx \\ &= \dots\dots \\ &= e^{ax} \left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \dots + (-1)^n \frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}} \right] \\ &\quad + C. \end{aligned}$$

因为 $P(x)$ 为 n 次多项式, 所以 $P^{(n+1)}(x) \equiv 0$, 从而上述等式括号中的导数到 $P^{(n)}(x)$ 为止.

2067. 证明若 $P(x)$ 为 n 次多项式, 则

$$\begin{aligned} &\int P(x)\cos ax dx \\ &= \frac{\sin ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] \\ &\quad + \frac{\cos ax}{a^2} \left[P'(x) + \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right] + C \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} &\int P(x)\sin ax dx \\ &= -\frac{\cos ax}{a} \left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sin ax}{a^2} \left(P'(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right) + C.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \int P(x) \cos ax dx &= \frac{1}{a} \int P(x) d(\sin ax) \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax - \frac{1}{a} \int P'(x) \sin ax dx \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} \int P'(x) d(\cos ax) \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \cos ax \\ &\quad - \frac{1}{a^2} \int P''(x) \cos ax dx \\ &= \frac{1}{a} P(x) \sin ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \cos ax - \frac{1}{a^3} P''(x) \sin ax \\ &\quad - \frac{1}{a^4} P'''(x) \cos ax + \frac{1}{a^4} \int P^{(4)}(x) \cos ax dx \\ &= \dots \\ &= \frac{\sin ax}{a} \left(P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots \right) \\ &\quad + \frac{\cos ax}{a^2} \left(P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots \right) \\ &\quad + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int P(x) \sin ax dx &= -\frac{1}{a} \int P(x) d(\cos ax) \\ &= -\frac{1}{a} P(x) \cos ax + \frac{1}{a} \int P'(x) \cos ax dx \\ &= -\frac{1}{a} P(x) \cos ax + \frac{1}{a^2} \int P'(x) d(\sin ax) \\ &= -\frac{1}{a} P(x) \cos ax + \frac{1}{a^2} P'(x) \sin ax \\ &\quad - \frac{1}{a^2} \int P''(x) \sin ax dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{a}P(x)\cos ax + \frac{1}{a^2}P'(x)\sin ax + \frac{1}{a^3}P''(x)\cos ax \\
&\quad - \frac{1}{a^4}P'''(x)\sin ax + \frac{1}{a^4}\int P^{(4)}(x)\sin ax dx \\
&= \dots\dots \\
&= -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \dots\right] \\
&\quad + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \dots\right] \\
&\quad + C.
\end{aligned}$$

上述导数项是有限的,其次数 $\leq n$.

求积分:

2068. $\int x^3 e^{3x} dx.$

解 $\int x^3 e^{3x} dx = e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{9} + \frac{6x}{27} - \frac{6}{81} \right)^{*)} + C$
 $= e^{3x} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{3} + \frac{2x}{9} - \frac{2}{27} \right) + C.$

*) 利用 2066 题的结果.

2069. $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x} dx.$

解 $\int (x^2 - 2x + 2)e^{-x} dx = e^{-x} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{-1} \right. \\ \left. - \frac{2x - 2}{1} + \frac{2}{-1} \right)^{*)} + C$
 $= -e^{-x}(x^2 + 2) + C.$

*) 利用 2066 题的结果.

2070. $\int x^5 \sin 5x dx.$

解 $\int x^5 \sin 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5} \left(x^5 - \frac{20x^3}{25} + \frac{120x}{625} \right)$

*) 利用 2066 题的结果.

$$2074. \int e^{ax} \cos^2 bx dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int e^{ax} \cos^2 bx dx &= \frac{1}{2} \int e^{ax} (1 + \cos 2bx) dx \\ &= \frac{1}{2a} e^{ax} + \frac{1}{2} e^{ax} \cdot \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{a^2 + 4b^2} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

$$2075. \int e^{ax} \sin^3 bx dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int e^{ax} \sin^3 bx dx &= \int e^{ax} \sin bx \cdot \frac{1 - \cos 2bx}{2} dx \\ &= \int e^{ax} \left(\frac{3}{4} \sin bx - \frac{1}{4} \sin 3bx \right) dx \\ &= \frac{3}{4} e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} \\ &\quad - \frac{1}{4} e^{ax} \cdot \frac{a \sin 3bx - 3b \cos 3bx}{a^2 + 9b^2} + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1829 题的结果.

$$2076. \int x e^x \sin x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x e^x \sin x dx &= \int x \sin x d(e^x) \\ &= x e^x \sin x - \int e^x (\sin x + x \cos x) dx \\ &= x e^x \sin x - \int (\sin x + x \cos x) d(e^x) \\ &= e^x (x \sin x - \sin x - x \cos x) \\ &\quad + \int e^x (2 \cos x - x \sin x) dx \\ &= e^x (x \sin x - \sin x - x \cos x) \end{aligned}$$

$$+ 2 \int e^x \cos x dx - \int x e^x \sin x dx,$$

于是,

$$\begin{aligned} \int x e^x \sin x dx &= \frac{e^x}{2} (x \sin x - \sin x \\ &\quad - x \cos x) + \int e^x \cos x dx \\ &= \frac{e^x}{2} (x \sin x - \sin x - x \cos x) + \frac{e^x}{2} (\sin x \\ &\quad + \cos x) *) + C \\ &= \frac{e^x}{2} [x(\sin x - \cos x) + \cos x] + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

2077. $\int x^2 e^x \cos x dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int x^2 e^x \cos x dx &= \int x^2 \cos x d(e^x) \\ &= x^2 e^x \cos x - \int e^x (2x \cos x - x^2 \sin x) dx \\ &= x^2 e^x \cos x - \int (2x \cos x - x^2 \sin x) d(e^x) \\ &= x^2 e^x \cos x - e^x (2x \cos x - x^2 \sin x) \\ &\quad + \int e^x (2 \cos x - 4x \sin x - x^2 \cos x) dx \\ &= e^x [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x] + 2 \int e^x \cos x dx \\ &\quad - 4 \int x e^x \sin x dx - \int x^2 e^x \cos x dx, \end{aligned}$$

于是,

$$\int x^2 e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2} [x^2 (\sin x + \cos x) - 2x \cos x]$$

$$\begin{aligned}
& + \int e^x \cos x dx - 2 \int x e^x \sin x dx \\
& = \frac{e^x}{2} [x^2(\sin x + \cos x) - 2x \cos x] + \frac{e^x}{2} (\sin x \\
& \quad + \cos x)^{**} - 2 \cdot \frac{e^x}{2} [x(\sin x - \cos x) + \cos x]^{**} \\
& \quad + C. \\
& = \frac{e^x}{2} [x^2(\sin x + \cos x) - 2x \sin x \\
& \quad + (\sin x - \cos x)] + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

**) 利用 2076 题的结果.

2078. $\int x e^x \sin^2 x dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int x e^x \sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int x e^x (1 - \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{2} \int x e^x dx - \frac{1}{2} \int x e^x \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{2} e^x (x - 1) - \frac{1}{2} \int x \cos 2x d(e^x) \\
&= \frac{1}{2} e^x (x - 1) - \frac{1}{2} x e^x \cos 2x \\
& \quad + \frac{1}{2} \int e^x (\cos 2x - 2x \sin 2x) dx \\
&= \frac{1}{2} e^x (x - 1) - \frac{1}{2} x e^x \cos 2x \\
& \quad + \frac{e^x}{2} \cdot \frac{\cos 2x + 2 \sin 2x^{**}}{5} - \int x e^x \sin 2x dx,
\end{aligned}$$

而

$$\int x e^x \sin 2x dx = \int x \sin 2x d(e^x)$$

$$\begin{aligned}
&= xe^x \sin 2x - \int e^x (\sin 2x + 2x \cos 2x) dx \\
&= xe^x \sin 2x - \frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) \text{ **)} \\
&\quad - 2 \int xe^x (1 - 2 \sin^2 x) dx \\
&= xe^x \sin 2x - \frac{e^x}{5} (\sin 2x - 2 \cos 2x) \\
&\quad - 2(x-1)e^x + 4 \int xe^x \sin^2 x dx.
\end{aligned}$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int xe^x \sin^2 x dx &= e^x \left[\frac{x-1}{2} - \frac{x}{10} (2 \sin 2x + \cos 2x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{50} (4 \sin 2x - 3 \cos 2x) \right] + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

**) 利用 1829 题的结果.

2079. $\int (x - \sin x)^3 dx.$

解 $\int (x - \sin x)^3 dx$

$$\begin{aligned}
&= \int (x^3 - 3x^2 \sin x + 3x \sin^2 x - \sin^3 x) dx \\
&= \frac{x^4}{4} + 3 \int x^2 d(\cos x) + \frac{3}{2} \int x(1 - \cos 2x) dx \\
&\quad + \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) \\
&= \frac{x^4}{4} + 3x^2 \cos x - 6 \int x \cos x dx + \frac{3}{4} x^2 \\
&\quad - \frac{3}{4} \int x d(\sin 2x) + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \\
&= \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6 \int x d(\sin x) - \frac{3}{4} x \sin 2x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{4} \int \sin 2x dx + \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x \\
& = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - 6x \sin x - 6 \cos x \\
& \quad - \frac{3}{4} x \sin 2x + \cos x - \frac{3}{8} \cos 2x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C \\
& = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{4} + 3x^2 \cos x - x \left(6 \sin x + \frac{3}{4} \sin 2x \right) \\
& \quad - \left(5 \cos x + \frac{3}{8} \cos 2x \right) - \frac{1}{3} \cos^3 x + C.
\end{aligned}$$

2080. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx.$

解 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2, dx = 2t dt$. 于是

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 \sqrt{x} dx &= 2 \int t \cos^2 t dt = \int t(1 + \cos 2t) dt \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \int t d(\sin 2t) \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t - \frac{1}{2} \int \sin 2t dt \\
&= \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t + C \\
&= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{x} \sin(2\sqrt{x}) + \frac{1}{4} \cos(2\sqrt{x}) + C.
\end{aligned}$$

2081. 证明若 R 为有理函数及 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公度的数, 则积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

是初等函数.

证 按题意 a_1, a_2, \dots, a_n 为可公度的数, 于是存在一个实数 α , 使得

$$a_1 = k_1 \alpha, a_2 = k_2 \alpha, \dots, a_n = k_n \alpha (\alpha \neq 0),$$

其中, k_1, k_2, \dots, k_n 为整数.

$$\text{设 } e^{ax} = t, \text{ 则 } x = \frac{1}{a} \ln t, dx = \frac{1}{at} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx \\ &= \frac{1}{a} \int R(t^{k_1}, t^{k_2}, \dots, t^{k_n}) \frac{dt}{t} = \int R^*(t) dt, \end{aligned}$$

其中 $R^*(t)$ 是 t 的有理函数. 因此, 积分

$$\int R(e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, \dots, e^{a_n x}) dx$$

为初等函数.

求下列积分:

2082. $\int \frac{dx}{(1+e^x)^2}$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{dx}{(1+e^x)^2} = \int \frac{(1+e^x) - e^x}{(1+e^x)^2} dx \\ &= \int \frac{dx}{1+e^x} - \int \frac{e^x dx}{(1+e^x)^2} \\ &= \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx - \int \frac{d(1+e^x)}{(1+e^x)^2} \\ &= x - \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} + C. \end{aligned}$$

2083. $\int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x}$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{e^{2x} dx}{1+e^x} = \int \frac{(e^{2x} - 1) + 1}{1+e^x} dx \\ &= \int (e^x - 1) dx + \int \frac{1}{1+e^x} dx \\ &= e^x - x + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \end{aligned}$$

$$= e^x - \ln(1 + e^x) + C.$$

2084. $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2}$

解 $\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x - 2} = \int \frac{dx}{(e^x + 2)(e^x - 1)}$
 $= \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^x - 1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{1}{e^x + 2} dx$
 $= -\frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x - 1}\right) dx - \frac{1}{6} \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 2}\right) dx$
 $= -\frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| - \frac{x}{6} + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2) + C$
 $= -\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \ln|e^x - 1| + \frac{1}{6} \ln(e^x + 2) + C.$

2085. $\int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}}$

解 设 $e^{\frac{x}{6}} = t$, 则 $x = 6 \ln t, dx = \frac{6}{t} dt$.

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + e^{\frac{x}{2}} + e^{\frac{x}{3}} + e^{\frac{x}{6}}} &= 6 \int \frac{dt}{t(1 + t^3 + t^2 + t)} \\ &= 6 \int \frac{dt}{t(t+1)(t^2+1)} \\ &= 6 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{2(t+1)} - \frac{t+1}{2(t^2+1)} \right] dt \\ &= 6 \ln t - 3 \ln(t+1) - \frac{3}{2} \ln(1+t^2) \\ &\quad - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tgt} + C \\ &= x - 3 \ln \left[(1 + e^{\frac{x}{6}}) \sqrt{1 + e^{\frac{x}{3}}} \right] - 3 \operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{6}} + C. \end{aligned}$$

2086. $\int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{\frac{x}{4}})^2} dx.$

解 设 $e^{\frac{x}{4}} = t$, 则 $x = 4 \ln t, dx = \frac{4}{t} dt$.

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + e^{\frac{x}{2}}}{(1 + e^{\frac{x}{4}})^2} dx &= 4 \int \frac{1 + t^2}{t(1 + t)^2} dt \\ &= 4 \int \left[\frac{1}{t} - \frac{2}{(1 + t)^2} \right] dt \\ &= 4 \ln t + \frac{8}{1 + t} + C = x + \frac{8}{1 + e^{\frac{x}{4}}} + C. \end{aligned}$$

2087. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$.

解
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} &= \int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}} \sqrt{1 - (e^{-\frac{x}{2}})^2}} \\ &= -2 \int \frac{d(e^{-\frac{x}{2}})}{\sqrt{1 - (e^{-\frac{x}{2}})^2}} \\ &= -2 \arcsin(e^{-\frac{x}{2}}) + C. \end{aligned}$$

2088. $\int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx$.

解
$$\begin{aligned} \int \sqrt{\frac{e^x - 1}{e^x + 1}} dx &= \int \frac{e^x - 1}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx \\ &= \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} - 1}} \\ &= \int \frac{d(e^x)}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}} + \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} \\ &= \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin(e^{-x}) + C. \end{aligned}$$

2089. $\int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx$.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \int \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} dx &= \int \frac{e^{2x} + 4e^x - 1}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}} dx \\
&= \int \frac{2e^{2x} + 4e^x}{2\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}} dx \\
&\quad + 2 \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}} \\
&= \int \frac{d(e^{2x} + 4e^x - 1)}{2\sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}} + 2 \int \frac{d(e^x + 2)}{\sqrt{(e^x + 2)^2 - 5}} \\
&\quad + \int \frac{d(e^{-x} - 2)}{\sqrt{5 - (e^{-x} - 2)^2}} \\
&= \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1} + 2 \ln(e^x + 2 \\
&\quad + \sqrt{e^{2x} + 4e^x - 1}) - \arcsin \frac{2e^x - 1}{\sqrt{5}e^x} + C.
\end{aligned}$$

$$2090. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1-e^x}} \\
&= \frac{1}{2} \int e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) dx \\
&= -\frac{1}{2} \int (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) d(e^{-x}) \\
&= -\frac{e^{-x}}{2} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) \\
&\quad + \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^x}} + \frac{1}{\sqrt{1-e^x}} \right) dx \\
&= -\frac{1}{2} e^{-x} (\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1-e^x}) + \frac{1}{4} I_1 + \frac{1}{4} I_2.
\end{aligned}$$

对于 $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, 设 $\sqrt{1+e^x} = t$, 则

$$\int \frac{e^{ax}}{x} dx = li(e^{ax}) + C, \text{ 式中 } lix = \int \frac{dx}{\ln x}$$

来表示.

证 因为 R 的分母仅有实根, 所以仅包含形如 $(x - a_i)_{k_i}$ 的因子 ($i = 1, 2, \dots, l$). 分解 $R(x)$ 为部分分式得

$$R(x) = P(x) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j},$$

其中 $P(x)$ 为 x 的多项式, A_{ij} 是常系数.

从而积分

$$\begin{aligned} & \int R(x)e^{ax} dx \\ &= \int P(x)e^{ax} dx + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij} \int \frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j} dx. \end{aligned}$$

上式右端第一个积分显然是初等函数. 而积分

$$\int \frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j} dx$$

可用初等函数和超越函数来表示. 事实上, 设 $x - a_i = t$, 则

$$\begin{aligned} & \int \frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j} dx = \int \frac{e^{a(a_i+t)}}{t^j} dt \\ &= \frac{e^{aa_i}}{1-j} \int e^{at} d\left(\frac{1}{t^{j-1}}\right) \\ &= \frac{e^{aa_i}}{1-j} e^t \cdot \frac{1}{t^{j-1}} - \frac{ae^{aa_i}}{1-j} \int \frac{e^{at}}{t^{j-1}} dt. \end{aligned}$$

这样, 被积函数中分母的次数便降低一次, 再继续运用分部积分法 ($j - 2$) 次, 即可得

$$\int \frac{e^{ax}}{(x - a_i)^j} dx = g_{ij}(x) + B_{ij} li(e^{a(x-a_i)}),$$

其中 $g_{ij}(x)$ 为 x 的初等函数, B_{ij} 为常数.

因而积分

$$\int R(x)e^{ax}dx = \int P(x)e^{ax}dx + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij}g_{ij}(x) + \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^{k_i} A_{ij}B_{ij}li(e^{a(x-s_i)})$$

是初等函数与超越函数之和.

2092. 在甚么情形下, 积分

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$$

(式中 $P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n}$ 及 a_0, a_1, \dots, a_n 为常数) 为初等函数?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{a_k}{x^k} e^x dx &= -\frac{a_k}{k-1} \cdot \frac{e^x}{x^{k-1}} + \frac{a_k}{k-1} \int \frac{e^x}{x^{k-1}} dx \\ &= \dots = -\frac{a_k}{k-1} \cdot \frac{e^x}{x^{k-1}} - \frac{a_k}{(k-1)(k-2)} \cdot \frac{e^x}{x^{k-2}} - \dots \\ &\quad - \frac{a_k}{(k-1)!} \cdot \frac{e^x}{x} + \frac{a_k}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx &= \int \left(\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{x^k} \right) e^x dx = \sum_{k=0}^n \int \frac{a_k}{x^k} dx \\ &= - \sum_{k=2}^n \sum_{j=1}^{k-1} \frac{a_k}{(k-1)(k-2)\dots(k-j)} \cdot \frac{e^x}{x^{k-j}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} \int \frac{e^x}{x} dx + a_0 e^x. \end{aligned}$$

因而, 若

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{(k-1)!} = 0,$$

即

$$a_1 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_3}{2!} + \cdots + \frac{a_n}{(n-1)!} = 0,$$

则积分 $\int P\left(\frac{1}{x}\right) e^x dx$ 是初等函数.

求积分:

$$2093. \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \left(1 - \frac{2}{x}\right)^2 e^x dx &= \int \left(1 - \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}\right) e^x dx \\ &= e^x - 4\text{li}(e^x) - 4 \int e^x d\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= e^x - 4\text{li}(e^x) - \frac{4}{x} e^x + 4 \int \frac{e^x}{x} dx \\ &= e^x \left(1 - \frac{4}{x}\right) + C. \end{aligned}$$

$$2094. \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx.$$

$$\text{解} \quad \int \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{-x} dx = -e^{-x} - \text{li}(e^{-x}) + C.$$

$$2095. \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{e^{2x}}{x^2 - 3x + 2} dx &= \int \frac{e^{2x}}{(x-2)(x-1)} dx \\ &= \int \frac{e^{2x}}{x-2} dx - \int \frac{e^{2x}}{x-1} dx \\ &= e^4 \int \frac{e^{2(x-2)} d(x-2)}{x-2} - e^2 \int \frac{e^{2(x-1)} d(x-1)}{x-1} \\ &= e^4 \text{li}(e^{2x-4}) - e^2 \text{li}(e^{2x-2}) + C. \end{aligned}$$

$$2096. \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx &= - \int x e^x d\left(\frac{1}{x+1}\right) \\
 &= - x e^x \frac{1}{x+1} + \int e^x dx = - \frac{x e^x}{x+1} + e^x + C \\
 &= \frac{e^x}{x+1} + C.
 \end{aligned}$$

2097. $\int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx.$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \frac{x^4 e^{2x}}{(x-2)^2} dx &= \int (x^2 + 4x + 12) e^{2x} dx \\
 &\quad + 32 \int \frac{e^{2x} dx}{x-2} + 16 \int \frac{e^{2x} dx}{(x-2)^2} \\
 &= e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{21}{4} \right)^{*)} + 32 e^4 \text{li}(e^{2x-4}) \\
 &\quad - 16 \int e^{2x} d\left(\frac{1}{x-2}\right) \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} \right) + 32 e^4 \text{li}(e^{2x-4}) \\
 &\quad - \frac{16 e^{2x}}{x-2} + 32 \int \frac{e^{2x} dx}{x-2} \\
 &= \frac{e^{2x}}{2} \left(x^2 + 3x + \frac{21}{2} - \frac{32}{x-2} \right) + 64 e^4 \text{li}(e^{2x-4}) \\
 &\quad + C.
 \end{aligned}$$

*) 利用 2066 题的结果.

求含有 $\ln f(x)$, $\text{arctg} f(x)$, $\text{arc sin} f(x)$, $\text{arccos} f(x)$ 等函数的积分, 其中 $f(x)$ 为代数函数:

2098. $\int \ln^n x dx$ (n 为自然数).

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \int \ln^n x dx &= x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x dx \\
 &= x \ln^n x - n x \ln^{n-1} x + n(n-1) \int \ln^{n-2} x dx = \dots
 \end{aligned}$$

$$= x[\ln^n x - n\ln^{n-1}x + n(n-1)\ln^{n-2}x - \dots \\ + (-1)^{n-1}n!\ln x + (-1)^n n!] + C.$$

2099. $\int x^3 \ln^3 x dx.$

解 $\int x^3 \ln^3 x dx = \frac{1}{4} \int \ln^3 x d(x^4)$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{4} \int x^3 \ln^2 x dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} \int \ln^2 x d(x^4)$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{8} \int x^3 \ln x dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32} \int \ln x d(x^4)$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \ln^3 x - \frac{3}{16} x^4 \ln^2 x + \frac{3}{32} x^4 \ln x - \frac{3}{32} \int x^3 dx$$

$$= \frac{1}{4} x^4 \left(\ln^3 x - \frac{3}{4} \ln^2 x + \frac{3}{8} \ln x - \frac{3}{32} \right) + C.$$

2100. $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx.$

解 $\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^3 dx = -\frac{1}{2} \int \ln^3 x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln^2 x}{x^3} dx$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4} \int \ln^2 x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \int \frac{\ln x}{x^3} dx$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4} \int \ln x d\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \ln^3 x - \frac{3}{4x^2} \ln^2 x - \frac{3}{4x^2} \ln x + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{2x^2} \left(\ln^3 x + \frac{3}{2} \ln^2 x + \frac{3}{2} \ln x + \frac{3}{4} \right) + C.$$

2101. $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

解 $\int \ln[(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}] \cdot \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$
 $= \int \frac{\ln(x+a)}{x+b} dx + \int \frac{\ln(x+b)}{x+a} dx$
 $= \int \ln(x+a) d[\ln(x+b)]$
 $+ \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)]$
 $= \ln(x+a) \ln(x+b) - \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)]$
 $+ \int \ln(x+b) d[\ln(x+a)]$
 $= \ln(x+a) \ln(x+b) + C.$

2102. $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

解 $\int \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- 2 \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$
 $= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- 2 \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d(\sqrt{1+x^2})$
 $= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- 2 \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2 \int dx$
 $= x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2})$
 $- 2 \sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x + C.$

$$2103. \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) dx \\ &= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \int \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \ln(\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}) + \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x + C. \end{aligned}$$

$$2104. \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \int \ln x d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{x \ln x}{\sqrt{1+x^2}} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

$$2105. \int x \operatorname{arctg}(x+1) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int x \operatorname{arctg}(x+1) dx = \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg}(x+1) d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 + 2x + 2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg}(x+1) - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2x + 2) + C. \end{aligned}$$

$$2106. \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \int \operatorname{arctg} \sqrt{x} d(x^{\frac{3}{2}}) \\ &= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{1}{3} \int \left(1 - \frac{1}{1+x} \right) dx \\
&= \frac{2}{3} x \sqrt{x} \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \frac{x}{3} + \frac{1}{3} \ln(1+x) + C.
\end{aligned}$$

2107. $\int x \arcsin(1-x) dx$.

解 $\int x \arcsin(1-x) dx = \frac{1}{2} \int \arcsin(1-x) d(x^2)$
 $= \frac{1}{2} x^2 \arcsin(1-x) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx$.

对于积分 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx$, 设 $1-x=t$, 则

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-x)^2}} dx = - \int \frac{1-2t+t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\
&= \int \frac{-t^2+1}{\sqrt{1-t^2}} dt - 2 \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt + 2 \int \frac{t dt}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \int \sqrt{1-t^2} dt - 2 \arcsin t - 2 \sqrt{1-t^2} \\
&= \frac{t}{2} \sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t - 2 \arcsin t \\
&\quad - 2 \sqrt{1-t^2} + C_1 \\
&= \frac{-3-x}{2} \sqrt{2x-x^2} - \frac{3}{2} \arcsin(1-x) + C_1.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int x \arcsin(1-x) dx \\
&= \frac{2x^2-3}{4} \arcsin(1-x) - \frac{3+x}{4} \sqrt{2x-x^2} + C.
\end{aligned}$$

2108. $\int \arcsin \sqrt{x} dx$.

解 $\int \arcsin \sqrt{x} dx = x \arcsin \sqrt{x}$

$$-\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx.$$

对于积分 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$, 设 $\sqrt{x} = t$, 则 $dx = 2t dt$.

于是,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx &= 2 \int \frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -2 \int \sqrt{1-t^2} dt + 2 \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= -t \sqrt{1-t^2} - \arcsin t + 2 \arcsin t + C_1 \\ &= \arcsin \sqrt{x} - \sqrt{x-x^2} + C_1. \end{aligned}$$

因而,

$$\begin{aligned} \int \arcsin \sqrt{x} dx &= \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{x-x^2} + C. \end{aligned}$$

2109. $\int x \arccos \frac{1}{x} dx.$

解
$$\begin{aligned} \int x \arccos \frac{1}{x} dx &= \frac{1}{2} \int \arccos \frac{1}{x} d(x^2) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \arccos \frac{1}{x} - \frac{1}{2} (\operatorname{sgn} x) \sqrt{x^2-1} + C. \end{aligned}$$

2110. $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$

解
$$\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx = \int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} d(x+1)$$

$$2113. \int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx.$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) d(x^2) \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int x^2 \left(\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{2x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \int \ln(1+x^2) dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} dx + \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
 &\quad - \int x \operatorname{arctg} x dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \int \frac{2x^2 dx}{1+x^2} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
 &\quad + \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\
 &\quad - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} x \ln(1+x^2) \\
 &\quad + x - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) \\
 &\quad - \frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + C
 \end{aligned}$$

$$= x - \operatorname{arctg} x + \left(\frac{1+x^2}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) (\ln(1+x^2) - 1) + C.$$

2114. $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$

解 $\int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx = \frac{1}{2} \int \ln \frac{1+x}{1-x} d(x^2)$
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} - \int \frac{x^2}{1-x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} x^2 \ln \frac{1+x}{1-x} + \int \left(1 - \frac{1}{1-x^2} \right) dx$
 $= \frac{x^2-1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} + x + C.$

2115. $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$

解 $\int \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$
 $= \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$
 $= \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x}{1+x^2} dx$
 $= \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} - \ln \sqrt{1+x^2} + C.$

求含有双曲线函数的积分:

2116. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx.$

解 $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{sh}^2 2x dx$
 $= \frac{1}{8} \int \operatorname{sh}^2 2x d(2x)$

$$= -\frac{x}{8} + \frac{\text{sh}4x}{32} + C.$$

*) 利用 1761 题的结果.

2117. $\int \text{ch}^4 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \text{ch}^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \text{ch}2x}{2} \right)^2 dx \\ &= \int \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{ch}2x + \frac{1}{4} \text{ch}^2 2x \right) dx \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \text{sh}2x + \frac{1}{8} \left(x + \frac{1}{4} \text{sh}4x \right) + C \\ &= \frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \text{sh}2x + \frac{1}{32} \text{sh}4x + C. \end{aligned}$$

*) 利用 1762 题的结果.

2118. $\int \text{sh}^3 x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \text{sh}^3 x dx &= \int \text{sh}^2 x \text{sh} x dx = \int (\text{ch}^2 x - 1) d(\text{ch} x) \\ &= \frac{1}{3} \text{ch}^3 x - \text{ch} x + C. \end{aligned}$$

2119. $\int \text{sh} x \text{sh} 2x \text{sh} 3x dx$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \text{sh} x \text{sh} 2x \text{sh} 3x dx &= \int \frac{1}{2} (\text{ch} 4x - \text{ch} 2x) \text{sh} 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int \text{ch} 4x \text{sh} 2x dx - \frac{1}{2} \int \text{ch} 2x \text{sh} 2x dx \\ &= \frac{1}{4} \int (\text{sh} 6x - \text{sh} 2x) dx - \frac{1}{4} \int \text{sh} 4x dx \\ &= \frac{1}{24} \text{ch} 6x - \frac{1}{16} \text{ch} 4x - \frac{1}{8} \text{ch} 2x + C. \end{aligned}$$

$$2120. \int \operatorname{th} x dx.$$

$$\text{解} \quad \int \operatorname{th} x dx = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} dx = \ln(\operatorname{ch} x) + C.$$

$$2121. \int \operatorname{cth}^2 x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \operatorname{cth}^2 x dx &= \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \int \frac{1 + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} dx \\ &= x - \operatorname{cth} x + C. \end{aligned}$$

$$2122. \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \sqrt{\operatorname{th} x} dx &= \int \sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}} dx \\ &= \int \frac{e^x - e^{-x}}{\sqrt{e^{2x} - e^{-2x}}} dx \\ &= \int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} - 1}} - \int \frac{e^{-2x} dx}{\sqrt{1 - e^{-4x}}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x})}{\sqrt{(e^{2x})^2 - 1}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{-2x})}{\sqrt{1 - (e^{-2x})^2}} \\ &= \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + \sqrt{e^{4x} - 1}) + \frac{1}{2} \arcsin(e^{-2x}) + C. \end{aligned}$$

$$2123. \int \frac{dx}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}.$$

解 设 $\operatorname{th} \frac{x}{2} = t$, 则

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2},$$

$$x = \ln \frac{1+t}{1-t}, \quad dx = \frac{2}{1-t^2} dt.$$

于是,

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}x + 2\operatorname{ch}x} = \int \frac{dt}{t^2 + t + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{1+2\operatorname{th} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} + C.$$

2124. $\int \operatorname{sh}ax \sin bx dx.$

解 $\int \operatorname{sh}ax \sin bx dx = \frac{1}{2} \int e^{ax} \sin bx dx$

$$- \frac{1}{2} \int e^{-ax} \sin bx dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx^{*})}{a^2 + b^2}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-ax} \cdot \frac{a \sin bx + b \cos bx^{*})}{a^2 + b^2} + C$$

$$= \frac{a \operatorname{ch}ax \cdot \sin bx - b \operatorname{sh}ax \cdot \cos bx}{a^2 + b^2} + C.$$

*) 利用 1829 题的结果.

2125. $\int \operatorname{sh}ax \cos bx dx.$

解 $\int \operatorname{sh}ax \cos bx dx = \frac{1}{2} \int e^{ax} \cos bx dx$

$$- \frac{1}{2} \int e^{-ax} \cos bx dx$$

$$= \frac{1}{2} e^{ax} \cdot \frac{a \cos bx + b \sin bx^{*})}{a^2 + b^2}$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-ax} \cdot \frac{a \cos bx - b \sin bx^{*})}{a^2 + b^2} + C$$

$$= \frac{a \operatorname{ch}ax \cdot \cos bx + b \operatorname{sh}ax \cdot \sin bx}{a^2 + b^2} + C.$$

*) 利用 1828 题的结果.

§ 6. 函数的积分法各种例子

求积分：

$$2126. \int \frac{dx}{x^6(1+x^2)}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{dx}{x^6(1+x^2)} &= \int \frac{(x^2+1) - x^2}{x^6(1+x^2)} dx \\ &= \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^4(1+x^2)} \\ &= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{(x^2+1) - x^2}{x^4(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{5x^5} - \int \frac{dx}{x^4} - \int \frac{x^2}{x^4(1+x^2)} dx \\ &= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} + \int \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C. \end{aligned}$$

$$2127. \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^2 dx}{(1-x^2)^3} &= \int \frac{(x^2-1) + 1}{(1-x^2)^3} dx \\ &= - \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \int \frac{dx}{(x^2-1)^3} \\ &= - \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} - \left[\frac{2x}{2(-4)(x^2-1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \right] \\ &= -\frac{1}{4} \int \frac{dx}{(x^2-1)^2} + \frac{x}{4(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \left\{ -\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x^2-1} \right\} \\
&\quad + \frac{x}{4(1-x^2)^2} = \frac{x+x^3}{8(1-x^2)^2} - \frac{1}{16} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \\
&\quad + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2128. $\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}.$

解 因为

$$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

$$x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1),$$

$$x^4-x^2+1=(x^2+1)^2-3x^2=(x^2+x\sqrt{3}+1)$$

$$(x^2-x\sqrt{3}+1),$$

所以

$$\frac{1}{1+x^4+x^8} = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} - \frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} \right),$$

$$\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2+x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} \right),$$

$$\frac{x^2-1}{x^4-x^2+1} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}}{x^2+x\sqrt{3}+1} + \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}}{x^2-x\sqrt{3}+1}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+x^4+x^8} &= \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2+x+1} + \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2-x+1} \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x+\sqrt{3}}{x^2+x\sqrt{3}+1} dx \\
&\quad - \frac{1}{4\sqrt{3}} \int \frac{2x-\sqrt{3}}{x^2-x\sqrt{3}+1} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \left[\ln(x^2 + x\sqrt{3} + 1) \right. \\
&\quad \left. - \ln(x^2 - x\sqrt{3} + 1) \right] + C_1 \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1-x^2}{x\sqrt{3}} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{x^2 + x\sqrt{3} + 1}{x^2 - x\sqrt{3} + 1} + C.
\end{aligned}$$

2129. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}.$

解 设 $\sqrt[6]{x} = t$, 则

$$\sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2, dx = 6t^5 dt.$$

代入得

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} &= 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} \\
&= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln(1+t) + C \\
&= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(1 + \sqrt[6]{x}) \\
&\quad + C (x > 0).
\end{aligned}$$

2130. $\int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx.$

解 设 $\sqrt{\frac{1-x}{x}} = t$, 则

$$x = \frac{1}{1+t^2} \quad dx = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} dt.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx &= -2 \int \frac{dt}{(t^2+1)^4} \\ &= -2 \left[\frac{t}{6(t^2+1)^3} + \frac{5t}{24(t^2+1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{5t}{16(t^2+1)} + \frac{5}{16} \operatorname{arctg} t \right]^{**} + C_1 \\ &= -\frac{1}{24} (8x^2 + 10x + 15) \sqrt{x(1-x)} \\ &\quad - \frac{5}{8} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} + C_1 \\ &= -\frac{1}{24} (8x^2 + 10x + 15) \sqrt{x(1-x)} \\ &\quad + \frac{5}{8} \arcsin \sqrt{x} + C (0 < x < 1). \end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2131. $\int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx.$

解 设 $x = \sin t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则 $dx = \cos t dt$.

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{\sin t + 2}{\sin^2 t} dt \\ &= \int \frac{dt}{\sin t} + 2 \int \frac{dt}{\sin^2 t} \\ &= \ln |\operatorname{csc} t - \operatorname{ctg} t| - 2 \operatorname{ctg} t + C \\ &= -\ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{|x|} - \frac{2\sqrt{1-x^2}}{x} + C (0 < |x| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}} = -3 \int \frac{t}{t^3+1} dt \\
&= \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{t+1}{t^2-t+1} dt \\
&= \ln|t+1| - \frac{1}{2} \int \frac{2t-1}{t^2-2t+1} dt - \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2-t+1} \\
&= \frac{1}{2} \ln \frac{(t+1)^2}{t^2-t+1} - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}} \right) + C,
\end{aligned}$$

其中 $t = \sqrt[3]{\frac{1-x}{x}}$.

2135. $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3+x^6}}$

解 $\int \frac{dx}{x \sqrt{1+x^3+x^6}} = \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^{-6}+x^{-3}+1}}$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{3} \int \frac{d\left(x^{-3} + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x^{-3} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}} \\
&= -\frac{1}{3} \ln \left| x^{-3} + \frac{1}{2} + \sqrt{x^{-6} + x^{-3} + 1} \right| + C_1 \\
&= -\frac{1}{3} \ln \left| \frac{2+x^3+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{x^3} \right| + C.
\end{aligned}$$

注 以上实际已设 $x > 0$. 对于 $x < 0$, 利用 1856 题的方法可得同一结果.

2136. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^4-2x^2-1}}$

解 $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^4-2x^2-1}} = \int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-2x^{-2}-x^{-4}}}$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d(x^{-2}+1)}{\sqrt{2-(x^{-2}+1)^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^{-2}+1}{\sqrt{2}}\right) + C_1 \\
&= -\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C_1 \\
&= \frac{1}{2} \arccos\left(\frac{x^2+1}{x^2\sqrt{2}}\right) + C.
\end{aligned}$$

2137. $\int \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} dx.$

解 $\int \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 - \sqrt{1-x^2}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(1 + \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1-x^2})}{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1-x^2})} dx \\
&= \int \frac{2 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx \\
&= -\frac{2}{x} - x - 2 \int \sqrt{1-x^2} d\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{2}{x} - x - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\frac{2+x^2}{x} - \frac{2}{x} \sqrt{1-x^2} - 2 \arcsin x + C.
\end{aligned}$$

2138. $\int \frac{(1+x)dx}{x + \sqrt{x+x^2}}.$

解 $\int \frac{(1+x)dx}{x + \sqrt{x+x^2}}$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{(1+x)(x - \sqrt{x+x^2})}{(x + \sqrt{x+x^2})(x - \sqrt{x+x^2})} dx \\
&= \int \frac{x+x^2 - \sqrt{x+x^2} - x\sqrt{x+x^2}}{-x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + \int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}} dx + \int \sqrt{x+x^2} dx \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + 2 \int \sqrt{1+(\sqrt{x})^2} d(\sqrt{x}) \\
&\quad + \int \sqrt{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} d\left(x + \frac{1}{2}\right) \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{x} \cdot \sqrt{1+x} + \ln(\sqrt{x} \\
&\quad + \sqrt{1+x}) + \frac{2x+1}{4} \sqrt{x+x^2} \\
&\quad - \frac{1}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2}\right) + C_1 \\
&= -x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5+2x}{4} \sqrt{x+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \ln(2x+1 + 2\sqrt{x+x^2}) \\
&\quad - \frac{1}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2}\right) + C_1 \\
&= -\frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{5+2x}{4} \sqrt{x+x^2} \\
&\quad + \frac{3}{8} \ln\left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{x+x^2}\right) + C,
\end{aligned}$$

其中设 $x > 0$, 对于 $x < -1$, 同样可获得上述结果, 但要注意加对数中的绝对值.

2139. $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx.$

解 $\int \frac{\ln(1+x+x^2)}{(1+x)^2} dx$
 $= - \int \ln(1+x+x^2) d\left(\frac{1}{1+x}\right)$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \int \frac{2x+1}{(x+1)(1+x+x^2)} dx \\
&= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \int \left(\frac{x+2}{1+x+x^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{1+x} \right) dx \\
&= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x+1}{1+x+x^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{1+x+x^2} \right) dx - \ln|1+x| \\
&= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} + \frac{1}{2} \ln(1+x+x^2) \\
&\quad + \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) - \ln|1+x| + C \\
&= -\frac{\ln(1+x+x^2)}{1+x} - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)^2}{1+x+x^2} \\
&\quad + \sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}} \right) + C.
\end{aligned}$$

2140. $\int (2x+3) \operatorname{arc\,cos}(2x-3) dx.$

解 $\int (2x+3) \operatorname{arc\,cos}(2x-3) dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \operatorname{arc\,cos}(2x-3) d(x^2+3x) \\
&= (x^2+3x) \operatorname{arccos}(2x-3) \\
&\quad + \int \frac{x^2+3x}{\sqrt{-x^2+3x-2}} dx \\
&= (x^2+3x) \operatorname{arccos}(2x-3) \\
&\quad - \int \sqrt{-x^2+3x-2} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 3 \int \frac{-2x + 3}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} dx \\
& + 7 \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} \\
& = (x^2 + 3x) \arccos(2x - 3) \\
& - \int \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2} d\left(x - \frac{3}{2}\right) \\
& - 6 \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + 7 \int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} \\
& = (x^2 + 3x) \arccos(2x - 3) \\
& - \frac{2x - 3}{4} \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \\
& - \frac{1}{8} \arcsin(2x - 3) - 6 \sqrt{-x^2 + 3x - 2} \\
& - 7 \arccos(2x - 3) + C_1 \\
& = \left(x^2 + 3x - \frac{55}{8}\right) \arccos(2x - 3) \\
& - \frac{2x + 21}{4} \sqrt{-x^2 + 3x - 2} + C (1 < x < 2).
\end{aligned}$$

2141. $\int x \ln(4 + x^4) dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \int x \ln(4 + x^4) dx = \frac{1}{2} \int \ln(4 + x^4) d(x^2) \\
& = \frac{1}{2} x^2 \ln(4 + x^4) - 2 \int \frac{x^5}{4 + x^4} dx \\
& = \frac{1}{2} x^2 \ln(4 + x^4) - 2 \int \left(x - \frac{4x}{4 + x^4}\right) dx \\
& = \frac{1}{2} x^2 \ln(4 + x^4) - x^2 + 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C.
\end{aligned}$$

$$2142. \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{\arcsin x}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= (\operatorname{sgn} x) \int \frac{\arcsin x dx}{x^3 \sqrt{x^{-2}-1}} + \int \arcsin x d(\arcsin x) \\ &= -(\operatorname{sgn} x) \int \arcsin x d(\sqrt{x^{-2}-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \\ &= -(\operatorname{sgn} x) \cdot \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} \arcsin x - \int \frac{dx}{|x|} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 \\ &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \arcsin x + \ln|x| \\ &\quad + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 + C (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

$$2143. \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x \ln(1 + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx \\ &= \int \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) d(1 + \sqrt{1+x^2}) \\ &= (1 + \sqrt{1+x^2}) \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$

$$= (1 + \sqrt{1+x^2}) \ln(1 + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C.$$

2144. $\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx.$

解
$$\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \int \ln \sqrt{x^2-1} d[(x^2+1)^{\frac{3}{2}}]$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \ln \sqrt{x^2-1}$$

$$- \frac{1}{3} \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{x}{x^2-1} dx,$$

对于右端的积分, 设 $\sqrt{x^2+1} = t$, 则 $x^2+1 = t^2$, $x dx = t dt$. 于是,

$$- \frac{1}{3} \int (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \frac{x dx}{x^2-1} = - \frac{1}{3} \int \frac{t^4 dt}{t^2-2}$$

$$= - \frac{1}{3} \int \left(t^2 + 2 + \frac{4}{t^2-2} \right) dt$$

$$= - \frac{1}{9} t^3 - \frac{2}{3} t - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \left| \frac{t - \sqrt{2}}{t + \sqrt{2}} \right| + C$$

$$= - \frac{x^2+7}{9} \sqrt{1+x^2} - \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}} + C.$$

最后得到

$$\int x \sqrt{x^2+1} \ln \sqrt{x^2-1} dx$$

$$= \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} \ln \sqrt{x^2-1} - \frac{x^2+7}{9} \sqrt{1+x^2}$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{3} \ln \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{2}} + C \quad (|x| > 1).$$

$$2145^+. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx \\ &= - \int \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= - \sqrt{1-x^2} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx. \end{aligned}$$

右端的积分

$$\begin{aligned} & \int \frac{\sqrt{1-x^2}(2-x)}{x(1-x)} dx \\ &= \int \frac{(1-x^2)(2-x)}{x(1-x)\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{2+x-x^2}{x\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -2 \int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \\ &= -2 \ln \left| \frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1} \right| + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \\ &\quad + C_1 \\ &= -2 \ln \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} + \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C_1. \end{aligned}$$

于是,

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{x}{\sqrt{1-x}} \right) \sqrt{1-x^2} - \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$+ \frac{1}{2} \arcsin x + C \quad (0 < x < 1).$$

2146. $\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$

解 设 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, 不妨限制 $-\pi < x < \pi$, 则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

代入得

$$\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{1+t^2}{(1+t+t^2)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{(1+t+t^2) - \frac{1}{2}(2t+1) + \frac{1}{2}}{(1+t+t^2)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t+t^2} - \frac{1}{4} \int \frac{(2t+1)dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{dt}{(1+t+t^2)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4(1+t+t^2)}$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\frac{2t+1}{3(1+t+t^2)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}} \right) \right]^{**}$$

$$+ C_1$$

$$= \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{1+2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right] + \frac{\cos x}{3(2+\sin x)}^{***} + C.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

$$\begin{aligned}
&= 32 \cdot \frac{1}{8\sqrt{2}} \left(\int \frac{\sin 4x}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} dx \right. \\
&\quad \left. - \int \frac{\sin 4x}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}} dx \right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2})}{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\cos 4x + 7 + 4\sqrt{2}}{\cos 4x + 7 - 4\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

2148. $\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}}$.

解 设 $1 + \cos x = t^2$, 并限制 $t > 0$, 则

$$\sin x = t \sqrt{2 - t^2}, dx = -\frac{2}{\sqrt{2 - t^2}} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sin x \sqrt{1 + \cos x}} = -\int \frac{2dt}{t^2(2 - t^2)} \\
&= -\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2 - t^2} \right) dt \\
&= \frac{1}{t} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + t}{\sqrt{2} - t} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \cos x}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \cos x}}{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}} + C.
\end{aligned}$$

2149. $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \arctg x dx$.

解 $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 + 1} \arctg x dx = \int \left(a - \frac{a - b}{x^2 + 1} \right) \arctg x dx$

$$\begin{aligned}
&= ax \operatorname{arctg} x - a \int \frac{x dx}{1+x^2} - \frac{a-b}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \\
&= a \left(x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) - \frac{a-b}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \\
&\quad + C.
\end{aligned}$$

2150. $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 - 1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx.$

解 $\int \frac{ax^2 + b}{x^2 - 1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \left(a + \frac{a+b}{x^2-1} \right) \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| dx \\
&= ax \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - a \int \frac{2x dx}{x^2-1} \\
&\quad + \frac{a+b}{2} \int \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| d \left(\ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \right) \\
&= a \left(x \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \ln |x^2-1| \right) \\
&\quad + \frac{a+b}{4} \ln^2 \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.
\end{aligned}$$

2151. $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \ln x d \left(\frac{1}{1+x^2} \right)$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) + C \\
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

$$2152. \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \int \operatorname{arctg} x d(\sqrt{1+x^2}) \\ &= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \sqrt{1+x^2} \operatorname{arctg} x - \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C. \end{aligned}$$

$$2153^+. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^4 x}} &= - \int \frac{d(1+\cos 2x)}{\sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}} \\ &= - \ln(1+\cos 2x + \sqrt{(1+\cos 2x)^2+4}) + C, \\ &= - \ln(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + C. \end{aligned}$$

$$2154. \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int \frac{x^3 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= - \int x^2 \arccos x d(\sqrt{1-x^2}) \\ &= - x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x \\ &\quad + \int \sqrt{1-x^2} \left(2x \arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= - x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x \\ &\quad - \frac{2}{3} \int \arccos x d[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}] - \int x^2 dx \\ &= - x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x \\ &\quad - \frac{2}{3} \int (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{3} x^3 \\ &= - x^2 \sqrt{1-x^2} \arccos x - \frac{2}{3} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} \arccos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^3 + C \\
& = -\frac{6x + x^3}{9} - \frac{2 + x^2}{3} \sqrt{1 - x^2} \arccos x + C.
\end{aligned}$$

2155. $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$

解 $\int \frac{x^4 \operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx = \int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \operatorname{arctg} x dx$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{3} \int \operatorname{arctg} x d(x^3) - \int \operatorname{arctg} x dx \\
& \quad + \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) \\
& = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3 dx}{1 + x^2} - x \operatorname{arctg} x \\
& \quad + \int \frac{x dx}{1 + x^2} + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \\
& = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1 + x^2} \right) dx - x \operatorname{arctg} x \\
& \quad + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \\
& = \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1 + x^2) - x \operatorname{arctg} x \\
& \quad + \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + C \\
& = -\frac{1}{6} x^2 - \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \operatorname{arctg} x \\
& \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 + \frac{2}{3} \ln(1 + x^2) + C.
\end{aligned}$$

2156. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1 + x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \operatorname{arctg} x d\left(\frac{1}{1 + x^2} \right)$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\operatorname{arccot} x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \\
&= -\frac{\operatorname{arccot} x}{2(1+x^2)} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arccot} x \right) + C \\
&= -\frac{1-x^2}{4(1+x^2)} \operatorname{arccot} x - \frac{x}{4(1+x^2)} + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2157+. $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx.$

解 $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1-x^2)^2} dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) d\left(\frac{1}{1-x^2}\right) \\
&= \frac{1}{2(1-x^2)} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{x^2+1}}.
\end{aligned}$$

对于右端积分设 $x = \operatorname{tg} t$, 并限制 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\sqrt{1+x^2} = \sec t, dx = \sec^2 t dt.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec t dt}{1-\operatorname{tg}^2 t} \\
&= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t - \sin^2 t} = \int \frac{d(\sin t)}{1-2\sin^2 t} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{1 + \sqrt{2} \sin t}{1 - \sqrt{2} \sin t} \right| + C \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}} \right| + C,
\end{aligned}$$

因而,

$$\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx = \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2(1-x^2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{2}} \right| + C.$$

2158. $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx.$

解 $\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \int x \left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \right) dx$
 $= x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{2} - \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx + \int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$
 $= x \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} (\arcsin x)^2 - \int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx,$

于是,

$$\int \sqrt{1-x^2} \arcsin x dx = \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} \arcsin x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} (\arcsin x)^2 + C \quad (|x| < 1).$$

2159. $\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx.$

解 $\int x(1+x^2) \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{4} \int \operatorname{arctg} x d[(1+x^2)^2]$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{4} \int (1+x^2) dx \\
&= \frac{1}{4}(1+x^2)^2 \operatorname{arctg} x + \frac{x}{4} + \frac{x^3}{12} + C.
\end{aligned}$$

2160. $\int x^x(1+\ln x)dx.$

解 $\int x^x(1+\ln x)dx = \int e^{x \ln x}(1+\ln x)dx$
 $= \int e^{x \ln x} d(x \ln x)$
 $= e^{x \ln x} + C = x^x + C (x > 0).$

2161. $\int \frac{\operatorname{arcsin} e^x}{e^x} dx.$

解 $\int \frac{\operatorname{arcsin} e^x}{e^x} dx = - \int \operatorname{arcsin} e^x d(e^{-x})$
 $= -e^{-x} \operatorname{arcsin} e^x + \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$
 $= -e^{-x} \operatorname{arcsin} e^x - \int \frac{d(e^{-x})}{\sqrt{(e^{-x})^2 - 1}}$
 $= -e^{-x} \operatorname{arcsin} e^x - \ln(e^{-x} + \sqrt{(e^{-2x} - 1)}) + C$
 $= x - e^{-x} \operatorname{arcsin} e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}}) + C (x < 0).$

2162. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx.$

解 $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}(1+e^x)} dx = \int \left(e^{-\frac{x}{2}} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+e^x} \right) \operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}} dx$
 $= -2 \int \operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}} d(e^{-\frac{x}{2}})$
 $- 2 \int \operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}} d(\operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}})$
 $= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}} + \int \frac{dx}{1+e^x} - (\operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}})^2$

$$\begin{aligned}
&= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}} + \int \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx \\
&\quad - (\operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}})^2 \\
&= -2e^{-\frac{x}{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}} + x - \ln(1+e^x) - (\operatorname{arc} \operatorname{tge}^{\frac{x}{2}})^2 \\
&\quad + C.
\end{aligned}$$

2163. $\int \frac{dx}{(e^{x+1} + 1)^2 - (e^{x-1} + 1)^2}$

解 $\int \frac{dx}{(e^{x+1} + 1)^2 - (e^{x-1} + 1)^2}$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{dx}{(e^{x+1} - e^{x-1})(e^{x+1} + e^{x-1} - 2)} \\
&= \int \frac{dx}{e^{2x}(e - e^{-1})(e + e^{-1} + 2e^{-x})} \\
&= \int \frac{dx}{e^{2x} \cdot 2\operatorname{sh}1 \cdot (2\operatorname{ch}1 + 2e^{-x})} \\
&= \int \frac{dx}{4e^x \operatorname{sh}1 \cdot (1 + e^x \operatorname{ch}1)} \\
&= \frac{1}{4\operatorname{sh}1} \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{\operatorname{ch}1}{1 + e^x \operatorname{ch}1} \right) dx \\
&= -\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1} - \frac{\operatorname{ch}1}{4\operatorname{sh}1} \int \left(1 - \frac{e^x \operatorname{ch}1}{1 + e^x \operatorname{ch}1} \right) dx \\
&= -\frac{e^{-x}}{4\operatorname{sh}1} - \frac{\operatorname{cth}1}{4} [x - \ln(1 + e^x \operatorname{ch}1)] + C.
\end{aligned}$$

2164. $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx.$

解 $\int \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1} dx = \int \frac{\operatorname{th}^2 x + 1}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} dx$

$$= \int \frac{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{2\operatorname{ch}^2 x - 1}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} d(\operatorname{th} x) \\
&= 2 \int \frac{\operatorname{ch}^2 x d(\operatorname{th} x)}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} - \int \frac{d(\operatorname{th} x)}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}} \\
&= 2 \int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{th}^2 x + 1}} - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) \\
&= 2 \int \frac{\operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x}} - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) \\
&= \sqrt{2} \int \frac{d(\sqrt{2} \operatorname{sh} x)}{\sqrt{1 + 2\operatorname{sh}^2 x}} - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) \\
&= \sqrt{2} \ln(\sqrt{2} \operatorname{sh} x + \sqrt{1 + 2\operatorname{sh}^2 x}) \\
&\quad - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{\sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x} - \sqrt{2} \operatorname{th} x} \\
&\quad - \ln(\operatorname{th} x + \sqrt{1 + \operatorname{th}^2 x}) + C.
\end{aligned}$$

2165. $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx.$

解 $\int \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x} \cdot e^x dx$

$$\begin{aligned}
&= \int \left[\frac{1 + 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} \right] e^x dx \\
&= \int \frac{e^x}{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx + \int e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx \\
&= \int e^x d\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right) + \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d(e^x) \\
&= e^x \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} de^x + \int \operatorname{tg} \frac{x}{2} d(e^x)
\end{aligned}$$

$$2170. \int e^{-|x|} dx.$$

解 当 $x \geq 0$ 时, $\int e^{-|x|} dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x} + C_1,$

当 $x < 0$ 时, $\int e^{-|x|} dx = \int e^x dx = e^x + C_2.$

由于 $e^{-|x|}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数必在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微, 而且任意两个原函数之间差一常数. 今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知, 必有

$$F(x) = \begin{cases} -e^{-x} + C_1, & x \geq 0, \\ e^x + C_2, & x < 0. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由于 $0 = F(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)$, 即 $0 = -1 + C_1 = 1 + C_2$, 因此 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 从而

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0; \\ e^x - 1, & x < 0. \end{cases}$$

所以,

$$\int e^{-|x|} dx = \begin{cases} 1 - e^{-x} + C, & x \geq 0; \\ e^x - 1 + C, & x < 0. \end{cases}$$

$$2171. \int \max(1, x^2) dx.$$

解 仿上题, 当 $|x| \leq 1$ 时,

$$\int \max(1, x^2) dx = \int dx = x + C_1;$$

当 $x > 1$ 时,

$$\int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_2,$$

当 $x < -1$ 时,

$$\int \max(1, x^2) dx = \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C_3.$$

今求满足 $F(1) = 1$ 的原函数 $F(x)$. 由上述知

$$F(x) = \begin{cases} x + C_1, & -1 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{3}x^3 + C_2, & x > 1; \\ \frac{1}{3}x^3 + C_3, & x < -1. \end{cases}$$

其中 C_1, C_2, C_3 是三个常数. 由于 $1 = F(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} F(x)$, 即 $1 = 1 + C_1 = \frac{1}{3} + C_2$, 故 $C_1 = 0, C_2 = \frac{2}{3}$.

再由 $F(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-0} F(x)$, 得 $-1 = -\frac{1}{3} + C_3$, 故 $C_3 = -\frac{2}{3}$.

由此可知

$$F(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}, & x > 1; \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}, & x < -1. \end{cases}$$

最后得

$$\begin{aligned} & \int \max(1, x^2) dx \\ &= \begin{cases} x + C, & |x| \leq 1; \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

2172. $\int \varphi(x) dx$, 其中 $\varphi(x)$ 为数 x 至其最接近的整数之距离.

解 显然 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 故其原函数

在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微. 今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数. 由于

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - n, & \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ -x + n + 1, & \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \text{ 时} \end{cases}$$

故

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + C_n, & \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x + C_n', & \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

其中 C_n, C_n' 是两个常数. 由 $\lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})^-} F(x) = F(n + \frac{1}{2})$,

$$\text{得 } C_n' = C_n - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2.$$

故

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + C_n, & \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + C_n, & \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由 $\lim_{x \rightarrow (n+1)^-} F(x) = F(n+1)$

$$\text{得递推公式 } C_{n+1} = C_n + n + \frac{3}{4}.$$

显然 $0 = F(0) = C_0$. 由此得 $C_n = \frac{1}{4}n(2n+1)$.

于是

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - nx + \frac{1}{4}n(2n+1) = \frac{x}{4} \\ + \frac{1}{4} \left(x - n - \frac{1}{2} \right) \cdot \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} - x + n \right) \right], \\ \text{当 } n \leq x < n + \frac{1}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{x^2}{2} + (n+1)x - \frac{1}{4}(2n+1)(n+1) = \frac{x}{4} \\ + \frac{1}{4} \cdot \left(x - n - \frac{1}{2} \right) \left[1 - 2 \left(x - n - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \text{当 } n + \frac{1}{2} \leq x < n + 1 \text{ 时} \end{cases}$$

记 $\{x\} = x - [x]$ 表数 x 去掉其整数部分 $[x]$ 后所剩下的零头部分, 那么最后得 $F(x) = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left\{ 1 - 2 \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| \right\} (-\infty < x < +\infty)$.

故

$$\int \varphi(x) dx = \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left\{ 1 - 2 \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| \right\} + C (-\infty < x < +\infty).$$

2173. $\int [x] |\sin \pi x| dx \quad (x \geq 0).$

解 分别求出在区间 $(0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots, ([x], x)$ 上满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$ 的增量如下:

在 $(0, 1)$ 上, $\int 0 \cdot \sin \pi x dx = C_1, F(1) - F(0) = 0;$

在 $(1, 2)$ 上, $-\int \sin \pi x dx = \frac{1}{\pi} \cos \pi x + C_2, F(2)$

$$-F(1) = \frac{2}{\pi};$$

$$\text{在}(2,3)\text{上}, 2 \int \sin \pi x dx = -\frac{2}{\pi} \cos \pi x + C_3, F(3)$$

$$-F(2) = \frac{2 \cdot 2}{\pi}; \dots$$

$$\text{在}([\![x]\!], x)\text{上}, (-1)^{[x]} [x] \int \sin \pi x dx = (-1)^{[x]} \\ \cdot [x] \left(-\frac{1}{\pi} \right) \cos \pi x + C_{[x]+1},$$

$$F(x) - F([\![x]\!]) = \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x).$$

从而, 对于 $x \geq 0$, 得到

$$\begin{aligned} \int [x] |\sin \pi x| dx &= F(x) + C = (F(1) - F(0)) \\ &+ (F(2) - F(1)) + (F(3) - F(2)) + \dots \\ &+ \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x) + C \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2 \cdot 2}{\pi} + \dots + \frac{2([x] - 1)}{\pi} \\ &+ \frac{(-1)^{[x]} [x]}{\pi} (\cos \pi [x] - \cos \pi x) + C \\ &= \frac{[x] \cdot ([x] - 1)}{\pi} + \frac{(-1)^{[x]} \cdot [x] \cdot (-1)^{[x]}}{\pi} \\ &\quad - \frac{(-1)^{[x]} \cdot [x] \cdot \cos \pi x}{\pi} + C \\ &= \frac{[x]}{\pi} ([x] - (-1)^{[x]} \cos \pi x) + C. \end{aligned}$$

2174. $\int f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{当 } |x| \leq 1; \\ 1 - |x|, & \text{当 } |x| > 1. \end{cases}$

解 当 $|x| \leq 1$ 时,

$$\int f(x)dx = \int (1 - x^2)dx = x - \frac{x^3}{3} + C_1;$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x > 1 \text{ 时, } \int f(x)dx &= \int (1 - |x|)dx \\ &= x - \frac{x|x|}{2} + C_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } x < -1 \text{ 时, } \int f(x)dx &= \int (1 - |x|)dx \\ &= x - \frac{x|x|}{2} + C_3. \end{aligned}$$

今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = F(1)$, $\lim_{x \rightarrow -1-0} F(x) = F(-1)$, 仿 2171 题, 可得

$$F(x) = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3}, & |x| \leq 1; \\ x - \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{6}, & x > 1; \\ x - \frac{x|x|}{2} - \frac{1}{6}, & x < -1. \end{cases}$$

于是

$$\int f(x)dx = \begin{cases} x - \frac{x^3}{3} + C, & |x| \leq 1; \\ x - \frac{x|x|}{2} + \frac{1}{6} \operatorname{sgn} x + C, & |x| > 1. \end{cases}$$

2175. $\int f(x)dx$, 式中

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } -\infty < x < 0; \\ x + 1, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1; \\ 2x, & \text{若 } 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

解 当 $-\infty < x < 0$ 时,

$$\int f(x)dx = \int dx = x + C_1;$$

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\int f(x)dx = \int (x+1)dx = \frac{x^2}{2} + x + C_2;$$

当 $1 < x < +\infty$ 时,

$$\int f(x)dx = \int 2xdx = x^2 + C_3.$$

今求满足 $F(0) = 0$ 的原函数 $F(x)$. 利用 $F(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0-0} F(x) = F(0)$, $\lim_{x \rightarrow 1+0} F(x) = F(1)$, 仿 2171 题, 可得

$$F(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x < 0 \text{ 时;} \\ \frac{x^2}{2} + x, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时;} \\ x^2 + \frac{1}{2}, & \text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

故

$$\int f(x)dx = \begin{cases} x + C, & \text{当 } -\infty < x < 0 \text{ 时;} \\ \frac{x^2}{2} + x + C, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时;} \\ x^2 + \frac{1}{2} + C, & \text{当 } 1 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

2176. 求 $\int xf''(x)dx$.

$$\begin{aligned} \text{解: } \int xf''(x)dx &= \int xd[f'(x)] = xf'(x) \\ &\quad - \int f'(x)dx = xf'(x) - f(x) + C. \end{aligned}$$

2177. 求 $\int f'(2x)dx$.

解: $\int f'(2x)dx = \frac{1}{2} \int f'(2x)d(2x) = \frac{1}{2} f(2x) + C.$

* 这里暗中分别假定了被积函数 f, f' 是连续的.

2178. 设 $f'(x^2) = \frac{1}{x} (x > 0)$, 求 $f(x)$.

解 由 $f'(x^2) = \frac{1}{x}$, 得 $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (x > 0)$.

于是,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C.$$

2179. 设 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x$, 求 $f(x)$.

解 由 $f'(\sin^2 x) = \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ 得 $f'(x) = 1 - x$.

于是,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx = \int (1-x)dx \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + C (|x| \leq 1). \end{aligned}$$

2180. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 < x \leq 1; \\ x, & \text{当 } 1 < x < +\infty \end{cases}$
及 $f(0) = 0$, 求 $f(x)$.

解 设 $t = \ln x$, 则

$$f'(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \leq 0, \\ e^t, & 0 < t < +\infty. \end{cases}$$

于是,

$$f(x) = \int f'(x)dx = \begin{cases} x + C_1, & -\infty < x \leq 0; \\ e^x + C_2, & 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由假定 $f(0) = 0$, 得 $C_1 = 0$.

再由 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的连续性, 知 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, 由此得 $C_2 = -1$.

于是

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } -\infty < x \leq 0 \text{ 时;} \\ e^x - 1, & \text{当 } 0 < x < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

$f(x)$ 于已知闭区间 $[a, b]$ 上可积分的充要条件.

2181. 把区间 $[-1, 4]$ 分为 n 个相等的子区间, 并取这些子区间中点的坐标作自变量 ξ 的值 ($i = 0, 1, \dots, n-1$). 求函数 $f(x) = 1 + x$ 在此区间上的积分和 S_n .

解 每一个子区间的长为 $\frac{5}{n}$, 第 i 个子区间为 $(-1 + \frac{5i}{n}, -1 + \frac{5i}{n} + \frac{5}{n})$, 其中点 $\xi_i = -1 + (i + \frac{1}{2}) \cdot \frac{5}{n}$. 于是, 所求的积分和为

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ 1 + \left[-1 + \left(i + \frac{1}{2} \right) \frac{5}{n} \right] \right\} \cdot \frac{5}{n} \\ &= \frac{25}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(i + \frac{1}{2} \right) = 12 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

2182. 设

(a) $f(x) = x^3$ $[-2 \leq x \leq 3]$;

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ $[0 \leq x \leq 1]$;

(c) $f(x) = 2^x$ $[0 \leq x \leq 10]$.

把相应区间等分成 n 份, 求给定函数 $f(x)$ 在相应区间上的积分下和 \underline{S}_n 及积分上和 \overline{S}_n .

解 (a) 把区间 $[-2, 3]$ n 等分, 则每一个子区间的长为 $h = \frac{5}{n}$, 且第 i 个子区间为

$$[-2 + ih, -2 + (i + 1)h] (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

若令 m_i 及 M_i 分别表示函数 $f(x)$ 在第 i 个子区间上的下确界及上确界, 则因 $f(x) = x^3$ 为增函数, 所以

$$m_i = (-2 + ih)^3,$$

$$M_i = [-2 + (i+1)h]^3 (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是,

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} (-2 + ih)^3 h \\ &= -8nh + 12h^2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i - 6h^3 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + h^4 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^3 \\ &= -40 + \frac{12 \cdot 25n(n-1)}{2n^2} - \frac{125(2n^3 - 3n^2 + n)}{n^3} \\ &\quad + \frac{625(n^4 - 2n^3 + n^2)}{4n^4} \end{aligned}$$

$$= \frac{65}{4} - \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2};$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [-2 + (i+1)h]^3$$

$$= \frac{65}{4} + \frac{175}{2n} + \frac{125}{4n^2}.$$

$$(6) \quad h = \frac{1}{n},$$

$$m_i = \sqrt{\frac{i}{n}},$$

$$M_i = \sqrt{\frac{i+1}{n}} (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是,

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{i}{n}};$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{i+1}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \sqrt{\frac{i}{n}}.$$

$$(B) \quad h = \frac{10}{n},$$

$$m_i = 2^{ih},$$

$$M_i = 2^{(i+1)h} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是,

$$\underline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} h 2^{ih} = \frac{h(2^{nh} - 1)}{2^h - 1} = \frac{10230}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)};$$

$$\begin{aligned} \overline{S}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} h 2^{(i+1)h} = \frac{h 2^h (2^{nh} - 1)}{2^h - 1} \\ &= \frac{10230 \cdot 2^{\frac{10}{n}}}{n(2^{\frac{10}{n}} - 1)}. \end{aligned}$$

2183. 分闭区间 $[1, 2]$ 为 n 份, 使这分点的横坐标构成一等比级数^{*}, 以求函数 $f(x) = x^4$ 在 $[1, 2]$ 上的积分下和. 当 $n \rightarrow \infty$ 时此和的极限等于甚么?

解 设 $\sqrt[n]{2} = q$ 或 $2 = q^n$, 分点为

$$1 = q^0 < q^1 < q^2 < \dots < q^n = 2.$$

由于 $f(x) = x^4$ 在 $[1, 2]$ 上为增函数, 故积分下和为

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} [(q^i)^4 \cdot (q^{i+1} - q^i)] \\ &= (q - 1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (q^i)^5 = \frac{(q - 1)(q^{5n} - 1)}{q^5 - 1} \\ &= \frac{31 \cdot (\sqrt[n]{2} - 1)}{\sqrt[n]{32} - 1}, \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n &= 31 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2} - 1}{\sqrt[n]{32} - 1} \\ &= 31 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{16} + \sqrt[n]{8} + \sqrt[n]{4} + \sqrt[n]{2} + 1} \end{aligned}$$

$$= \frac{31}{5}.$$

*) 原题为“使这 n 份的长构成等比级数”, 现根据原题答案予以改正.

2184⁺. 从积分的定义出发, 求

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt,$$

其中 v_0 及 g 为常数.

解 $f(t) = v_0 + gt$ 在 $[0, T]$ 上为增函数 ($T > 0$).

$$h = \frac{T}{n},$$

$$m_i = v_0 + igh,$$

$$M_i = v_0 + (i+1)gh \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

于是

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (v_0 + igh) \cdot h = nv_0h + gh^2 \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= v_0T + \frac{gT^2}{n^2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \\ &= v_0T + \frac{gT^2}{2} - \frac{gT^2}{2n}, \end{aligned}$$

$$\overline{S}_n = \sum_{i=0}^{n-1} [v_0 + (i+1)gh]h = v_0T + \frac{gT^2}{2} + \frac{gT^2}{2n}.$$

因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{S}_n = v_0T + \frac{gT^2}{2},$$

所以

$$\int_0^T (v_0 + gt) dt = v_0T + \frac{gT^2}{2}.$$

以适当的方法进行积分区间的分段, 把积分看作是

对应的积分和的极限,来计算定积分.

$$2185. \int_{-1}^2 x^2 dx.$$

解 将区间 $[-1, 2]$ n 等分,得 $h = \frac{3}{n}$.取

$$\xi_i = -1 + ih (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (-1 + ih)^2 h = nh - 2h^2 \sum_{i=0}^{n-1} i + h^3 \sum_{i=0}^{n-1} i^2 \\ &= 3 + \frac{9 - 9n}{2n^2}. \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3.$$

由于 $f(x) = x^2$ 在 $[-1, 2]$ 上连续,故积分 $\int_{-1}^2 x^2 dx$ 是存在的,且它与分法无关,同时也与点的取法无关.因此上述和的极限就是所求的积分值(以后如无特殊情况,不再说明),即定积分

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = 3.$$

$$2186. \int_0^1 a^x dx (a > 0).$$

解 当 $a \neq 1$ 时,将区间 $[0, 1]$ n 等分,得 $h = \frac{1}{n}$.

取

$$\xi_i = ih (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h a^{ih} = \frac{h(a^{nh} - 1)}{a^h - 1} = \frac{a - 1}{n(a^{\frac{1}{n}} - 1)}.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-1}{\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}} = \frac{a-1}{\ln a},$$

即

$$\int_0^1 a^x dx = \frac{a-1}{\ln a} \quad (a \neq 1).$$

当 $a = 1$ 时, 积分显然为 1.

2187. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx.$

解 将区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ n 等分, 得 $h = \frac{\pi}{2n}$. 取

$$\xi_i = ih \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

作和

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} h \sin ih.$$

由于

$$\sin ih = \frac{1}{2 \sin \frac{h}{2}} \cdot \left[\cos \frac{2i-1}{2} h - \cos \frac{2i+1}{2} h \right],$$

所以

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\cos \frac{2i-1}{2} h - \cos \frac{2i+1}{2} h \right) \\ &= \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \left(\cos \frac{h}{2} - \cos \frac{2n-1}{2} h \right). \end{aligned}$$

最后得到

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\pi}{4n} - \cos \frac{2n-1}{4n} \pi \right) \\ &= 1.\end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1.$$

2188. $\int_0^x \cos t dt.$

解 将区间 $[0, x]$ n 等分, 得 $h = \frac{x}{n}$. 取

$$\xi_i = ih (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

与 2187 题类似, 可得

$$\begin{aligned}& \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h \cos ih \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h}{2 \sin \frac{h}{2}} \cdot \left(\sin \frac{h}{2} + \sin \frac{2n-1}{2} h \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{h}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{x}{2n} + \sin \frac{(2n-1)x}{2n} \right) \\ &= \sin x.\end{aligned}$$

即 $\int_0^x \cos t dt = \sin x.$

2189. $\int_a^b \frac{dx}{x^2} (0 < a < b).$

解 将区间 $[a, b]$ 作 n 等分, 设分点为

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

取 $\xi_i = \sqrt{x_i \cdot x_{i+1}}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$). 显然 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{x_i x_{i+1}}} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{x_{i+1}} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}. \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{b},$$

即

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

2190. $\int_a^b x^m dx$ ($0 < a < b; m \neq -1$).

解 选择诸分点,使它们的横坐标构成一等比级数,即

$$a < aq < aq^2 < \dots < aq^i < \dots < aq^{n-1} < aq^n = b,$$

其中

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

取 $\xi_i = aq^i$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1$). 作和

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^m (aq^{i+1} - aq^i) \\ &= a^{m+1} (q - 1) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} q^{(m+1)i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^{m+1}(q-1) \frac{q^{n(m+1)} - 1}{q^{m+1} - 1} \\
&= (b^{m+1} - a^{m+1}) \cdot \frac{q - 1}{q^{m+1} - 1}.
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} q = 1$, 所以

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= (b^{m+1} - a^{m+1}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q - 1}{q^{m+1} - 1} \\
&= (b^{m+1} - a^{m+1}) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^m + q^{m-1} + \cdots + 1} \\
&= \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},
\end{aligned}$$

即

$$\int_a^b x^m dx = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}.$$

2191. $\int_a^b \frac{dx}{x} (0 < a < b).$

解 同 2190 题的分法及取法, 得和

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} (aq^i)^{-1} \cdot (aq^{i+1} - aq^i) \\
&= n(q-1) \\
&= n \left[\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right].
\end{aligned}$$

由于 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a (a > 0)$ (可用洛比塔法则), 命 $\alpha = \frac{b}{a}$, 而 $\frac{1}{n}$ 是趋向于 0 的变量, 应用这一极限即得

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\sqrt[n]{\frac{b}{a}} - 1 \right] \\
&= \ln \frac{b}{a},
\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(\sin^2 \frac{i\pi}{n} + \cos^2 \frac{i\pi}{n} - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left[\left(t - \cos \frac{i\pi}{n} \right)^2 + \sin^2 \frac{i\pi}{n} \right] \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(t - \cos \frac{i\pi}{n} - j \sin \frac{i\pi}{n} \right) \\ & \quad \cdot \left(t - \cos \frac{i\pi}{n} + j \sin \frac{i\pi}{n} \right) \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (t - \epsilon_i)(t - \bar{\epsilon}_i) \\ &= \frac{t^{2n} - 1}{(t+1)(t-1)} \\ &= \frac{t^{2n} - 1}{t^2 - 1}. \end{aligned}$$

即

$$t^{2n} - 1 = (t^2 - 1) \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - 2t \cos \frac{i\pi}{n} + t^2 \right).$$

当 $t = \alpha$ 时, 利用上式就可把 S_n 表成下面的形式

$$S_n = \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} (\alpha^{2n} - 1) \right].$$

于是, (a) 当 $|\alpha| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$, 即

$$\int_0^x (1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2) dx = 0.$$

(6) 当 $|\alpha| > 1$ 时, 把 S_n 改写成

$$S_n = 2\pi \ln |\alpha| + \frac{\pi}{n} \ln \left[\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \cdot \frac{\alpha^{2n} - 1}{\alpha^{2n}} \right]$$

后, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n}} = 1$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2\pi \ln |a|$,

即

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = 2\pi \ln |a|.$$

2193. 设函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 证明

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\theta_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx.$$

其中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, $x_i \leq \theta_i \leq x_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ ($x_0 = a, x_n = b$).

证 因为 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 所以它们的乘积 $f(x)\varphi(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续. 因此, 积分

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \varphi(\xi_i) \Delta x_i \quad (1) \text{ 存在.}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故有界, 即存在常数 $M > 0$, 使 $|f(x)| \leq M$ ($a \leq x \leq b$); 又由于 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 故一致连续, 因此任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 时, 恒有

$$|\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^{n-1} [f(\xi_i) \varphi(\theta_i) - f(\xi_i) \varphi(\xi_i)] \Delta x_i \right| \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(\xi_i)| \cdot |\varphi(\theta_i) - \varphi(\xi_i)| \cdot |\Delta x_i| \\ & < \sum_{i=0}^{n-1} M \cdot \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \cdot |\Delta x_i| = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n-1} [f(\xi_i)\varphi(\theta_i) - f(\xi_i)\varphi(\xi_i)]\Delta x_i = 0. \quad (2)$$

由(1)式和(2)式,最后得到

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i.$$

2194. 证明不连续的函数:

$$f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$$

于区间 $[0, 1]$ 上可积分.

证 首先注意,函数 $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ 在 $[0, 1]$ 上有界,其不连续点是

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

并且, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega \leq 2$.

任给 $\epsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\epsilon}{5}, 1\right]$ 上只有有限个间断点,故可积. 因此存在 $\eta > 0$, 使对 $\left[\frac{\epsilon}{5}, 1\right]$ 的任何分法, 只要 $\max|\Delta x'_i| < \eta$, 就有 $\sum_i \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\epsilon}{5}$. 显然, 若 $[\alpha, \beta] \subset \left[\frac{\epsilon}{5}, 1\right]$, 则对于 $[\alpha, \beta]$ 的任何分法, 只要 $\max|\Delta x'_i| < \eta$, 也有 $\sum_i \omega'_i \Delta x'_i < \frac{\epsilon}{5}$.

令 $\delta = \min\left\{\frac{\epsilon}{5}, \eta\right\}$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1$ 是 $[0, 1]$ 的满足 $\max|\Delta x_i| < \delta$

的任一分法. 设 $x_{i_0} \leq \frac{\varepsilon}{5} < x_{i_0+1}$.

由上述, 有 $\sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{5}$. 又, 显然

$$\sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leq 2 \sum_{i=0}^{i_0} \Delta x_i < 2 \cdot \frac{2\varepsilon}{5} = \frac{4\varepsilon}{5}.$$

故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

由此可知

$$\lim_{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

于是, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 可积.

2195. 证明黎曼函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \\ \frac{1}{n}, & \text{若 } x = \frac{m}{n}, \end{cases}$$

(式中 m 及 $n (n \geq 1)$ 为互质的整数) 在任何有穷的区间上可积分.

证 为简单起见, 我们只考虑闭区间 $[0, 1]$ (对于一般的有限闭区间 $[a, b]$, 可类似地讨论之).

命 $\lambda > 0$ 将区间 $[0, 1]$ 分成长度 $\Delta x_i < \lambda$ 的若干部分区间, 取任意的自然数 N , 将所有的部分区间分成两类:

把包含分母 $n \leq N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 的区间列入第一类, 而把不包含上述数的那些区间列入第二类. 对于第一类, 由于满足条件 $n \leq N$ 的数 $\frac{m}{n}$ 只有有限个, 个数记为 $k = k_N$,

所以第一类区间的个数就不大于 $2k$, 而它们长度的总和不出 $2k\lambda$; 对于第二类, 由于在这些区间内除含有无理数外, 仅能含 $n > N$ 的有理数 $\frac{m}{n}$, 而在这种有理点上, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$, 所以, 振幅 ω_i 小于 $\frac{1}{N}$.

这样一来, 和数 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i$ 就分成两部分, 分别估计它们的值, 即得

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < 2k_N \lambda + \frac{1}{N}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 取定一个 $N > \frac{2}{\varepsilon}$, 然后取 $\delta = \frac{\varepsilon}{4k_N}$. 于是, 当 $\lambda < \delta$ 时, 必有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon,$$

故

$$\lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

所以函数 $\varphi(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积分.

2196. 证明函数

$$\text{当 } x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] \text{ 及 } f(0) = 0,$$

于闭区间 $[0, 1]$ 上可积分.

证 首先注意, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界, 其不连续点是

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

并且, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的任何部分区间上的振幅 $\omega \leq 1$.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$ 上只有有限个间断点, 故可积. 因此, 存在 $\eta > 0$, 使对 $\left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_r| < \eta$, 就有 $\sum_r \omega_r \Delta x_r < \frac{\varepsilon}{3}$. 显然, 若 $[\alpha, \beta] \subset \left[\frac{\varepsilon}{3}, 1\right]$, 则对于 $[\alpha, \beta]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_r| < \eta$, 也有 $\sum_r \omega_r \Delta x_r < \frac{\varepsilon}{3}$.

令 $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{3}, \eta\right\}$. 现设 $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = 1$ 是 $[0, 1]$ 的满足 $\max |\Delta x_i| < \delta$ 的任一分法. 设 $x_{i_0} \leq \frac{\varepsilon}{3} < x_{i_0+1}$. 由上述, 有

$$\sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又, 显然 $\sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{i_0} \Delta x_i < \frac{2\varepsilon}{3}$. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{i_0} \omega_i \Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon.$$

于是

$$\lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = 0.$$

由此可知, $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可积.

2197. 证明迪里黑里函数

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数,} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数,} \end{cases}$$

于任意区间上不可积分.

证 在任意区间 $[a, b]$ 的任何部分区间上均有

$$\omega_i = 1,$$

所以 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i = b - a$, 它不趋于零. 因此函数 $\chi(x)$ 在 $[a, b]$ 上不可积分.

2198. 设函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分, 且

$$f_n(x) = \sup f(x) \quad \text{当 } x_i < x \leq x_{i+1},$$

其中 $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a) \begin{cases} i = 0, 1, \dots, n-1; \\ n = 1, 2, \dots \end{cases}$.

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

证 $f_n(x)$ 是不超过 $n+1$ 个间断点的阶梯函数, 因此 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 于是

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \\ & = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f_n(x) - f(x)| dx \\ & \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_i dx = \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0 \\ & \left(\text{当 } \max |\Delta x_i| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0 \text{ 时} \right), \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

2199. 证明:若函数 $f(x)$ 于 $[a, b]$ 上可积分,则有连续函数 $\varphi_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 的叙列,使

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx, \text{ 当 } a \leq c \leq b.$$

证 将区间 $[a, b]$ 作 n 等分,设分点为

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_{n-1}^{(n)} < x_n^{(n)} = b,$$

即 $x_i^{(n)} = a + \frac{i}{n}(b-a), i = 0, 1, \dots, n.$

在 $\Delta x_i^{(n)} = [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上令 $\varphi_n(x)$ 为过点 $[x_{i-1}^{(n)}, f(x_{i-1}^{(n)})]$ 及 $[x_i^{(n)}, f(x_i^{(n)})]$ 的直线,即当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时,令

$$\varphi_n(x) = f(x_{i-1}^{(n)}) + \frac{x - x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}} [f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})],$$

则 $\varphi_n(x)$ 是 $[a, b]$ 上的连续函数,因此,它是可积分的.

若令 $m_i^{(n)}, M_i^{(n)}$ 及 $\omega_i^{(n)}$ 分别表示函数 $f(x)$ 在 $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 上的下确界,上确界及振幅,则当 $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ 时,

$$m_i^{(n)} \leq \varphi_n(x) \leq M_i^{(n)}, m_i^{(n)} \leq f(x) \leq M_i^{(n)},$$

从而

$$|\varphi_n(x) - f(x)| \leq \omega_i^{(n)}.$$

于是,当 $a \leq c \leq b$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^c f(x) dx - \int_a^c \varphi_n(x) dx \right| \\ & \leq \int_a^c |f(x) - \varphi_n(x)| dx \\ & \leq \int_a^b |f(x) - \varphi_n(x)| dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}^{(n)}}^{x_i^{(n)}} |f(x) - \varphi_n(x)| dx$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)}.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 因此,

当 $\max |\Delta x_i^{(n)}| = \frac{b-a}{n} \rightarrow 0$ 时, 必有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i^{(n)} \Delta x_i^{(n)} \rightarrow 0.$$

由此可知

$$\int_a^c f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^c \varphi_n(x) dx \quad (a \leq c \leq b).$$

2200. 证明: 若有界的函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上可积分, 则其绝对值 $|f(x)|$ 于 $[a, b]$ 上也可积分, 并且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

证 对于区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任意两点 x' 及 x'' , 总有
 $||f(x')| - |f(x'')|| \leq |f(x') - f(x'')|,$
 所以函数 $|f(x)|$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅 ω_i^* 不超过 $f(x)$ 在此区间上的振幅 ω_i , 因而

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i^* \Delta x_i \leq \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i \rightarrow 0,$$

即 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上可积分.

其次, 因为

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|,$$

所以

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

$< \delta$, 就有 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i < \frac{\eta \varepsilon}{2\Omega}$. ($\omega_i(f)$ 表 $f(x)$ 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的振幅).

下证对 $[a, b]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \delta$, 就有

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i < \varepsilon.$$

事实上, 将诸区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 分成两组, 第一组是满足 $\omega_i(f) < \eta$ 的 (其下标以“ i' ”记之), 第二组是满足 $\omega_i(f) \geq \eta$ 的 (下标以“ i'' ”记之).

于是,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i \\ &= \sum_{i'} \omega_{i'}(\varphi(f)) \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''}(\varphi(f)) \Delta x_{i''} \\ &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i'} \Delta x_{i'} + \Omega \sum_{i''} \Delta x_{i''}, \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned} & \frac{\eta \varepsilon}{2\Omega} > \sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(f) \Delta x_i \\ &= \sum_{i'} \omega_{i'}(f) \Delta x_{i'} + \sum_{i''} \omega_{i''}(f) \Delta x_{i''} \\ &\geq \sum_{i''} \omega_{i''}(f) \Delta x_{i''} \geq \eta \sum_{i''} \Delta x_{i''}, \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_i(\varphi(f)) \Delta x_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (b-a) + \Omega \cdot \frac{\varepsilon}{2\Omega} = \varepsilon.$$

由此可知, $\varphi[f(x)]$ 在 $[a, b]$ 上可积.

2203. 若函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 可积分, 则函数 $f[\varphi(x)]$ 是否也必定可积分?

解 未必. 例如函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x = 0, \\ 1 & \text{若 } x \neq 0, \end{cases}$$

及 $\varphi(x)$ 为黎曼函数(参阅 2195 题).

它们在任何有穷的区间上均可积(前者不连续点仅为原点一个, 且是有界函数, 因而是可积分的).

但 $f[\varphi(x)] = \chi(x)$, 利用 2197 题的结果得知它在任何有穷的区间上不可积分.

2204. 设函数 $f(x)$ 于闭区间 $[A, B]$ 上可积分, 证明函数 $f(x)$ 有积分的连续性, 即是说

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^{a+h} |f(x+h) - f(x)| dx = 0,$$

式中 $[a, b] \subset [A, B]$.

证 方法一:

不妨设 $A < a, b < B$. 由于 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 可积, 故任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使对 $[A, B]$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x_i| < \eta$, 就恒有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i < \varepsilon;$$

显然, 对 $[A, B]$ 的任一子区间 $[A', B']$ 的任何分法, 只要 $\max |\Delta x'_i| < \eta$, 也有

$$\sum'_i \omega'_i \Delta x'_i < \varepsilon. \quad (1)$$

今设 $0 < h < \delta = \min \left\{ \frac{\eta}{2}, \frac{B-b}{3} \right\}$, 则对于 h , 存在正整数 $n = n(h)$, 使有

$$a + (2n-2)h < b \leq a + 2nh < a + (2n+1)h < B.$$

用 ω_i 表 $f(x)$ 在 $[a+ih, a+(i+2)h]$ 上的振幅, 则

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx \\ & \leq \int_a^{a+2nh} |f(x+h) - f(x)| dx \\ & = \sum_{i=0}^{2n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} |f(x+h) - f(x)| dx \leq \sum_{i=0}^{2n-1} \omega_i h \\ & = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} 2h + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h. \end{aligned}$$

显然, $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} \cdot 2h$ 是对于区间 $[a, a+2nh]$ 的分法 $a < a+2h < a+4h < \dots < a+2nh$ 所作的(1)式中的和, 而 $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h$ 是对于区间 $[a+h, a+(2n+1)h]$ 的分法 $a+h < a+3h < a+5h < \dots < a+(2n+1)h$ 所作的(1)式中的和. 故

$$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i} 2h < \epsilon, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \omega_{2i+1} 2h < \epsilon.$$

从而

$$\int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

由此可知

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_b^a |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

同理可证

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

于是,得

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

方法二:

由 2199 题的结果可知:对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,由于 $f(x)$ 在 $[A, B]$ 上可积,故存在 $[A, B]$ 上的连续函数 $\varphi(x)$,使

$$\int_A^B |f(x) - \varphi(x)| dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

由于 $\varphi(x)$ 在 $[A, B]$ 上一致连续,故存在 $\delta > 0$,使当 $|x' - x''| < \delta (x' \in [A, B], x'' \in [A, B])$ 时,恒有

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

于是,当 $|h| < \delta$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx \\ & \leq \int_a^b |f(x+h) - \varphi(x+h)| dx \\ & \quad + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx \\ & \quad + \int_a^b |f(x) - \varphi(x)| dx \\ & \leq 2 \int_A^B |f(x) - \varphi(x)| dx \\ & \quad + \int_a^b |\varphi(x+h) - \varphi(x)| dx \end{aligned}$$

$$< 2 \cdot \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2(b-a)}(b-a) = \epsilon.$$

故

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

2205. 设函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上可积分, 证明等式

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0$$

当而且仅当对属于闭区间 $[a, b]$ 内函数 $f(x)$ 连续的一切点有 $f(x) = 0$ 时方成立.

证 先证必要性:

采用反证法. 设 $f(x)$ 在点 x_0 连续, 但 $f(x_0) \neq 0$, 则存在 $\delta > 0$, $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset [a, b]$, 使当 $|x - x_0| \leq \delta$ 时

$$|f(x)| > \frac{|f(x_0)|}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) dx &\geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x) dx > \frac{f^2(x_0)}{4} \cdot 2\delta \\ &= \frac{\delta \cdot f^2(x_0)}{2} > 0. \end{aligned}$$

这与假设 $\int_a^b f^2(x) dx = 0$ 矛盾.

再证充分性:

也即要证: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积条件下, 假设 $f(x)$ 在一切连续点 x_0 上均有 $f(x_0) = 0$, 则必有

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0.$$

证明分两个部分. 第一, 首先要指出当 $f(x)$ 在

$[a, b]$ 上可积时, $f(x)$ 的连续点在 $[a, b]$ 中必定是稠密的. 此处所谓“稠密”性是指: 对于任意区间 $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ 总存在一点 $x_0 \in [\alpha, \beta]$, 使 $f(x)$ 在 x_0 连续. 第二, 利用假设, 并借助于稠密性, 可证得充分性. 现在先证第二部分, 如下: 由 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的全体连续点 X 的稠密性以及当 $x_0 \in X$ 时有 $f(x_0) = 0$ 的假设. 便知, 对于区间 $[a, b]$ 的任一分法, 均可适当地取 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$, 使 $f(\xi_i) = 0$. 从而积分和 $\sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0$.

由此, 再注意到 $f^2(x)$ 在 $[a, b]$ 的可积性, 便有

$$\int_a^b f^2(x) dx = \lim_{\max |\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f^2(\xi_i) \Delta x_i = 0.$$

如今再补证第一部分: 应当首先指明, 若 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可积, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $[\alpha, \beta]$ 的子区间 $[\alpha', \beta']$ 使得振幅

$$\omega(\alpha', \beta') < \varepsilon.$$

事实上, 如果上述结论不成立, 则存在一个 $\varepsilon_0 > 0$, 使对于 $[\alpha, \beta]$ 的任意分法, 有

$$\sum_i \omega_i \Delta x_i \geq \varepsilon_0 \sum_i \Delta x_i = \varepsilon_0 (\beta - \alpha) > 0,$$

这与 $f(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 可积矛盾, 因此, 结论为真.

今取 $[\alpha, \beta]$ 为 $[a_1, b_1]$. 由于 $f(x)$ 在 $\left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{4}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{4} \right]$ 上可积, 故存在区间 $[a_2, b_2] \subset \left[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{4}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{4} \right] \subset [a_1, b_1]$, 使

$$\omega(a_2, b_2] < \frac{1}{2},$$

同样, 存在区间 $[a_3, b_3] \subset \left[a_2 + \frac{b_2 - a_2}{4}, b_2 - \frac{b_2 - a_2}{4} \right] \subset [a_2, b_2]$, 使

$$\omega[a_3, b_3] < \frac{1}{3}.$$

这样继续下去, 得一串闭区间 $[a_n, b_n]$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 满足

$a = a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots < b_n < \dots < b_2 < b_1 = \beta$, 并且 $b_n - a_n \leq \frac{\beta - \alpha}{2^{n-1}} \rightarrow 0, \omega[a_n, b_n] < \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

由区间套定理, 诸 $[a_n, b_n]$ 具有唯一的公共点 c . 显然 $a_n < c < b_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). 下证 $f(x)$ 在点 c 连续.

任给 $\varepsilon > 0$, 取正整数 n_0 使 $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. 再取 $\delta > 0$ 使 $(c - \delta, c + \delta) \subset [a_{n_0}, b_{n_0}]$. 于是, 当 $|x - c| < \delta$ 时, 必有

$$|f(x) - f(c)| \leq \omega[a_{n_0}, b_{n_0}] < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

故 $f(x)$ 在点 $x = c$ 连续. 到此, 充分性证毕.

§ 2. 利用不定积分计算定积分的方法

1° 牛顿—莱布尼兹公式 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上有定义而且连续, $F(x)$ 为它的原函数 (即 $F'(x) = f(x)$), 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^{b*}.$$

定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的几何意义表示由曲线 $y=f(x)$, OX 轴及垂直于 OX 轴的二直线 $x=a$ 和 $x=b$ 四者所围成的代数面积 S (图 4.1).

2° 部分积分法 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续并有连续导数 $f'(x)$ 和 $g'(x)$, 则

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx.$$

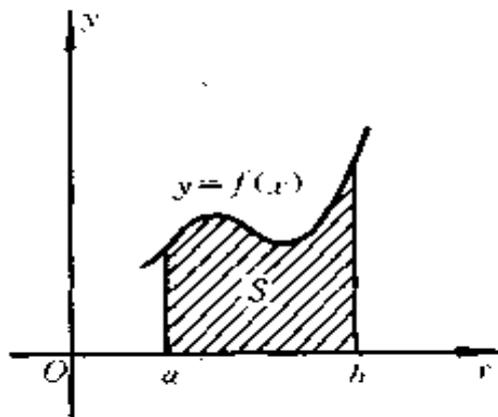


图 4.1

3° 变数代换 若: (1) 函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 内连续, (2) 函数 $\varphi(t)$ 及其导数 $\varphi'(t)$ 皆于闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 其中 $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$; (3) 复合函数 $f(\varphi(t))$ 于闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上有定义并连续, 则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

利用牛顿—莱布尼兹公式, 求下列定积分并绘出对应的曲边图形面积:

2206. $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx$

解 $\int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} dx = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_{-1}^8$
 $= 11 \frac{1}{4}$ (图 4.2).

2207. $\int_0^\pi \sin x dx$

* 本节个别题是收敛的广义积分, 仍按此公式计算。——题解编者注。

解 $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = 2$ (图 4.3).

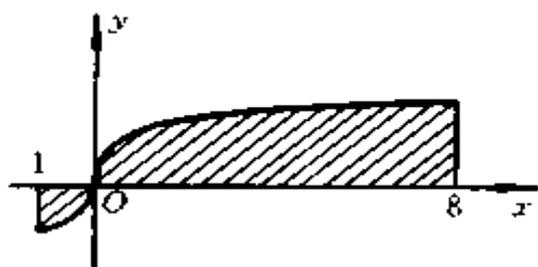


图 4.2

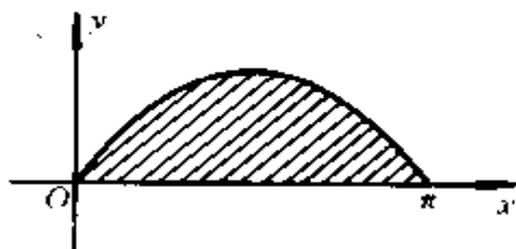


图 4.3

2208. $\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

解 $\int_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ (图 4.4).

2209. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

解 $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{3}$ (图 4.5).

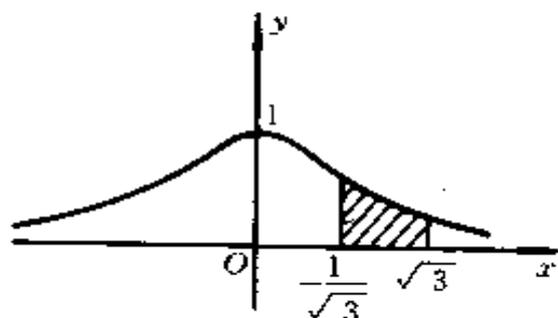


图 4.4

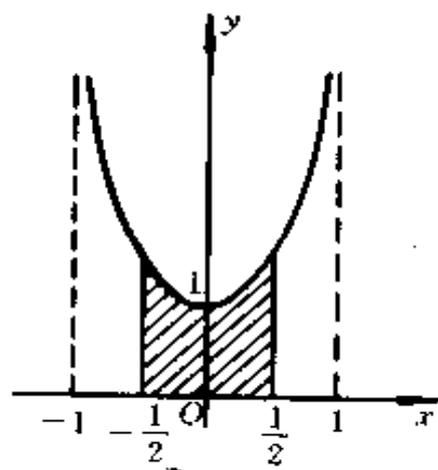


图 4.5

$$= \frac{\pi}{2\sin\alpha} \quad (\text{图 4.8}).$$

注 以下图形从略.

2213. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x}$
 $(0 \leq \epsilon < 1).$

解 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x}$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x}$$

$$+ \int_{\pi}^{2\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} + \int_{\pi}^0 \frac{d(2\pi - x)}{1 + \epsilon \cos(2\pi - x)}$$

$$= 2 \int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x}$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \epsilon \cos x} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \epsilon \cos x}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \epsilon^2 \cos^2 x}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(1 - \epsilon^2) \cos^2 x + \sin^2 x}$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + (1 - \epsilon^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

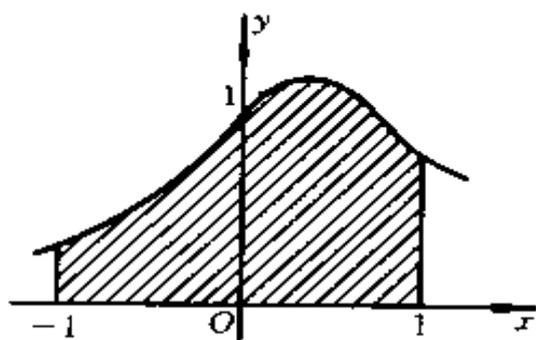


图 4.8

$$2214. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \quad (|a| < 1, \\ |b| < 1, ab > 0).$$

解 在公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} \\ = \frac{1}{\sqrt{A}} \ln \left| Ax + \frac{B}{2} + \sqrt{A} \cdot \sqrt{Ax^2+Bx+C} \right| \\ + C^*)$$

中, 设

$$Ax^2+Bx+C = (1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2),$$

两端求导数得

$$Ax + \frac{B}{2} = -b(1-2ax+a^2) - a(1-2bx+b^2).$$

由此推得, 当 $x=1$ 时, 在对数符号下的表达式的值为

$$-a(1-b)^2 - b(1-a)^2 + 2\sqrt{ab}(1-a)(1-b) \\ = -(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1+\sqrt{ab})^2,$$

而当 $x=-1$ 时, 得到值 $-(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2(1-\sqrt{ab})^2$.

于是,

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}} \\ = \frac{1}{\sqrt{ab}} \ln \frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

*) 利用 1850 题的结果.

$$2215. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \quad (ab \neq 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{|ab|} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{|a| \operatorname{tg} x}{|b|} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2|ab|}. \end{aligned}$$

*) 利用 2030 题的结果.

2216. 设

$$(a) \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}; \quad (6) \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x};$$

$$(b) \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} \right) dx.$$

说明为甚么运用牛顿—莱布尼兹公式会得到不正确的结果.

解 (a) 若应用公式得

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -2 < 0.$$

这是不正确的. 事实上, 由于函数 $f(x) = \frac{1}{x^2} > 0$, 所以当积分存在时, 其值必大于零. 原因在于该函数在区间 $[-1, 1]$ 上有第二类间断点 $x = 0$. 因而不能运用公式.

(6) 若应用公式得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x dx}{2 + \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

但 $\frac{\sec^2 x}{2 + \operatorname{tg}^2 x} > 0$, 故积分若存在, 必为正. 原因在于原函数在 $[0, 2\pi]$ 上 $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$ 为第一类不连续点,

故不能直接运用公式.

(B) 若应用公式得

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} > 0. \end{aligned}$$

这是不正确的, 因为 $\frac{d}{dx} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right) = -\frac{1}{1+x^2} < 0$.

所以, 积分值必为负. 原因在于原函数 $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 为第一类不连续点, 故不能直接运用公式.

2217. 求 $\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$.

解 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx \\ &= \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx + \int_0^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx \\ &= \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_{-1}^0 + \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

注意, 被积函数 $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right)$ 显然在 $x=0$ 间断, 但易

知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) = 0$, 故 $x=0$ 是可去间断点. 若我

们补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0, 则被积函数在整个 $(-1, 1)$ 上都是连续的, 从而积分

$\int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx$ 存在. 以后, 凡是被积函数有可去

间断点的情形, 我们都按此法处理, 理解为连续函数的

积分,另外,

$$\int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_{-1}^0 = \frac{1}{3}$$

应理解为

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{-n} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \Big|_{-1}^{-n} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

以后,凡是定积分存在而原函数有间断点的情况,都按此理解,省去取极限的式子,但应理解为取极限的结果.

2218. 求 $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$

解
$$\begin{aligned} &\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{100} \sqrt{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx \\ &= \sum_{k=1}^{100} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 x} dx \\ &= 100 \sqrt{2} \int_0^{\pi} \sin x dx = 200 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

利用定积分求下列和的极限值:

2219. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

解 这是和的极限,该极限即为函数 $f(x) = x$ 在区间 $[0, 1]$ 上的定积分. 事实上,函数 $f(x) = x$ 在 $[0, 1]$ 上是连续的,因而可积分. 这样便可将 $[0, 1]$ n 等份,并取 ξ_k 为小区间的左端点,这样作出的和的极限就是题中所要求的极限. 于是,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

以下各题不再说明.

$$2220. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

$$2221. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{n^2+i^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$2222. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n} \sin \frac{i\pi}{n} &= \int_0^1 \sin \pi x dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cos \pi x \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}. \end{aligned}$$

$$2223. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \quad (p > 0).$$

$$\text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^p \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{p+1}.$$

$$2224. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{n}{n}} \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{i}{n}} &= \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \\ &= \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

$$2225. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\left(\sum_{i=1}^n \ln i \right) - n \ln n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ln \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 \ln x dx^{**)} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^1 \ln x dx \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} x(\ln x - 1) \Big|_{\epsilon}^1 = -1. \end{aligned}$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

*) 参看后面 2388 题.

$$2226. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \left(a + k \cdot \frac{b-a}{n} \right) \right].$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f \left(a + k \frac{b-a}{n} \right) \right] \\ &= \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

弃掉高阶同等无穷小,求下列和的极限值:

$$2227. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{\pi}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n} \right) \sin \frac{2\pi}{n^2} \right. \\ \left. + \cdots + \left(1 + \frac{n-1}{n} \right) \sin \frac{(n-1)\pi}{n^2} \right].$$

解 由于对于一切 $k < n, 3 < n$ 有

$$0 \leq \frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \leq \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \\ \leq \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n^2} \right) \\ \leq \frac{\sin \frac{k\pi}{n^2}}{\cos \frac{k\pi}{n^2}} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{n^2} \right) \\ \leq \frac{2k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right).$$

从而,

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \right) \\ \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \frac{2k\pi}{n^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \\ \leq 2\pi \left(1 - \cos \frac{\pi}{n} \right) \rightarrow 0 (n \rightarrow +\infty).$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \sin \frac{k\pi}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \frac{k\pi}{n^2} \\ - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \left(\frac{k\pi}{n^2} - \sin \frac{k\pi}{n^2} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k\pi}{n} + \frac{k^2\pi}{n^2} \right)$$

$$= \int_0^1 \pi(x + x_2) dx = \frac{5\pi}{6}.$$

$$2228. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}}.$$

解 由于

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n} (1 + \alpha_n),$$

式中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.

于是,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \\ &= \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} \right] \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \alpha_n) \\ &= \pi \int_0^1 \frac{dx}{2 + \cos \pi x} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \left[\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$2229. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}}{n^2} \quad (x > 0).$$

解 由于

$$0 \leq \sqrt{\left(x + \frac{k}{n}\right) \left(x + \frac{k+1}{n}\right)} - \left(x + \frac{k}{n}\right)$$

$$0 < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^k - \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n + \frac{1}{k}} < \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} < \frac{2}{n} \rightarrow 0$$

($n \rightarrow \infty$).

于是,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n + \frac{1}{k}} \cdot 2^{\frac{k}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2^{\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

2231. 求: $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx$, $\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx$,
 $\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx$.

解 $\frac{d}{dx} \int_a^b \sin x^2 dx = 0$
 $\frac{d}{da} \int_a^b \sin x^2 dx = - \frac{d}{da} \int_b^a \sin x^2 dx$
 $= - \sin a^2$

$$\frac{d}{db} \int_a^b \sin x^2 dx = \sin b^2.$$

2232. 求: (a) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$;

(b) $\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$;

(B) $\frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt$.

解 (a) $\frac{d}{dx} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2} dt \right) \cdot \frac{d}{dx}(x^2) \\
&= 2x \cdot \sqrt{1+x^4};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad & \frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\
&= \frac{d}{dx} \int_{x^2}^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} + \frac{d}{dx} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\
&= \frac{d}{dx}(x^3) \cdot \frac{d}{d(x^3)} \int_0^{x^3} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\
&\quad - \frac{d}{dx}(x^2) \cdot \frac{d}{d(x^2)} \int_0^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \\
&= \frac{3x^2}{\sqrt{1+x^{12}}} - \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(B) \quad & \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\
&= \frac{d}{dx} \int_{\sin x}^0 \cos(\pi t^2) dt \\
&\quad + \frac{d}{dx} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\
&= - \frac{d(\sin x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\sin x)} \int_0^{\sin x} \cos(\pi t^2) dt \\
&\quad + \frac{d(\cos x)}{dx} \cdot \frac{d}{d(\cos x)} \int_0^{\cos x} \cos(\pi t^2) dt \\
&= -\cos x \cdot \cos(\pi \sin^2 x) \\
&\quad - \sin x \cdot \cos(\pi \cos^2 x) *) \\
&= (\sin x - \cos x) \cdot \cos(\pi \sin^2 x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*) \quad \cos(\pi \cos^2 x) &= \cos(\pi - \pi \sin^2 x) \\
&= -\cos(\pi \sin^2 x).
\end{aligned}$$

2233. 求:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x}; \quad (6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx}.$$

解 (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \cos x^2 dx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x^2) = 1;$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2}{\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}} \\ = \frac{\pi^2}{4};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{x^2} dx\right)^2}{\int_0^x e^{2x^2} dx} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2} \cdot \int_0^x e^{x^2} dx}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \int_0^x e^{x^2} dx}{e^{x^2}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2234. 证明

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}.$$

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{x^2} dx}{\frac{1}{2x} e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)} = 1,$$

所以,当 $x \rightarrow \infty$ 时,

$$\int_0^x e^{x^2} dx \sim \frac{1}{2x} e^{x^2}.$$

2235. 求:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx}.$$

解

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx}{\int_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin x} dx} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sqrt{\operatorname{tg}(\sin x)} (\sin x)'}{\sqrt{\sin(\operatorname{tg} x)} (\operatorname{tg} x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}(\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{\sin(\operatorname{tg} x)}} \\ & \quad \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \cos^3 x = 1. \end{aligned}$$

2236. 设 $f(x)$ 为连续正值函数,证明当 $x \geq 0$ 时,函数

$$\varphi(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$$

增加.

证 首先注意, $\lim_{x \rightarrow 0+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x f(x)}{f(x)} = 0$, 故若规定 $\varphi(0) = 0$, 则 $\varphi(x)$ 是 $x \geq 0$ 上的连续函数. 另外,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \left\{ x f(x) \int_0^x f(t)dt \right. \\ &\quad \left. - f(x) \int_0^x t f(t)dt \right\} \\ &= \frac{f(x)}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2} \cdot \int_0^x (x-t)f(t)dt \\ &> 0 \text{ (当 } x > 0 \text{ 时),}\end{aligned}$$

所以, $\varphi(x)$ 当 $x \geq 0$ 时是增加的.

2237. 求

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad & \int_0^2 f(x)dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & \text{当 } 1 < x \leq 2; \end{cases} \\ \text{(b)} \quad & \int_0^1 f(x)dx, \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} x, & \text{当 } 0 \leq x \leq t, \\ t \cdot \frac{1-x}{1-t}, & \text{当 } t \leq x \leq 1. \end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{解 (a)} \quad & \int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 (2-x)dx \\ &= \frac{5}{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad & \int_0^1 f(x)dx = \int_0^t x dx + \int_t^1 t \cdot \frac{1-x}{1-t} dx \\ &= \frac{t}{2}.\end{aligned}$$

2238. 计算下列积分并把它们当作参数 α 的函数作出积分 $I=I(\alpha)$ 的图形. 设:

$$\text{(a)} \quad I = \int_0^1 x|x-\alpha|dx;$$

$$\text{(b)} \quad I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2} dx;$$

$$(B) I = \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2a \cos x + a^2}}.$$

解 (a) 分三种情况:

1° 若 $a < 0$, 则

$$I = \int_0^1 x(x - a) dx = \frac{1}{3} - \frac{a}{2};$$

2° 若 $a > 1$, 则

$$I = \int_0^1 x(a - x) dx = \frac{a}{2} - \frac{1}{3};$$

3° 若 $0 \leq a \leq 1$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a x(a - x) dx + \int_a^1 x(x - a) dx \\ &= \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^1 x|x - a| dx = \begin{cases} \frac{1}{3} - \frac{a}{2}, & \text{当 } a < 0, \\ \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}, & \text{当 } 0 \leq a \leq 1, \\ \frac{a}{2} - \frac{1}{3}, & \text{当 } a > 1 \end{cases} \text{图(4.9).}$$

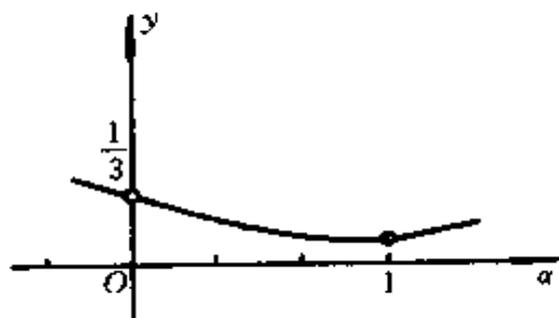


图 4.9

(6) 分两种情况:

1° 若 $|\alpha| \leq 1$, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + 2\cos x + \alpha^2} dx \\
 &= \frac{1}{4\alpha^2} \int_0^{\pi} \frac{4\alpha^2(1 - \cos^2 x) dx}{(1 + \alpha^2) + 2\alpha\cos x} \\
 &= \frac{1}{4\alpha^2} \int_0^{\pi} \frac{[(1 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2\cos^2 x] + [4\alpha^2 - (1 + \alpha^2)^2]}{(1 + \alpha^2) + 2\alpha\cos x} dx \\
 &= \frac{1}{4\alpha^2} \int_0^{\pi} [(1 + \alpha^2) - 2\alpha\cos x] dx - \frac{(1 - \alpha^2)^2}{4\alpha^2} \\
 &\quad \cdot \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1 + \alpha^2) + 2\alpha\cos x} \\
 &= \frac{1}{4\alpha^2} [(1 + \alpha^2)x - 2\alpha\sin x] \Big|_0^{\pi} - \frac{(1 - \alpha^2)^2}{4\alpha^2} \\
 &\quad \cdot \frac{2}{1 - \alpha^2} \cdot \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha}{1 + \alpha^2 + 2\alpha}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{(1 + \alpha^2)\pi}{4\alpha^2} - \frac{(1 - \alpha^2)\pi}{4\alpha^2} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

2° 若 $|\alpha| > 1$, 则同上述情况类似有

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{(1 + \alpha^2)\pi}{4\alpha^2} - \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{4\alpha^2} \\
 &\quad \cdot \frac{2}{\alpha^2 - 1} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 + \alpha^2 - 2\alpha}{1 + \alpha^2 + 2\alpha}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{(1 + \alpha^2)\pi}{4\alpha^2} - \frac{(\alpha^2 - 1)\pi}{4\alpha^2} \\
 &= \frac{\pi}{2\alpha^2}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x dx}{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{当 } |\alpha| \leq 1; \\ \frac{\pi}{2\alpha^2}, & \text{当 } |\alpha| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 4.10})$$

*) 利用 2028 题(a)的结果.

$$\begin{aligned} (\text{B}) \quad & \int_0^\pi \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 - 2a \cos x + a^2}} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{1 + a^2 - 2a \cos x} \Big|_0^\pi \\ &= \begin{cases} 2, & \text{当 } |\alpha| \leq 1, \\ \frac{2}{|\alpha|}, & \text{当 } |\alpha| > 1. \end{cases} \quad (\text{图 4.11}) \end{aligned}$$

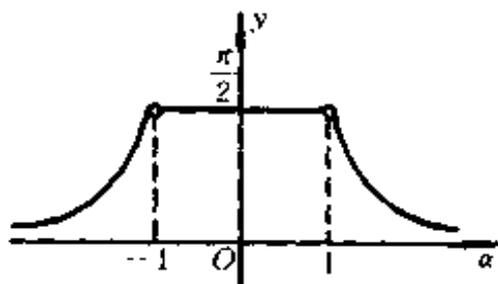


图 4.10

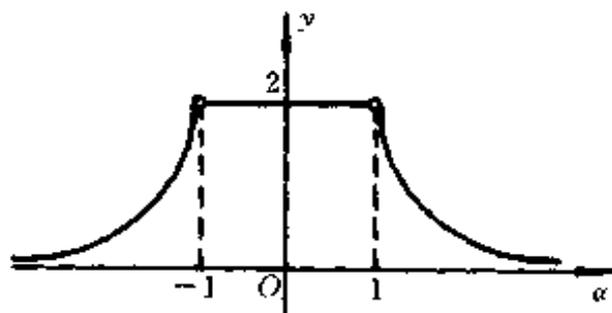


图 4.11

利用部分积分法的公式,求下列定积分:

2239. $\int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{\ln 2} x e^{-x} dx = - \int_0^{\ln 2} x d(e^{-x}) \\ &= -x e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln 2 - e^{-x} \Big|_0^{\ln 2} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\ln \frac{e}{2}.$$

2240. $\int_0^{\pi} x \sin x dx.$

解 $\int_0^{\pi} x \sin x dx = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi.$

2241. $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx.$

解 $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx = x^2 \sin x \Big|_0^{2\pi} - 2 \int_0^{2\pi} x \sin x dx$
 $= 2 \left(x \cos x \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \cos x dx \right)$
 $= 4\pi.$

2242+. $\int_{\frac{1}{e}}^e |\lg x| dx.$

解 $\int_{\frac{1}{e}}^e |\lg x| dx$
 $= \int_{\frac{1}{e}}^1 (-\lg x) dx + \int_{\frac{1}{e}}^1 \lg x dx$
 $= \left(-x \lg x \Big|_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{\ln 10} dx \right) + x \lg x \Big|_1^e$
 $\quad - \int_1^e \frac{1}{\ln 10} dx$
 $= 2 \left(1 - \frac{1}{e} \right) \lg e.$

2243. $\int_0^1 \arccos x dx.$

解 $\int_0^1 \arccos x dx$
 $= x \arccos x \Big|_0^1 - \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

解 设 $t = \frac{1}{x+1}$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{0.75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \\ &= \int_{\frac{4}{7}}^1 \frac{dt}{\sqrt{2t^2-2t+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(2t-1 + \sqrt{2t^2-2t+2}) \Big|_{\frac{4}{7}}^1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1+\sqrt{2}}{\frac{1}{7} + \sqrt{\frac{50}{49}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7+7\sqrt{2}}{1+5\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}. \end{aligned}$$

2248. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$

解 设 $\sqrt{e^x-1}=t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = 2(t - \arctan t) \Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

2249. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$

解 设 $\sqrt{x}=t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}} dt = (\arcsin t)^2 \Big|_0^1 = \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

2250. 假设 $x - \frac{1}{x} = t$, 来计算积分

$$\int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx.$$

解 由于被积函数是偶函数, 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} 2 \int_N^0 \frac{dt}{t^2+2} \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{2}} \Big|_N^0 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

2251. 设:

$$(a) \int_{-1}^1 dx, t=x^{\frac{2}{3}};$$

$$(b) \int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}, x=\frac{1}{t};$$

$$(c) \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x}, \operatorname{tg} x=t.$$

说明为甚么用 $\varphi(t)$ 代换 x 会引致不正确的结果.

解 (a) $\int_{-1}^1 dx = 2$. 但若作代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$, 则得

$$\int_{-1}^1 dx = \pm \frac{3}{2} \int_1^1 t^{\frac{1}{2}} dt = 0.$$

其错误在于代换 $t=x^{\frac{2}{3}}$ 的反函数 $x=\pm t^{\frac{3}{2}}$ 不是单值的.

(b) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$. 但若作代换 $x=\frac{1}{t}$, 则得

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = - \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2},$$

于是得出错误的结果: $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2} = 0$.

其错误在于 $x = \frac{1}{t}$, 当 $t = 0$ (0 属于 $[-1, 1]$) 时不连续.

(B) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$ 大于零, 但若作代换 $t = \operatorname{tg} x$, 则得

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1 + \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) \Big|_0^{\pi} = 0.$$

其错误在于 $t = \operatorname{tg} x$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处不连续.

2252. 在积分

$$\int_0^3 x \sqrt[3]{1-x^2} dx$$

中, 令 $x = \sin t$ 是否可以?

解 不可以, 因为 $\sin t = x$ 不可能大于 1.

2253. 于积分 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ 中, 当作变数的代换 $x = \sin t$ 时, 可否取数 π 和 $\frac{\pi}{2}$ 作为新的上下限?

解 可以. 因为满足定积分换元的条件. 事实上,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} d(\sin t) \\ &= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = - \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

2254. 证明: 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 内连续, 则

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x] dx.$$

证 设 $x = a + (b-a)t$, 则 $dx = (b-a)dt$.

代入得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)t]dt,$$

即

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)x]dx.$$

2255. 证明: 等式

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x)dx \quad (a > 0).$$

证 设 $x = \sqrt{t}$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^a x^3 f(x^2)dx \\ &= \int_0^{a^2} t^{\frac{3}{2}} f(t) \cdot \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} tf(t)dt. \end{aligned}$$

即

$$\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x)dx.$$

2256. 设 $f(x)$ 为闭区间 $[A, B] \supset [a, b]$ 上的连续函数, 当

$A-a < x < B-b$ 时, 求 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y)dy$.

解 $\frac{d}{dx} \int_a^b f(x+y)dy$

$$= \frac{d}{dx} \int_{a+x}^{b+x} f(y)dy = f(b+x) - f(a+x).$$

2257. 证明: 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[0, 1]$ 上连续, 则

$$(a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx;$$

$$(b) \int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

证(a) 设 $\frac{\pi}{2} - t = x$, 则 $dx = -dt$, 且

$$f(\sin x) = f(\cos t).$$

代入得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx$$

(6) 设 $\pi - t = x$, 则 $dx = -dt$, 且

$$xf(\sin x) = (\pi - t)f(\sin t).$$

代入得

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} xf(\sin x) dx &= - \int_{\pi}^0 (\pi - t)f(\sin t) dt \\ &= \pi \int_0^{\pi} f(\sin t) dt - \int_0^{\pi} tf(\sin t) dt, \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x) dx.$$

2258. 证明: 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[-l, l]$ 上连续, 则

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数时,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx;$$

(2) 若函数 $f(x)$ 为奇函数时,

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 0.$$

给出这些事实的几何解释.

证 (1) 由于 $f(x)$ 为偶函数, 即 $f(x) = f(-x)$,
 ($x \in [-l, l]$). 于是设 $x = -t$, 则有

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) dx &= \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx \\ &= - \int_{-l}^0 f(-x) d(-x) + \int_0^l f(x) dx \\ &= - \int_l^0 f(t) dt + \int_0^l f(x) dx \\ &= \int_0^l f(t) dt + \int_0^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx. \end{aligned}$$

其几何解释如下:

由于 $f(x) = f(-x)$, 故图形关于 Oy 轴对称. 于是由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = -l$ 及 $x = l$ 所围成图形的面积为由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 0$ 及 $x = l$ 所围成的图形的面积 S 的两倍(图 4.12).

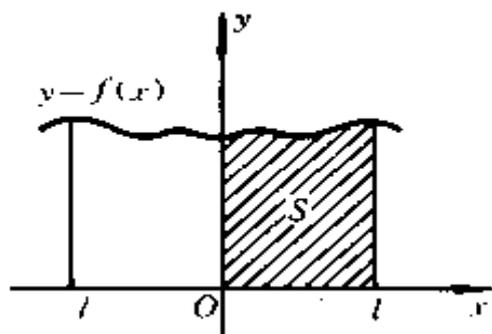


图 4.12

(2) 由于 $f(x) = -f(-x)$, 设 $x = -t$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) dx &= - \int_{-l}^0 f(-x) dx + \int_0^l f(x) dx \\ &= \int_l^0 f(t) dt + \int_0^l f(x) dx = 0. \end{aligned}$$

其几何解释如下:

由于 $f(x) = -f(-x)$, 故图形关于原点对称. 于是

由 $-l$ 到 0 之间所围之面积, 与由 0 到 l 之间所围成之面积绝对值相等, 符号相反, 故其面积的代数和为零 (图 4.13).

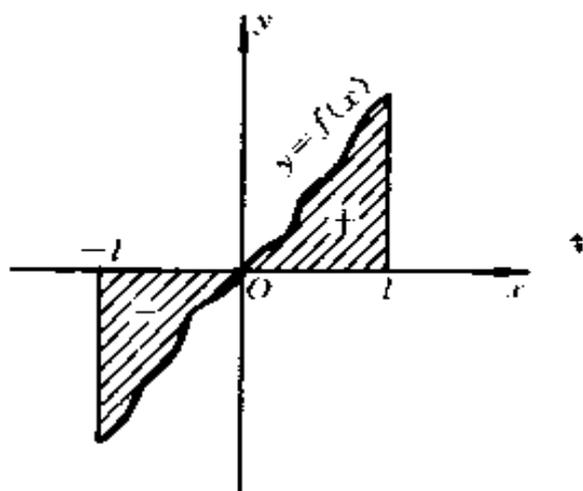


图 4.13

2259. 证明: 偶函数的原函数中之一个为奇函数, 而奇函数

的一切原函数皆为偶函数.

证 设 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上定义^{*}, 且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 当 $f(-x) = f(x)$ 时, 由于

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x) \text{ 及 } f(-x) = -\frac{d}{dx}F(-x),$$

故有 $\frac{d}{dx}[F(x) + F(-x)] = 0$. 从而可得

$$F(x) + F(-x) = C_1, \text{ 且 } C_1 = 2F(0).$$

于是, $f(x)$ 有一个原函数 $F(x) - F(0)$ 是奇函数.

当 $f(-x) = -f(x)$ 时, 类似地可得

$$F(x) - F(-x) = C_2, \text{ 且 } C_2 = 0.$$

于是, $F(-x) = F(x)$, 即 $f(x)$ 的任一原函数 $F(x) + C$ (C 为任意常数) 也为偶函数.

*) 如果 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可积, 则由

$$F_c(x) = \int_0^x f(t)dt + C \text{ (} C \text{ 是任意常数)}$$

也可获证, 其中 $F_c(x)$ 为 $f(x)$ 的全部原函数.

2260. 引入新变数

$$t = x + \frac{1}{x}.$$

来计算积分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx$.

解 设 $t = x + \frac{1}{x}$, 则

$$t^2 - 4 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2, x = \frac{1}{2}(t \pm \sqrt{t^2 - 4}).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\ &= \int_1^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\ & \quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}} dx \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} (1 + \sqrt{t^2 - 4}) e^t d\left[\frac{1}{2}(t + \sqrt{t^2 - 4})\right] \\ & \quad + \int_{\frac{5}{2}}^2 (1 - \sqrt{t^2 - 4}) e^t d\frac{1}{2}(t - \sqrt{t^2 - 4}) \\ &= \frac{1}{2} \int_2^{\frac{5}{2}} (1 + \sqrt{t^2 - 4}) e^t \left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{\frac{5}{2}}^2 (1 - \sqrt{t^2 - 4}) e^t \left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right) dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} e^t \left[\sqrt{t^2 - 4} + \frac{t}{\sqrt{t^2 - 4}}\right] dt \\ &= \int_2^{\frac{5}{2}} [\sqrt{t^2 - 4} d(e^t) + e^t d\sqrt{t^2 - 4}] \\ &= (\sqrt{t^2 - 4}) e^t \Big|_2^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{2} e^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

2261. 于积分

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx.$$

中实行变数代换 $\sin x = t$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos x dx \\ &+ \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\cos x dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(x)\cos x dx. \end{aligned}$$

在右端的第一个积分中, 设 $\sin x = t$; 第二、第三个积分中, 设 $\sin(\pi - x) = t$; 第四个积分中, 设 $\sin(2\pi - x) = -t$, 代入得

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx \\ &= \int_0^1 [f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt \\ &+ \int_{-1}^0 [f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)] dt. \end{aligned}$$

2262. 计算积分

$$\int_{e^{-2n}}^1 \left| \left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' \right| dx,$$

式中 n 为自然数.

证 $\left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' = \frac{\sin(-\ln x)}{x}$. 设 $x = e^{-t}$,

则 $dx = -e^{-t} dt$, $\frac{\sin(-\ln x)}{x} = \frac{\sin t}{e^{-t}} = e^t \sin t$.

代入得

$$\int_{e^{-2n}}^1 \left| \left[\cos \left(\ln \frac{1}{x} \right) \right]' \right| dx = \int_0^{2n} |\sin t| dt$$

2265. 证明:若 $f(x)$ 为定义在 $-\infty < x < +\infty$ 而周期为 T 的连续的周期函数,则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

式中 a 为任意的数.

证
$$\int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$= \int_a^0 f(x)dx + \int_a^T f(x)dx + \int_T^{a+T} f(x)dx.$$

对上述等式右端的第三个积分,设 $x - T = t$,则

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(t+T)dt = \int_0^a f(t)dt.$$

于是,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

2266. 证明:当 n 为奇数时,函数

$$F(x) = \int_0^x \sin^n x dx \text{ 及 } G(x) = \int_0^x \cos^n x dx$$

为以 2π 为周期的周期函数;而当 n 为偶数时,则其中的任何一个皆为线性函数与周期函数的和.

证 当 n 为奇数时, $\sin^n x$ 是奇函数,而且是以 2π 为周期的函数.于是,

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} \sin^n x dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^n x dx + \int_{2\pi}^{2\pi+x} \sin^n x dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^n(\pi-x) dx + \int_0^x \sin^n x dx \\ &= 0 + \int_0^x \sin^n x dx = F(x) \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}G(x+2\pi) &= G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x dx \\&= G(x) + \int_0^\pi \cos^n x dx + \int_\pi^{2\pi} \cos^n x dx \\&= G(x) + \int_0^\pi \cos^n x dx + \int_0^\pi \cos^n(x+\pi) dx \\&= G(x),\end{aligned}$$

从而得知： $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是以 2π 为周期的周期函数。当 n 为偶数时，显然有

$$\begin{aligned}F(x+2\pi) &= F(x) + \int_0^{2\pi} \sin^n x dx, \\G(x+2\pi) &= G(x) + \int_0^{2\pi} \cos^n x dx.\end{aligned}$$

但因

$$\int_0^{2\pi} \sin^n x dx = \int_0^{2\pi} \cos^n x dx = a > 0,$$

所以， $F(x)$ 、 $G(x)$ 都不是 2π 为周期的周期函数。

设

$$F_1(x) = F(x) - \frac{a}{2\pi}x,$$

则

$$\begin{aligned}F_1(x+2\pi) &= F(x+2\pi) - \frac{a}{2\pi}(x+2\pi) \\&= F(x) + a - \frac{a}{2\pi}x - a \\&= F(x) - \frac{a}{2\pi}x = F_1(x).\end{aligned}$$

即 $F_1(x)$ 是以 2π 为周期的函数，而

$$F(x) = F_1(x) + \frac{a}{2\pi}x.$$

所以, $F(x)$ 为周期函数与线性函数之和.

同理, 可以证明 $G(x)$ 也是周期函数与线性函数之和.

2267. 证明: 函数

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

(式中 $f(x)$ 为具周期 T 的连续的周期函数) 在一般的情形下是线性函数与周期函数之和.

证 因为 $F(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx$, 所以

$$F(x+T) - F(x) = \int_x^{x+T} f(x) dx.$$

又因 $f(x)$ 是一周期为 T 的连续函数, 所以

$$\int_x^{x+T} f(x) dx = \int_{x_0}^{x_0+T} f(x) dx = K.$$

于是, $F(x+T) - F(x) = K$.

如果 $K = 0$, 则 $F(x)$ 为一周期函数.

如果 $K \neq 0$, 可考虑函数 $\varphi(x) = F(x) - \frac{K}{T}x$,

则因

$$\begin{aligned}\varphi(x+T) &= F(x+T) - \frac{K}{T}(x+T) \\ &= F(x+T) - \frac{K}{T}x - K \\ &= F(x) - \frac{K}{T}x = \varphi(x),\end{aligned}$$

所以, $\varphi(x)$ 也为一周期函数, 从而

$$F(x) = \varphi(x) + \frac{K}{T}x,$$

即 $F(x)$ 是线性函数与周期等于 T 的周期函数之和.

计算下列积分:

$$2268. \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^1 x(2-x^2)^{12} dx \\ &= -\frac{1}{26}(2-x^2)^{13} \Big|_0^1 = 315 \frac{1}{26}. \end{aligned}$$

$$2269. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-1}^1 \frac{x dx}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\frac{3}{4} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

$$2270^+. \int_1^e (x \ln x)^2 dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_1^e (x \ln x)^2 dx \\ &= x^3 \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e x^2 \ln x \cdot (1 + \ln x) dx \\ &= e^3 - 2 \int_1^e x^2 \ln x dx - 2 \int_1^e (x \ln x)^2 dx. \end{aligned}$$

移项合并得

$$\begin{aligned} \int_1^e (x \ln x)^2 dx &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3} \int_1^e x^2 \ln x dx \\ &= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2}{9} x^3 \ln x - \frac{2}{27} x^3 \right) \Big|_1^e \end{aligned}$$

$$= \frac{5}{27}e^3 - \frac{2}{27}.$$

2271. $\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx.$

解 设 $\sqrt[3]{1-x} = t$, 则

$$\int_1^9 x \sqrt[3]{1-x} dx$$

$$= -3 \int_0^{-2} (t^3 - t^6) dt = -66 \frac{6}{7}.$$

2272⁺. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$

解 设 $x = \frac{1}{t}$, 则

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-\frac{1}{2}}^{-1} = -\frac{\pi}{3}.$$

2273. $\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx.$

解 设 $1+3x^8 = t$, 则 $24x^7 dx = dt$, $x^8 = \frac{1}{3}(t-1)$.

于是,

$$\int_0^1 x^{15} \sqrt{1+3x^8} dx$$

$$= \frac{1}{72} \int_1^4 (t-1)t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{29}{270}.$$

2274. $\int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx.$

$$\begin{aligned}
\text{解 } & \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx \\
&= x \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\sqrt{x} dx}{2(1+x)} \\
&= \pi - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2 dt}{1+t^2} \quad (*) = \pi - (t - \operatorname{arctg} t) \Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}.
\end{aligned}$$

*) 设 $\sqrt{x} = t$.

$$2275. \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}.$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } & \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} \\
&= \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 + \cos x} + \int_0^{\pi} \frac{dx}{2 - \cos x} \\
&\quad - \int_0^{2\pi} \frac{dx}{3 + \cos x} \\
&= 4 \int_0^{\pi} \frac{dx}{4 - \cos^2 x} - 6 \int_0^{\pi} \frac{dx}{9 - \cos^2 x} \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x} \\
&\quad - 12 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{9 \sin^2 x + 8 \cos^2 x} \\
&= 8 \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad - 12 \frac{1}{3 \cdot \sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} x}{\sqrt{8}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

$$= \pi \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

2276. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

解 $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$
 $= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$
 $= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{2}} \right)^* \Big|_0^{2\pi} = 2\pi \sqrt{2}.$

*) 利用 2035 题的结果.

2277. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$

解 $\sin x \sin 2x \sin 3x$
 $= \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) \cdot \sin 2x$
 $= \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{4} (\sin 6x - \sin 2x).$

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$$

$$= \left(-\frac{1}{16} \cos 4x + \frac{1}{24} \cos 6x - \frac{1}{8} \cos 2x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}.$$

2278. $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx.$

解 $\int_0^{\pi} (x \sin x)^2 dx$
 $= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x^2 (1 - \cos 2x) dx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{6}x^3 \Big|_0^\pi - \frac{1}{2} \int_0^\pi x^2 \cos 2x dx \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x^2}{4} \sin 2x \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi x \sin 2x dx \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{x}{4} \cos 2x \Big|_0^\pi + \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos 2x dx \\
&= \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2279. $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx.$

解 $\int_0^\pi e^x \cos^2 x dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\pi \frac{e^x(1 + \cos 2x)}{2} dx \\
&= \frac{e^x}{2} + \frac{e^x}{10} (\cos 2x + 2\sin 2x)^{*}) \Big|_0^\pi \\
&= \frac{3}{5}(e^\pi - 1).
\end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

2280. $\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x dx.$

解 $\int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^4 x dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^2 x \cdot (\operatorname{ch}^2 x - 1) dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^2 2x dx - \int_0^{\ln 2} \operatorname{sh}^2 x dx \\
&= \frac{1}{4} \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{8} \operatorname{sh} 4x \right)^{*}) \Big|_0^{\ln 2} \\
&\quad - \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2x \right)^{*}) \Big|_0^{\ln 2} \\
&= \frac{3}{8} \ln 2 - \frac{225}{1024}.
\end{aligned}$$

*) 利用 1761 题的结果.

利用递推公式来计算下列依赖于取正整数值的参数 n 的积分.

$$2281. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x d(\cos x) \\ &= - \sin^{n-1} x \cdot \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx \\ &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx, \end{aligned}$$

移项合并得

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

利用上述递推公式即可求得

$$I_n = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{若 } n = 2k; \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{若 } n = 2k+1. \end{cases}$$

$$2282. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx.$$

解 设 $\frac{\pi}{2} - x = t$, 则 $dx = -dt$, 且

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t.$$

代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

解 设 $x = \sin t$, 代入得

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

因此, 与 2281 题的结果相同.

$$2286. I_n = \int_0^1 x^m (\ln x)^n dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= \frac{1}{m+1} x^{m+1} \ln^n x \Big|_0^1 \\ &\quad - \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^m (\ln x)^{n-1} dx. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} I_n &= -\frac{n}{m+1} I_{n-1} \\ &= \left(-\frac{n}{m+1}\right) \left(-\frac{n-1}{m+1}\right) \cdots \left(-\frac{1}{m+1}\right) I_0 \\ &= (-1)^n \cdot \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

$$2287. I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right)^{2n+1} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n+1} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-1} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left[\sec^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \right] dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{2n-1} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) d \left[\operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \right] - I_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2n} - I_{n-1}, \end{aligned}$$

即

$$I_n = -\frac{1}{2n} - I_{n-1}$$

递推之,得

$$I_n = -\frac{1}{2n} + \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{2(n-2)} + \dots \\ + (-1)^n \cdot \frac{1}{2} + (-1)^n I_0.$$

但

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx \\ = -\ln \left| \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ = \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = -\ln \sqrt{2},$$

于是,

$$I_n = (-1)^n \left\{ -\ln \sqrt{2} + \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} + \dots \right. \right. \\ \left. \left. + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \right] \right\}.$$

设 $f(x) = f_1(x) + if_2(x)$ 是实变数 x 的复函数,

其中 $f_1(x) = \operatorname{Re}f(x)$, $f_2(x) = \operatorname{Im}f(x)$ 及 $i = \sqrt{-1}$,
则按定义有:

$$\int f(x) dx = \int f_1(x) dx + i \int f_2(x) dx.$$

显而易见

$$\operatorname{Re} \int f(x) dx = \int \operatorname{Re}f(x) dx.$$

$$\text{及} \quad \operatorname{Im} \int f(x) dx = \int \operatorname{Im}f(x) dx.$$

2288. 利用尤拉氏公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

证明:

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{若 } m = n. \end{cases}$$

(n 及 m 为整数).

证 当 $m = n$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

当 $m \neq n$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos nx + i \sin nx)(\cos mx - i \sin mx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx - i \int_0^{2\pi} \sin(m-n)x dx = 0. \end{aligned}$$

2289. 证明

$$\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x} dx = \frac{e^{b(\alpha+i\beta)} - e^{a(\alpha+i\beta)}}{\alpha+i\beta}$$

(α 及 β 为常数).

证 $\int_a^b e^{(\alpha+i\beta)x} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b e^{\alpha x} \cos \beta x dx + i \int_a^b e^{\alpha x} \sin \beta x dx \\ &= \frac{e^{\alpha x} [\alpha \cos \beta x + \beta \sin \beta x + i(\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x)]}{\alpha^2 + \beta^2} \Big|_a^b \\ &= \frac{e^{\alpha x} (\alpha - i\beta)(\cos \beta x + i \sin \beta x)}{(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta)} \Big|_a^b \\ &= \frac{e^{(\alpha+i\beta)x}}{\alpha+i\beta} \Big|_a^b = \frac{e^{(\alpha+i\beta)b} - e^{(\alpha+i\beta)a}}{\alpha+i\beta}. \end{aligned}$$

利用尤拉氏公式:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}),$$

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}),$$

计算下列积分(m 及 n 为正整数):

2290. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$

解:方法一:记

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx,$$

易见 $I_0 = \frac{1}{4}I$, 其中

$$I = \int_0^{2\pi} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx.$$

利用尤拉公式,有

$$\begin{aligned} \sin^{2m} x \cos^{2n} x &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^{2m} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k e^{2(m-k)ix} \sum_{l=0}^{2n} C_{2n}^l e^{2(n-l)ix} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l e^{2(m+n-k-l)ix} \\ &= \frac{(-1)^m}{2^{2n+2m}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l [\cos 2(m+n-k-l)x \\ &\quad - k-l)x + i \sin 2(m+n-k-l)x], \end{aligned}$$

今不妨设 $m \leq n^*$, 作积分计算, 则有

$$\begin{aligned} I &= \frac{(-1)^m}{2^{2m+2n}} \sum_{k=0}^{2m} \sum_{l=0}^{2n} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l \left(\int_0^{2\pi} \cos(m+n \right. \\ &\quad \left. - k-l)2x dx + i \int_0^{2\pi} \sin(m+n-k-l)2x dx \right) \end{aligned}$$

* 若 $m > n$ 作代换 $x = \frac{\pi}{2} - u$ 即得.

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{\substack{k+l=m+n \\ 0 \leq k \leq 2m \\ 0 \leq l \leq 2n}} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^l \\
&= \frac{(-1)^m \pi}{2^{2m+2n-1}} \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k}
\end{aligned}$$

经计算,可以验证有*

$$\begin{aligned}
&(-1)^m \sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k C_{2n}^{m+n-k} \\
&= \frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}
\end{aligned}$$

于是得

$$I_0 = \frac{1}{4} I = \frac{\pi(2m)!(2n)!}{2^{2m+2n+1}m!n!(m+n)!}$$

方法二:

令 $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x dx$. 显然

$$I_{m,0} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}
I_{m,n} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n-1} x dsin x \\
&= \frac{1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x dsin^{2m+1} x \\
&= \frac{1}{2m+1} \cos^{2n-1} x \sin^{2m+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}
\end{aligned}$$

* 用 $C_m^k C_{2n}^{m+n-k} = C_{2n}^m C_{2n}^k (C_{m+n}^m)^{-1} C_{m+n}^k C_{2m+n-k}^{2m-k}$, 以及由恒等式 $(1-x)^{m+n}(1+x)^{m+n} = (1-x^2)^{m+n}$ 展开, 取 x^{2m} 的系数的关系式 $\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{m+n}^k C_{2m+n-k}^{2m-k} = (-1)^m C_{m+n}^m$ 可以验证.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} x \cos^{2n-1} x dx \\
&= \frac{2n-1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2} x \cos^{2n-2} x dx \\
&= \frac{2n-1}{2m+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x (1 - \cos^2 x) \cos^{2(n-1)} x dx \\
&= \frac{2n-1}{2m+1} I_{m, n-1} - \frac{2n-1}{2m+1} I_{m, n},
\end{aligned}$$

整理后得

$$I_{m, n} = \frac{2n-1}{2(m+n)} I_{m, n-1}.$$

由此不难得到

$$\begin{aligned}
I_{m, n} &= \frac{(2n-1)!!}{2^n (m+n)(m+n-1)\cdots(m+1)} I_{m, 0} \\
&= \frac{(2n-1)!! m!}{2^n (m+n)!} \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi (2n-1)!! (2m-1)!!}{2^{m+n+1} (m+n)!} \\
&= \frac{\pi (2m)! (2n)!}{2^{2m+2n+1} m! n! (m+n)!}.
\end{aligned}$$

2291. $\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx.$

解 设 $u = \frac{\sin nx}{\sin x}$, 利用尤拉公式得

$$u = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{e^{ix} - e^{-ix}}.$$

当 $n = 2k$ 时,

$$\begin{aligned}
u &= (e^{ikx} + e^{-ikx}) \cdot (e^{i(k-1)x} + e^{i(k-3)x} + \cdots \\
&\quad + e^{-i(k-3)x} + e^{-i(k-1)x}) \\
&= e^{(2k-1)ix} + e^{(2k-3)ix} + \cdots + e^{ix} + e^{-ix}
\end{aligned}$$

$$+ \dots + e^{-(2k-1)ix}$$

$$= 2[\cos(2k-1)x + \cos(2k-3)x + \dots + \cos x],$$

于是,

$$\int_0^\pi u dx = 2 \left[\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} + \frac{\sin(2k-3)x}{2k-3} \right. \\ \left. + \dots + \sin x \right] \Big|_0^\pi = 0.$$

当 $n = 2k + 1$ 时, 同上得

$$u = 2[\cos 2kx + \cos 2(k-1)x + \dots + \cos 2x] + 1,$$

于是,

$$\int_0^\pi u dx = \pi.$$

最后得到

$$\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx = \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数;} \\ \pi, n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

2292. $\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$

解 $\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} = \frac{e^{i(2n+1)x} + e^{-i(2n+1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}}$

$$= e^{2nix} - e^{2(n-1)ix} + \dots + (-1)^n + \dots + e^{-2nix}$$

$$= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \cos 2x] + (-1)^n.$$

于是,

$$\int_0^\pi \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx = (-1)^n \pi.$$

2293. $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx$

解 $\cos^n x \cos nx$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^n + 1} (e^{ix} + e^{-ix})^n (e^{inx} + e^{-inx}) \\
&= \frac{1}{2^n} [\cos 2nx + c_n^1 \cos 2(n-1)x + \cdots \\
&\quad + c_n^{n-1} \cos 2x + 1].
\end{aligned}$$

于是,

$$\int_0^\pi \cos^n x \cos nx dx = \frac{\pi}{2^n}.$$

2294. $\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx.$

解 方法一:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^n x \sin nx dx \\
&= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \int_0^\pi \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k e^{i(n-2k)x} (e^{inx} - e^{-inx}) \right] dx \\
&= \frac{1}{(2i)^{n+1}} \left[\sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k \int_0^\pi e^{i(2n-2k)x} dx - \sum_{k=0}^n (-1)^k c_n^k \int_0^\pi e^{-i2kx} dx \right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1} i^{n+1}} [(-1)^n c_n^n \cdot \pi - (-1)^0 c_n^0 \pi] \\
&= \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数;} \\ \frac{\pi}{2^n} \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, n \text{ 为奇数.} \end{cases}
\end{aligned}$$

由于

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^{\frac{n+1}{2}+1}, n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

于是

$$\int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx = \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

方法二:

设 $x = \frac{\pi}{2} - t$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin \left(\frac{n\pi}{2} - nt \right) dt \\ &= \sin \frac{n\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cos nt dt \\ &\quad - \cos \frac{n\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin nt dt \\ &= \sin \frac{n\pi}{2} \int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx dx \\ &= \frac{\pi}{2^n} \sin \frac{n\pi}{2}. \end{aligned}$$

求下列积分 (n 为自然数):

2295. $\int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx.$

解
$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos(n+1)x dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x (\cos nx \cos x - \sin nx \sin x) dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin^{n-1} x \cos nx d(\sin x) - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \\ &= \frac{\sin^n x \cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin^n x d(\cos nx) \\ &\quad - \int_0^{\pi} \sin^n x \sin nx dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ c_{2n}^n \cdot \int_0^{2\pi} e^{-ax} dx + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
&\quad \left. \cdot \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos 2(n-k)x dx \right\} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ -\frac{1}{a} c_{2n}^n e^{-ax} \Big|_0^{2\pi} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{(2n-2k) \cdot \sin 2(n-k)x - a \cos 2(n-k)x}{a^2 + (2n-2k)^2} e^{-ax} \Big|_0^{2\pi} \right\} \\
&= \frac{1}{2^{2n}} \left\{ -\frac{1}{a} c_{2n}^n \cdot (e^{-2\pi a} - 1) - a(e^{-2\pi a} - 1) \right. \\
&\quad \left. \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2c_{2n}^k}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\} \\
&= \frac{1 - e^{-2\pi a}}{2^{2n} \cdot a} \left\{ c_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\},
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos^{2n} x dx \\
&= \frac{1 - e^{-2\pi a}}{2^{2n} \cdot a} \cdot \left\{ c_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{a^2}{a^2 + (2n-2k)^2} \right\}
\end{aligned}$$

方法二:

由于

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x} dx = \frac{e^{(a+ik)x}}{a+ik} \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{e^{2\pi a} - 1}{a+ik}
\end{aligned}$$

$$= \frac{(e^{2\pi a} - 1)(a - ik)}{a^2 + k^2},$$

取实部,得

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{(a+ik)x} dx = \frac{a(e^{2\pi a} - 1)}{a^2 + k^2}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} e^{-ax} \cos 2nx dx \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-ax} \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^{2n} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \int_0^{2\pi} e^{-ax} \left(\sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k e^{i(2n-2k)x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \int_0^{2\pi} e^{-a+i(2n-2k)x} dx \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \frac{e^{-2\pi a} - 1}{-a + i(2n - 2k)} \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} c_{2n}^k \frac{a(1 - e^{-2\pi a})}{a^2 + (2n - 2k)^2} \\ &= \frac{1 - e^{-2\pi a}}{2^{2n} \cdot a} \left[c_{2n}^n + 2 \sum_{k=0}^{n-1} c_{2n}^k \frac{a^2}{a^2 + (2n - 2k)^2} \right]. \end{aligned}$$

2298. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx.$

解 利用分部积分得

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx \\ &= \frac{1}{2n} \sin 2nx \cdot \ln \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ & \quad + \frac{1}{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx \cdot \sin x}{\cos x} dx \end{aligned}$$

$$= 0^{n-1} + \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx$$

$$- \frac{1}{4n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx.$$

对于上述等式右端的第二项和第三项的被积函数有下列等式:

$$\frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} = \frac{e^{i(2n-1)x} + e^{-i(2n-1)x}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

$$= 2[\cos 2(n-1)x - \cos 2(n-2)x + \dots$$

$$+ (-1)^{n-2} \cos 2x] + (-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}$$

$$= 2[\cos 2nx - \cos 2(n-1)x + \dots$$

$$+ (-1)^{n-1} \cos 2x] + (-1)^n.$$

由于积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx dx \quad (k \text{ 为任意的正整数})$$

的值恒等于零, 所以积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n-1)x}{\cos x} dx \quad \text{及} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2n+1)x}{\cos x} dx$$

分别等于 $(-1)^{n-1} \frac{\pi}{2}$ 及 $(-1)^n \frac{\pi}{2}$.

这样, 我们得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \cdot \cos 2nx dx$$

$$= \frac{1}{4n} \left[(-1)^{n-1} \frac{\pi}{2} - (-1)^n \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{4n} (-1)^{n-1}.$$

*) 在 $x = 0$ 处, $\sin 2nx \cdot \ln \cos x = 0$; 而在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处, 为“ $0 \cdot \infty$ ”型, 采用洛比塔法则定值:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sin 2nx \cdot \ln \cos x &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \cos x}{\frac{1}{\sin 2nx}} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\sin x \cdot \sin^2 2nx}{\cos x \cdot \cos 2nx} \\ &= \frac{1}{2n} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\cos x \cdot \sin^2 2nx + 4n \sin x \sin 2nx \cos 2nx}{-\sin x \cos 2nx - 2n \cos x \sin 2nx} \\ &= 0. \end{aligned}$$

2299. 利用多次的部分积分法, 计算尤拉氏积分:

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1} (1-x)^{n-1} dx,$$

式中 m 及 n 为正整数.

$$\begin{aligned} \text{解 } B(m, n) &= \frac{1}{m} x^m (1-x)^{n-1} \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{n-1}{m} \int_0^1 x^m (1-x)^{n-2} dx \\ &= \frac{n-1}{m} B(m+1, n-1). \end{aligned}$$

继续利用部分积分法, 可得

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{m(m+1)\cdots(m+n-2)} \int_0^1 x^{m+n-2} dx \\ &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-2)!} \\ &\quad \cdot \frac{1}{m+n-1} x^{m+n-1} \Big|_0^1 \\ &= \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}. \end{aligned}$$

2300. 勒让德多项式 $P_n(x)$ 被下面公式来定义:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

证明

$$\int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{若 } m = n. \end{cases}$$

证 当 $m \neq n$ 时, 不失一般性, 设 $n < m$. 由于 $P_m(x)$ 为一 m 次的多项式, 我们记

$$P_m(x) = R^{(m)}(x),$$

其中 $R(x) = \frac{1}{2^m m!} (x^2 - 1)^m$.

利用多次部分积分法得

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_m(x) P_n(x) dx \\ &= [P_n(x) R^{(m-1)}(x) - P_n'(x) R^{(m-2)}(x) + \dots \\ & \quad + (-1)^{m-1} P_n^{(m-1)}(x) R(x)] \Big|_{-1}^1 \\ & \quad + (-1)^m \int_{-1}^1 R(x) P_n^{(m)}(x) dx = 0. \end{aligned}$$

当 $m = n$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx \\ &= \frac{1}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 \left[\frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} \right]^2 dx, \end{aligned}$$

设 $u = \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$, $v = (x^2 - 1)^n$, 则

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} [uv^{(n-1)} - u'v^{(n-2)} + \dots \\
&\quad + (-1)^{n-1}u^{(n-1)}v] \Big|_{-1}^1 + (-1)^n \\
&\quad \cdot \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 vu^{(n)} dx \\
&= \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n \cdot \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} [(x^2 - 1)^n] dx \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt \\
&= \frac{(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}.
\end{aligned}$$

*) 设 $x = \sin t$.

**) 利用 2282 题的结果.

2301. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积分, 函数 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 内除了有限个点 $c_i (i = 1, \dots, p)$ 及点 a 与 b 外皆有 $F'(x) = f(x)$, 而在这除去的有限个点上 $F(x)$ 有第一类的间断点(广义原函数). 证明

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x) dx &= F(b-0) - F(a+0) \\
&\quad - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) - F(c_i-0)].
\end{aligned}$$

证 为确定起见, 设 $a < c_1 < c_2 < \dots < c_p < b$, 并记 $a = c_0, b = c_{p+1}$. 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 故

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^p \int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x) dx.$$

显然, 在 $[c_i + \eta, c_{i+1} - \eta]$ 上 $F'(x) = f(x)$, 从而可应

用牛顿—莱布尼兹公式,得

$$\int_{c_i+\eta}^{c_{i+1}-\eta} f(x)dx = F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta),$$

由此可知

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \sum_{i=0}^p [F(c_{i+1}-\eta) - F(c_i+\eta)] \\ &= \sum_{i=0}^p [F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0)] \\ &= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^p [F(c_i+0) \\ &\quad - F(c_i-0)]. \end{aligned}$$

2302. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可积分, 而

$$F(x) = C + \int_a^x f(\xi)d\xi$$

为 $f(x)$ 的不定积分, 证明函数 $F(x)$ 连续且在函数 $f(x)$ 连续的一切点处有等式

$$F'(x) = f(x)$$

成立, 问在函数 $f(x)$ 不连续点处函数 $F(x)$ 的导函数为何?

解 由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 故必有界; $|f(x)| \leq M$ ($a \leq x \leq b$). 因此, 对任何 $x \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned} &|F(x+\Delta x) - F(x)| \\ &= \left| \int_x^{x+\Delta x} f(\xi)d\xi \right| \leq M \cdot |\Delta x| \rightarrow 0 \text{ (当 } \Delta x \rightarrow 0 \text{ 时)}. \end{aligned}$$

由此可知 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.

现设 $f(\xi)$ 在点 $\xi = x$ 处连续. 于是, 任给 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|\xi - x| < \delta$ 时, 恒有 $|f(\xi) - f(x)| <$

ϵ . 于是, 当 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} - f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} [f(\xi) - f(x)] d\xi \right| \\ &< \frac{1}{|\Delta x|} \epsilon \cdot |\Delta x| = \epsilon, \end{aligned}$$

故 $F'(x)$ 存在, 且

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(x).$$

而在不连续点处 $F'(x)$ 可能存在也可能不存在.

例如, 设

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{当 } x \neq \frac{1}{n}, \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 的可积性可仿 2194 题证明, 而且显然有

$$\int_0^x f(t) dt = 0 \quad (0 \leq x \leq 1).$$

然而在点 $x = \frac{1}{n}$ 处, $F(x) = C$ 的导函数 $F'(x) = 0$ 是存在的.

但函数 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, 它在 $[-1, 1]$ 上是可积的, 且

$$\int_0^x f(x) dx = |x|,$$

然而在点 $x = 0$ 处, $F(x) = |x| + C$ 的导函数 $F'(x)$ 不存在.

求下列有界非连续函数的不定积分:

2303. $\int \operatorname{sgn} x dx.$

解 $\int \operatorname{sgn} x dx = \int_0^x \operatorname{sgn} x dx + C = |x| + C.$

2304. $\int \operatorname{sgn}(\sin x) dx.$

解 由于 $\operatorname{sgn}(\sin x)$ 在任何有限区间上都可积, 故其原函数 $F(x) = \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 对任何 x , 必存在唯一的整数 k 使 $k\pi \leq x < (k+1)\pi$. 于是

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt \\ &= \int_0^{k\pi + \frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn}(\sin t) dt + \int_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \operatorname{sgn}(\sin t) dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \frac{\sin t}{\sqrt{1 - \cos^2 t}} dt \\ &= \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc} \cos(\cos t) \Big|_{k\pi + \frac{\pi}{2}}^x \\ &= \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc} \cos(\cos x) - \frac{\pi}{2} \\ &= \operatorname{arc} \cos(\cos x). \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sgn}(\sin x) dx &= \operatorname{arc} \cos(\cos x) + C \\ &(-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

2305. $\int [x] dx (x \geq 0).$

解 $\int [x] dx = C + \int_0^x [x] dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \operatorname{sgn}(\sin \pi x) dx + C \\
&= \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \cos(\cos \pi x) \Big|_0^{x'} + C \\
&= \frac{1}{\pi} \operatorname{arc} \cos(\cos \pi x) + C.
\end{aligned}$$

*) 利用 2304 题的结果.

2308. $\int_0^x f(x) dx$, 其中 $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } |x| < l, \\ 0, & \text{若 } |x| > l. \end{cases}$

解 $\int_0^x f(x) dx = \int_0^l f(x) dx + \int_l^x f(x) dx$

$$= \int_0^l 1 \cdot dx + \int_0^x 0 dx = l \quad (x \geq l),$$

$$\int_0^x f(x) dx = \int_0^x 1 \cdot dx = x \quad (|x| < l),$$

$$\int_0^x f(x) dx$$

$$= - \int_x^{-l} f(x) dx - \int_{-l}^0 f(x) dx = -l \quad (x \leq -l).$$

合并得

$$\int_0^x f(x) dx = \frac{1}{2} (|l+x| - |l-x|).$$

计算下列有界非连续函数的定积分.

2309. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx$.

解 $\operatorname{sgn}(x - x^3) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \in (0, 1) \text{ 时,} \\ -1, & \text{当 } x \in (1, 3) \text{ 时.} \end{cases}$

于是,

$$\int_0^3 \operatorname{sgn}(x - x^3) dx = \int_0^1 dx - \int_1^3 dx = -1.$$

2310. $\int_0^2 [e^x] dx.$

解 $\int_0^2 [e^x] dx$
 $= \int_0^{\ln 2} 1 dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2 \cdot dx + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3 \cdot dx$
 $+ \dots + \int_{\ln 7}^2 7 \cdot dx$
 $= \ln 2 + 2(\ln 3 - \ln 2) + 3(\ln 4 - \ln 3) + \dots$
 $+ 7(-\ln 7 + 2)$
 $= 14 - (\ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots + \ln 7)$
 $= 14 - \ln 7!.$

2311. $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx.$

解 $\int_0^6 [x] \sin \frac{\pi x}{6} dx$
 $= \int_1^2 \sin \frac{\pi x}{6} dx + \int_2^3 2 \sin \frac{\pi x}{6} dx + \dots$
 $+ \int_5^6 5 \sin \frac{\pi x}{6} dx$
 $= \frac{30}{\pi}.$

2312. $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx.$

解 $\int_0^{\pi} x \operatorname{sgn}(\cos x) dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-x) dx = -\frac{\pi^2}{4}.$

2313. $\int_1^{n+1} \ln [x] dx$, 其中 n 为自然数.

解 $\int_1^{n+1} \ln [x] dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^3 \ln 2 dx + \int_3^4 \ln 3 dx + \cdots + \int_n^{n+1} \ln n dx \\
&= \ln n!.
\end{aligned}$$

2314. $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)] dx.$

解 $\int_0^1 \operatorname{sgn}[\sin(\ln x)] dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_{e^{-\pi}}^1 (-1) dx + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \int_{e^{-(k+1)\pi}}^{e^{-k\pi}} dx \\
&= -1 + 2e^{-\pi} \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} e^{-(k-1)\pi} \\
&= -1 + \frac{2e^{-\pi}}{1 + e^{-\pi}} = \frac{e^{-\pi} - 1}{e^{-\pi} + 1} \\
&= -th \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

2315. 求 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$, 其中 E 为闭区间 $(0, 4\pi)$ 中使被积分式有意义的一切值所成之集合.

解 $\int_E |\cos x| \sqrt{\sin x} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| \sqrt{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx \\
&\quad + \int_{2\pi}^{\frac{5\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx + \int_{\frac{5\pi}{2}}^{3\pi} (-\cos x) \sqrt{\sin x} dx \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{\sin x} dx \\
&= \frac{8}{3} (\sin x)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

§ 3. 中值定理

1° 函数的平均值 数

$$M(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的平均值.

若函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则可求得一点 $c \in (a, b)$ 适合

$$M(f) = f(c).$$

2° 第一中值定理 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积分; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 不变号, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx,$$

式中 $m \leq \mu \leq M$ 及 $M = \sup_{a < x < b} f(x)$, $m = \inf_{a < x < b} f(x)$; (3) 除此而外, 若函数 $f(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则 $\mu = f(c)$, 其中 $a \leq c \leq b$ (编者注: 可以证明, c 可取值使 $a < c < b$).

3° 第二中值定理 若: (1) 函数 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 于闭区间 $[a, b]$ 上有界并可积分; (2) 当 $a < x < b$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 是单调的, 则

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \\ &= \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx + \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx, \end{aligned}$$

式中 $a \leq \xi \leq b$; (3) 除此而外, 若函数 $\varphi(x)$ 单调下降 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(a+0) \int_a^\xi f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b);$$

(3') 若函数 $\varphi(x)$ 单调上升 (广义的) 且不为负, 则

$$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = \varphi(b-0) \int_\xi^b f(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b).$$

2316. 确定下列定积分的符号:

$$(a) \int_0^{2\pi} x \sin x dx; \quad (6) \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx;$$

$$(B) \int_{-2}^2 x^3 2^x dx; \quad (r) \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx.$$

解 (a) $\int_0^{2\pi} x \sin x dx$

$$= \int_0^{\pi} x \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} x \sin x dx$$

$$= \int_0^{\pi} x \sin x dx - \int_0^{\pi} (t + \pi) \sin t dt$$

$$= -\pi \int_0^{\pi} \sin x dx < 0.$$

(6) 由第一中值定理知

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx - \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t + \pi} dt$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x(x + \pi)} dx$$

$$= \frac{\pi^2 \operatorname{sinc} c}{c(c + \pi)} > 0,$$

其中 $0 < c < \pi$.

(B) 由第一中值定理知

$$\int_{-2}^2 x^3 e^x dx$$

$$= \int_{-2}^0 x^3 e^x dx + \int_0^2 x^3 e^x dx$$

$$= \int_2^0 t^3 e^{-t} dt + \int_0^2 x^3 e^x dx$$

$$= \int_0^2 x^3(e^x - e^{-x})dx = 2c^3(e^c - e^{-c}) > 0,$$

其中 $0 < c < 2$.

$$\begin{aligned} (r) \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 \ln x dx \\ = \frac{1}{2} c^2 \ln c < 0 \quad (\text{其中 } \frac{1}{2} < c < 1) \end{aligned}$$

2317. 于下列各题中确定那个积分较大:

(a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx$ 或 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$?

(6) $\int_0^1 e^{-x} dx$ 或 $\int_0^1 e^{-x^2} dx$?

(B) $\int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$ 或 $\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx$?

解 (a) 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $0 < \sin x < 1$ 从而
 $0 < \sin^{10} x < \sin^2 x$,

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx.$$

(6) 当 $0 < x < 1$ 时, $x > x^2$, 从而

$$e^{-x} < e^{-x^2},$$

于是

$$\int_0^1 e^{-x} dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} (B) \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx \\ = \int_0^{\pi} e^{-(\pi+x)^2} \cos^2 x dx < \int_0^{\pi} e^{-x^2} \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

2318. 求下列已知函数在所给区间内的平均值:

(a) $f(x) = x^2$ 在 $[0, 1]$ 上;

(b) $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $[0, 100]$ 上;

(c) $f(x) = 10 + 2\sin x + 3\cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上;

(d) $f(x) = \sin x \sin(x + \varphi)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上.

解 (a) $M[f] = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3};$

$$(b) M[f] = \frac{1}{100} \int_0^{100} \sqrt{x} dx = 6 \frac{2}{3};$$

$$(c) M[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (10 + 2\sin x + 3\cos x) dx \\ = 10;$$

$$(d) M[f] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \sin(x + \varphi) dx \\ = \frac{1}{2} \cos \varphi.$$

2319. 求椭圆之焦径

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} \quad (0 < \epsilon < 1)$$

之长的平均值.

解 设 $\varphi = \pi + t$, 则

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi} d\varphi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{p}{1 + \epsilon \cos t} dt \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} d\varphi \\ = \frac{p}{2\pi} \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \\ = \frac{p}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} = b.$$

其中 b 为椭圆的短半轴.

*) 利用 2213 题的结果.

2320. 求初速度为 v_0 之自由落体的速度之平均值.

解 自由落体的速度为 $v = v_0 + gt$, 从 $t = 0$ 到 $t = T$ 时间内的速度的平均值

$$\begin{aligned} M(v) &= \frac{1}{T} \int_0^T (v_0 + gt) dt = \frac{1}{2} gT + v_0 \\ &= \frac{1}{2} (v_0 + v_T). \end{aligned}$$

物理意义: 平均速度等于初速与末速之和的一半.

2321. 电流的强度依下面的规律变化

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

其中 i_0 表振幅, t 表时间, T 表周期, φ 表初相, 求电流强度之平方的平均值.

$$\begin{aligned} \text{解 } M(i^2) &= \frac{1}{T} \int_0^T i_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) dt \\ &= \frac{i_0^2}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} \sin 2\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) \right] \Big|_0^T = \frac{i_0^2}{2}. \end{aligned}$$

将上式开平方, 即得电流的有效值 $\frac{i_0}{\sqrt{2}}$.

2322. 命 $\int_0^x f(t) dt = xf(\theta x)$, 求 θ , 设:

(a) $f(t) = t^n (n > -1)$; (b) $f(t) = \ln t$;

(c) $f(t) = e^t$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \theta$ 及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta$ 等于甚么?

解 (a) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, 从而

$$\frac{x^{n+1}}{n+1} = \theta^n x^{n+1}.$$

于是

$$\theta = \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}.$$

(b) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \ln t dt$

$$= t(\ln t - 1) \Big|_0^x$$

$$= x(\ln x - 1),$$

从而

$$x(\ln x - 1) = x \ln \theta x,$$

于是

$$\theta = \frac{1}{e}.$$

(B) $\int_0^x f(t)dt = \int_0^x e^t dt = e^t \Big|_0^x = e^x - 1$, 从而

$$e^x - 1 = x e^{\theta x},$$

于是

$$\theta = \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}.$$

由于 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$, 故当 $x \rightarrow 0$ 时, $\frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型未定形. 因此

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \theta &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{e^x - 1} \cdot \frac{x e^x - (e^x - 1)}{x^2} \right] \end{aligned}$$

$$2324. \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx.$$

解 由于 $\frac{x^9}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} \leq x^9 (0 \leq x \leq 1)$, 从而,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^9 dx \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$\leq \int_0^1 x^9 dx,$$

即

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} \leq \int_0^1 \frac{x^9}{\sqrt{1+x}} dx \leq \frac{1}{10}.$$

$$2325. \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int_0^{50} \frac{e^{-x}}{x+100} dx + \int_{50}^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx \\ &= \frac{1}{100+\xi_1} \int_0^{50} e^{-x} dx + \frac{1}{100+\xi_2} \int_{50}^{100} e^{-x} dx \\ &= \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2}, \text{ 其中 } 0 \leq \xi_1 \leq 50, \\ &50 \leq \xi_2 \leq 100. \end{aligned}$$

显然

$$\begin{aligned} &\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2} \\ &\leq \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_1} \\ &= \frac{1-e^{-100}}{100+\xi_1} < \frac{1}{100}, \\ &\frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} + \frac{e^{-50}-e^{-100}}{100+\xi_2} \\ &> \frac{1-e^{-50}}{100+\xi_1} \geq \frac{1-e^{-50}}{150} > \frac{1}{200}, \end{aligned}$$

故 $\frac{1}{200} < I < \frac{1}{100}$, 即 $I = 0.01 - 0.005\theta, 0 < \theta < 1$.

另外, 按中值定理, 可写

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx = \frac{1}{\xi+100} \int_0^{100} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{\xi+100} \left(1 - \frac{1}{e^{100}} \right), \end{aligned}$$

其中 $0 \leq \xi \leq 100$, 如果改写 I 为

$$I = 0.01 - 0.005\theta,$$

则有

$$\theta = f(\xi) = \frac{2}{100 + \xi} \left(\xi + \frac{100}{e^{100}} \right).$$

易见导数

$$f'(\xi) = \frac{200(1 - e^{-100})}{(100 + \xi)^2} > 0,$$

$f(\xi)$ 单调上升, 故在 $[0, 100]$ 上有 $f(0) \leq f(\xi) \leq f(100)$, 也即有

$$\frac{2}{e^{100}} \leq \theta \leq 1 + \frac{1}{e^{100}}.$$

根据前面的估计 $0 < \theta < 1$, 综合起来, 便有

$$\frac{2}{e^{100}} \leq \theta < 1.$$

这个结果比原来的估计又好了一些. 如果更精确一些, 采用些近似计算方法, 还可进一步明确 θ 的数值范围. 此处从略.

2326. 证明等式

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad (a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi_n} \int_0^1 x^n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\xi_n} \cdot \frac{1}{n+1} = 0; \end{aligned}$$

(6) 任意给定 $\varepsilon > 0$, 且设 $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon} \sin^n x dx + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon + \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right). \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述不等式的第二项趋于零, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = 0.$$

2327. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 而 $\varphi(x)$ 在 (a, b) 上连续且在 (a, b) 上可微分, 并且

$$\varphi(x) \geq 0 \quad \text{当} \quad a < x < b.$$

应用部分积分法及第一中值定理以证明第二中值定理.

证 设 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, 则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\varphi(x) dx &= \int_a^b \varphi(x) dF(x) \\ &= F(x)\varphi(x) \Big|_a^b - \int_a^b F(x)\varphi'(x) dx \\ &= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi) \int_a^b \varphi'(x) dx \\ &= F(b)\varphi(b) - F(a)\varphi(a) - F(\xi)[\varphi(b) - \varphi(a)]^{**)} \\ &= \varphi(b)[F(b) - F(\xi)] + \varphi(a)[F(\xi) - F(a)] \\ &= \varphi(b) \int_{\xi}^b f(x) dx + \varphi(a) \int_a^{\xi} f(x) dx. \end{aligned}$$

*) 一般数学分析中已有第二中值定理的证明, 本题限用部分积分法证明, 应加 $\varphi(x)$ 在 $[a; b]$ 上连续的条件.

利用第二中值定理, 估计积分:

$$2328. \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

解 设 $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$ 在 $(100\pi, 200\pi)$ 上满足第二中值定理的条件, 又 $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ 单调下降且不为负, 于是,

$$\begin{aligned} \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1}{100\pi} \int_{100\pi}^{\xi} \sin x dx \\ &= \frac{1 - \cos \xi}{100\pi} = \frac{\sin^2 \frac{\xi}{2}}{50\pi} = \frac{\theta}{50\pi}, \end{aligned}$$

其中 $100\pi \leq \xi \leq 200\pi$ 及 $0 \leq \theta \leq 1$.

$$2329. \int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx \quad (\alpha \geq 0; 0 < a < b).$$

解 设 $f(x) = \sin x, \varphi(x) = \frac{e^{-ax}}{x}$, 同上题, 有

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{e^{-ax}}{x} \sin x dx &= \frac{e^{-a\xi}}{a} \int_a^{\xi} \sin x dx \\ &= \frac{1}{ae^{a\xi}} (\cos a - \cos \xi) \\ &= -\frac{2}{a} e^{-a\xi} \sin \frac{a + \xi}{2} \sin \frac{a - \xi}{2} = \frac{2}{a} \theta, \end{aligned}$$

其中 $a \leq \xi \leq b$ 及 $|\theta| < 1$.

$$2330. \int_a^b \sin x^2 dx \quad (0 < a < b).$$

解 设 $x = \sqrt{t}$, 则

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

其次, 设 $f(t) = \sin t$, $\varphi(t) = (\sqrt{t})^{-1}$, 则 $\varphi(t)$ 单调下降, 且 $\varphi(t) > 0$, 于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{a^2}^{b^2} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{2a} \int_{a^2}^{\xi} \sin t dt \\ &= \frac{1}{2a} (\cos a^2 - \cos \xi) \\ &= \frac{1}{a} \sin \frac{\xi + a^2}{2} \sin \frac{\xi - a^2}{2} \\ &= \frac{1}{a} \theta, \end{aligned}$$

其中 $a^2 \leq \xi \leq b^2$, $|\theta| \leq 1$. 所以

$$\int_a^b \sin x^2 dx = \frac{\theta}{a} \quad (|\theta| \leq 1).$$

2331. 设函数 $\varphi(x)$ 及 $\psi(x)$ 和它们的平方在区间 $[a, b]$ 上可积分. 证明哥西—布尼雅可夫斯基不等式

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

证 证法一: 我们有

$$\begin{aligned} & \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \psi^2(x) dx \right) - \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \psi^2(y) dy \right) \\ & \quad + \frac{1}{2} \left(\int_a^b \psi^2(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \varphi^2(y) dy \right) \\ & \quad - \left(\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b \varphi(y)\psi(y) dy \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \int_a^b [\varphi(x)\psi(y) - \psi(x)\varphi(y)]^2 dx \right\} dy \geq 0,$$

故

$$\left\{ \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^b \psi^2(x) dx.$$

证法二: 考虑积分

$$\int_a^b [\varphi(x) - \lambda\psi(x)]^2 dx,$$

其中 λ 为任意实数. 从而

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \\ + \lambda^2 \int_a^b \psi^2(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

这是关于变数 λ 的不等式, 左端是二次三项式. 于是其判别式

$$\begin{aligned} \left\{ \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right\}^2 - \int_a^b \varphi^2(x) dx \\ \int_a^b \psi^2(x) dx \leq 0, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \left\{ \int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \right\}^2 \\ \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx \cdot \int_a^b \psi^2(x) dx. \end{aligned}$$

2332. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续可微分且 $f(a) = 0$, 证明不等式

$$M^2 \leq (b-a) \int_a^b f'^2(x) dx,$$

其中 $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$,

证 设 x 为 (a, b) 上任一点, 则利用哥西—布尼雅可夫斯基不等式得到

$$\left\{ \int_a^x f(x) dx \right\}^2 \leq \int_a^x 1 \cdot dx \cdot \int_a^x f'^2(x) dx,$$

即

$$\begin{aligned} f^2(x) &= [f(x) - f(a)]^2 \leq (x - a) \int_a^x f'^2(x) dx \\ &\leq (b - a) \int_a^b f'^2(x) dx. \end{aligned}$$

由此可知

$$M^2 = \sup_{x \in [a, b]} f^2(x) \leq (b - a) \int_a^b f'^2(x) dx.$$

2333. 证明等式:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

证 证法一: 应用第一中值定理, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \xi_n}{\xi_n} \cdot p = 0,$$

其中 ξ_n 为界于 n 与 $n + p$ 之间的某值.

证法二: 应用第二中值定理, 得

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx \right| &= \frac{1}{n} \left| \int_n^{\xi'_n} \sin x dx \right| \\ &= \frac{1}{n} |\cos n - \cos \xi'_n| \leq \frac{2}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

其中 ξ'_n 是界于 n 与 $n + p$ 之间的某值. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+p} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

§ 4. 广义积分

1° 函数的广义可积性 若函数 $f(x)$ 于每一个有穷区间 $[a, b]$ 上依寻常的意义是可积分的, 则可定义

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

若函数 $f(x)$ 于点 b 的邻域内无界且于每一个区间 $(a, b - \epsilon)$ ($\epsilon > 0$) 内依寻常的意义是可积分的, 则取

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x) dx. \quad (2)$$

若极限(1)或(2)存在, 则对应的积分称为收敛的, 在相反的情形则称为发散的.

2° 哥西准则 积分(1)收敛的充要条件为对于任意的 $\epsilon > 0$, 存在有数 $b = b(\epsilon)$, 当 $b' > b$ 及 $b'' > b$ 时, 下面的不等式成立

$$\left| \int_{b'}^{b''} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

同样地对形状为(2)的积分可述出哥西准则.

3° 绝对收敛的判别法 若 $|f(x)|$ 是广义可积分的, 则函数 $f(x)$ 的对应的积分(1)或(2)称为绝对收敛的, 而且显然也是收敛的积分.

比较判别法 I. 设当 $x \geq a$ 时 $|f(x)| \leq F(x)$.

若 $\int_a^{+\infty} F(x) dx$ 收敛, 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 绝对收敛.

比较判别法 II. 若 $\phi(x) > 0$ 及当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$\varphi(x) = O^*(\phi(x)),$$

则积分 $\int_a^{+\infty} \varphi(x) dx$ 及 $\int_a^{+\infty} \phi(x) dx$ 同时收敛或同时发散. 就特别情形来说, 若当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\varphi(x) \sim \phi(x)$, 则上面的结果也成立.

比较判别法 III. (a) 设当 $x \rightarrow +\infty$ 时,

$$f(x) = O^*\left(\frac{1}{x^p}\right).$$

在这种情况下,当 $p > 1$ 时,积分(1)收敛;当 $p \leq 1$ 时,积分(1)发散.

(6) 设当 $x \rightarrow b - 0$ 时,

$$f(x) = O\left[\frac{1}{(b-x)^p}\right].$$

在这种情况下,当 $p < 1$ 时,积分(2)收敛;当 $p \geq 1$ 时,积分(2)发散.

4° 收敛性的较精密的判别法 若(1)当 $x \rightarrow +\infty$ 时,函数 $\varphi(x)$ 单调地趋近于零;(2)函数 $f(x)$ 有有界的原函数

$$F(x) = \int_a^x f(\xi) d\xi,$$

则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x) dx$$

收敛,但一般地说,并非绝对收敛.

特殊情形,若 $p > 0$,则积分

$$\int_a^{+\infty} \frac{\cos x}{x^p} dx \text{ 及 } \int_a^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx \quad (a > 0)$$

收敛.

5° 在哥西意义上的主值 若函数 $f(x)$ 对任意的 $\epsilon > 0$ 积分

$$\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx \text{ 及 } \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \quad (a < c < b)$$

存在,则在哥西意义上的主值(V.P.)为

$$\begin{aligned} V.P. \int_a^b f(x) dx \\ = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[\int_a^{c-\epsilon} f(x) dx + \int_{c+\epsilon}^b f(x) dx \right]. \end{aligned}$$

相仿地, $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x) dx.$

计算下列积分:

2334. $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \quad (a > 0).$

解 由于

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

2338. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2}$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x^2+x-2} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \ln \frac{x-1}{x+2} \right) \Big|_2^b \\ &= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\ln \frac{b-1}{b+2} + 2 \ln 2 \right) = \frac{2}{3} \ln 2, \end{aligned}$$

所以

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{2}{3} \ln 2.$$

2339. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

解 $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$

$$= \frac{2x+1}{3(x^2+x+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

由于

$$\begin{aligned} &\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} + \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \frac{dx}{(x^2+x+1)^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left[\frac{2a+1}{3(a^2+a+1)} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2a+1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \\ &\quad + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \left[\frac{2b+1}{3(b^2+b+1)} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2b+1}{\sqrt{3}} \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}},$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2340. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}.$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \int_0^b \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^b \\ &= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

*) 利用 1881 题的结果.

2341. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx.$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \int_{\epsilon}^b \frac{x^2+1}{x^4+1} dx \\ &= \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ \epsilon \rightarrow +0}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} \right) \Big|_{\epsilon}^b = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

*) 利用 1712 题的结果.

$$2342. \int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}.$$

解 先求 $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$. 设 $\sqrt{1-x} = t$, 则

$$x = 1 - t^2, dx = -2tdt, 2 - x = 1 + t^2.$$

代入得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} &= -2 \int \frac{dt}{1+t^2} \\ &= -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} t + C \\ &= -2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{1-x} + C. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{1-x} \Big|_0^{1-\varepsilon} \right) \\ &= -2 \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{1-(1-\varepsilon)} - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \frac{\pi}{2}.$$

$$2343. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}.$$

解 设 $\sqrt{1+x^5+x^{10}} = t - x^5$. 则当 $1 \leq x < +\infty$

时, $1 + \sqrt{3} \leq t < +\infty$, 代入得

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^5+x^{10}}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{5} \int_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{5} \ln \frac{t-1}{t+1} \Big|_{1+\sqrt{3}}^{+\infty} \\
&= \frac{1}{5} \ln 1 - \frac{1}{5} \ln \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{5} \ln \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}$$

*) 牛顿—莱不尼兹公式对于广义积分也成立. 例如

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = F(+\infty) - F(a) = F(x) \Big|_a^{+\infty},$$

其中 $F(+\infty)$ 是一个符号, 代表 $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ (假定此极限存在有限), 下同, 不再说明.

2344. $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx.$

解 我们有

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x(1+x^2)} \\
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx \\
&= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} + C.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_{\epsilon}^b \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx \\
&= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right] \Big|_{\epsilon}^b \\
&= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left[-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{\ln \epsilon}{2(1+\epsilon^2)} + \frac{1}{4} \ln \frac{b^2}{b^2+1} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \ln \frac{\epsilon^2}{\epsilon^2 + 1} \Big] \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left[-\frac{\epsilon^2}{2(\epsilon^2 + 1)} \ln \epsilon + \frac{1}{4} \ln(\epsilon^2 + 1) \right] \\
& = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = 0.$$

注 $\epsilon \rightarrow +0$ 与 $b \rightarrow +\infty$ 的极限过程是独立的, 因此可分别取极限.

$$2345. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

解 设 $x = \operatorname{tg} t$, 则

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t \sec^2 t dt}{\sec^3 t} \\
&= (t \sin t + \cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1.
\end{aligned}$$

$$2346. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx \quad (a > 0).$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx dx &= \left(\frac{-a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right)^{*}) \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{a}{a^2 + b^2}.
\end{aligned}$$

*) 利用 1828 题的结果.

$$2347. \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx \quad (a > 0).$$

$$\text{解 } \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx dx$$

$$= \left(\frac{-a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{-ax} \right)^* \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

*) 利用 1829 题的结果.

利用递推公式计算下列广义积分(n 为自然数):

2348. $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$

解 $I_n = \int_0^{+\infty} x^n d(-e^{-x})$

$$= -x^n e^{-x} \Big|_0^{+\infty} + n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

$$= n \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} dx = n I_{n-1},$$

即 $I_n = n I_{n-1}$. 利用此递推公式及

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$$

容易得到

$$I_n = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1 I_0 = n!.$$

2349⁺. $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2 + 2bx + c)^n} (ac - b^2 > 0).$

解 $I_n = \frac{ax + b}{2(n-1)(ac - b^2)(ax^2 + 2bx + c)^{n-1}} \Big|_{-\infty}^{+\infty}$

$$+ \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{a}{2(ac - b^2)} I_{n-1}^{**}$$

$$= \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac - b^2} I_{n-1},$$

即

$$I_n = \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdot \frac{a}{ac - b^2} I_{n-1} (n > 1).$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{ax^2 + 2bx + c} \\
 &= \frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{ac - b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{|a| \left(x + \frac{b}{a} \right)}{\sqrt{ac - b^2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty} \\
 &= \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{\sqrt{ac - b^2}}.
 \end{aligned}$$

利用递推公式及 I_1 容易得到

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3 \cdot 1}{(2n-2)(2n-4)\cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac - b^2)^{n-\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi a^{n-1} \operatorname{sgn} a}{(ac - b^2)^{n-\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

*) 利用 1921 题的结果.

$$2350^+. \quad I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

解 由于 $x^{n+1} \cdot \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时), 且 $n+1 > 1$, 所以积分 I_n 收敛.

其次, 我们来计算 I_n . 由于

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\
 &= \frac{1}{n!x} - \frac{1}{(n-1)!(x+1)} \\
 &\quad + \frac{1}{2!(n-2)!(x+2)} \\
 &\quad - \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!(x+k)} \\
 &\quad + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!(x+n)},
 \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
 I_n &= \frac{1}{n!} \int_1^{+\infty} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{bx}{x+k} \\
 &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \ln(x+k) \Big|_1^{+\infty},
 \end{aligned}$$

其中 C_n^k 为从 n 个元素中每次取 k 个的组合数.

对于 \bar{n} , 不论是偶数还是奇数, 用上限代入 (此处理解为趋近于无穷时的极限) 后均为零. 事实上,

当 $n = 2m$ 时,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k) \\
 &= \ln \frac{x \cdot (x+2)^{C_{2m}^2} \cdots (x+2m)^{C_{2m}^{2m}}}{(x+1)^{C_{2m}^1} (x+3)^{C_{2m}^3} \cdots (x+2m-1)^{C_{2m}^{2m-1}}}.
 \end{aligned}$$

由于

$$1 + C_{2m}^2 + \cdots + C_{2m}^{2m} = C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + \cdots + C_{2m}^{2m-1},$$

所以, 当 $m \rightarrow +\infty$ 时

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k \ln(x+k) \rightarrow \ln 1 = 0;$$

当 $n = 2m - 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k C_{2m-1}^k \ln(x+k) \\
 &= \ln \frac{x(x+2)^{C_{2m-1}^2} \cdots (x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-2}}}{(x+1)^{C_{2m-1}^1} (x+3)^{C_{2m-1}^3} \cdots (x+2m-2)^{C_{2m-1}^{2m-1}}} \\
 &\quad \rightarrow 0 \text{ (当 } m \rightarrow +\infty \text{ 时)}.
 \end{aligned}$$

最后我们得到

$$I_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} C_n^k \ln(1+k).$$

$$2351. I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}.$$

解 由于 $\sqrt{1-x} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{(1-x)(1+x)}} \rightarrow \frac{1}{2}$

(当 $x \rightarrow 1-0$ 时),

且 $p = \frac{1}{2} < 1$, 所以积分 I_n 收敛.

其次, 设 $x = \sin t$, 则

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n = 2k \text{ 时;}^*) \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时.} \end{cases}$$

*) 利用 2281 题的结果.

$$2352. I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x}.$$

解 设 $x = \ln\left(\operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, 则

当 $0 \leq x < +\infty$ 时, $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$,

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{ch}^{n+1} x} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n u du = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{当 } n = 2k \text{ 时;}^*) \\ \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}, & \text{当 } n = 2k-1 \text{ 时.} \end{cases}$$

*) 利用 2282 题的结果.

$$2353. (a) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x dx; \quad (b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x dx.$$

于是, $2A = A - \frac{\pi}{2} \ln 2$, $A = -\frac{\pi}{2} \ln 2$, 即

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

2354. 求:

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx,$$

其中 E 表区间 $(0, +\infty)$ 中使被积分式有意义的一切 x 值所成之集合.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx, * \end{aligned}$$

$$\text{对于广义积分} \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx$$

作如下处理:

$$\begin{aligned} & \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx \\ &= \int_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx \\ & \quad + \int_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi} e^{-\frac{x}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{\sin x}} dx \\ &= 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{2k\pi}^{(2k+\frac{1}{4})\pi} - 2e^{-\frac{x}{2}} \sqrt{\sin x} \Big|_{(2k+\frac{1}{4})\pi}^{(2k+1)\pi} \\ &= 2\sqrt[4]{8} \cdot e^{-k\pi} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}}. \end{aligned}$$

* 记号 $\sum_{k=0}^{\infty} S_k$ 理解为极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n S_k$. 以后题解中不再说明.

由于

$$\sum_{k=0}^n 2 \sqrt[3]{8} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}} e^{-k\pi} = 2 \sqrt[3]{8} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

当 $n \rightarrow +\infty$ 时, 上式的极限为 $2 \sqrt[3]{8} \cdot e^{-\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{1}{1 - e^{-\pi}}$.

于是,

$$\int_E e^{-\frac{x}{2}} \frac{|\sin x - \cos x|}{\sqrt{\sin x}} dx = \frac{2 \sqrt[3]{8} e^{-\frac{\pi}{8}}}{1 - e^{-\pi}}.$$

2355. 证明等式

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx,$$

其中 $a > 0, b > 0$ (假定等式左端的积分有意义).

证 设 $ax - \frac{b}{x} = t$, 则

当 $0 < x < +\infty$ 时, $-\infty < t < +\infty$,

$$ax + \frac{b}{x} = \sqrt{t^2 + 4ab}.$$

将此二式相加得

$$x = \frac{1}{2a}(t + \sqrt{t^2 + 4ab}).$$

从而有

$$dx = \frac{1}{2a} \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt.$$

代入欲证的等式左端, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\
&\quad + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\
&= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\
&\quad + \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \cdot \frac{t + \sqrt{t^2 + 4ab}}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\
&= \frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) \\
&\quad \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 4ab} - t + \sqrt{t^2 + 4ab} + t}{\sqrt{t^2 + 4ab}} dt \\
&= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{t^2 + 4ab}) dt,
\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx.$$

2356. 数

$$M[f] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(\xi) d\xi$$

称为函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上的平均值. 求下列函数的平均值:

(a) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2(x\sqrt{2})$;

(b) $f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$; (B) $f(x) = \sqrt{x} \sin x$.

解 (a) 由于

$$\int_0^x (\sin^2 \xi + \cos^2(\xi\sqrt{2})) d\xi$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \left(\frac{1 - \cos 2\xi}{2} + \frac{1 + \cos(2\xi \sqrt{2})}{2} \right) d\xi \\
&= x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin(2x \sqrt{2}),
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
M(f) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x [\sin^2 \xi + \cos^2(\xi \sqrt{2})] d\xi \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{1}{4x} \sin 2x \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4x \sqrt{2}} \sin(2x \sqrt{2}) \right] \\
&= 1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) M(f) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \xi d\xi \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \left[x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right] \\
&= \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + x^2)}{2x} \\
&= \frac{\pi}{2} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2(1 + x^2)} = \frac{\pi}{2};
\end{aligned}$$

(B) 利用第二中值定理, 得

$$\begin{aligned}
\int_0^x \sqrt{\xi} \sin \xi d\xi &= \sqrt{x} \int_c^x \sin \xi d\xi \\
&= \sqrt{x} (\cos c - \cos x) \quad (0 \leq c \leq x),
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
M(f) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x \sqrt{\xi} \sin \xi d\xi \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos c - \cos x}{\sqrt{x}} = 0.
\end{aligned}$$

2357. 求:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt; \quad (6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3};$$

$$(B) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1} e^{-t} dt *)}{\ln \frac{1}{x}};$$

$$(r) \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t)^{**})}{t^{a+1}} dt,$$

其中 $a > 0$, $f(t)$ 为闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数.

解 (a) 由于

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t \leq 1,$$

所以

$$\int_x^1 \frac{1 - \frac{t^2}{2}}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq \int_x^1 \frac{dt}{t^2},$$

计算得

$$-\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \leq \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt \leq -1 + \frac{1}{x}.$$

又由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{3}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} \right) = 1$$

及

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 + \frac{1}{x} \right) = 1,$$

故最后得到

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt = 1;$$

(6) 由于

$$t^2 < \sqrt{1+t^4},$$

所以

$$\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt > \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3},$$

从而当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt \rightarrow +\infty$.

利用洛比塔法则,得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^4}}{3x^3} = \frac{1}{3};$$

(n) 由于 $\lim_{t \rightarrow +0} t \cdot (t^{-1}e^{-t}) = 1$, 故广义积分

$\int_0^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt$ 发散. 从而, 所求的极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式. 利

用洛比塔法则,得

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\int_x^{+\infty} t^{-1}e^{-t} dt}{\ln \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-e^{-x} \cdot x^{-1}}{-\frac{1}{x}} = 1;$$

(r) 由于 $f(t)$ 在 $t=0$ 处右连续, 故对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta' > 0$, 使当 $0 < t < \delta'$ 时, 恒有

$$|f(t) - f(0)| < \frac{\alpha\epsilon}{2}.$$

今又取 $0 < \delta < \delta'$, 使当 $0 < x < \delta$ 时, 有

$$\left| x^\alpha \int_{\delta'}^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{\alpha+1}} dt \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

于是, 当 $0 < x < \delta$ 时, 就有

$$\begin{aligned} & \left| x^\alpha \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{\alpha+1}} dt \right| \\ &= \left| x^\alpha \int_x^{\delta'} \frac{f(t) - f(0)}{t^{\alpha+1}} dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x^a \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dt \Big| \\
& \leq \frac{\alpha \epsilon}{2} \cdot x^a \int_x^{\delta'} \frac{dt}{t^{a+1}} + \frac{\epsilon}{2} \\
& = \frac{\epsilon}{2} x^a \left(\frac{1}{x^a} - \frac{1}{\delta'^a} \right) + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t) - f(0)}{t^{a+1}} dt = 0,$$

最后得到

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(t)}{t^{a+1}} dt &= \lim_{x \rightarrow +0} x^a \int_x^1 \frac{f(0)}{t^{a+1}} dt \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} x^a f(0) \left[-\frac{1}{a} t^{-a} \right] \Big|_x^1 \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} x^a f(0) \left(\frac{1}{ax^a} - \frac{1}{a} \right) = \frac{f(0)}{a}.
\end{aligned}$$

*) 原题(B)(r)中 $x \rightarrow +0$ 误印为 $x \rightarrow 0$.

研究下列积分的收敛性:

2358. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$

解 由于 $x^2 \cdot \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

所以积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}$ 收敛.

2359. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}$

解 由于 $x^{\frac{5}{3}} \cdot \frac{1}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}} \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时)

所以积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \sqrt[3]{x^2 + 1}}$ 收敛.

$$2360. \int_0^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

解 当 $0 < x < 1$ 时 $\ln x < 0$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x) \cdot \frac{1}{-\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{-1}{-\frac{1}{x}} = 1,$$

所以积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\ln x}$ 发散, 从而积分 $\int_0^2 \frac{dx}{\ln x}$ 也发散.

$$2361. \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$$

解 将积分分成 $\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$
 $+ \int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx.$

对于积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$. 由于

$x^{1-p} \cdot (x^{p-1} e^{-x}) \rightarrow 1$ (当 $x \rightarrow +0$ 时), 故当 $p > 0$

时 (从而 $1-p < 1$), 积分 $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ 收敛.

对于积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$. 由于

$x^2 \cdot (x^{p-1} e^{-x}) = \frac{x^{p+1}}{e^x} \rightarrow 0$ (当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

故对于一切 p 值, 积分 $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ 恒收敛.

于是, 当 $p > 0$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

收敛.

$$2362. \int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$$

解 将积分分成 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$
 $+ \int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$

对于积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{-q} \cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} x^p \left(\frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{\ln \frac{1}{x}}{1-x} \right)^q \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x \left(-\frac{1}{x^2} \right)}{-1} \right)^q = 1, \end{aligned}$$

故 $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 当 $-q < 1$ (即 $q > -1$) 时收敛, 当
 $-q \geq 1$ (即 $q \leq -1$) 时发散. 于是, 当 $q \leq -1$ 时,
 $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 必发散. 故下面可在 $q > -1$ 的假定下来

讨论 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx.$

若 $p > -1$, 可取 $\tau > 0$ 充分小, 使 $p - \tau > -1$.
 于是

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{-p+\tau} \cdot x^p \ln^q \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\left(\ln \frac{1}{x} \right)^q}{\left(\frac{1}{x} \right)^\tau} = 0.$$

由于 $-p + \tau < 1$, 故此时 $\int_0^{\frac{1}{2}} x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ 收敛;

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n} dx (n \geq 0)$$

收敛.

2364. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} dx (a \neq 0).$

解 由于 $\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax = -\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-ax)$, 故可设 $a > 0$,

先考虑积分 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} dx$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^{n-1} \cdot \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{a}{1+a^2x^2} = a, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} dx$ 仅当 $n-1 < 1$ 即当 $n < 2$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} dx$. 由于

$$x^n \cdot \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时),}$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} dx$ 仅当 $n > 1$ 时收敛.

于是, 仅当 $1 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} ax}{x^n} dx (a \neq 0)$$

收敛.

2365. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx.$

解 先考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$. 当 $n > 1$ 时, 取 $a > 0$ 充分小, 使 $n-a > 1$. 由于

$$x^{n-1} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \frac{\ln(1+x)}{x} \rightarrow 0$$

(当 $x \rightarrow +\infty$ 时),

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 收敛. 当 $n \leq 1$ 时, 由于

$$x^n \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} \rightarrow +\infty \text{ (当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时),}$$

故此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 发散.

再考虑积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} x^{n-1} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$ 仅当 $n-1 < 1$ 即当 $n < 2$ 时收敛.

于是, 仅当 $1 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$$

收敛.

2366. $\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} dx. (n \geq 0).$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} dx$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^{-m-1} \cdot \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} dx$ 仅当 $-m-1 < 1$ 即当 $m >$

- 2 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} dx$. 由于

$$\begin{aligned} & x^{n-m} \cdot \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} \\ &= \frac{x^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} dx$ 仅当 $n-m > 1$ 时收敛.

于是, 仅当 $m > -2$ 且 $n-m > 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{2+x^n} (n \geq 0)$$

收敛.

2367. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx \quad (n \geq 0).$

解 当 $a \neq 0$ 时, 设 $f(x) = \cos ax, g(x) = \frac{1}{1+x^n}$,

则对于任意的 $A > 0$, 均有 $\left| \int_0^A f(x) dx \right| \leq \frac{2}{a}$; 其次, 当 $n > 0$ 时, $g(x)$ 单调下降且趋于零 ($n \rightarrow +\infty$). 从而得知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$$

收敛. 至于当 $n = 0$ 时, 积分显然发散.

当 $a = 0$ 时, 由于

$$x^n \cdot \frac{1}{1+x^n} \rightarrow 1 \quad (\text{当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时}),$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^n} dx$ 仅当 $n > 1$ 时收敛.

于是, 当 $a \neq 0, n > 0$ 及 $a = 0, n > 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

收敛.

2368. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

解 方法一:

$$\frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1 - \cos 2x}{2x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{\cos 2x}{x} \right).$$

积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ 显然发散.

又因对于任意的 $A > 1$, $\left| \int_1^A \cos 2x dx \right| \leq 2$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调地趋于零, 故积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx \text{ 收敛.}$$

于是, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散, 从而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

发散.

方法二:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 t}{t + n\pi} dt \geq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t dt \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

由于不论 N 取多大, 只要取 $p = N$, 就有

$$\begin{aligned} \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} &= \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{N+1} + \cdots + \frac{1}{2N} > \underbrace{\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \cdots + \frac{1}{2N}}_{N \uparrow} \\ &= \frac{1}{2N} \cdot N = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故递增叙列

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 是 $+\infty$, 即 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$.

于是, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

发散.

2369. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$, 对于任何 q 值,

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} x^p \cdot \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \\ = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^p \cdot \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\cos^q x} \right) = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 仅当 $p < 1$ (q 为任意值) 时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$, 对于任何 p 值, 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)^q \cdot \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{\frac{\pi}{2} - x}{\cos x} \right)^q \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left(\frac{1}{\sin^p x} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \left(\frac{t}{\sin t} \right)^q = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$ 仅当 $q < 1$ (p 为任意值) 时收敛.

于是, 当 $p < 1$ 且 $q < 1$ 时, 积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$$

收敛.

2370. $\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 先考虑积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{-n} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \right) = 1,$$

故积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 仅当 $-n < 1$ 即当 $n > -1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$. 对于任意的 n ,

由于

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sqrt{1-x} \cdot \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^n}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

故积分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 恒收敛.

于是, 当 $n > -1$ 时, 积分

$$\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

收敛.

2371. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\min(p, q) = p$,

由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^p \cdot \frac{1}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{1 + x^{q-p}} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $p < 1$, 即当 $\min(p, q) < 1$ 时收敛.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$. 不妨设 $\max(p, q) = q$,

由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^q \cdot \frac{1}{x^p + x^q} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{-(q-p)} + 1} = 1,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$ 仅当 $q > 1$ 即当 $\max(p, q) > 1$ 时收敛.

于是, 当 $\min(p, q) < 1$ 且 $\max(p, q) > 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p + x^q}$$

收斂.

$$2372. \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx.$$

解 先考慮積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. 由於

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{\ln x}{1-x^2} \right) = 0,$$

故積分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收斂.

再考慮積分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$. 由於

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left(\sqrt{1-x} \cdot \frac{\ln x}{1-x^2} \right) = 0,$$

故積分 $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$ 收斂.

於是, 積分

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$$

收斂.

$$2373. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx.$$

解 由於

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{\frac{5}{6}} \cdot \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left[\left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{\sin x \ln(\sin x)} \right] = 0, \end{aligned}$$

故積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$ 收斂.

$$2374. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}.$$

解 先考虑 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. 对于任意的 p , 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1+0} \left[(x-1)^q \cdot \frac{1}{x^p \ln^q x} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+0} \left[\frac{1}{x^p} \cdot \left(\frac{x-1}{\ln x} \right)^q \right] = \left(\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{\ln x} \right)^q \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x} \right]^q = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 仅当 $q < 1$ 且 p 为任意值时收敛.

再考虑积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$. 如果 $p > 1$, 取 $\alpha > 0$ 充分小, 使 $p - \alpha > 1$, 则对于任意的 q , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{p-\alpha} \cdot \frac{1}{x^p \ln^q x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^\alpha \ln^q x} \right) = 0,$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 收敛; 如果 $p \leq 1, q < 1$, 由于

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x} &\geq \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^q x} \\ &= \frac{(\ln x)^{1-q}}{1-q} \Big|_2^{+\infty} = +\infty, \end{aligned}$$

故积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$ 发散.

于是, 当 $p > 1$ 且 $q < 1$ 时, 积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \ln^q x}$$

收敛.

$$2375. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}.$$

(3) 当 $p < 1$ 时, 取 $\delta > 0$ 充分小, 使 $p + \delta < 1$.
 对于任意的 q 和 r , 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+\delta}}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\delta}{(\ln x)^q (\ln \ln x)^r} = +\infty, \end{aligned}$$

故此时积分 $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$ 发散.

于是, 当 $p > 1, q$ 是任意的, $r < 1$ 和当 $p = 1, q > 1, r < 1$ 时, 积分

$$\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$$

收敛.

2376.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}}.$$

解 首先, 被积函数关于 $\frac{1}{x}$ 是 $\sum_{i=1}^n P_i$ 级无穷小 (当 $x \rightarrow \pm \infty$ 时).

其次 (不妨设当 $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$),

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a_i} \left(|x - a_i|^p \cdot \frac{1}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}} \right) \\ &= c_i, 0 < c_i < +\infty (i = 1, 2, \cdots, n), \end{aligned}$$

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x - a_1|^{p_1} |x - a_2|^{p_2} \cdots |x - a_n|^{p_n}}$ 仅当

$\sum_{i=1}^n p_i > 1$ 且 $p_i < 1 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 时收敛.

2377.
$$\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx,$$

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为次数分别为 m 及 n 的互质的多

项式.

解 当 $P_n(x) = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有根 λ 并设其重数为 $r(\geq 1)$ 时, 由于 $P_n(x)$ 与 $P_m(x)$ 互质, 故 λ 不是 $P_m(x)$ 的根. 从而有

$$\lim_{x \rightarrow \lambda} \left[(x - \lambda)^r \cdot \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right] = a \neq 0,$$

而且显然在点 λ 的右(左)近旁, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 都保持定号. 由于 $r \geq 1$, 故积分发散. 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^{n-m} \cdot \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right] = b \neq 0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$ 仅当 $n - m > 1$ 即当 $n > m + 1$ 时收敛.

于是, 当 $P_n(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内无根且 $n > m + 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} dx$$

收敛.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性:

2378. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$

解 对于任意的 $A > 1$, 由于 $\left| \int_1^A \sin x dx \right| \leq 2$, 且

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{1}{x}$ 单调地趋于零, 故积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛. 而积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 是普通的定积分

($\frac{\sin x}{x}$ 在 $x=0$ 有可去间断点, 故补充定义其值为 1

后, $\frac{\sin x}{x}$ 可视为 $(0, 1)$ 上的连续函数), 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛. 但它不是绝对收敛的. 事实上, 当 $x > 0$ 时,

$\left| \frac{\sin x}{x} \right| \geq \frac{\sin^2 x}{x}$, 由 2368 题知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$ 发散,

故积分 $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ 发散.

2379. $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$

解 对于任意的 $A > 0$, 由于 $\left| \int_0^A \cos x dx \right| \leq 2$, 且

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{\sqrt{x}}{x+100}$ 单调地趋于零, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx$$

收敛. 但它不是绝对收敛的. 事实上, 由于

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} &\geq \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+100} - \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} \right), \end{aligned}$$

且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x+100} \right) = 1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+100} dx$

发散. 仿照前半段证明, 可知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos 2x}{x+100} dx$

收敛. 从而, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos^2 x}{x+100} dx$ 发散. 于是, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} |\cos x|}{x+100} dx$$

发散.

2380. $\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx (q \neq 0)$.

解 设 $t = x^q$, 则 $dx = \frac{1}{q} t^{\frac{1}{q}-1} dt$. 于是

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx = \frac{1}{|q|} \int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt.$$

先考虑积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow +0} (t^{-\frac{p+1}{q}} \cdot t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

故积分 $\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 仅当 $-\frac{p+1}{q} < 1$, 即当

$\frac{p+1}{q} > -1$ 时收敛, 又由于被积函数在 $[0, 1]$ 上非

负, 故也是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$. 如果 $\frac{p+1}{q} < 1$,

则由于对任意的 $A > 1$, $\left| \int_1^A \sin t dt \right| \leq 2$ 且 $t^{\frac{p+1}{q}-1}$

单调地趋于零 (当 $t \rightarrow +\infty$ 时), 故此时积分

$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 收敛. 如果 $\frac{p+1}{q} = 1$, 则积分

$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 显然发散, 从而积分 $\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1}$

• $\sin t dt$ 也发散. 如果 $\frac{p+1}{q} > 1$, 则由于 $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} = +\infty$, 故对任给的 $A > 0$, 总存在自然数 N , 使有 $2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$, 且当 $t > 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, $t^{\frac{p+1}{q}-1} > \sqrt{2}$. 今取

$$A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}, A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2},$$

则有

$$\left| \int_{A'}^{A''} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt \right| > \sqrt{2} \left| \int_{A'}^{A''} \sin t dt \right| = 1,$$

它不可能小于任给的 $\epsilon (0 < \epsilon < 1)$, 因而, 积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt,$$

发散, 从而积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$$

也发散.

于是, 仅当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$$

收敛, 且当 $\frac{p+1}{q} > -1$ 时, 积分

$$\int_0^1 t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$$

绝对收敛.

下面我们考虑积分 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$ 的绝对收

敛性,分三种情形讨论:

(1) 当 $\frac{p+1}{q} < 0$ 时, 由于

$$|t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t| \leq t^{\frac{p+1}{q}-1} (1 \leq t < +\infty),$$

且 $\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} dt$ 收敛, 故当 $\frac{p+1}{q} < 0$ 时, 积分

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt \text{ 绝对收敛};$$

(2) 当 $\frac{p+1}{q} = 0$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} |t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t| dt \\ &= \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin t}{t} \right| dt = +\infty \end{aligned}$$

故此时积分不绝对收敛(但条件收敛);

(3) 当 $\frac{p+1}{q} > 0$ 时, 由于

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} |t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t| dt \\ & \geq \int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = +\infty, \end{aligned}$$

故此时积分也不是绝对收敛的.

于是, 当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} t^{\frac{p+1}{q}-1} \sin t dt$$

绝对收敛.

最后我们得到: 当 $-1 < \frac{p+1}{q} < 0$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} x^p \sin(x^q) dx$$

绝对收敛;当 $0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$ 时,积分条件收敛.

$$2381. \int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx \quad (q \geq 0).$$

解 先考虑积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \left(x^{-1-p} \cdot \frac{x^p \sin x}{1+x^q} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1+x^q} \right) = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^1 \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 仅当 $-1-p < 1$ 即当 $p > -2$ 时收敛,且是绝对收敛的.

再考虑积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$. (1) 若 $p \geq q$, 则对任何 $A > 1$, 必存在正整数 N , 使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} > A$ 且当 $x \geq 2N\pi + \frac{\pi}{4}$ 时, 恒有 $\frac{x^p}{1+x^q} > \frac{1}{3}$. 于是, 对 $A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$, $A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_{A'}^{A''} \frac{x^p}{1+x^q} \sin x dx \right| > \frac{1}{3} \int_{A'}^{A''} \sin x dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{6}, \end{aligned}$$

它不可能小于任给的 ϵ , 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 发散.

(2) 若 $p < q-1$, 取 $\alpha > 0$ 使 $p+\alpha < q-1$, 即 $q-p-\alpha > 1$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{q-p-\alpha} \cdot \frac{x^p}{1+x^q} |\sin x|$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^q}{1+x^q} \cdot \frac{|\sin x|}{x^q} = 0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 绝对收敛。(3) 现设 $q-1 \leq p <$

q . 先证 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ 发散. 事实上, 此时, 可取 $A_0 >$

1, 使当 $x \geq A_0$ 时, $\frac{x^{p+1}}{1+x^q} > \frac{1}{3}$;

$$\text{故 } \int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx = \int_{A_0}^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{1+x^q} \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$\geq \frac{1}{3} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty,$$

从而 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p |\sin x|}{1+x^q} dx$ 发散.

再证 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 收敛. 事实上, 若 $q=0$, 则 -1

$\leq p < 0$, 此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$

$= \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} x^p \sin x dx$ 显然收敛; 若 $q > 0$, 由于

$$\left(\frac{x^p}{1+x^q} \right)' = \frac{x^{p-1} [p - (q-p)x^q]}{(1+x^q)^2} < 0 \text{ (当 } x \text{ 充分大}$$

时),

故当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{x^p}{1+x^q}$ 单调递减趋于零. 而

$$\left| \int_1^A \sin x dx \right| = |\cos 1 - \cos A| \leq 2 \text{ 有界, 故积分}$$

$\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 收敛. 总之, 我们证明了: 当 $q-1 \leq p$

$< q$ 时, $\int_1^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 条件收敛.

于是,最后得结论:积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^p \sin x}{1+x^q} dx$ 当 $p > -2, q > p+1$ 时绝对收敛;当 $p > -2, p < q \leq p+1$ 时条件收敛.

2382.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx.$$

解 当 $n \leq 0$ 时,积分显然是发散的.

当 $n > 0$ 时,首先考虑积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx (a > 1)$. 由于

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} dx, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^A \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) dx \right| \\ & \left| \cos\left(a + \frac{1}{a}\right) - \cos\left(A + \frac{1}{A}\right) \right| \leq 2. \end{aligned}$$

又当 x 充分大时,有

$$\frac{d}{dx} x^n \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = nx^{n-3} \left(x^2 - \frac{n-2}{n}\right) > 0, \text{故当 } x$$

$$\begin{aligned} \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^n} &\geq \frac{\sin^2\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} \\ &= \frac{1 - \cos\left(2x + \frac{2}{x}\right)}{2x^n}, \end{aligned}$$

而当 $0 < n \leq 1$ 时, 积分 $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$ 显然发散, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\left(2x + \frac{2}{x}\right)}{x^n} dx$ 收敛(仿前半段证明), 故当 $0 < n \leq$

1 时, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^n} dx$ 发散, 从而当 $0 < n \leq 1$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^n} dx$$

发散. 对于 $1 < n < 2$ 的情况, 可考虑对积分作变换 $x = \frac{1}{t}$, 则得

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^n} dx \\ = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{\left| \sin\left(t + \frac{1}{t}\right) \right|}{t^{2-n}} dt. \end{aligned}$$

仿前可知, 当 $0 < 2 - n \leq 1$ 即当 $1 \leq n < 2$ 时, 积分 $\int_0^a \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^n} dx$ 发散. 从而, 当 $1 < n < 2$ 时, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\left| \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) \right|}{x^n} dx$$

发散

最后我们得到:当 $0 < n < 2$ 时,积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^n} dx$$

条件收敛.

$$2383^+. \int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx,$$

式中 $P_m(x)$ 及 $P_n(x)$ 为整多项式,且若 $x \geq a, P_n(x) > 0$.

解 今仿 2381 题解之. 设

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m,$$

$$P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n,$$

其中 m, n 是非负整数, $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$.

(1) 若 $n > m + 1$, 可取 $a > 0$ 充分小, 使 $n - a > m + 1$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n-m-a} \cdot \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^n P_m(x)}{x^m P_n(x)} \right| \cdot \frac{|\sin x|}{x^a} = 0, \end{aligned}$$

而 $n - m - a > 1$, 故积分 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 绝对收敛.

(2) 若 $n = m + 1$. 我们证明此时 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 条

件收敛. 事实上, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xP_m(x)}{P_n(x)} = \frac{a_0}{b_0}$, 故存在 A_0

$> a$, 使当 $x \geq A_0$ 时, 恒有 $\left| \frac{xP_m(x)}{P_n(x)} \right| > \frac{|a_0|}{2|b_0|}$,

于是

$$\begin{aligned} & \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| dx \\ &= \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{xP_m(x)}{P_n(x)} \right| \cdot \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \\ &\geq \frac{|a_0|}{2|b_0|} \int_{A_0}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = +\infty, \end{aligned}$$

故 $\int_a^{+\infty} \left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x \right| dx$ 发散. 此外, 易知 ($n = m + 1$ 时)

$$\begin{aligned} \left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)' &= \frac{1}{[P_n(x)]^2} \{ -a_0 b_0 x^{2m} \\ &\quad - 2a_1 b_0 x^{2m-1} + \dots + (a_{m-1} b_{m+1} \\ &\quad - a_m b_m) \}, \end{aligned}$$

故若 $a_0 b_0 > 0$, 则当 x 充分大时, $\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)' < 0$, 函数

$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 减小; 若 $a_0 b_0 < 0$, 则当 x 充分大时, $\left(\frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right)'$

> 0 , 函数 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 增加. 总之, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$

单调地趋于零. 又显然可知

$\left| \int_a^A \sin x dx \right| \leq 2$, 故积分 $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 收敛.

(3) 若 $n < m + 1$. 由于 n, m 都是非负整数, 故 $n \leq m$.

因此

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \text{若 } n = m; \\ +\infty, & \text{若 } n < m \text{ 且 } a_0 b_0 > 0; \\ -\infty, & \text{若 } n < m \text{ 且 } a_0 b_0 < 0. \end{cases}$$

于是,存在 $A^* > a$ 及 $\tau > 0$, 使当 $x \geq A^*$ 时 $\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ 保

持定号且 $\left| \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \right| > \tau$. 今对任何 $A > a$, 可取正整数

N , 使 $2N\pi + \frac{\pi}{4} \geq \max\{A, A^*\}$. 令 $A' = 2N\pi + \frac{\pi}{4}$,

$A'' = 2N\pi + \frac{\pi}{2}$, 则

$$\begin{aligned} \left| \int_{A'}^{A''} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx \right| &> \tau \int_{A'}^{A''} \sin x dx \\ &= \frac{\tau \sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

它不能小于任意的 $\varepsilon (0 < \varepsilon < \frac{\tau \sqrt{2}}{2})$, 故

$\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 发散.

最后,我们得出: $\int_a^{+\infty} \frac{P_m(x)}{P_n(x)} \sin x dx$ 当 $n > m + 1$

时绝对收敛; 当 $n = m + 1$ 时条件收敛.

2384. 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则当 $x \rightarrow +\infty$ 时是否必有 $f(x) \rightarrow 0$? 研究例子:

$$(a) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \quad (b) \int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx.$$

解 不一定. 例如

(a) 积分 $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ 收敛. 事实上, 它是 2380 题之特例: $p = 0, q = 2$. 但是, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x^2)$ 不存在;

(6) 先证积分 $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 收敛. 事实上, 对任何 $A > 0$, 存在唯一的非负整数 n , 使 $\sqrt{n} \leq A < \sqrt{n+1}$. 显然 $A \rightarrow +\infty$ 相当于 $n \rightarrow \infty$. 当 $\sqrt{k} \leq x < \sqrt{k+1}$ (k —非负整数) 时, $[x^2] = k$. 于是

$$\begin{aligned} & \int_0^A (-1)^{[x^2]} dx \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\sqrt{k}}^{\sqrt{k+1}} (-1)^k dx + (-1)^n (A - \sqrt{n}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} + (-1)^n (A - \sqrt{n}). \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ 递减趋于 0 (当 $k \rightarrow \infty$ 时), 故

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ 存在有限 (参看 2656

题前面的变号级数的莱布尼兹判别法), 设为 S . 又显然

$$\begin{aligned} & |(-1)^n (A - \sqrt{n})| < \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \rightarrow 0 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)}, \end{aligned}$$

故 $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (-1)^{[x^2]} dx = S$, 因此

积分 $\int_0^{+\infty} (-1)^{[x^2]} dx$ 收敛.

但显然 $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^{[x^2]}$ 不存在.

2385. 于 $[a, b]$ 上有定义的, 无界函数 $f(x)$ 可否把函数 $f(x)$ 的收敛广义积分

$$\int_a^b f(x) dx$$

看作对应的积分和式

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

的极限? 式中 $x_i \leq \xi_i \leq x_{i+1}$ 及 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

解 不能. 因为若 $c (a \leq c \leq b)$ 是瑕点, 则对于 $[a, b]$ 的任何分法, 不论其 $\max |\Delta x_i|$ 多么小, 当分法确定以

后, 设 $c \in [x_i, x_{i+1}]$, 则总可以取 ξ_i , 使 $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 大

于任何予先给定的值. 因此, 当 $\max |\Delta x_i| \rightarrow 0$ 时,

$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$ 不可能具有有限极限.

2386. 设:

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (1)$$

收敛, 函数 $\varphi(x)$ 有界, 则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2)$$

是否必定收敛? 举出适当的例子.

若积分(1)绝对收敛, 问积分(2)的收敛性如何?

解 不. 例如, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

收敛^{*)}. 且 $\varphi(x) = \sin x$ 有界, 但是积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$$

是发散的^{**)}.

若积分(1)绝对收敛, $\varphi(x)$ 有界, 则积分(2)一定是绝对收敛的. 事实上, 设 $|\varphi(x)| \leq L$, 则由不等式

$$|f(x)\varphi(x)| \leq L \cdot |f(x)|$$

及 $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ 的收敛性即可获证.

*) 利用 2378 题的结果.

**) 利用 2368 题的结果.

2387. 证明, 若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, $f(x)$ 为单调函数, 则

$$f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)^{**})$$

证 不妨设 $f(x)$ 单调减小. 先证当 $x \geq a$ 时, $f(x) \geq 0$. 若不然, 则存在点 $c \geq a$, 使 $f(c) < 0$. 由于 $f(x)$ 单调减小, 故当 $x \geq c$ 时, $f(x) \leq f(c)$, 从而

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx \leq \int_c^{+\infty} f(c) dx = -\infty.$$

因此, 积分

$$\int_c^{+\infty} f(x) dx$$

发散, 这与积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛矛盾. 于是, $f(x)$ 为非负的单调函数.

下面证明 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$. 由于积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛,故对任给的 $\varepsilon > 0$,总存在 $A > a$,使当 $x > A$ 时,恒有

$$\left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

但是

$$\begin{aligned} \left| \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \right| &= \int_{\frac{x}{2}}^x f(t) dt \geq f(x) \cdot \left(x - \frac{x}{2} \right) \\ &= \frac{x}{2} f(x), \end{aligned}$$

故当 $x > A$ 时,

$$0 \leq x f(x) < \varepsilon,$$

即

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0 \quad \text{或} \quad f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right).$$

如果 $f(x)$ 单调增大,则可考虑 $-f(x)$ (它是单调减小的),同法可证得 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

*) 原题为 $f(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, 现在的结果更好.

2388. 设函数 $f(x)$ 于区间 $0 < x \leq 1$ 内是单调的函数,且在点 $x = 0$ 的邻域内是无界的,证明若

$$\int_0^1 f(x) dx$$

存在,则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

证 设函数 $f(x)$ 在 $(0, 1]$ 上是单调下降的. 这时 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = +\infty$. 先设 $f(x) \geq 0$ ($0 < x \leq 1$ 时).

由于积分

$$\int_0^1 f(x) dx$$

存在, 故把区间 $[0, 1]$ n 等分后, 即得

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \\ &< \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} \\ &< \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx + \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

另一方面, 又有

$$\int_0^1 f(x) dx > \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}.$$

从而就有

$$0 < \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) < \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx.$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{1}{n}} f(x) dx = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(x) dx.$$

如果不满足 $f(x) \geq 0$, 即 $f(x)$ 可正可负. 则函数 $\varphi(x) = f(x) - f(1)$ 满足 $\varphi(x) \geq 0$ ($0 < x \leq 1$), 且同样是单调下降, $\lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x) = +\infty$. 故根据已证的结果, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \varphi(x) dx,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \int_{\frac{x}{2}}^x t^p f(t) dt = 0, \text{ 从而 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) = 0.$$

再设不存在上述 δ . 于是, 根据 $f(x)$ 的递减性, 知当 $0 < x < a$ 时恒有 $f(x) < 0$. 于是, 当 $0 < x < \frac{a}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_x^{2x} t^p f(t) dt &\leq f(x) \int_x^{2x} t^p dt \\ &= C_p^* x^{p+1} f(x) < 0, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } C_p^* = \begin{cases} \frac{2^{p+1} - 1}{p+1}, & \text{当 } p \neq -1 \text{ 时;} \\ \ln 2, & \text{当 } p = -1 \text{ 时.} \end{cases}$$

故 C_p^* 也是正的常数.

于是, $|x^{p+1} f(x)| < \frac{1}{C_p^*} \left| \int_x^{2x} t^p f(t) dt \right|$. 根据 $\int_0^a x^p f(x) dx$ 的存在性, 知

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \int_x^{2x} t^p f(t) dt &= 0, \\ \text{从而 } \lim_{x \rightarrow +0} x^{p+1} f(x) &= 0. \text{ 证完.} \end{aligned}$$

2390. 证明

$$(a) \text{ V. P. } \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0;$$

$$(6) \text{ V. P. } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

$$(b) \text{ V. P. } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0.$$

证(a) 由于

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left\{ \int_{-1}^{0-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{0+\epsilon}^1 \frac{dx}{x} \right\}$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\ln \epsilon - \ln 1 + \ln 1 - \ln \epsilon) = 0,$$

所以

$$V. P. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0;$$

(6) 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{1-x^2} + \int_{1+\epsilon}^b \frac{dx}{1-x^2} \right) \\ &= \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\frac{1}{2} \ln \left| \frac{2-\epsilon}{\epsilon} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+b}{1-b} \right| \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2+\epsilon}{\epsilon} \right| \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{2-\epsilon}{2+\epsilon} \right| = 0 \end{aligned}$$

所以

$$V. P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0;$$

(B) 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \sin x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-\cos b + \cos b) \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以

$$V. P. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = 0.$$

2391. 证明: 当 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ 时

$$\operatorname{li} x = V. P. \int_0^x \frac{d\xi}{\ln \xi}$$

存在*).

证 当 $0 \leq x < 1$ 时, 由于 $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\ln \epsilon} = 0$, 故将 $\frac{1}{\ln x}$ 在 x

= 0 处补充定义后成为连续函数, 于是积分存在.

当 $x > 1$ 时, 首先注意到下面这样一个结论: 当 $a < c < b$ 时,

$$\begin{aligned} & V. P. \int_a^b \frac{dx}{x-c} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\epsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\epsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) \\ &= \ln \frac{b-c}{c-a}. \end{aligned}$$

其次, 利用具比亚诺型余项的台劳公式, 有

$$\ln x = (x-1) + [\alpha(x)-1] \frac{(x-1)^2}{2},$$

式中 $\lim_{x \rightarrow 1} \alpha(x) = 0$. 由此即得

$$\frac{1}{\ln x} = \frac{1}{x-1} - \frac{\frac{1}{2}[\alpha(x)-1]}{1 + \frac{[\alpha(x)-1](x-1)}{2}},$$

上述等式右端的第二项在 $x = 1$ 的附近保持有界, 且对于任意的 x 值连续, 因而是可积分的. 第一项的“主值”如前所述, 它是存在的.

于是, 当 $x \geq 0$ 且 $x \neq 1$ 时, lix 存在.

*) 原题误为“当 $x \geq 0$ 时, ...”.

求下列积分:

2392. $V. P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$

解 由于

$$\lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ \eta \rightarrow 0 \\ \delta \rightarrow +\infty}} \left(\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} + \int_{1+\epsilon}^{2-\eta} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{2+\eta}^b \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \\
= & \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \left(\ln \frac{\epsilon + 1}{\epsilon} - \ln 2 + \ln \frac{\eta}{1 - \eta} - \ln \frac{1 - \epsilon}{\epsilon} \right. \\
& \left. + \ln \left| \frac{b - 2}{b - 1} \right| - \ln \frac{\eta}{1 + \eta} \right) \\
= & \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow +0 \\ \eta \rightarrow +0}} \left(\ln \frac{\epsilon + 1}{1 - \epsilon} - \ln 2 + \ln \frac{1 + \eta}{1 - \eta} \right) \\
= & -\ln 2 = \ln \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

所以

$$V. P. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} = \ln \frac{1}{2}.$$

2393. $V. P. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x}.$

解 由于

$$\begin{aligned}
& \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1-\epsilon} \frac{dx}{x \ln x} + \int_{1+\epsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} \right) \\
= & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [\ln |\ln(1 - \epsilon)| - \ln(\ln 2) + \ln(\ln 2) - \ln |\ln(1 + \epsilon)|] \\
= & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \ln \left| \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\ln(1 + \epsilon)} \right| = \ln \left| \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \epsilon)}{\ln(1 + \epsilon)} \right| \\
= & \ln \left| \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \frac{\frac{-1}{1 - \epsilon}}{\frac{1}{1 + \epsilon}} \right| = \ln 1 = 0,
\end{aligned}$$

所以

$$V. P. \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{dx}{x \ln x} = 0.$$

$$2394. \quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \frac{1+x}{1+x^2} dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} b - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-b) + \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right] \\ &= 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} b = \pi, \end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx = \pi.$$

$$2395. \quad V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx.$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-b}^b \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[b \operatorname{arc} \operatorname{tg} b - (-b) \operatorname{arc} \operatorname{tg}(-b) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \ln(1+b^2) + \frac{1}{2} \ln(1+b^2) \right] = 0, \end{aligned}$$

所以

$$V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x dx = 0.$$

§ 5. 面积的计算法

1° 直角坐标系中的面积 由两条连续的曲线 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ ($y_2(x) \geq y_1(x)$) 与 Ox 轴的两条垂线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成的面

积 $S = A_1A_2B_2B_1$ (图 4.14) 等于

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

2° 参数形状表出的曲线所围成的面积 若 $x = x(t), y = y(t)$ ($0 \leq t \leq T$) 为一逐段平滑的简单封闭曲线 C 的参数方程式, 面积 S 表由此曲线所围在它左侧的面积 (图 4.15), 则

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^T (y(t)x'(t)) dt \\ &= \int_a^T x(t)y'(t) dt \end{aligned}$$

或

$$S = \frac{1}{2} \int_0^T (x(t)y'(t) - x'(t)y(t)) dt.$$

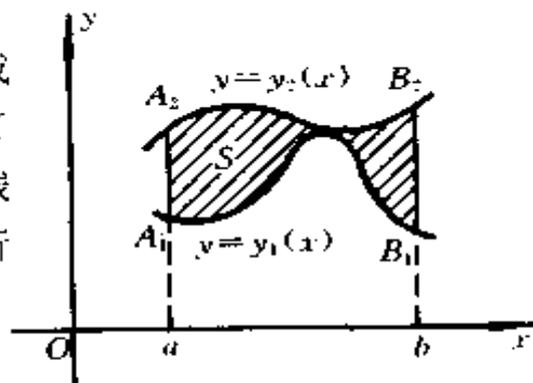


图 4.14

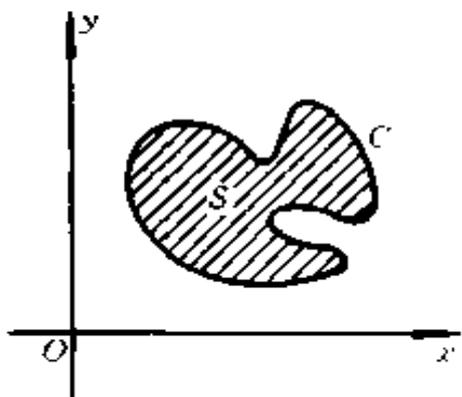


图 4.15

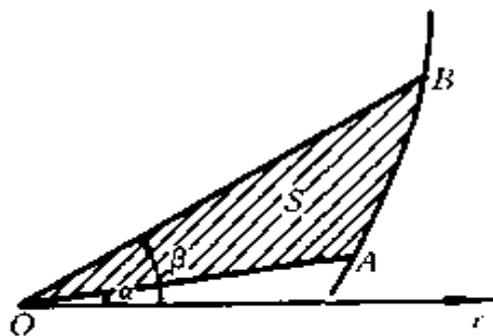


图 4.16

3° 极坐标系中的面积 由连续的曲线 $r = r(\varphi)$ 和两条半射线 $\varphi = \alpha$ 和 $\varphi = \beta$ 所围成的面积 $S = OAB$ (图 4.16) 等于

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

2396. 证明 正抛物线拱的面积等于

$$S = \frac{2}{3}bh,$$

式中 b 为底, h 为拱的高(图 4.17).

证 设抛物线的方程为

$$y = Ax^2 + Bx + C,$$

则当 $x = \pm \frac{b}{2}$ 时, 得

$$y = \frac{Ab^2}{4} \pm \frac{Bb}{2} + C = 0;$$

当 $x = 0$ 时, 得

$$y = C = h.$$

解之得

$$A = -\frac{4h}{b^2}, B = 0.$$

从而

$$y = -\frac{4h}{b^2}x^2 + h.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{b}{2}} \left(h - \frac{4h}{b^2}x^2 \right) dx \\ &= 2 \left(hx - \frac{4h}{3b^2}x^3 \right) \Big|_0^{\frac{b}{2}} = \frac{2}{3}bh. \end{aligned}$$

求下列直角坐标方程所表曲线围成的面积*).

2397. $ax = y^2, ay = x^2.$

解 如图 4.18 所示, 交点为

$$A(a, a) \text{ 及 } O(0, 0).$$

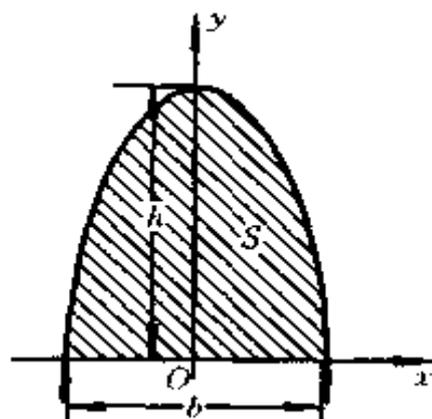


图 4.17

* 在第四章的这一节和以后各节都把一切参数当作是正的.

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^a \left(\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3a} (ax)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3a} x^3 \right] \Big|_0^a \\ &= \frac{a^2}{3}. \end{aligned}$$

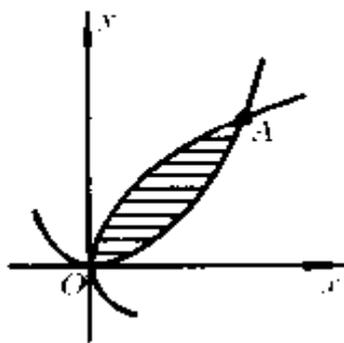


图 4.18

2398. $y = x^2, x + y = 2.$

解 如图 4.19 所示, 交点为 $A(-2, 4)$ 及 $B(1, 1)$.

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 [(2-x) - x^2] dx \\ &= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 \\ &= 4 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

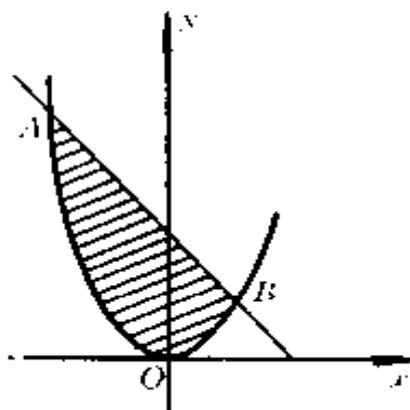


图 4.19

2399. $y = 2x - x^2, x + y = 0.$

解 如图 4.20 所示, 交点为 $A(3, -3)$ 及 $O(0, 0)$.

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 [(2x - x^2) - (-x)] dx \\ &= \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 = 4 \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

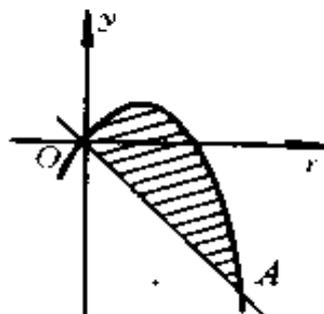


图 4.20

2400. $y = |\lg x|, y = 0, x = 0.1, x = 10.$

解 如图 4.21 所示, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= - \int_{0.1}^1 \lg x dx \\
 &\quad + \int_1^{10} \lg x dx \\
 &= (-x \lg x \\
 &\quad + x \lg C) \Big|_{0.1}^1 \\
 &\quad + (x \lg x \\
 &\quad - x \lg e) \Big|_1^{10} \\
 &= 9.9 - 8.1 \lg e \\
 &\doteq 6.38.
 \end{aligned}$$

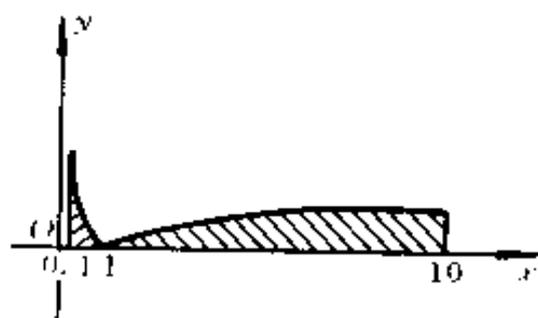


图 4.21

2401. $y = x, y = x + \sin^2 x [0 \leq x \leq \pi]$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\pi} (x + \sin^2 x - x) dx \\
 &= \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

2402. $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2}, y = 0$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^3}{a^2 + x^2} dx = 2a^3 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{a^2 + x^2} \\
 &= 2a^3 \cdot \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} b = \pi a^2.
 \end{aligned}$$

2403. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 所求的面积为

$$S = 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

2406. $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1 (AC - B^2 > 0)$.

解 解此方程,得

$$y_1 = \frac{-Bx - \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C},$$

及

$$y_2 = \frac{-Bx + \sqrt{B^2x^2 - C(Ax^2 - 1)}}{C}.$$

当 $B^2x^2 - C(Ax^2 - 1) \geq 0$, 即 $|x| \leq \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}$ 时,
 y_1 及 y_2 才有实数值.

设

$$a = \sqrt{\frac{C}{AC - B^2}}$$

则所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^a (y_2 - y_1) dx \\ &= \frac{2}{C} \int_{-a}^a \sqrt{C^2 - (AC - B^2)x^2} dx \\ &= \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\ &= \frac{2}{C} \sqrt{AC - B^2} \cdot \frac{\pi}{2} a^2 = \frac{\pi}{\sqrt{AC - B^2}}. \end{aligned}$$

2407. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (蔓叶线), $x = 2a$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{2a} x \sqrt{\frac{x}{2a - x}} dx \\ &= 16a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(t^2 + 1)^3} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left(\frac{1}{t^2 + 1} - \frac{2}{(t^2 + 1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(t^2 + 1)^3} \right) dt \\
&= 16a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[\frac{3}{8} \operatorname{arc} \operatorname{tg} t - \frac{5t}{8(t^2 + 1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{t}{4(t^2 + 1)^2} \right] \Big|_0^b \\
&= 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

*) 设 $t = \sqrt{\frac{x}{2a - x}}$.

**) 利用 1921 题的递推公式.

2408. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$
 $- \sqrt{a^2 - y^2}$ (曳物
线),

$y = 0$.

解 如图 4.24 所示,

所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= 2 \int_0^a \left(a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} \right) dy \\
&= 2a \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{\epsilon}^a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy \\
&\quad - 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{a^2 - y^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{y}{a} \right) \Big|_0^a \\
&= 2a \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(y \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \right.
\end{aligned}$$

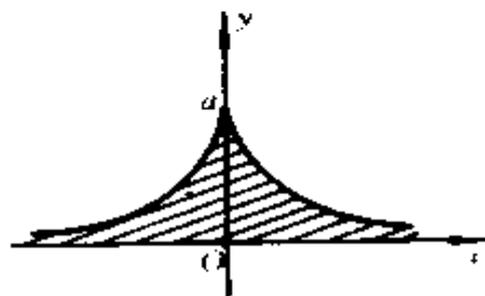


图 4.24

$$\begin{aligned}
& + a \arcsin \frac{y}{a} \Big|_{\epsilon}^a - \frac{\pi a^2}{2} \\
& = \pi a^2 - \frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi a^2}{2}.
\end{aligned}$$

2409. $y^2 = \frac{x^n}{(1+x^{n+2})^2} (x > 0; n > -2).$

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{n}{2}}}{1+x^{n+2}} dx \\
&= 2 \lim_{\substack{c \rightarrow +0 \\ b \rightarrow +\infty}} \int_c^b \frac{2}{n+2} \cdot \frac{dt}{1+t^2} \quad *) \\
&= 2 \cdot \frac{2}{n+2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctan t \Big|_0^b = \frac{2\pi}{n+2}.
\end{aligned}$$

*) 设 $t = x^{\frac{n+2}{2}}$.

2410. $y = e^{-x} \sin x, y = 0 (x \geq 0).$

解 令 $\sin x = 0$, 得 $x = k\pi (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$. 当 $x \geq 0$ 时, 由于 $\sin x$ 在 $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), \dots, ((2k+1)\pi, 2k\pi), \dots$ 中的值为负, 而在 $(0, \pi), (2\pi, 3\pi), \dots, (2k\pi, (2k+1)\pi), \dots$ 中的值为正, 故所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} e^{-x} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x} \sin x dx \\
&\quad + \int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x} \sin x dx - \dots \\
&\quad + (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx + \dots \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-x} \sin x dx \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \frac{-e^{-x}(\sin x + \cos x)}{2} \Big|_{k\pi}^{(k+1)\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{2} [e^{-(k+1)\pi} \cos(k+1)\pi \\
&\quad - e^{-k\pi} \cos k\pi] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} \cdot (-1)^{k+1} [(-1)^{k+1} e^{-(k+1)\pi} \\
&\quad - (-1)^k e^{-k\pi}] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n [e^{-(k+1)\pi} + e^{-k\pi}] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 2e^{-\pi} \sum_{k=0}^{n-1} e^{-k\pi} + e^{-(n+1)\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + 2e^{-\pi} \cdot \frac{1 - e^{-n\pi}}{1 - e^{-\pi}} + e^{-(n+1)\pi} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{\pi} + 1}{e^{\pi} - 1} \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{\pi}{2} \doteq 0.545.
\end{aligned}$$

2411. 抛物线 $y^2 = 2x$ 分圆 $x^2 + y^2 = 8$ 的面积为两部分, 这两部分的比如何?
解 抛物线 $y^2 = 2px$ 和圆 $x^2 + y^2 = 8$ 在第一象限内的交点为 $A(2, 2)$.

设这两部分的面积分别为 S_1 及 S_2 (图 4.25), 则有

$$S_1 = 2 \int_0^2 \left(\sqrt{8 - y^2} - \frac{y^2}{2} \right) dy$$

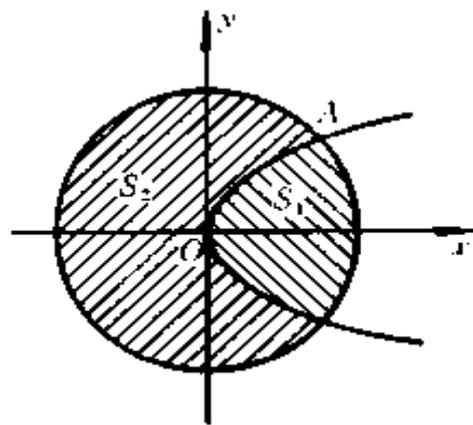


图 4.25

$$\begin{aligned}
 &= 2 \left(\frac{y}{2} \sqrt{8-y^2} + \frac{8}{2} \arcsin \frac{y}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{6} y^3 \right) \Big|_0^2 \\
 &= 2\pi + \frac{4}{3},
 \end{aligned}$$

及

$$S_2 = 8\pi - \left(2\pi + \frac{4}{3} \right) = 6\pi - \frac{4}{3}.$$

于是, 它们之比为

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi + \frac{4}{3}}{6\pi - \frac{4}{3}} = \frac{3\pi + 2}{9\pi - 2}.$$

2412. 把双曲线 $x^2 - y^2 = a$ 上的点 $M(x, y)$ 的坐标表成为双曲线扇形 $S = OM'M$ 面积的函数. 这个扇形是由双曲线的弧 $M'M$ 与二射线 OM 及 OM' 所围成, 其中 $M'(x, -y)$ 是对于 Ox 轴与 M 对称的点.

解 如图 4.26 所示, 则有

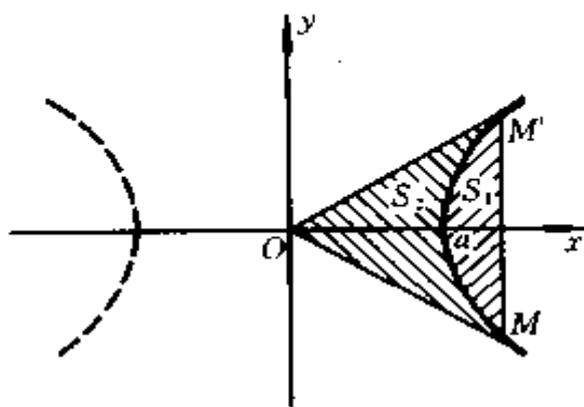


图 4.26

$$\frac{S_1}{2} = \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}) \right] \Big|_a^r \\
&= \frac{1}{2}xy - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x+y}{a}
\end{aligned}$$

及

$$S_2 = 2 \left(\frac{xy}{2} - \frac{S_1}{2} \right) = a^2 \ln \frac{x+y}{a}.$$

若记 $S_2 = S$, 则由上式得

$$x + y = ae^{\frac{S}{a^2}}. \quad (1)$$

以(1)式代入 $x^2 - y^2 = a^2$ 中, 易得

$$x - y = ae^{-\frac{S}{a^2}}. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式, 解得

$$x = a \cdot \frac{e^{\frac{S}{a^2}} + e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a \operatorname{ch} \frac{S}{a^2}$$

及

$$y = a \cdot \frac{e^{\frac{S}{a^2}} - e^{-\frac{S}{a^2}}}{2} = a \operatorname{sh} \frac{S}{a^2}.$$

求由下列参数方程式所表曲线围成的面积:

2413. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) (摆线) 及 $y = 0$.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt \\
&= a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

由此可见,所求摆线一拱的面积等于原来母圆面积的三倍.

2414. $x = 2t - t^2, y = 2t^2 - t^3.$

解 当 $t = 0$ 及 2 时, $x = 0, y = 0$;

当 $0 < t < 2$ 时,

$$x > 0,$$

$$y > 0;$$

当 $t < 0$ 时,

$$x < 0,$$

$$y > 0;$$

当 $t > 2$ 时,

$$x < 0,$$

$$y < 0.$$

如图 4.27 所示,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= - \int_0^2 (2t^2 - t^3) \cdot 2(1-t) dt \\ &= - 2 \int_0^2 (t^4 - 3t^3 + 2t^2) dt \\ &= \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

2415. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) [0 \leq t \leq 2\pi]$ (圆的渐伸线) 及 $x = a, y \leq 0$.

解 所求面积为

$$S = - \int_0^{2\pi} a(\sin t - t \cos t) \cdot a t \cos t dt$$

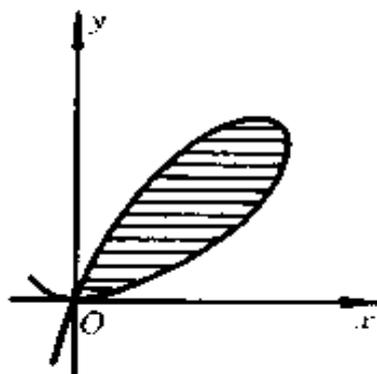


图 4.27

$$\begin{aligned}
& - \int_{\overline{AB}} y dx \\
& = a^2 \left(\frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{4} t^2 \sin 2t + \frac{1}{2} t \cos 2t \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Big|_0^{2\pi} - \int_{\overline{AB}} y dx \\
& = \frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi) - \int_{\overline{AB}} y dx,
\end{aligned}$$

其中 $\int_{\overline{AB}} y dx$ 表沿着从点 $A(a, -2\pi a)$ 到点 $B(a, 0)$ 的直线 \overline{AB} 上的积分. 由于在 \overline{AB} 上 $x \equiv a$, 故 $dx = 0$, 从而 $\int_{\overline{AB}} y dx = 0$. 于是, 得

$$S = \frac{a^2}{3} (4\pi^3 + 3\pi).$$

2416. $x = a(2\cos t - \cos 2t), y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

解 所求面积为

$$\begin{aligned}
S & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (xy'_t - yx'_t) dt \\
& = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a(2\cos t - \cos 2t) \cdot a(2\cos t \\
& \quad - 2\cos 2t) - a(2\sin t - \sin 2t) \\
& \quad \cdot a(-2\sin t + 2\sin 2t)] dt \\
& = 3a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t) dt \\
& = 3a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) dt = 6\pi a^2
\end{aligned}$$

2417. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t (c^2 = a^2 - b^2)$ (椭圆的渐屈线).

解 如图 4.28 所示. 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c^2}{b} \sin^3 t \\
 &\quad \cdot \frac{3c^2}{a} \cos^2 t \sin t dt \\
 &= \frac{12c^4}{ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \\
 &\quad (1 - \sin^2 t) dt \\
 &= \frac{3\pi c^4}{8ab}.
 \end{aligned}$$

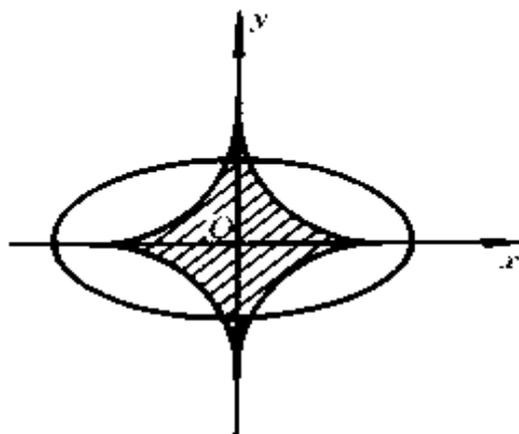


图 4.28

求由下列极坐标方程式所表曲线围成的面积 S ;

2418. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$
(双纽线).

解 如图 4.29 所示, 所求的面积为



图 4.29

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi \\
 &= a^2.
 \end{aligned}$$

2419. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (心脏形线).

解 如图 4.30 所示, 所求的面积为

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} a^2 (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{p^2 d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2}$$

$$= p^2 \int_0^\pi \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2}$$

设

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = t,$$

并记

$$a^2 = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon},$$

则有

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \epsilon \cos \varphi)^2} = \int \frac{2(t^2 + 1)dt}{(1 - \epsilon)^2(t^2 + a^2)^2}$$

$$= \frac{2}{(1 - \epsilon)^2} \int \frac{dt}{t^2 + a^2}$$

$$+ \frac{2(1 - a^2)}{(1 - \epsilon)^2} \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^2}$$

$$= \frac{2}{a(1 - \epsilon)^2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{a}$$

$$+ \frac{2(1 - a^2)}{(1 - \epsilon)^2} \left\{ \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t}{a} \right\}^{**} + C.$$

当 $0 \leq \varphi \leq \pi$ 时, $0 \leq t < +\infty$, 从而得一广义积分. 于是, 经计算得

$$S = \left\{ \frac{\pi}{a(1 - \epsilon)^2} + \frac{(1 - a^2)\pi}{2a^3(1 - \epsilon)^2} \right\} \cdot p^2$$

$$= \frac{\pi p^2}{(1 - \epsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

*) 利用 1921 题的递推公式.

2423. $r = a \cos \varphi, r = a(\cos \varphi + \sin \varphi) \left(M\left(\frac{a}{2}, 0\right) \in S \right)$.

解 如图 4.32 所示,

$$|OA| = a,$$

$$a = -\frac{\pi}{4},$$

阴影部分即为所求的面积.

曲线 $L_1: r = a \cos \varphi$,

$L_2: r = a(\cos \varphi + \sin \varphi)$.

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 a^2 (\cos \varphi + \sin \varphi)^2 d\varphi \\ &= \frac{a^2(\pi - 1)}{4}. \end{aligned}$$

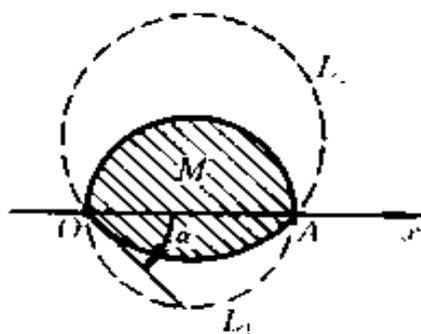


图 4.32

2424⁺. 求由曲线 $\varphi = r \arctg r$ 及二射线 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$ 所围成之扇形的面积.

解 当 φ 由 0 变到 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, r 从 0 变到 $\sqrt{3}$, 而

$$d\varphi = \left(\frac{r}{1+r^2} + \arctg r \right) dr.$$

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}} r^2 d\varphi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{r^3}{1+r^2} + r^2 \arctg r \right) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{6}\ln(1+r^2) + \frac{1}{6}r^3 \operatorname{arctg} r \right] \Big|_0^{\sqrt{3}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi.
\end{aligned}$$

2425. 求封闭曲线

$$r = \frac{2at}{1+t^2}, \varphi = \frac{\pi t}{1+t}$$

所包围的面积.

解 当曲线封闭时, t 由 0 变化到 $+\infty$. 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} r^2 d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2(1+t)^2} dt \\
&= 2\pi a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ \int_0^b \frac{dt}{4(1+t)^2} - \frac{1}{4} \int_0^b \frac{dt}{1+t^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{t dt}{(1+t^2)^2} \right\} \\
&= 2\pi a^2 \lim_{b \rightarrow +\infty} \left\{ -\frac{1}{4(1+t)} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} t \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right\} \Big|_0^b \\
&= \pi a^2 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right).
\end{aligned}$$

变为极坐标, 以求下列曲线所围成的面积:

2426. $x^3 + y^3 = 3axy$ (笛卡尔叶形线).

解 $r^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi) = 3ar^2\cos\varphi\sin\varphi$,

于是

$$r = \frac{3a\sin\varphi\cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi}.$$

当 $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $r \geq 0$, 且当 $\varphi = 0$ 及 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 时, $r =$

0. 所以, 从 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, 叶形线位于第一象限部分所围成的面积, 即为所要求的面积(图 4.33)

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{9a^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^3)^2} \\ &= \frac{9a^2}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left. \frac{-1}{3(1+t^3)} \right|_0^b \\ &= \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

*) 设 $\operatorname{tg} \varphi = t$.

2427. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

解 $r^4(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)$
 $= a^2 r^2,$

于是

$$r = \frac{\sqrt{2} a}{\sqrt{2 - \sin^2 2\varphi}}.$$

如图 4.34 所示, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= 8 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2a^2}{2 - \sin^2 2\varphi} d\varphi \\ &= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2 - \sin^2 t} dt \\ &= \frac{2a^2}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2} - \sin t} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sin t} \right) dt \\ &= \sqrt{2} a^2 \left\{ 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{2} \operatorname{tg} \frac{t}{2} + 1 \right) \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

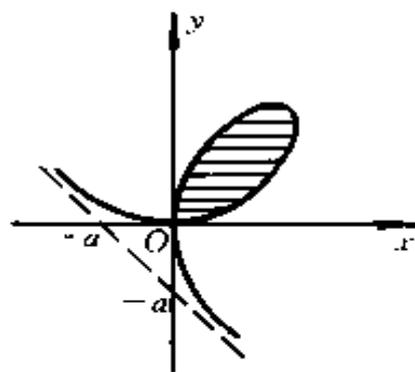


图 4.33

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{2}a^2\{\arctan(\sqrt{2}-1) + \arctan(\sqrt{2}+1)\} \\
 &= 2\sqrt{2}a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \sqrt{2}\pi a^2.
 \end{aligned}$$

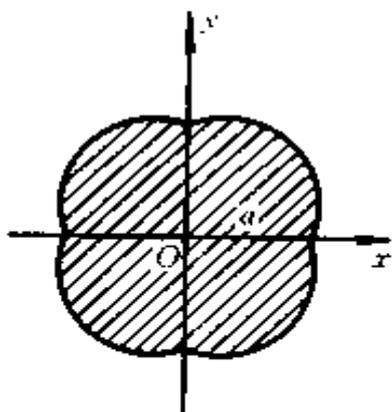


图 4.34

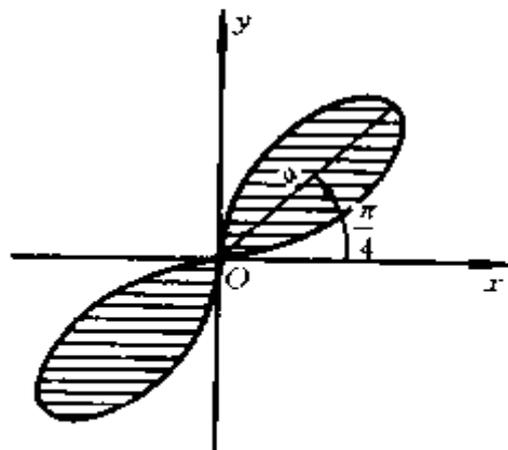


图 4.35

2428. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ (双纽线).

解 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ (图 4.35).

所求的面积为

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin 2\varphi = a^2.$$

化方程式为参数式的形状,以求下列曲线所围成的面积:

2429. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 设

$$x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t,$$

其中 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, 它对应于四分之一的面积. 所求的面积为其四倍, 即

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^a y \, dx = 4 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (-3a^2 \sin^4 t \cos^2 t) dt \\
 &= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = \frac{3\pi a^2}{8}.
 \end{aligned}$$

2430. $x^4 + y^4 = ax^2y$.

解 设

$$y = tx,$$

则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{at}{1+t^4}, \\ y = \frac{at^2}{1+t^4}. \end{cases} \quad (-\infty < t < +\infty)$$

利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= -2 \int_0^{+\infty} \frac{at^2}{1+t^4} \cdot \frac{a(1-3t^4)}{(1+t^4)^2} dt \\
 &= -2a^2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt \right. \\
 &\quad \left. - 3 \int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3} dt \right).
 \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m} \\
 &= \frac{x^{n-3}}{(n+1-4m)b \cdot (a+bx^4)^{m-1}} \\
 &\quad - \frac{(n-3)a}{b(n+1-4m)} \int \frac{x^{n-4}}{(a+bx^4)^m} dx,
 \end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^6}{(1+t^4)^3} dt$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{t^3}{5(1+t^4)^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt \\
&= \frac{3}{5} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt,
\end{aligned}$$

于是

$$S = \frac{8}{5} a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt.$$

又因

$$\begin{aligned}
&\int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^m} \\
&= \frac{x^{n+1}}{4a(m-1)(a+bx^4)^{m-1}} \\
&\quad + \frac{4m-n-5}{4a(m-1)} \int \frac{x^n dx}{(a+bx^4)^{m-1}}, \dots
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^3} dt \\
&= \frac{t^3}{8(1+t^4)^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{5}{8} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt \\
&= \frac{5}{8} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt \\
&= \frac{5}{8} \left[\frac{t^3}{4(1+t^4)} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{1+t^4} \right] \\
&= \frac{5}{32} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt,
\end{aligned}$$

于是

$$S = \frac{1}{4} a^2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt.$$

利用

$$\int \frac{x^2}{a+bx^4} dx$$

$$= \frac{1}{4b \cdot \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{x^2 - \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}x + \sqrt{\frac{a}{b}}}{x^2 + \sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}x + \sqrt{\frac{a}{b}}} \right. \\ \left. + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x^2} \right\} \quad (ab > 0),$$

即得

$$\int \frac{t^2}{1+t^4} dt \\ = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right. \\ \left. + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} + C.$$

考虑到上述式子右端的函数 $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 中的 $t=1$ 点间断, 并且

$$\lim_{t \rightarrow 1+0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} = -\frac{\pi}{2},$$

及

$$\lim_{t \rightarrow 1-0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} = \frac{\pi}{2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt = \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4} dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4} dt \\ = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} \Big|_0^1$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\sqrt{2}} \left\{ \ln \frac{t^2 - \sqrt{2}t + 1}{t^2 + \sqrt{2}t + 1} \right. \\
& \left. + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{2}t}{1-t^2} \right\} \Big|_1^{+\infty} \\
& = \frac{2}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4},
\end{aligned}$$

最后得所求的面积为

$$S = \frac{\sqrt{2}\pi}{16} a^2.$$

*) 参阅“函数表与积分表”(H. M. 雷日克, H. C. 格拉德什坦) 第 64 页“(2.133)2”.

**) 参阅同书第 64 页“(2.133)1”.

***) 参阅同书第 64 页“(2.132)3”.

§ 6. 弧长的计算法

1° 在直角坐标系中的弧长 平滑(连续可微分的)曲线

$$y = y(x) (a \leq x \leq b)$$

上一段弧的长度等于

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

2° 参数方程所表曲线的弧长 若曲线 C 用参数方程式给出

$$x = x(t), y = y(t) (t_0 \leq t \leq T),$$

式中 $x(t), y(t)$ 为在闭区间 $[t_0, T]$ 内可微分的连续函数, 则曲线 C 的弧长等于

$$s = \int_{t_0}^T \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{p}{2\sqrt{2}} \ln \left[\sqrt{x} + \sqrt{x + \frac{p}{2}} \right] \Big|_0^{x_0} \\
& = 2\sqrt{x_0 \left(x_0 + \frac{p}{2} \right)} \\
& \quad + p \ln \left[\frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}} \right].
\end{aligned}$$

2433. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 至点 $B(b, h)$.

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s & = \int_0^b \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx \\
& = a \operatorname{sh} \frac{x}{a} \Big|_0^b = a \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{h^2 - a^2}^*).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
*) \quad \text{由于 } h & = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}, \text{ 故 } \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} \\
& = \frac{1}{a} \sqrt{h^2 - a^2}
\end{aligned}$$

2434. $y = e^x (0 \leq x \leq x_0)$.

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s & = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + e^{2x}} dx \\
& = \left[\sqrt{1 + e^{2x}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x}} + 1} \right] \Big|_0^{x_0} \\
& = \sqrt{1 + e^{2x_0}} - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{1 + e^{2x_0}} - 1}{\sqrt{1 + e^{2x_0}} + 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \\
& = x_0 - \sqrt{2} + \sqrt{1+e^{2x_0}} \\
& \quad - \ln \frac{1+\sqrt{1+e^{2x_0}}}{1+\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

2435. $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y (1 \leq y \leq e).$

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s & = \int_1^e \sqrt{1 + \left(\frac{y}{2} - \frac{1}{2y}\right)^2} dy \\
& = \int_1^e \frac{1+y^2}{2y} dy = \frac{e^2+1}{4}.
\end{aligned}$$

2436. $y = a \ln \frac{a^2}{a^2-x^2} (0 \leq x \leq b < a).$

解 $y' = \frac{2ax}{a^2-x^2}, \sqrt{1+y'^2} = \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2}.$

所求的弧长为

$$s = \int_0^b \frac{a^2+x^2}{a^2-x^2} dx = a \ln \frac{a+b}{a-b} - b.$$

2437. $y = \ln \cos x \left(0 \leq x \leq a < \frac{\pi}{2}\right).$

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s & = \int_0^a \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} dx \\
& = \int_0^a \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2} \right).
\end{aligned}$$

2438. $x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2} (0 < b \leq y \leq a).$

解 $\frac{dx}{dy} = -\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}, \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a}{y}.$

所求的弧长为

$$s = \int_b^a \frac{a}{y} dy = a \ln \frac{a}{b}.$$

2439. $y^2 = \frac{x^3}{2a-x} \left(0 \leq x \leq \frac{5}{3}a \right)^{**}$.

解 如图 4.36 所示.

设 $y = tx$, 得

$$\begin{cases} x = \frac{2at^2}{1+t^2}, \\ y = \frac{2at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

当 $0 \leq x \leq \frac{5}{3}a$ 时, $0 \leq t$

$\leq \sqrt{5}$ (一半弧长).

$$x'_t = \frac{4at}{(t^2+1)^2},$$

$$y'_t = \frac{2at^4 + 6at^2}{(t^2+1)^2},$$

$$\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \frac{2at \sqrt{t^2+4}}{t^2+1}.$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\sqrt{5}} 2 \frac{2at \sqrt{t^2+4}}{t^2+1} dt \\ &= 32a \cdot \int_0^{\arctan \frac{\sqrt{5}}{2}} \frac{\sin \theta d\theta}{\cos^2 \theta (1+3\sin^2 \theta)} \quad (***) \\ &= \frac{32a}{3} \int_1^{\frac{2}{3}} \frac{dz}{z^2 \left(z^2 - \frac{4}{3} \right)} \quad (***) \end{aligned}$$

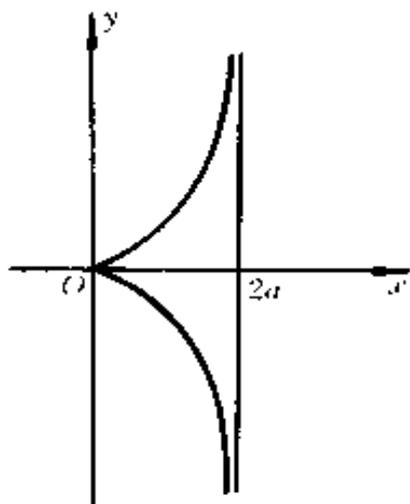


图 4.36

$$\begin{aligned}
&= \frac{32a}{3} \left\{ \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{z} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \ln \frac{z - \frac{2}{\sqrt{3}}}{z + \frac{2}{\sqrt{3}}} \right\} \Big|_1^{\frac{2}{3}} \\
&= 4a \left[1 + 3\sqrt{3} \ln \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right].
\end{aligned}$$

*) 原题误为 $y^2 = \frac{x^2}{2a - x}$, 现按原答案予以改正.

**) 设 $t = 2\operatorname{tg}\theta$.

***) 设 $z = \cos\theta$.

2440. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (内摆线).

解 $y' = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}, \sqrt{1 + y'^2} = \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.$

所求的弧长为

$$s = 4 \int_0^a \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{1}{3}} dx = 6a.$$

2441. $x = \frac{c^2}{a} \cos^3 t, y = \frac{c^2}{b} \sin^3 t, c^2 = a^2 - b^2$ (椭圆的渐屈线).

解 $\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}$

$$= \frac{3c^2}{ab} \sin t \cos t \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}.$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3c^2}{ab} \sin t \cos t \sqrt{b^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t} dt \\
&= \frac{12c^2}{3ab(a^2 - b^2)} \{b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 t\}^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4(a^3 - b^3)}{ab}.
\end{aligned}$$

2442⁺. $x = a\cos^4 t, y = a\sin^4 t.$

解 $\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2}$
 $= 4a\sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t}.$

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a\sin t \cos t \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} dt \\ &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2\left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} d\left(\sin^2 t - \frac{1}{2}\right) \\ &= 2a \left[\frac{\sin^2 t - \frac{1}{2}}{2} \sqrt{\cos^4 t + \sin^4 t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \sin^2 t - \frac{1}{2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{\frac{1}{2}(\cos^4 t + \sin^4 t)} \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(1 + \sqrt{2}) \right] a. \end{aligned}$$

2443. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi).$

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8a. \end{aligned}$$

2444. $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ (圆的渐伸线).

解 $x_i' = a t \cos t, y_i' = a t \sin t,$

$$\sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} = at.$$

所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} at \, dt = 2\pi^2 a.$$

2445⁺. $x = a(\text{sh}t - t), y = a(\text{ch}t - 1) (0 \leq t \leq T)$.

解 $\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2} = \sqrt{2}a \cdot \sqrt{\text{ch}^2 t - \text{cht}}$.

所求的弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^T \sqrt{2}a \sqrt{\text{ch}^2 t - \text{cht}} \, dt \\ &= \sqrt{2}a \int_1^{\text{ch}T} \sqrt{\frac{\theta}{\theta+1}} \, d\theta \quad *) \\ &= 2\sqrt{2}a \int_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arc tg } \sqrt{\text{ch}T}} \frac{\sin^2 z}{\cos^3 z} \, dz \quad **) \\ &= 2\sqrt{2}a \left\{ \frac{\sin z}{2\cos^2 z} - \frac{1}{2} \ln \text{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right) \right\} \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arc tg } \sqrt{\text{ch}T}} \\ &= \sqrt{2}a (\sqrt{\text{ch}T} \cdot \sqrt{1 + \text{ch}T} - \sqrt{2}) \\ &\quad - \sqrt{2}a (\ln(\sqrt{\text{ch}T} + \sqrt{1 + \text{ch}T}) \\ &\quad - \ln(1 + \sqrt{2})) \\ &= 2a \left(\text{ch} \frac{T}{2} \cdot \sqrt{\text{ch}T} - 1 \right) \\ &\quad - \sqrt{2}a \ln \frac{\sqrt{2} \text{ch} \frac{T}{2} + \sqrt{\text{ch}T}}{\sqrt{2} + 1} \quad ***) \end{aligned}$$

*) 设 $\theta = \text{cht}$.

**) 设 $\theta = \text{tg}^2 z$.

***) $\sqrt{1 + \text{ch}T} = \sqrt{2} \text{ch} \frac{T}{2}$.

2446. $r = a\varphi$ (阿基米得螺旋线) ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

解 所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2} d\varphi \\
&= a \left\{ \frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) \right\} \Big|_0^{2\pi} \\
&= a \left\{ \pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}) \right\}.
\end{aligned}$$

2447. $r = ae^{m\varphi}$ ($m > 0$) 当 $0 < r < a$.

解 $0 < r < a$, $-\infty < \varphi < 0$.

所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{a^2e^{2m\varphi} + a^2m^2e^{2m\varphi}} d\varphi \\
&= a \sqrt{m^2 + 1} \int_{-\infty}^0 e^{m\varphi} d\varphi \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{m\varphi} d\varphi = \frac{a \sqrt{1 + m^2}}{m}.
\end{aligned}$$

2448. $r = a(1 + \cos\varphi)$.

解 $\sqrt{r^2 + r'^2} = 2a \cos \frac{\varphi}{2}$.

所求的弧长为

$$s = 2 \int_0^{\pi} 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 8a.$$

2449. $r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$ ($|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$).

解 $r' = \frac{p \sin\varphi}{(1 + \cos\varphi)^2}$,

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{2p \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 + \cos\varphi)^2}.$$

所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2p \cos \frac{\varphi}{2}}{(1 + \cos \varphi)^2} d\varphi = \frac{p}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^3 \frac{\varphi}{2} d\varphi \\
&= \frac{p}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sec \frac{\varphi}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right) d\varphi \\
&= p \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\cos \frac{\varphi}{2}} \right. \\
&\quad \left. + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sec^2 \frac{\varphi}{2} - 1} d\left(\sec \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \\
&= 2p \left\{ \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{4} \right) + \frac{\sec \frac{\varphi}{2}}{2} \sqrt{\sec^2 \frac{\varphi}{2} - 1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} \ln \left(\sec \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= p \{ \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1) \}.
\end{aligned}$$

2450. $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

解 $\sqrt{r^2 + r'^2} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} (0 \leq \varphi \leq 3\pi)$ (图 4.37).

所求的弧长为

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^{3\pi} a \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi \\
&= \frac{3\pi a}{2}.
\end{aligned}$$

我们甚至可以证明

1° 弧 \widehat{AB} 为弧 \widehat{OABC} 的三分之一;

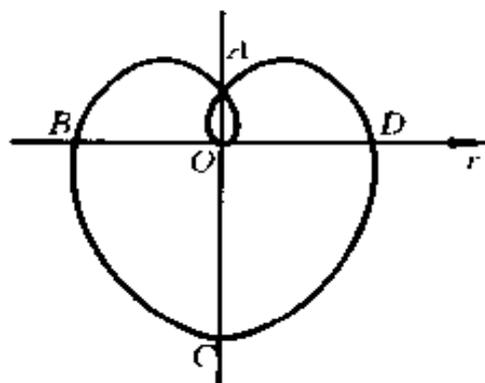


图 4.37

$2^\circ \widehat{OA}, \widehat{AB}, \widehat{BC}$ 之间依次是等差的, 其公差为 $\frac{3a}{8} \sqrt{3}$.

不仅如此, 我们还可证明更一般的情况:

曲线 $r = a \sin^n \left(\frac{\theta}{n} \right)$ (n 为正整数) 之全长为

$$s = \begin{cases} \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!} 4ka, & \text{当 } n = 2k \text{ 时,} \\ \frac{(2k+1)!!}{(2k)!!} \pi a, & \text{当 } n = 2k+1 \text{ 时.} \end{cases}$$

2451. $r = a \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$.

解 $r' = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}}$

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2 + r'^2} &= \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{4 \operatorname{sh}^2 \frac{\varphi}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2} + 1} \\ &= \frac{a}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\operatorname{sh}^2 \varphi + 1} \\ &= \frac{a \operatorname{ch} \varphi}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{a \operatorname{ch} \varphi}{1 + \operatorname{ch} \varphi} \\ &= a \left(1 - \frac{1}{1 + \operatorname{ch} \varphi} \right) \\ &= a \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \right]. \end{aligned}$$

所求的弧长为

$$s = \int_0^{2\pi} a \left[1 - \frac{1}{2 \operatorname{ch}^2 \frac{\varphi}{2}} \right] d\varphi = a \left(\varphi - \operatorname{th} \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt.$$

对于正弦曲线, 其一波(x 由 0 到 $2\pi b$) 之长为

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_0^{2\pi b} \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} \cos^2 \frac{x}{b}} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + c^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - c^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt. \end{aligned}$$

所以 $s_1 = s_2$, 本题得证.

2454. 抛物线 $4ay = x^2$ 沿 Ox 轴滚动. 证明抛物线的焦点划成悬链线.

解 如图 4.38 所示, 设抛物线切 Ox 轴于点 $A(s, 0)$, O' 为抛物线的顶点, P' 为焦点, $O'Y'$ 为对称轴, $O'X' \perp O'Y'$. 过 A 作 $AB \perp O'X'$.

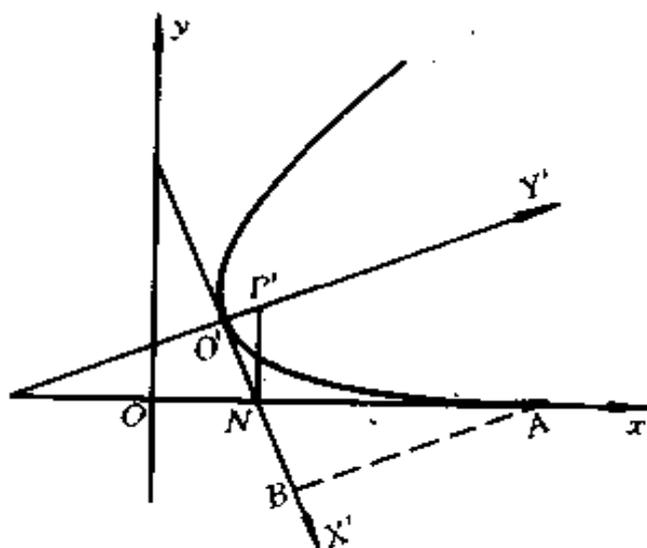


图 4.38

引入参数 $O'N = t$, 则由抛物线的性质易知:
 $P'N \perp Ox, O'B = 2O'N = 2t$. 从而有

$$AB = \frac{(2t)^2}{4a} = \frac{t^2}{a}, AN = t \cdot \sqrt{1 + \frac{t^2}{a^2}}$$

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2t} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{2a}\right)^2} dx \\ &= t \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} + a \ln \left[\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} \right], \end{aligned}$$

$$P'N = a \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

于是, 焦点 P' 的坐标 x, y 由参数 t 表出:

$$\begin{cases} x = s - AN = a \ln \left[\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2} \right], & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = P'N = a \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}. & (2) \end{cases}$$

由(1)式得

$$e^{\frac{x}{a}} = \frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2},$$

$$e^{-\frac{x}{a}} = -\frac{t}{a} + \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

上面两式相加, 得

$$e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} = 2 \sqrt{1 + \left(\frac{t}{a}\right)^2}.$$

再以(2)式代入上式, 最后得

$$y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

这说明抛物线的焦点划成悬链线.

2455. 求环线

$$y = \pm \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x}$$

所包围的面积与周长等于这曲线的围线长的圆面积之比.

解 当 $x = 0$ 及 $x = \frac{1}{3}$ 时, $y = 0$. 此环线的面积为

$$S_1 = 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} - x \right) \sqrt{x} dx = \frac{8}{135 \sqrt{3}}.$$

此环线的周长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} \right)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{6\sqrt{x}} - \frac{3\sqrt{x}}{2} \right) dx \\ &= \frac{4}{3\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

按题设有 $\frac{4}{3\sqrt{3}} = 2\pi R$, 所以 $R = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi}$. 圆面积

$$S_2 = \pi R^2 = \frac{4}{27\pi}.$$

于是,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi}{5\sqrt{3}} \doteq 0.73.$$

§ 7. 体积的计算法

1° 由已知横切面计算物体体积 若物体体积 V 存在及 $S = S(x)$

$(a \leq x \leq b)$ 为用平面切下的物体的横断面积, 而此横断面为经过 x 点垂直于 Ox 轴者, 则

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

2° 旋转体的体积 面积

$$a \leq x \leq b; 0 \leq y \leq y(x),$$

式中 $y(x)$ 为单值连续函数, 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的体积等于

$$V_s = \pi \int_a^b y^2(x) dx.$$

更普遍的情形: 面积

$$a \leq x \leq b; y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

式中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是非负连续函数, 绕 Ox 轴旋转所成的环形的体积等于

$$V = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)] dx.$$

2456. 求顶楼的体积, 其底是边长等于 a 及 b 的矩形, 其顶的棱边等于 c , 而高等于 h .

解 如图 4.39 所示的顶楼, 取 x 轴向下, 则有

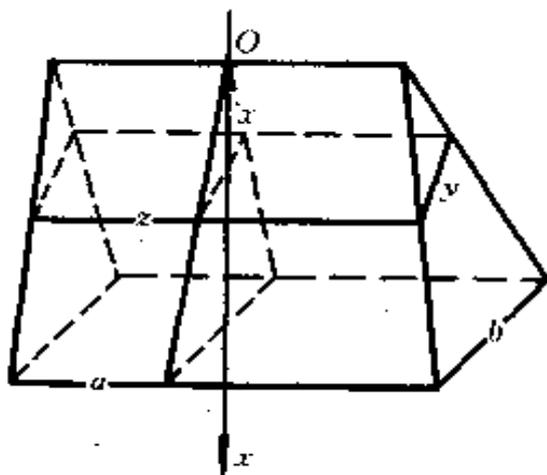


图 4.39

$$\frac{y}{b} = \frac{x}{h} \quad \text{或} \quad y = \frac{b}{h}x,$$

$$\frac{z-c}{a-c} = \frac{x}{h} \quad \text{或} \quad z = \frac{a-c}{h}x + c.$$

于是, 所求顶楼的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h yz dx = \int_0^h \frac{b}{h}x \left(\frac{a-c}{h}x + c \right) dx \\ &= \frac{b}{h} \cdot \frac{a-c}{h} \cdot \frac{1}{3}h^3 + \frac{bc}{h} \cdot \frac{1}{2}h^2 \\ &= \frac{bh}{6}(2a+c). \end{aligned}$$

2457. 求截楔形的体积, 其平行的上下底为边长分别等于 A , B 和 a, b 的矩形, 而高等于 h .

解 如图 4.40 所示,

$$OO' = \frac{A}{2},$$

$$QQ' = \frac{a}{2},$$

$$OQ = h.$$

设 $OP = x$, 则

$$PP' = \frac{a}{2} + \frac{h-x}{h} \left(\frac{A-a}{2} \right).$$

同样可得

$$LP' = \frac{b}{2} + \frac{h-x}{h} \left(\frac{B-b}{2} \right).$$

从而

$$\text{面积 } KLMN = ab + (A-a)(B-b) \left(1 - \frac{x}{h} \right)^2$$

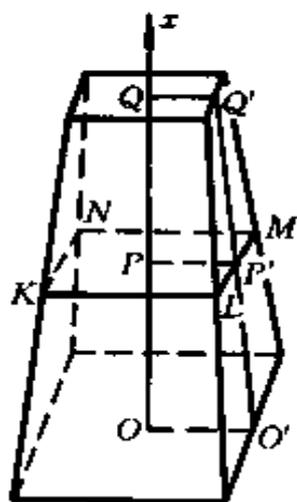


图 4.40

$$+ [a(B - b) + b(A - a)] \left(1 - \frac{x}{h}\right) = f(x).$$

所求截楔形的体积为

$$V = \int_0^h f(x) dx = \frac{h}{6} [(2A + a)B + (2a + A)b].$$

2458. 求截锥体的体积, 其上下底为半轴长分别等于 A, B 和 a, b 的椭圆, 而高等于 h .

解 同 2457 题, 任一平行于上下底且距离下底为 x 的截面为一椭圆, 其半轴分别为

$$a' = a + \left(1 - \frac{x}{h}\right)(A - a)$$

及

$$b' = b + \left(1 - \frac{x}{h}\right)(B - b),$$

从而此截面的面积为

$$\begin{aligned} S(x) &= \pi a' b' \\ &= \pi \left\{ ab + (A - a)(B - b) \left(1 - \frac{x}{h}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + [a(B - b) + b(A - a)] \left(1 - \frac{x}{h}\right) \right\}. \end{aligned}$$

所求的体积为

$$V = \int_0^h S(x) dx = \frac{\pi h}{6} [(2A + a)B + (A + 2a)b].$$

2459. 求旋转抛物体的体积, 其底为 S , 而高等于 H .

解 不失一般性, 假设抛物线方程为

$$y^2 = 2px,$$

绕 Ox 轴旋转, 如图 4.41 所示.

记 $OA = H$,

$OB = x$, 按假设有

$$\begin{aligned} S &= \pi \cdot \overline{AC}^2 \\ &= \pi(2\rho H) \\ &= 2\pi\rho H, \end{aligned}$$

距原点为 x 的截面面积为

$$S(x) = \pi y^2 = 2\pi\rho x.$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^H S(x) dx \\ &= \pi\rho H^2 = \frac{SH}{2}. \end{aligned}$$

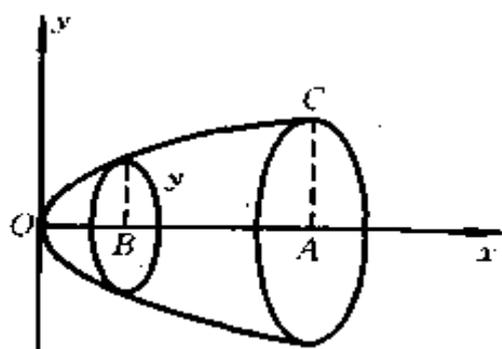


图 4.41

2460. 设立体之垂直于 Ox 轴的横截面的面积 $S = S(x)$, 依下面的二次式规律变化:

$$S(x) = Ax^2 + Bx + C \quad (a \leq x \leq b),$$

其中 A, B 及 C 为常数.

证明此物体之体积等于

$$V = \frac{H}{6} \left[S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b) \right],$$

其中 $H = b - a$ (辛普森公式).

$$\begin{aligned} \text{证 } V &= \int_a^b (Ax^2 + Bx + C) dx \\ &= \frac{A}{3}(b^3 - a^3) + \frac{B}{2}(b^2 - a^2) + C(b - a) \\ &= \frac{b-a}{6} [2A(b^2 + ab + a^2) + 3B(a+b) + 6C] \\ &= \frac{H}{6} [(Aa^2 + Ba + C) + (Ab^2 + Bb + C) \\ &\quad + A(a^2 + 2ab + b^2) + 2B(a+b) + 4C] \end{aligned}$$

$$= \frac{H}{6} \left[S(a) + S(b) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) \right].$$

2461. 物体是点 $M(x, y, z)$ 的集合, 其中 $0 \leq z \leq 1$, 而且若 z 为有理数时, $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$; 若 z 为无理数时, $-1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0$. 证明虽然对应的积分为

$$\int_0^1 S(z) dz = 1.$$

但此物体的体积不存在.

证 显然, 对任何 $0 \leq z \leq 1$, 不论 z 是有理数还是无理数, 都有 $S(z) = 1$. 从而

$$\int_0^1 S(z) dz = \int_0^1 dz = 1.$$

下证此物体 (V) 的体积不存在. 显然, 无完全含于 (V) 内的多面体 (X) 存在, 从而这种 (X) 的体积的上确界为零, 即 (V) 的内体积 $V_+ = \sup\{X\} = 0$. 另一方面, (V) 的外体积 $V^* = \inf\{Y\}$, 其中的下确界是对所有完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 的体积 Y 来取的. 由于 $0 \leq z \leq 1$ 中的有理数和无理数都在 $0 \leq z \leq 1$ 中是稠密的, 故, 显然, 上述任何完全包含着 (V) 的多面体 (Y) 都必完全包含着点集 $(Y_0) = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \text{以及 } -1 \leq x \leq 0, -1 \leq y \leq 0\}$. 而 (Y_0) 又完全包含着 (V) , 并且 (Y_0) 的体积 $Y_0 = 2$. 由此可知 $V^* = \inf\{Y\} = 2$. 于是 $V_+ \neq V^*$. 故 (V) 的体积不存在.

求下列曲面所围成的体积:

2462. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, z = \frac{c}{a}x, x = 0.$

解 如图 4.42 所示,用垂直 Oy 轴的平面截割,得一直角三角形 PQR .

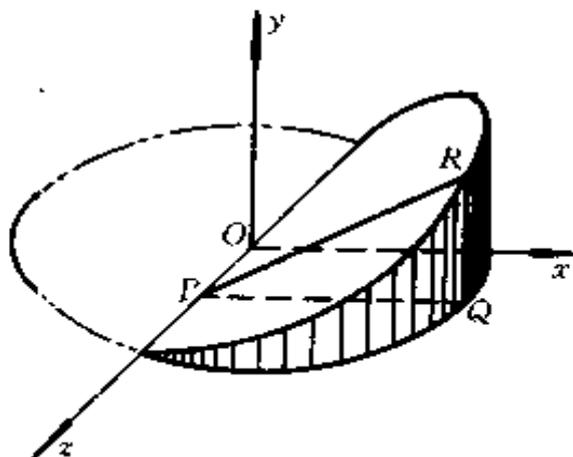


图 4.42

设 $OP = y$, 则高 $QR = \frac{c}{a}x$, 从而它的面积为

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{c}{a}x^2 = \frac{ac}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right).$$

于是, 所求体积为

$$V = 2 \int_0^b \frac{ac}{2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{2}{3}abc.$$

2463. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (椭球).

解 用垂直于 Ox 轴的平面截椭球得截痕为一椭圆, 它在 yoz 平面上的投影为

$$\frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

由此显见其半轴分别为

$$V = 8 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{16}{3} a^3.$$

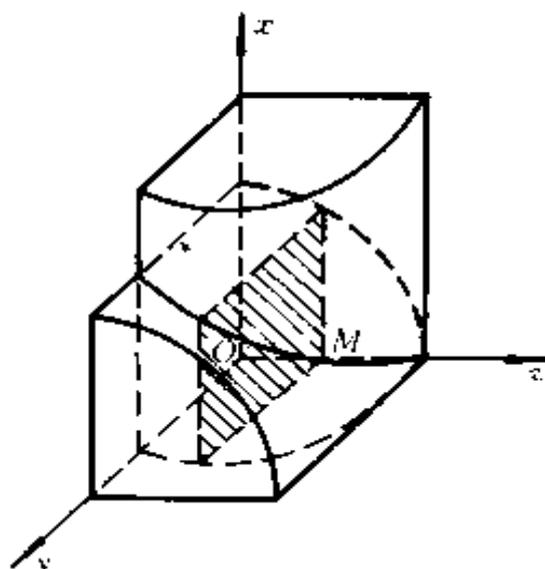


图 4.43

2466. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax.$

解 如图 4.44 所示, 过点 $M(x, 0, 0)$ 垂直于 Ox 轴作一平面, 在所给立体上截出一曲边梯形, 其曲边由方程

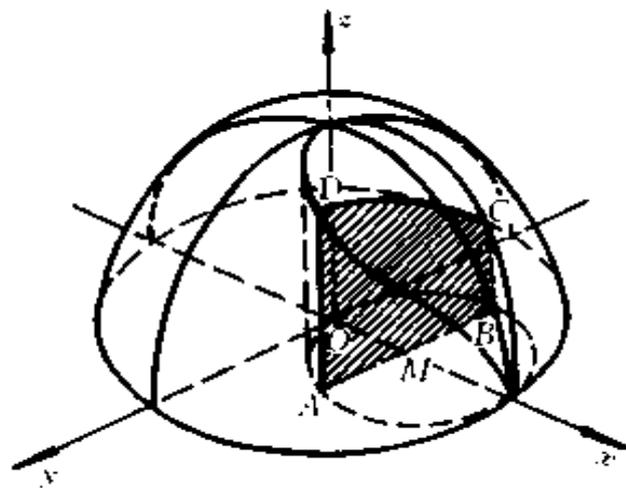


图 4.44

$$z = \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2}$$

给出(上半面),

其变化范围为:

$$-\sqrt{ax - x^2} \leq y \leq \sqrt{ax - x^2} \text{ (如图中 } ABCD \text{).}$$

从而其截面积为

$$\begin{aligned} S(x) &= 2 \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{(a^2 - x^2) - y^2} dy \\ &= a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}}. \end{aligned}$$

于是,所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^a S(x) dx \\ &= 2 \int_0^a \left[a^{\frac{3}{2}} x^{\frac{1}{2}} - a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + (a^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{a+x}} \right] dx \\ &= 4 \left\{ \frac{1}{3} a^3 - \frac{1}{5} a^3 + \left[\left(\frac{\pi a^3}{4} - \frac{1}{2} a^3 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{1}{12} \pi a^3 - \frac{13}{90} a^3 \right) \right] \right\} \\ &= \frac{2}{3} a^3 \left(\pi - \frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

2467. $z^2 = b(a - x), x^2 + y^2 = ax.$

解 先求体积的四分之一部分,截面积为

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} \sqrt{b(a-x)} dy \\ &= \sqrt{ax - x^2} \cdot \sqrt{b(a-x)}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}V &= \int_0^a S(x)dx = \int_0^a \sqrt{ax-x^2} \cdot \sqrt{b(a-x)}dx \\ &= \sqrt{b} \int_0^a \sqrt{x(a-x)}dx \\ &= \frac{4}{15}a^2 \sqrt{ab}.\end{aligned}$$

于是,所求的体积为

$$V = \frac{16}{15}a^2 \sqrt{ab}.$$

2468. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1 (0 < z < a).$

解 固定 z , 则截面为一椭圆, 其面积为

$$P(z) = \pi az.$$

于是, 所求的体积为

$$V = \int_0^a P(z)dz = \pi a \int_0^a z dz = \frac{\pi a^3}{2}.$$

2469⁺. $x + y + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

解 固定 z , 则截面为一直角三角形, 其面积为

$$P(z) = \frac{1}{2}(1 - z^2)^2.$$

故所求体积

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - z^2)^2 dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - 2z^2 + z^4) dz = \frac{4}{15}.\end{aligned}$$

注意, 曲面 $x + y + z^2 = 1$ 关于平面 $z = 0$ 对称, 故它与三个平面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 围成的图形有两个, 一个位于 Oxy 平面之上, 一个位于 Oxy 平面之

下,彼此是对称的(关于 Oxy 平面),从而它们的体积相等. 我们以上求的是位于 Oxy 平面之上的那一个图形的体积.

2470. $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx = a^2.$

解 不妨设 $a > 0$. 此为一有心椭球面. 固定 z , 得在平面 xoy 上的投影为

$$x^2 + xy + y^2 + zx + zy + (z^2 - a^2) = 0,$$

此截面的面积为

$$S(z) = -\frac{\pi\Delta}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{8\pi\Delta}{3\sqrt{3}},$$

其中

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{z}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{z}{2} \\ \frac{z}{2} & \frac{z}{2} & z^2 - a^2 \end{vmatrix} = \frac{2z^2 - 3a^2}{4},$$

所以

$$S(z) = \frac{2(3a^2 - 2z^2)\pi}{3\sqrt{3}}.$$

z 的变化范围为适合下述不等式的集合:

$$2z^2 - 3a^2 \leq 0,$$

即

$$|z| \leq \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

于是,所求的体积为

$$V = \int_{-\sqrt{\frac{3}{2}|a|}}^{\sqrt{\frac{3}{2}|a|}} \frac{2(3a^2 - 2x^2)\pi}{3\sqrt{3}} dx = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3} a^3.$$

*) 此公式详见 Г. М 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷第一分册第 330 目 7.

2471. 证明: 将面积

$$a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq y(x),$$

(式中 $y(x)$ 为连续函数) 绕 Oy 轴旋转所成的旋转体体积等于

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \Delta V_y &= \pi[(x + \Delta x)^2 - x^2]y(x) \\ &= 2\pi xy(x)\Delta x. \end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$V_y = 2\pi \int_a^b xy(x) dx.$$

求下列曲线旋转所成曲面包围的体积:

2472. $y = b\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($0 \leq x \leq a$) 绕 Ox 轴(半三次抛物线).

解 所求的体积为

$$V_x = \pi b^2 \int_0^a \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{4}{3}} dx = \frac{3}{7} \pi ab^2.$$

2473. $y = 2x - x^2, y = 0$; (a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

解 令 $y = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = 2$.

于是, 所求的体积为

$$(a) V_x = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \frac{16\pi}{15};$$

$$(b) V_y = 2\pi \int_0^2 x(2x - x^2) dx = \frac{8\pi}{3}.$$

2474. $y = \sin x, y = 0 (0 \leq x \leq \pi)$; (a) 绕 Ox 轴; (6) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$(a) V_x = \pi \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi^2}{2};$$

$$(6) V_y = 2\pi \int_0^\pi x \sin x dx = 2\pi^2.$$

2475. $y = b \left(\frac{x}{a} \right)^2, y = b \left| \frac{x}{a} \right|$; (a) 绕 Ox 轴; (6) 绕 Oy 轴.

解 交点为 (a, b) 及 $(-a, b)$.

所求的体积为

$$(a) V_x = 2\pi \int_0^a \left(b^2 \frac{x^2}{a^2} - b^2 \frac{x^4}{a^4} \right) dx$$

$$= \frac{4\pi}{15} ab^2;$$

$$(6) V_y = \pi \int_0^b \left(\frac{a^2 y}{b} - \frac{a^2 y^2}{b^2} \right) dy$$

$$= \frac{\pi a^2 b}{6}.$$

2476. $y = e^{-x}, y = 0 (0 \leq x < +\infty)$; (a) 绕 Ox 轴; (6) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$(a) V_x = \pi \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{\pi}{2};$$

$$(6) V_y = \pi \int_0^1 (-\ln y)^2 dy = 2\pi.$$

2477. $x^2 + (y - b)^2 = a^2 (0 < a \leq b)$ 绕 Ox 轴.

解 $y_1 = b + \sqrt{a^2 - x^2}, y_2 = b - \sqrt{a^2 - x^2}$
 $(-a \leq x \leq a).$

所求的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_{-a}^a (y_1^2 - y_2^2) dx \\ &= 8b\pi \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 2\pi^2 a^2 b. \end{aligned}$$

2478. $x^2 - xy + y^2 = a^2$ 绕 Ox 轴.

解 原方程即 $y^2 - xy + x^2 - a^2 = 0$, 从而

$$y = \frac{x \pm \sqrt{4a^2 - 3x^2}}{2},$$

函数的定义域为 $\left[-\frac{2}{\sqrt{3}}a, \frac{2}{\sqrt{3}}a\right]$. 与 Ox 轴的交点分别为 $x = -a$ 与 $x = a$.

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V_x &= 2 \left\{ \pi \int_0^a \frac{1}{4} (x + \sqrt{4a^2 - 3x^2})^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \pi \int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} \left[\frac{1}{4} (x + \sqrt{4a^2 - 3x^2})^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} (x - \sqrt{4a^2 - 3x^2})^2 \right] dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^a (4a^2 - 2x^2 + 2x\sqrt{4a^2 - 3x^2}) dx \\ &\quad + 2\pi \int_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} x\sqrt{4a^2 - 3x^2} dx \\ &= \pi \left[2a^3 - \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{9}(4a^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^a \\ &\quad - \frac{2}{9}(4a^2 - 3x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_a^{\frac{2}{\sqrt{3}}a} = \frac{8}{3}\pi a^3. \end{aligned}$$

2479. $y = e^{-x} \sqrt{\sin x} (0 \leq x < +\infty)$ 绕 Ox 轴.

解 函数定义域为 $[2n\pi, (2n+1)\pi], (n = 0, 1, 2,$

...). 故所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-2x} \sin x dx \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{5} e^{-2x} (-2\sin x - \cos x) \Big|_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \\
 &= \frac{\pi}{5} (e^{-2\pi} + 1) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-4n\pi} \\
 &= \frac{\pi}{5} \cdot \frac{e^{-2\pi} + 1}{1 - e^{-4\pi}} = \frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}.
 \end{aligned}$$

2480. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi),$
 $y = 0;$

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴; (c) 绕直线 $y = 2a.$

解 所求的体积为

$$(a) \quad V_x = \pi \int_0^{2\pi} a^3 (1 - \cos t)^3 dt = 5\pi^2 a^3;$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad V_y &= 2\pi \int_0^{2\pi} a^3 (t - \sin t) (1 - \cos t)^2 dt \\
 &= 6\pi^3 a^3;
 \end{aligned}$$

(c) 作平移: $y = \bar{y} + 2a, x = \bar{x},$ 则曲线方程为
 $\bar{x} = a(t - \sin t), \bar{y} = -a(1 + \cos t),$ 及
 $\bar{y} = -2a.$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V_{\bar{x}} &= \pi \int_0^{2\pi} [4a^2 - a^2(1 + \cos t)^2] a(1 - \cos t) dt \\
 &= 7\pi^2 a^3.
 \end{aligned}$$

2481. $x = a \sin^3 t, y = b \cos^3 t (0 \leq t \leq 2\pi);$

(a) 绕 Ox 轴; (b) 绕 Oy 轴.

解 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad V_x &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (b^2 \cos^6 t) (3a \sin^2 t \cos t) dt \\
 &= 6\pi ab^2 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9 t dt \right) \\
 &= 6\pi ab^2 \left(\frac{6!!}{7!!} - \frac{8!!}{9!!} \right) = \frac{32}{105} \pi ab^2;
 \end{aligned}$$

(6) 利用对称性, 只须将上述答案中 a, b 对调即得

$$V_y = \frac{32}{105} \pi a^2 b.$$

*) 利用 2282 题的结果.

2482. 证明把面积

$$0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq r(\varphi)$$

(φ 与 r 为极坐标) 绕极轴旋转所成的体积等于

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

证 证法一:

微面积 $dS = r d\varphi dr$ 绕极轴旋转所得微环形体积

$$dV = 2\pi r \sin \varphi dS = 2\pi r^2 \sin \varphi d\varphi dr.$$

于是, 所求的体积

$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \sin \varphi d\varphi \int_{\alpha}^{r(\varphi)} r^2 dr \\
 &= \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} r^3(\varphi) \sin \varphi d\varphi.
 \end{aligned}$$

证法二:

应用直角坐标系下的古尔金第二定理^{*)}来证明. 对于微小面积元, 它的重心可以看成在点

$\left(\frac{2}{3} r \cos \varphi, \frac{2}{3} r \sin \varphi \right)$ 处(图 4.45).

$$\begin{aligned}
& + \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^\pi \cos^4 \varphi d\varphi + \frac{\pi^2 a^3}{2} \\
& = \left(4\pi a^3 + \frac{\pi a^3}{2} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \pi + \frac{\pi^2 a^3}{2} \\
& = \frac{13}{4} \pi^2 a^3.
\end{aligned}$$

注 (1) 在 V 的表达式中 $\frac{2}{3}r\cos\varphi$ 的系数 $\frac{2}{3}$ 是把微小面积集中在其重心 $\left(\frac{2}{3}r, \varphi\right)$ 处得出的.

$$\begin{aligned}
(2) \int_0^\pi \cos^{2k+1} \varphi d\varphi &= 0, \\
\int_0^\pi \cos^{2k} \varphi d\varphi &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)\cdots 4 \cdot 2} \pi.
\end{aligned}$$

方法二:

心脏线 $r = a(1 + \cos\varphi)$ 的面积为 $\frac{3\pi a^2}{2}$, 而其重心为 $\varphi_0 = 0, r_0 = \frac{5}{6}a$. 根据古尔金第二定理可得所求的体积为

$$V = 2\pi \left(\frac{5a}{6} + \frac{a}{4} \right) \frac{3\pi a^2}{2} = \frac{13}{4} \pi^2 a^3.$$

*) 利用 2419 题的结果.

**) 利用 2512 题的结果.

2484. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$;

(a) 绕 Ox 轴; (б) 绕 Oy 轴; (в) 绕直线 $y = x$.

解 (a) 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2(2\cos^2\varphi - 1).$$

$$V_x = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^2(2\cos^2\varphi - 1)]^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi.$$

由于

$$\begin{aligned} & \int (2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}} \sin\varphi d\varphi \\ &= \int [(\sqrt{2}\cos\varphi)^2 - 1]^{\frac{3}{2}} d(\sqrt{2}\cos\varphi) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8} (4\cos^2\varphi - 5) \sqrt{2\cos^2\varphi - 1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{8} \ln(\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2\cos^2\varphi - 1}) \right] + C. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left[\frac{\sqrt{2}\cos\varphi}{8} (4\cos^2\varphi - 5) \sqrt{2\cos^2\varphi - 1} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{8} \ln(\sqrt{2}\cos\varphi + \sqrt{2\cos^2\varphi - 1}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \left(\frac{3}{8} \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{\sqrt{2}}{8} \right) \\ &= \frac{1}{4} \pi a^3 \left[\sqrt{2} \ln(\sqrt{2} + 1) - \frac{2}{3} \right]. \end{aligned}$$

(6) 利用对称性知, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^3 \cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \cos\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

令 $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x$, 则 $\sqrt{\cos 2\varphi} = \cos x$,

$\cos\varphi d\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x dx$, 并且 x 的变化范围为 $(0, \frac{\pi}{2})$.

于是, 得

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^4 x dx \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(B) 利用对称性知所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^3 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi \right) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^3 2\varphi} \cos\varphi d\varphi. \end{aligned}$$

若用本题(6)的变换, 即得

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^4 x dx \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4}. \end{aligned}$$

2485. 求绕极轴把面积

$$a \leq r \leq a\sqrt{2\sin 2\varphi}$$

旋转而成的旋转体体积.

解 $r = a$ 与 $r = a \sqrt{2\sin 2\varphi}$, 在第一象限部分的交点的极角分别为 $\alpha = \frac{\pi}{12}$ 及 $\beta = \frac{5\pi}{12}$. 利用对称性知, 所求的体积应为

$$\begin{aligned} V &= \frac{4\pi}{3} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} [(a \sqrt{2\sin 2\varphi})^3 - a^3] \sin\varphi d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} (4\sqrt{2} \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2\varphi \cos\varphi \\ &\quad - \sin\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

为求上述积分, 令

$$I_1 = \int \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2\varphi \cos\varphi d\varphi,$$

$$I_2 = \int \sqrt{\sin 2\varphi} \cos^2\varphi \cos\varphi d\varphi,$$

$$\text{则 } I_2 - I_1 = \frac{1}{3} \cos\varphi (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} I_1$$

即

$$I_2 - \frac{5}{3} I_1 = \frac{1}{3} \cos\varphi \cdot (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}}. \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned} I_2 + I_1 &= \int \sqrt{\sin 2\varphi} \cos\varphi d\varphi \\ &= \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{tg}\varphi}{1 + \operatorname{tg}^2\varphi} \sqrt{\operatorname{ctg}\varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

令 $\operatorname{tg}\varphi = t$, 就可将上述积分化成二项式的微分的积分. 积分之, 得

$$I_2 + I_1 = \frac{1}{2} \sin\varphi \sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{2} \ln(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{4} [\ln(\sin\varphi + \cos\varphi \\
 & + \sqrt{\sin 2\varphi} + \arcsin(\sin\varphi \\
 & - \cos\varphi)]. \tag{2}
 \end{aligned}$$

(2) - (1), 得

$$\begin{aligned}
 I_1 = \frac{3}{8} \left\{ \frac{1}{2} \sin\varphi \sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{2} \ln(\sin\varphi + \cos\varphi \right. \\
 & - \sqrt{\sin 2\varphi} + \frac{1}{4} [\ln(\sin\varphi + \cos\varphi \\
 & + \sqrt{\sin 2\varphi} + \arcsin(\sin\varphi - \cos\varphi)] \\
 & \left. - \frac{1}{3} \cos\varphi \cdot (\sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} \right\} + C.
 \end{aligned}$$

从而, 得

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \sqrt{\sin 2\varphi} \sin^2\varphi \cos\varphi d\varphi \\
 & = \frac{1}{8} + \frac{3}{64}\pi.
 \end{aligned}$$

因此, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V & = \frac{4\pi a^3}{3} \left[4\sqrt{2} \left(\frac{1}{8} + \frac{3\pi}{64} \right) + \cos\varphi \right]_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{5\pi}{12}} \\
 & = \frac{\pi^2 a^3}{2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

§ 8. 旋转曲面表面积的计算法

平滑的曲线 AB 绕 Ox 轴旋转所成曲面的面积等于

$$P = 2\pi \int_A^B y ds,$$

式中 ds 为弧的微分.

求旋转下列曲线所成曲面的面积:

2486. $y = x \sqrt{\frac{x}{a}}$ ($0 \leq x \leq a$) 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}$.

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_0^a x \sqrt{\frac{x}{a}} \sqrt{1 + \frac{9x}{4a}} dx \\ &= \frac{3\pi}{a} \int_0^a x \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} dx \\ &= \frac{3\pi}{a} \int_0^a \left(x + \frac{2a}{9} \right) \sqrt{\left(x + \frac{2a}{9} \right)^2 - \left(\frac{2a}{9} \right)^2} dx \\ &\quad + \frac{2a}{9} - \frac{3\pi}{a} \cdot \frac{2a}{9} \int_0^a \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} dx \\ &= \frac{3\pi}{a} \frac{1}{3} \left(x^2 + \frac{4ax}{9} \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a \\ &\quad - \frac{2\pi}{3} \left\{ \frac{x + \frac{2a}{9}}{2} \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{4a^2}{81} \ln \left[x + \frac{2a}{9} - \sqrt{x^2 + \frac{4ax}{9}} \right] \right\} \Big|_0^a \\ &= \frac{13\sqrt{13}}{27} \pi a^2 - \frac{11\sqrt{13}}{81} \pi a^2 + \frac{4\pi a^2}{243} \ln \frac{11+3\sqrt{13}}{2} \\ &= \frac{4\pi a^2}{243} \left(21\sqrt{13} + 2 \ln \frac{3+\sqrt{13}}{2} \right). \end{aligned}$$

2487. $y = a \cos \frac{\pi x}{2b}$ ($|x| \leq b$) 绕 Ox 轴.

解 $y' = -\frac{\pi a}{2b} \sin \frac{\pi x}{2b},$

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{1}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}}.$$

于是,所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_{-b}^b y \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-b}^b \frac{a}{2b} \cos \frac{\pi x}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \pi a \sin \frac{\pi x}{2b} \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4b^2}{2} \ln \left| \pi a \sin \frac{\pi x}{2b} + \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2 \sin^2 \frac{\pi x}{2b}} \right| \right] \Big|_0^b \\ &= 2a \sqrt{\pi^2 a^2 + 4b^2} + \frac{8b^2}{\pi} \ln \frac{\pi a + \sqrt{4b^2 + \pi^2 a^2}}{2b}. \end{aligned}$$

2488. $y = \operatorname{tg} x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right)$ 绕 Ox 轴.

解 $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+\sec^4 x} = \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x}.$

于是,所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x \cdot \frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos^4 x + 1} d\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right) \\ &= \pi \left[\frac{\sqrt{\cos^4 x + 1}}{\cos^2 x} - \ln(\cos^2 x + \sqrt{\cos^4 x + 1}) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \pi \left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln \frac{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{5} - 1)}{2} \right]. \end{aligned}$$

2489. $y^2 = 2px (0 \leq x \leq x_0)$; (a) 绕 Ox 轴; (6) 绕 Oy 轴.

解 (a) $\sqrt{1+y_x'^2} = \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}}$.

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \cdot \frac{\sqrt{p+2x}}{\sqrt{2x}} dx \\ &= \frac{2\pi}{3} \left[(2x_0+p) \sqrt{2px_0+p^2} - p^2 \right]. \end{aligned}$$

(6) $\sqrt{1+x_y'^2} = \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p}$.

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_y &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} x \sqrt{1+x_y'^2} dy \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{2px_0}} \frac{y^2}{2p} \cdot \frac{\sqrt{p^2+y^2}}{p} dy \\ &= \frac{2\pi}{p^2} \int_0^{\sqrt{2px_0}} y^2 \sqrt{p^2+y^2} dy \\ &= \frac{2\pi}{p^2} \left[\frac{y(2y^2+p^2)}{8} \sqrt{p^2+y^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p^4}{8} \ln(y + \sqrt{y^2+p^2}) \right] \Big|_0^{\sqrt{2px_0}} \\ &= \frac{\pi}{4} \left[(p+4x_0) \sqrt{2x_0(p+2x_0)} \right. \\ &\quad \left. - p^2 \ln \frac{\sqrt{2x_0} + \sqrt{p+2x_0}}{\sqrt{p}} \right]. \end{aligned}$$

2490. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (0 < b \leq a)$; (a) 绕 Ox 轴; (6) 绕 Oy 轴.

解 (a) $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2, yy' = -\frac{b^2}{a^2}x,$

$$y \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{y^2 + (yy')^2}$$

$$= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2}.$$

于是, 所求的表面积为

$$P_x = 2\pi \frac{b}{a} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - \epsilon^2 x^2} dx$$

$$= \frac{2\pi b}{a} \left(a \sqrt{a^2 - \epsilon^2 a^2} + \frac{a^2}{\epsilon} \arcsin \epsilon \right)$$

$$= 2\pi b \left(b + \frac{a}{\epsilon} \arcsin \epsilon \right),$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 是椭圆之离心率.

(6) 将 x, y 轴对调, 即将 x 轴作为短轴. 于是在所得出的 $y \sqrt{1+y'^2}$ 中仅需将 a 与 b 的位置对调一下即可, 即

$$y \sqrt{1+y'^2} = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{a^2 - b^2}{b^2}x^2}$$

$$= \frac{a}{b} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2}.$$

于是, 所求表面积为

$$P_y = 2\pi \frac{a}{b} \int_{-b}^b \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2} dx$$

$$= 2\pi a \frac{1}{b} \left[\frac{x}{2} \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2} \right.$$

$$\left. + \frac{b^3}{2c} \ln \left(\frac{c}{b}x + \sqrt{b^2 + \frac{c^2}{b^2}x^2} \right) \right] \Big|_{-b}^b.$$

2493. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ ($|x| \leq b$); (a) 绕 Ox 轴;

(6) 绕 Oy 轴.

解 (a) $\sqrt{y'^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{sh}^2 \frac{x}{a} + 1} = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_x &= 2\pi a \int_{-b}^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx \\ &= 2\pi a \int_0^b \left(1 + \operatorname{ch} \frac{2x}{a} \right) dx \\ &= \pi a \left(2b + a \operatorname{sh} \frac{2b}{a} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) P_y &= 2\pi \int_0^b x \sqrt{1 + y'^2} dx \\ &= 2\pi \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx \\ &= 2\pi a \left(a + b \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a \operatorname{ch} \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

2494. $\pm x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}$ 绕 Ox 轴.

解 $x'_y = \mp \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$, $\sqrt{1 + x'^2_y} = \frac{a}{y}$
($0 \leq y \leq a$).

于是, 所求的表面积为

$$P_x = 2 \cdot 2\pi \int_0^a y \frac{a}{y} dy = 4\pi a^2.$$

2495. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$);

(a) 绕 Ox 轴; (6) 绕 Oy 轴; (B) 绕直线 $y = 2a$;

解 先求 ds ;

$$ds = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} dt = 2a \sin \frac{t}{2} dt.$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad P_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du = \frac{64}{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad P_x &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = 16\pi^2 a^2. \end{aligned}$$

(B) 作平移 $x = \bar{x}, y = \bar{y} + 2a$ 则

$$\bar{y} = -a(1 + \cos t).$$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P_{\bar{x}} &= \left| 2\pi \int_0^{2\pi} [-a(1 + \cos t)] 2a \sin \frac{t}{2} dt \right| \\ &= \frac{32}{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

*) 在此取绝对值, 是由于被积函数始终不为正之故.

2496. $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ 绕直线 $y = x$.

解 先求 ds :

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} dt \\ &= \begin{cases} 3a \sin t \cos t dt, & \text{当 } \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \\ -3a \sin t \cos t dt, & \text{当 } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}. \end{cases} \end{aligned}$$

利用对称性,并作旋转,即得所求的表面积为

$$\begin{aligned}
 P &= 2 \left[2\pi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{yx}{\sqrt{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{y-x}{\sqrt{2}} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \right] \\
 &= \frac{4\pi}{\sqrt{2}} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (a\sin^3 t - a\cos^3 t) \cdot 3a\sin t \cos t dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (a\sin^3 t - a\cos^3 t) \cdot 3a\sin t \cos t dt \right) \\
 &= \frac{12\pi a^2}{\sqrt{2}} \left[\left(\frac{1}{5} \sin^5 t + \frac{1}{5} \cos^5 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{1}{5} \sin^5 t + \frac{1}{5} \cos^5 t \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \right] \\
 &= \frac{3}{5} \pi a^2 (4\sqrt{2} - 1).
 \end{aligned}$$

2497. $r = a(1 + \cos\varphi)$ 绕极轴.

解 $ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi,$
 $y = r \sin\varphi = a(1 + \cos\varphi) \sin\varphi$
 $= 4a \cos^3 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2}.$

于是,所求的表面积为

$$P = 2\pi \int_0^\pi 8a^2 \cos^4 \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{32}{5} \pi a^2.$$

2498. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$; (a) 绕极轴; (b) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

(b) 绕轴 $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

解 (a) $y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi, ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$

于是, 所求的表面积为

$$P = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \sin \varphi d\varphi = 2\pi a^2 (2 - \sqrt{2}).$$

(b) $x = a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \left(-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right).$

于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P &= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= 2\pi a^2 \sqrt{2}. \end{aligned}$$

(c) $x = a \sqrt{\cos 2\varphi} \cos \varphi, y = a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi,$

$$ds = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$$

注意到在 $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ 内恒有 $x - y \geq 0$, 于是, 所求的表面积为

$$\begin{aligned} P &= 2 \cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x - y}{\sqrt{2}} \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^2}{\sqrt{2}} (\sin \varphi + \cos \varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 4\pi a^2. \end{aligned}$$

2499. 由抛物线 $ay = a^2 - x^2$ 及 Ox 轴所包围的图形绕 Ox 轴旋转而构成一旋转体. 求其表面积与等体积球的表面积之比.

解 首先求此旋转体的表面积.

$$\sqrt{1+y'^2} = \frac{2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{a},$$

从而

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \cdot 2\pi \int_0^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right) \cdot \frac{2\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}}{a} dx \\ &= 8\pi \int_0^a \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} dx - \frac{8\pi}{a^2} \int_0^a x^2 \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} dx \\ &= 8\pi \left\{ \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} + \frac{a^2}{8} \ln \left[x + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right] \right\} \Big|_0^a \\ &\quad - \frac{8\pi}{a^2} \left\{ \frac{x \left(2x^2 + \frac{a^2}{4} \right)}{8} \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^4}{128} \ln \left[x + \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} \right] \right\} \Big|_0^a \\ &= \frac{\pi a^2}{8} \left[7\sqrt{5} + \frac{17}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right]; \end{aligned}$$

其次, 求旋转体的体积.

$$V_x = \pi \int_{-a}^a \left(a - \frac{x^2}{a}\right)^2 dx = \frac{16\pi a^3}{15}.$$

设与其等体积球的半径为 R , 则

$$\frac{4\pi R^3}{3} = \frac{16\pi a^3}{15}.$$

所以

$$R = \sqrt[3]{\frac{4}{3}} a.$$

于是,此球的表面积为

$$P = 4\pi R^2 = 4\pi \sqrt[3]{\frac{16}{25}a^2}.$$

最后得到

$$\begin{aligned} \frac{P_x}{P} &= \frac{\frac{\pi a^2}{8} \left(7\sqrt{5} + \frac{17}{2} \ln(2 + \sqrt{5}) \right)}{\frac{8\pi a^2}{5} \sqrt[3]{10}} \\ &= \frac{5(14\sqrt{5} + 17\ln(2 + \sqrt{5}))}{128 \cdot \sqrt[3]{10}} \\ &\doteq 1.013. \end{aligned}$$

*) 利用 1820 题的结果.

2500. 由直线 $x = \frac{p}{2}$ 与抛物线 $y^2 = 2px$ 所包围的图形绕直线 $y = p$ 而旋转, 求这旋转体的体积和表面积.

$$\begin{aligned} \text{解 } V_{y=p} &= \int_0^{\frac{p}{2}} \pi(p + \sqrt{2px})^2 dx \\ &\quad - \int_0^{\frac{p}{2}} \pi(p - \sqrt{2px})^2 dx \\ &= 4\pi p \int_0^{\frac{p}{2}} \sqrt{2px} dx \\ &= \frac{4}{3} \pi p^3. \end{aligned}$$

旋转体的侧面积为

$$\begin{aligned} S_{\text{侧}} &= \int_{(a)} 2\pi(p + \sqrt{2px}) ds \\ &\quad + \int_{(a)} 2\pi(p - \sqrt{2px}) ds \\ &= 4\pi p \int_{(a)} ds = 4\pi p \int_0^p \sqrt{1 + \frac{y^2}{p^2}} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^p \sqrt{y^2 + p^2} dy \\
&= 4\pi \left(\frac{y}{2} \sqrt{y^2 + p^2} + \frac{p^2}{2} \ln(y + \sqrt{y^2 + p^2}) \right) \Big|_0^p \\
&= 2\pi p^2 [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})],
\end{aligned}$$

而底面积为

$$S_{\text{底}} = \pi(2p)^2 = 4\pi p^2,$$

于是,所求的表面积为

$$\begin{aligned}
P &= S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} \\
&= 2\pi p^2 [(2 + \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2})].
\end{aligned}$$

§ 9. 矩的计算法. 重心的坐标

1° 矩 若在 Oxy 平面上,密度为 $\rho = \rho(y)$ 的质量 M 充满了某有界连续统 Ω (曲线,平面的区域),而 $\omega = \omega(y)$ 为 Ω 中纵标不超过 y 的部分的对应的度量(弧长,面积),则数

$$\begin{aligned}
M_k &= \lim_{\max |\Delta y_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(y_i) y_i^k \Delta \omega(y_i) \\
&= \int_0^p \rho y^k d\omega(y) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

称为质量 M 对于 Ox 轴的 k 次矩.

特殊情形,当 $k = 0$ 时得质量 M ,当 $k = 1$ 时得静力矩,当 $k = 2$ 时得转动惯量.

同样地可定义出质量对于坐标平面的矩.

若 $\rho = 1$,则对应的矩称为几何矩(线矩,面积矩,体积矩等等).

2° 重心 均匀平面图形 S 的重心的坐标 (x_0, y_0) 根据下面的公式来定义

$$x_0 = \frac{M_1^{(y)}}{S}, y_0 = \frac{M_1^{(x)}}{S},$$

式中 $M_1^{(y)}$, $M_1^{(x)}$ 为面积 S 对于 Oy 轴和 Ox 轴的几何静力矩.

2501. 求半径为 a 的半圆弧对于过此弧两 endpoint 直径的静力矩和转动惯量.

解 取此直径所在的直线作为 Ox 轴, 圆心作为原点, 则圆的方程为

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

从而

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

及

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{a}{y} dx = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

于是, 所求的静力矩和转动惯量*) 为

$$M_1 = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2a^2$$

及

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_{-a}^a (a^2 - x^2) \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 2a \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi a^3}{2}. \end{aligned}$$

2502. 求底为 b , 高为 h 的均匀三角形薄板对于其底边的静力矩和转动惯量 ($\rho = 1$).

解 取坐标系如图 4.46 所示.

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2} \int_0^b y^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^c y_1^2 dx + \frac{1}{2} \int_c^b y_2^2 dx.$$

由于

*) 这里假定 $\rho = 1$, 今后有类似情况, 不再说明.

$$y_1 = y_1(x) = \frac{h}{c}x,$$

$$y_2 = y_2(x) \\ = \frac{h}{c-b}(x-b),$$

于是,所求的静力矩为

$$M_1^{(x)} = \frac{1}{2} \int_0^c \frac{h^2}{c^2} x^2 dx \\ + \frac{1}{2} \int_c^b \frac{h^2}{(c-b)^2} (x-b)^2 dx = \frac{bh^2}{6}.$$

又由于

$$x_1 = x_1(y) = \frac{c}{h}y,$$

$$x_2 = x_2(y) = b + \frac{c-b}{h}y,$$

于是,所求的转动惯量为

$$M_2^{(x)} = \int_0^h y^2 (x_2 - x_1) dy \\ = \int_0^h y^2 \left(b - \frac{b}{h}y \right) dy = \frac{bh^3}{12}.$$

2503. 求半轴长为 a 和 b 的均匀椭圆形薄板对于其主轴的转动惯量 ($\rho = 1$).

解 不妨设椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

则上、下半椭圆方程为

$$x_1 = -\frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2},$$

$$x_2 = \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}.$$

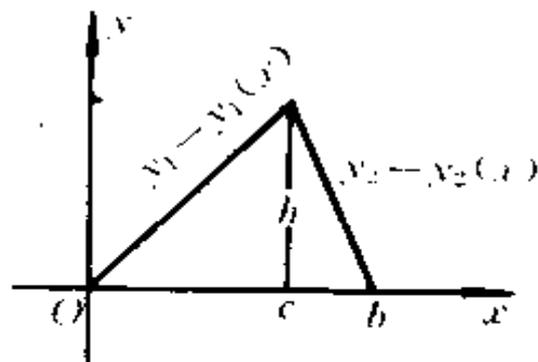


图 4.46

$$M_1 = \int_0^h x \cdot P(x) dx,$$

其中

$$P(x) = \pi y^2 = \pi \left[\frac{r}{h} (h - x) \right]^2.$$

于是, 所求的静力矩和转动惯量分别为

$$M_1 = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x (h - x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^2}{12};$$

$$\begin{aligned} M_2 &= \int_0^h x^2 \cdot P(x) dx \\ &= \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 (h - x)^2 dx = \frac{\pi r^2 h^3}{30}. \end{aligned}$$

2505. 证明古尔金第一定理: 弧 C 绕着不与它相交的轴旋转而成的旋转面的面积, 等于这个弧的长度与这弧的重心所划出的圆周之长的乘积.

证 重心 (ξ, η) 具有这样的性质, 即如把曲线的全部“质量”都集中到它上面, 则此质量对于任何一个轴的静力矩, 都与曲线对此轴的静力矩相同. 即

$$\xi s = M_y = \int_0^s x ds,$$

$$\eta s = M_x = \int_0^s y ds,$$

式中 s 表示弧长.

于是

$$2\pi\eta \cdot s = 2\pi \int_0^s y ds.$$

上式的右端是弧 C 旋转而成的曲面面积, 左端 $2\pi\eta$ 表示弧 C 绕 Ox 轴旋转时其重心所划出的圆周之长. 从而定理得证.

2506. 证明古尔金第二定理: 面积 S 绕不与它相交的轴旋转而成的旋转体, 其体积等于面积 S 与这面积的重心所划出的圆周之长的相乘积.

证 由于

$$\eta \cdot S = M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx,$$

所以

$$2\pi\eta \cdot S = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

上式右端即为旋转体的体积, 从而定理得证.

2507. 求圆弧: $x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi$ ($|\varphi| \leq \alpha \leq \pi$) 重心的坐标.

解 显见

$$\eta = 0,$$

圆弧长

$$s = 2a\alpha.$$

由于

$$M_x = \int_0^s x ds = \int_{-\alpha}^{\alpha} a^2 \cos \varphi d\varphi = 2a^2 \sin \alpha,$$

所以

$$\xi = \frac{2a^2 \sin \alpha}{2a\alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\alpha}.$$

即重心为 $\left(\frac{a \sin \alpha}{\alpha}, 0\right)$.

2508. 求抛物线: $ax = y^2, ay = x^2$ ($a > 0$) 所围成面积的重心的坐标.

解 利用古尔金第二定理来解此题. 首先, 此面积为

$$S = \frac{a^2 \cdot \pi}{3},$$

体积为

$$V = \pi \int_0^a \left(ax - \frac{x^4}{a^2} \right) dx = \frac{3\pi a^3}{10}.$$

于是

$$2\pi\eta \cdot \frac{a^2}{3} = \frac{3\pi a^3}{10},$$

所以

$$\eta = \frac{9a}{20}.$$

利用对称性知

$$\xi = \eta = \frac{9a}{20}.$$

即所求的重心为 $\left(\frac{9a}{20}, \frac{9a}{20} \right)$.

*) 利用 2397 题的结果.

2509. 求面积

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \quad (0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b)$$

的重心的坐标.

解 首先, 我们已知第一象限椭圆的面积等于 $\frac{\pi ab}{4}$.

其次, 我们再求椭圆绕 Ox 轴旋转所得的旋转体体积. 因为

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2),$$

所以

$$V = \pi \int_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} \pi ab^2.$$

按古尔金第二定理,我们有

$$2\pi\eta \frac{\pi ab}{4} = \frac{2}{3}\pi ab^2,$$

所以

$$\eta = \frac{4b}{3\pi}.$$

同理可求得

$$\xi = \frac{4a}{3\pi}.$$

事实上,只须在结果中将 a 和 b 对调即得. 于是,所求的

重心为 $\left(\frac{4a}{3\pi}, \frac{4b}{3\pi}\right)$.

2510. 求半径为 a 的均匀半球的重心坐标.

解 取圆心作为原点,则球的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

设重心为 (ξ, η, ζ) , 显见 $\xi = \eta = 0$. 而

$$V_{\text{半球}} = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

将圆

$$y^2 + z^2 = a^2.$$

绕 Oz 轴旋转,即得球.

又

$$\begin{aligned} M_1^{(x)} &= \int_{(V)} x dV = \pi \int_0^a z y^2 dz \\ &= \pi \int_0^a z (a^2 - z^2) dz = \frac{\pi a^4}{4}. \end{aligned}$$

最后得到

$$\zeta = \frac{M_1^{(z)}}{V} = \frac{\frac{\pi a^4}{4}}{\frac{2\pi a^3}{3}} = \frac{3a}{8}.$$

于是, 所求重心为 $(0, 0, \frac{3a}{8})$.

2511. 求对数螺线

$$r = ae^{m\varphi} \quad (m > 0)$$

上由点 $O(-\infty, 0)$ 到点 $P(\varphi, r)$ 的弧 OP 的重心 $C(\varphi_0, r_0)$ 之坐标. 当 P 点移动时, C 点画出怎样的曲线?

解 重心的直角坐标为

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\int_{(1)} x ds}{\int_{(1)} ds} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\varphi} r \cos \varphi \cdot \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} \sqrt{a^2(1+m^2)} e^{m\varphi} d\varphi} \\ &= \frac{a \int_{-\infty}^{\varphi} e^{2m\varphi} \cos \varphi d\varphi}{\int_{-\infty}^{\varphi} e^{m\varphi} d\varphi} \\ &= \frac{mae^{m\varphi}(\sin \varphi + 2m \cos \varphi)}{4m^2 + 1}. \end{aligned}$$

同法可得

$$\eta = \frac{\int_{(1)} y ds}{\int_{(1)} ds} = \frac{mae^{m\varphi}(2m \sin \varphi - \cos \varphi)}{4m^2 + 1}.$$

于是, 重心的极坐标为

$$r_0 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{ma}{4m^2 + 1} \sqrt{4m^2 + 1} e^{m\varphi}$$

$$= \frac{mr}{\sqrt{4m^2 + 1}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2m \operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 2m} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - \frac{1}{2m}}{1 + \frac{1}{2m} \operatorname{tg} \varphi}$$

即 $\varphi_0 = \varphi - \alpha$, 其中 $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2m}$.

当 P 点移动时, $C(\varphi_0, r_0)$ 画出的曲线为

$$r_0 = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m\varphi} = \frac{ma}{\sqrt{4m^2 + 1}} e^{m(\varphi_0 + \alpha)}.$$

这也是一条对数螺线.

2512. 求曲线 $r = a(1 + \cos \varphi)$ 所围面积的重心坐标.

解 计算时, 将小扇形的重量集中在其重心

$\left(\frac{2}{3}r \cos \varphi, \frac{2}{3}r \sin \varphi\right)$ 处. 由对称性知 $\eta = 0$, 而

$$\xi = \frac{\int_{(G)} xy dx}{\int_{(G)} y dx}$$

$$= \frac{\frac{2}{3} \int_0^\pi r \cos \varphi \cdot \frac{1}{2} r^2 d\varphi}{\int_0^\pi \frac{1}{2} r^2 d\varphi}$$

$$= \frac{2}{3} \frac{\int_0^\pi a^3 (1 + \cos \varphi)^3 \cos \varphi d\varphi}{\int_0^\pi a^2 (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2a \int_0^\pi (1 + 3\cos\varphi + 3\cos^2\varphi + \cos^3\varphi)\cos\varphi d\varphi}{3 \int_0^\pi (1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi} \\
 &= \frac{5a}{6}.
 \end{aligned}$$

于是,重心的极坐标为 $\varphi_0 = 0, r_0 = \frac{5a}{6}$.

2513. 求摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的第一拱与 Ox 轴所围成面积的重心的坐标.

解 由对称性知 $\xi = \pi a$. 由于面积 $S = 3\pi a^2$ *) 及面积 S 绕 Ox 轴旋转而成的曲面包围的体积 $V_x = 5\pi^2 a^3$ **), 利用古尔金第二定理, 即得重心 (ξ, η) 适合下列关系式

$$2\pi\eta \cdot S = V_x$$

或

$$\eta = \frac{V_x}{2\pi S} = \frac{5\pi^2 a^3}{2\pi \cdot 3\pi a^2} = \frac{5a}{6}.$$

于是,重心为 $(\pi a, \frac{5a}{6})$.

*) 利用 2413 题的结果.

**) 利用 2480 题(a) 的结果.

***) 参看 2506 题.

2514. 求面积 $0 \leq x \leq a, y^2 \leq 2px$ 绕 Ox 轴旋转所成旋转体的重心的坐标.

解 由对称性知 $\eta = 0$. 又

$$\xi = \frac{\int_0^a x\pi y^2 dx}{\int_0^a \pi y^2 dx} = \frac{\int_0^a 2px^2 dx}{\int_0^a 2p x dx}$$

$$= \frac{2}{3}a.$$

于是,所求的重心为 $(\frac{2}{3}a, 0)$.

2515. 求半球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (z \geq 0)$ 的重心的坐标.

解 由对称性知

$$\xi = \eta = 0.$$

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\int_0^a 2 \cdot 2\pi x \sqrt{1+x'^2} dz}{\int_0^a 2\pi x \sqrt{1+x'^2} dz} \\ &= \frac{\int_0^a 2\pi z \sqrt{a^2-z^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}} dz}{\int_0^a 2\pi \sqrt{a^2-z^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2-z^2}} dz} \\ &= \frac{2\pi a \int_0^a z dz}{2\pi a \int_0^a dz} = \frac{2\pi a \cdot \frac{1}{2}a^2}{2\pi a^2} = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

于是,所求的重心为 $(0, 0, \frac{a}{2})$.

*) 在此是将 $x^2 + z^2 = a^2$ 绕 Oz 轴旋转而得半球面.

§ 10. 力学和物理学中的问题

作成适当的积分和并找出它们的极限,来解下列问题:

2516. 轴的长度 $l = 10$ 米,若该轴的线性密度按定律 $\delta = 6 + 0.3x$ 千克/米而变更,其中 x 为距轴两端点中之一

端的距离,求轴的质量.

解 将轴 n 等分,每份的长 $\Delta x = \frac{10}{n}$. 把每小段近似地看成是均匀的,并以右端点的密度作为小段的密度. 这样,便得到轴的质量 M 的近似值,即

$$M \approx \sum_{i=1}^n \left(6 + 0.3 \times \frac{10}{n} i \right) \frac{10}{n}.$$

显然, n 愈大愈近似,于是,得轴的质量

$$\begin{aligned} M &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(6 + 0.3 \times \frac{10}{n} i \right) \frac{10}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[60 + \frac{15 \times (n+1)}{n} \right] = 75 \text{ (千克)}. \end{aligned}$$

2517. 把质量为 m 的物体从地球(其半径为 R) 表面升高到高度为 h 的地位,需要化费多大的功?若物体远离至无穷远去,则功等于什么?

解 由牛顿万有引力定律

$$f = k \frac{mM}{r^2},$$

其中 M 为地球的质量, r 为物体离开地球中心的距离, k 为比例常数. 将 h 分成 n 等份,在每份上把引力近似地看作是不变的,在第 i 份上取

$$r_i = \sqrt{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R \right] \left[\frac{h}{n}i + R \right]}, \text{ 则力}$$

$$f_i = k \frac{mM}{\left[\frac{h}{n}(i-1) + R \right] \cdot \left[\frac{h}{n}i + R \right]},$$

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{10}{n} \cdot \frac{10}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 50 \frac{n+1}{n} \\ = 50(\text{千克厘米}) = 0.5(\text{千克米}).$$

2519. 直径为 20 厘米, 长为 80 厘米的圆柱被压强为 10 千克/厘米² 的蒸汽充满着. 假定气体的温度不变, 要使气体的体积减小一半, 须要花费多大的功?

解 由波义耳—马利奥特定律有

$$pv = C,$$

其中 p 表示气体的压强, v 表示体积, C 为常量. 由条件知, 常量

$$C = 10 \cdot \pi \cdot 100 \cdot 80 = 800\pi(\text{千克米}).$$

设初始时气体体积为 v_0 , 将区间 $\left[\frac{v_0}{2}, v_0\right]$ 分成 n 个小区间, 分点依次为

$$\frac{v_0}{2}, \frac{v_0}{2}q, \frac{v_0}{2}q^2, \dots, \frac{v_0}{2}q^i, \dots, \frac{v_0}{2}q^n = v_0,$$

其中 $q = \sqrt[n]{\frac{v_0}{\frac{v_0}{2}}} = \sqrt[n]{2}$. 由于气体体积从 $\frac{v_0}{2}q^{i+1}$ 减小

至 $\frac{v_0}{2}q^i$ 须要花费功的近似值为

$$C \left(\frac{v_0}{2}q^i \right)^{-1} \left(\frac{v_0}{2}q^{i+1} - \frac{v_0}{2}q^i \right),$$

于是, 所要求的功

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n C \left(\frac{v_0}{2}q^i \right)^{-1} \left(\frac{v_0}{2}q^{i+1} - \frac{v_0}{2}q^i \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} Cn(\sqrt[n]{2} - 1) = C \ln 2^*$$

$$= 800\pi \cdot \ln 2 \doteq 1742(\text{千克米}).$$

*) 利用 541 题的结果 .

2520. 求水对于垂直壁上的压力, 这壁的形状为半圆形, 半径为 a 且其直径位于水的表面上 .

解 为求出水对半圆形的压力, 只要计算出作用于四分之一圆上的压力, 然后再把它两倍起来. 现将四分之一圆等分成 n 个圆心角为 $\Delta\theta$ 的小扇形(图 4.48). 作用于该小扇形上的压力的近似值为

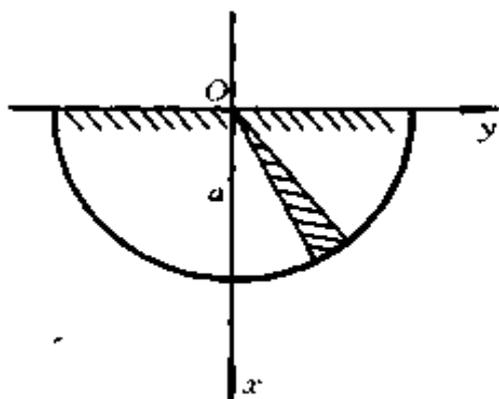


图 4.48

$$\frac{1}{2}a^2\Delta\theta \cdot \frac{2}{3}a\sin\theta_i,$$

其中 $\Delta\theta = \frac{\pi}{2n}, \theta_i = \frac{i\pi}{2n}$.

于是, 作用于半圆上的压力

$$\begin{aligned} P &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{2}{3}a\sin \frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n} \\ &= \frac{2a^3}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sin \frac{i\pi}{2n} \cdot \frac{\pi}{2n} = \frac{2a^3}{3}. \end{aligned}$$

*) 利用 2187 题的结果 .

2521. 求水对于垂直壁上的压力, 这壁的形状为梯形, 其下底 $a = 10$ 米, 上底 $b = 6$ 米, 高 $h = 5$ 米, 下底沉没于水面下的距离为 $c = 20$ 米 .

解 取坐标系如图 4.49 所示. AB 所满足的方程为

$$y = \frac{4}{5}x - 6.$$

将区间 $[15, 20]n$ 等分, 每份长 $\Delta x = \frac{5}{n}$. 对应于 Δx 的小条上所受的压力的近似值为

$$\left[\frac{4}{5} \left(15 + \frac{5i}{n} \right) - 6 \right] \left(15 + \frac{5i}{n} \right) \frac{5}{n}.$$

于是, 所要求的压力

$$\begin{aligned} P &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{4}{5} \left(15 + \frac{5i}{n} \right) - 6 \right] \left(15 + \frac{5i}{n} \right) \frac{5}{n} \\ &= 708 \frac{1}{3} (\text{吨})^* \end{aligned}$$

*) 仿照 2185 题和 2518 题的作法. 作出微分方程式以解下列问题:

2522. 点运动的速度是按下面的规律而变化:

$$v = v_0 + at.$$

问在闭间隔 $(0, T)$ 内这点经过的路程怎样?

解 设路程为 s , 则由导数的力学意义知

$$\frac{ds}{dt} = v = v_0 + at.$$

即 at 时间内经历的路程

$$ds = (v_0 + at)dt,$$

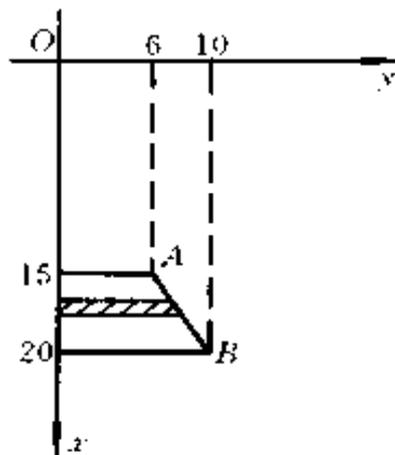


图 4.49

于是,

$$\begin{aligned} s &= \int_0^T (v_0 + at) dt \\ &= v_0 T + \frac{1}{2} a T^2. \end{aligned}$$

2523. 半径为 R 而密度为 δ 的均匀球体以角速度 ω 绕其直径而旋转. 求此球的动能.

解 已知半径为 R 质量为 M 的盘绕垂直盘心的轴的转动惯量为 $\frac{1}{2}MR^2$. 不妨设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 则考察以 dz 为厚度的垂直于 z 轴的圆盘, 其转动惯量为

$$\begin{aligned} dJ_z &= \frac{1}{2} \pi (R^2 - z^2) \delta \cdot (R^2 - z^2) dz \\ &= \frac{1}{2} \pi \delta (R^2 - z^2)^2 dz. \end{aligned}$$

从而球体的转动惯量

$$J_z = \int_{-R}^R \frac{1}{2} \pi \delta (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{8}{15} \pi \delta R^5.$$

于是, 球的动能

$$E = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{4}{15} \pi \delta \omega^2 R^5.$$

注 原题误为球壳, 现根据原答案予以改正.

2524. 具不变的线性密度 μ_0 的无穷直线以怎样的力吸引距此直线距离为 a 质量为 m 的质点?

解 取坐标系如图 4.50 所示, $|AO| = a$. 设引力在坐标轴上的射影为 F_x, F_y . 由于

$$dF_y = k \frac{m \mu_0 dx}{(a^2 + x^2)} \cos \varphi$$

$$= -\frac{km\mu_0 a}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

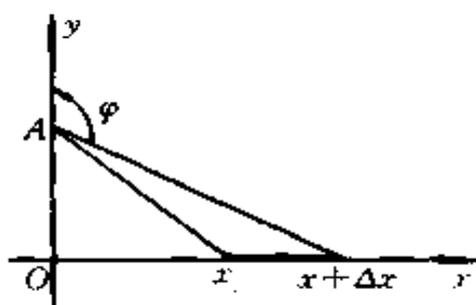


图 4.50

于是,

$$\begin{aligned} F_y &= -2km\mu_0 a \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -2km\mu_0 a \cdot \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 + x^2}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= -\frac{2km\mu_0}{a}. \end{aligned}$$

由对称性知, $F_x = 0$. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned} F_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{km\mu_0 \sin\varphi}{a^2 + x^2} dx \\ &= km\mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = 0. \end{aligned}$$

其中 k 为引力常数. 由上述分析知, 引力指向 y 轴的负向.

2525. 计算半径为 a 及固定的表面密度为 δ_0 的圆形薄板以怎样的力吸引质量为 m 的质点 P , 此质点位于通过薄板中心 Q 且垂直于薄板平面的垂直线上, 最短距离

PQ 等于 b .

解 取坐标系如图 4.51 所示. 显然, 引力指向 y 轴的正向. 对于以 x 为半径的圆环, 其质量为 $dm = \delta_0 \cdot 2\pi x dx$, 对质点 P 的引力

$$\begin{aligned} dF_y &= 2km\delta_0\pi \frac{\cos\theta}{b^2 + x^2} dx \\ &= 2km\delta_0\pi \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx, \end{aligned}$$

于是, 所要求的引力

$$\begin{aligned} F_y &= 2km\delta_0\pi \int_0^a \frac{bx}{(b^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= 2km\delta_0\pi \left(1 - \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right). \end{aligned}$$

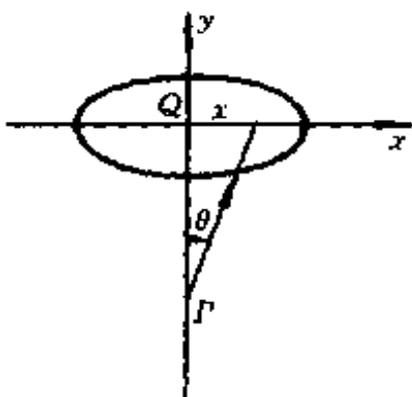


图 4.51

2526. 根据托里拆利定律, 液体从容器中流出的速度等于

$$v = c \sqrt{2gh},$$

式中 g 为重力加速度, h 为液体表面在开孔上之高, $c = 0.6$ 为实验系数.

直径为 $D = 1$ 米及高为 $H = 2$ 米的直立圆柱形

大桶, 充满之后从其底上直径为 $d = 1$ 厘米的圆孔流出, 须要多长时间, 完全流空?

解 取坐标系如图 4.52 所示. 对于 dt 时间, 从圆孔流出的液体体积 $dv = 0.15\pi \sqrt{2gx}dt$, 而桶内液体体积的减少量为

$dv = -\pi(50)^2 dx$, 其中 x 随时间 t 的增大而减小. 流出的量应等于桶内减少的量, 于是

$$-0.15\pi \sqrt{2gx}dt = \pi(50)^2 dx.$$

积分, 得

$$\int_0^t dt = - \int_{200}^x \frac{2500}{0.15} \frac{dx}{\sqrt{2gx}},$$

即

$$t = -33333 \frac{1}{\sqrt{2g}} (\sqrt{x} - \sqrt{200}),$$

其中 $g = 980$ 厘米/秒². 当 $x = 0$ 时, t 表示水流完所需的时间. 因而所要求的时间

$$t = \frac{33333 \sqrt{200}}{\sqrt{2 \times 980}} = 10648 \text{ (秒)}.$$

2527. 旋转体的容器应当是什么形状, 才能使液体流出时, 液体表面的下降是均匀的?

解 取坐标系如图 4.53 所示. 不妨设流出孔的半径

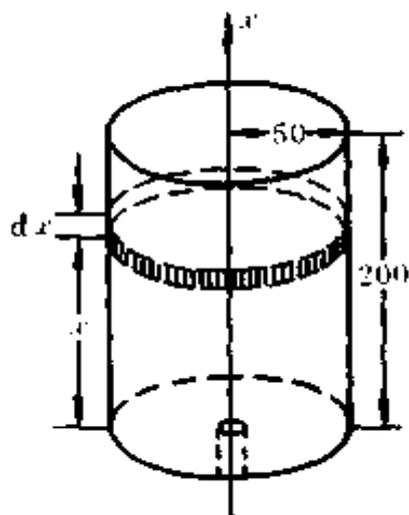


图 4.52

为单位厘米.

仿上题分析,得

$$\begin{aligned}\pi x^2 dy &= -\pi v dt \\ &= -\pi c \sqrt{2gy} dt,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}dy &= -c \sqrt{2g} \\ &\cdot \frac{\sqrt{y}}{x^2} dt.\end{aligned}$$

其中 c 为实验系数, g 为重力加速度.

由题意知

$$\frac{dy}{dt} = -c \sqrt{2g} \frac{\sqrt{y}}{x^2}$$

应等于常数 k , 即

$$-c \sqrt{2g} \frac{\sqrt{y}}{x^2} = k,$$

于是

$$y = Cx^4,$$

其中 C 为常数. 所以, 容器应当是把曲线 $y = Cx^4$ 绕铅直轴 Oy 旋转而得的曲面所构成的.

2528. 镭在每一时刻的分解速度与其现存的数量成比例, 设在开始的时刻 $t = 0$ 有镭 Q_0 克, 经过时间 $T = 1600$ 年它的量减少了一半. 求镭分解的规律.

解 设 Q 为镭现存的数量, 按题设有

$$\frac{dQ}{dt} = kQ,$$

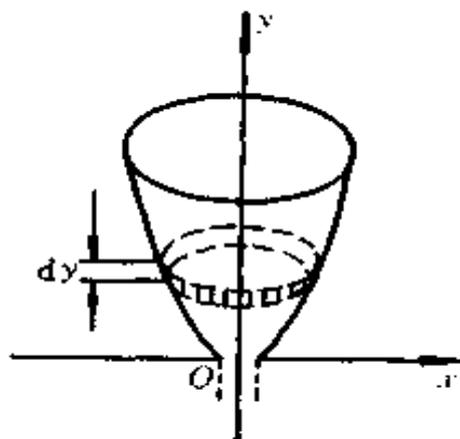


图 1.53

其中 k 为比例系数, 即

$$\frac{dQ}{Q} = kdt,$$

两端积分

$$\int_{Q_0}^{\frac{Q_0}{2}} \frac{dQ}{Q} = \int_0^{1600} kdt,$$

从而

$$k = -\frac{\ln 2}{1600}.$$

于是

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = -\frac{\ln 2}{1600} \int_0^t dt,$$
$$\ln \frac{Q}{Q_0} = \ln 2^{-\frac{t}{1600}},$$

所以, 镭的分解规律为

$$Q = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{1600}}.$$

2529⁺. 变换物质 A 为物质 B 的二阶化学反应之速度与此二物质的浓度相乘之积成正比. 问经过 $t = 1$ 小时在容器中所含有的物质 B 之百分率如何? 设 $t = 0$ 分时有 20% 的物质 B , 而当 $t = 15$ 分它变成 80%.

解 设 x 为生成物 B 的浓度, 按题设有

$$\frac{dx}{dt} = kx(1-x),$$

其中 k 为比例常数, 即

$$\frac{dx}{x(1-x)} = kdt.$$

两端积分

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{3}\pi r^2(H-h)\gamma}{\pi r^2 E} \\
 &= \frac{1}{3} \frac{(H-h)\gamma}{E},
 \end{aligned}$$

即

$$dl = \frac{1}{3} \frac{(H-h)\gamma}{E} dh.$$

于是圆锥形重棒总的伸长量为

$$\begin{aligned}
 l &= \int_0^H \frac{1}{3} \frac{(H-h)\gamma}{E} dh \\
 &= \frac{\gamma H^2}{6E}.
 \end{aligned}$$

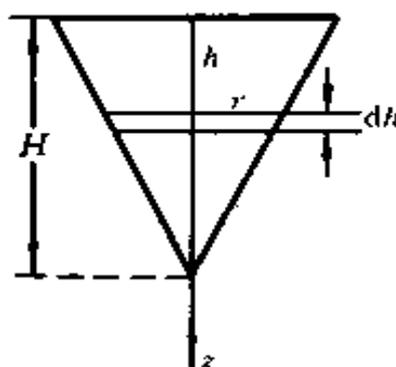


图 4.54

§ 11. 定积分的近似计算法

1° 矩形公式 若函数 $y = y(x)$ 于有穷的闭区间 $[a, b]$ 上连续且可微分充分多次数, 并且 $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih (i = 0, 1, \dots, n)$, $y_i = y(x_i)$, 则

$$\int_a^b y(x) dx = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) + R_n,$$

式中

$$R_n = \frac{(b-a)^2}{2n} y'(\xi) (a \leq \xi \leq b).$$

2° 梯形公式 用相同的记号有

$$\begin{aligned}
 \int_a^b y(x) dx &= h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right) \\
 &\quad + R_n,
 \end{aligned}$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi') \quad (a \leq \xi' \leq b).$$

3° 抛物线公式(辛普森公式) 命 $n = 2k$, 得

$$\int_a^b y(x) dx = \frac{h}{3} [(y_0 + y_{2k}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2})] + R_n,$$

式中

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi'') \quad (a \leq \xi'' \leq b).$$

2531. 利用矩形公式($n = 12$), 近似地计算

$$\int_0^{2\pi} x \sin x dx$$

并把结果同精确答数比较.

解 $h = \frac{\pi}{6}.$

$$x_0 = 0, y_0 = 0;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, y_1 = \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{6} = 0.2618;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, y_2 = \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{3} = 0.9069;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}, y_3 = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = 1.5708;$$

$$x_4 = \frac{2\pi}{3}, y_4 = \frac{2\pi}{3} \sin \frac{2\pi}{3} = 1.8138;$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{6}, y_5 = \frac{5\pi}{6} \sin \frac{5\pi}{6} = 1.3090;$$

$$x_6 = \pi, y_6 = \pi \sin \pi = 0;$$

$$x_7 = \frac{7\pi}{6}, y_7 = \frac{7\pi}{6} \sin \frac{7\pi}{6} = -1.8326;$$

$$x_8 = \frac{4\pi}{3}, y_8 = \frac{4\pi}{3} \sin \frac{4\pi}{3} = -3.6276;$$

$$x_9 = \frac{3\pi}{2}, y_9 = \frac{3\pi}{2} \sin \frac{3\pi}{2} = -4.7124;$$

$$x_{10} = \frac{5\pi}{3}, y_{10} = \frac{5\pi}{3} \sin \frac{5\pi}{3} = -4.5345;$$

$$x_{11} = \frac{11\pi}{6}, y_{11} = \frac{11\pi}{6} \sin \frac{11\pi}{6} = -2.8798.$$

按矩形公式,得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} x \sin x dx \\ &= \frac{\pi}{6} (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 \\ & \quad + y_8 + y_9 + y_{10} + y_{11}) \\ & \doteq -6.1390. \end{aligned}$$

实际上,

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} x \sin x dx \\ &= -x \cos x \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos x dx \\ & \doteq -6.2832. \end{aligned}$$

利用梯形公式计算下列积分并估计它们的误差:

2532. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} \quad (n=8).$

解 $h = \frac{1}{8} = 0.125.$

$$x_0 = 0, y_0 = 1; \quad \frac{y_0 + y_8}{2} = 0.75,$$

$$x_8 = 1, y_8 = 0.5;$$

$$x_1 = \frac{1}{8} = 0.125, y_1 = 0.88889;$$

$$\begin{aligned}
 x_2 &= 0.25, & y_2 &= 0.8; \\
 x_3 &= 0.375, & y_3 &= 0.72727; \\
 x_4 &= 0.5, & y_4 &= 0.66667; \\
 x_5 &= 0.625, & y_5 &= 0.61538; \\
 x_6 &= 0.75, & y_6 &= 0.57143; \\
 x_7 &= 0.875, & y_7 &= 0.53333(+ \\
 & & \sum_{i=1}^7 y_i &= 4.80297.
 \end{aligned}$$

按梯形公式,得

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \frac{dx}{1+x} &= h \left(\frac{y_0 + y_8}{2} + \sum_{i=1}^7 y_i \right) \\
 &= 0.125(0.75 + 4.80297) \\
 &\doteq 0.69412,
 \end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \left| \frac{1}{12 \times 8^2} \cdot \frac{2}{(1+\xi)^3} \right| \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

于是,

$$|R_n| \leq \frac{2}{12 \times 8^2} < 0.0027 = 2.7 \times 10^{-3}$$

实际上,

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x) \Big|_0^1 = \ln 2 \doteq 0.69315.$$

2533. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} \quad (n=12).$

解 $h = \frac{1}{12} = 0.08333.$

$$x_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$x_{12} = 1, y_{12} = \frac{1}{2} = 0.5; \quad \frac{y_0 + y_{12}}{2} = 0.75,$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{12}, & y_1 &= 0.99942; \\
x_2 &= \frac{1}{6}, & y_2 &= 0.99539; \\
x_3 &= \frac{1}{4}, & y_3 &= 0.98462; \\
x_4 &= \frac{1}{3}, & y_4 &= 0.96429; \\
x_5 &= \frac{5}{12}, & y_5 &= 0.93254; \\
x_6 &= \frac{1}{2}, & y_6 &= 0.88889; \\
x_7 &= \frac{7}{12}, & y_7 &= 0.83438; \\
x_8 &= \frac{2}{3}, & y_8 &= 0.77143; \\
x_9 &= \frac{3}{4}, & y_9 &= 0.70330; \\
x_{10} &= \frac{5}{6}, & y_{10} &= 0.63343; \\
x_{11} &= \frac{11}{12}, & y_{11} &= 0.56489(+ \\
& & \sum_{i=1}^{11} y_i &= 9.27258.
\end{aligned}$$

按梯形公式,得

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} &= h \left(\frac{y_0 + y_{12}}{2} + \sum_{i=1}^{11} y_i \right) \\
&= 0.0833(0.75 + 9.27258) \\
&\doteq 0.83518,
\end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \left| \frac{1}{12 \times 12^2} \cdot \frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1 + \xi^3)^3} \right| \quad (0 \leq \xi \leq 1).$$

利用求极值的方法, 估计得 $\left| \frac{12\xi^4 - 6\xi}{(1 + \xi^3)^3} \right|$ 在 $[0, 1]$ 上不超过 2. 于是,

$$|R_n| \leq \frac{2}{12 \times 12^2} < 0.00116 = 1.16 \times 10^{-3}.$$

实际上,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^3} &= \left[\frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \\ &= 0.83565. \end{aligned}$$

*) 利用 1881 题的结果。

$$2534. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4} \sin^2 x} dx \quad (n=6).$$

$$\text{解} \quad h = \frac{\pi}{12} = 0.2618,$$

$$x_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$x_6 = \frac{\pi}{2}, y_6 = 0.8660;$$

$$\frac{y_0 + y_6}{2} = 0.9330,$$

$$x_1 = \frac{\pi}{12}, y_1 = 0.9916;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6}, y_2 = 0.9682;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{4}, y_3 = 0.9354;$$

$$x_4 = \frac{\pi}{3}, y_4 = 0.9014;$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{12}, y_5 = 0.8756 \quad (+$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i = 4.6722.$$

按梯形公式,得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x} dx &= h \left(\frac{y_0 + y_6}{2} + \sum_{i=1}^5 y_i \right) \\ &= 0.2618(0.9330 + 4.6724) \\ &\doteq 1.4674. \end{aligned}$$

误差为

$$|R_n| = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3}{12 \times 6^2} |y''(\xi)|,$$

式中 $y = \sqrt{1 - \frac{1}{4}\sin^2 x}$, $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$. 利用 $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq y \leq 1$ 及 $y^2 = 1 - \frac{1}{4}\sin^2 x$, 依次求导可得 $|y''| \leq \frac{\sqrt{3}}{6}$. 于是,

$$|R_n| \leq \frac{\pi^3}{8 \times 12 \times 6^2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} < 2.59 \times 10^{-3}.$$

利用辛普森公式计算下列积分:

2535. $\int_1^9 \sqrt{x} dx \quad (n=4).$

解 $h=2.$

$$x_0 = 1, y_0 = 1;$$

$$x_1 = 3, y_1 = \sqrt{3} = 1.732;$$

$$x_2 = 5, y_2 = \sqrt{5} = 2.236;$$

$$x_3 = 7, y_3 = \sqrt{7} = 2.646;$$

$$x_4 = 9, y_4 = 3;$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} \int_1^9 \sqrt{x} dx &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2] \\ &= \frac{2}{3} [4 + 4(1.732 + 2.646) \\ &\quad + 2(2.236)] \\ &\doteq 17.323. \end{aligned}$$

实际上,

$$\int_1^9 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^9 = \frac{52}{3} \doteq 17.333.$$

2536. $\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx \quad (n = 6).$

解 $h = \frac{\pi}{6}.$

$$x_0 = 0, y_0 = 2;$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\pi}{6}, y_1 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3.866} \\ &= 1.966; \end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3}, y_2 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3.5} = 1.871;$$

$$x_3 = \frac{\pi}{2}, y_3 = \sqrt{3 + \cos \frac{\pi}{2}} = \sqrt{3} = 1.732;$$

$$x_4 = \frac{2\pi}{3}, y_4 = \sqrt{3 + \cos \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2.5} = 1.581;$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{6}, y_5 = \sqrt{3 + \cos \frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2.134} \\ = 1.461;$$

$$x_6 = \pi, y_6 = \sqrt{3 + \cos \pi} = \sqrt{2} = 1.414.$$

按辛普森公式,得

$$\int_0^{\pi} \sqrt{3 + \cos x} dx \\ = \frac{\pi}{18} [(2 + 1.414) + 4(1.966 + 1.736 + 1.461) \\ + 2(1.871 + 1.581)] \\ = 5.4053.$$

$$2537^+ \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \quad (n = 10).$$

解 $h = \frac{\pi}{20}$

$$x_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$x_1 = \frac{\pi}{20}, y_1 = \frac{20}{\pi} \sin \frac{\pi}{20} = 0.99589;$$

$$x_2 = \frac{\pi}{10}, y_2 = \frac{10}{\pi} \sin \frac{\pi}{10} = 0.98363;$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{20}, y_3 = \frac{20}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{20} = 0.96340;$$

$$x_4 = \frac{\pi}{5}, y_4 = \frac{5}{\pi} \sin \frac{\pi}{5} = 0.93549;$$

$$x_5 = \frac{\pi}{4}, y_5 = \frac{4}{\pi} \sin \frac{\pi}{4} = 0.90032;$$

$$x_6 = \frac{3\pi}{10}, y_6 = \frac{10}{3\pi} \sin \frac{3\pi}{10} = 0.85839;$$

$$x_7 = \frac{7\pi}{20}, y_7 = \frac{20}{7\pi} \sin \frac{7\pi}{20} = 0.81033;$$

$$x_5 = \frac{5}{6}, y_5 = 1.3748;$$

$$x_6 = 1, y_6 = 1.4427.$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x dx}{\ln(1+x)} &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) \\ &\quad + 2(y_2 + y_4)] \\ &= \frac{1}{18} [(1 + 1.4427) + 4(1.0812 \\ &\quad + 1.2332 + 1.3748) + 2(1.1587 \\ &\quad + 1.3051)] \\ &\doteq 1.2293. \end{aligned}$$

2539. 取 $n = 10$, 计算加达郎常数

$$G = \int_0^1 \frac{\text{arc } \text{tg} x}{x} dx.$$

解 $h = \frac{1}{10}.$

$$x_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$x_1 = 0.1, y_1 = 0.99669;$$

$$x_2 = 0.2, y_2 = 0.98698;$$

$$x_3 = 0.3, y_3 = 0.97152;$$

$$x_4 = 0.4, y_4 = 0.95127;$$

$$x_5 = 0.5, y_5 = 0.92730;$$

$$x_6 = 0.6, y_6 = 0.90070;$$

$$x_7 = 0.7, y_7 = 0.87247;$$

$$x_8 = 0.8, y_8 = 0.84343;$$

$$x_9 = 0.9, y_9 = 0.81424;$$

$$x_{10} = 1, \quad y_{10} = 0.78540.$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} G &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) \\ &\quad + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)] \\ &= \frac{1}{30} (1.78540 + 18.32888 + 7.36476) \\ &= 0.91597. \end{aligned}$$

2540. 利用公式

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

计算数 π 精确到 10^{-5} .

解 利用辛普森公式计算其误差

$$R_n(x) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) \quad (a \leq \xi \leq b).$$

现在 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 事实上, 它是 $y = \arctan x$ 的导数, 因而

$$f^{(4)}(x) = (\arctan x)^{(5)}.$$

利用第二章 1218 题的结果得知

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}} \sin\left(5 \arctan \frac{1}{x}\right).$$

在区间 $[0, 1]$ 上,

$$|f^{(4)}(x)| \leq 24,$$

所以

$$|R_n(x)| \leq \frac{24}{180n^4}.$$

欲误差小于 0.00001, 只需

$$\frac{24}{180n^4} < \frac{1}{100000},$$

即只需取 $n = 12$, 就有 $|R_n| \leq 6.5 \times 10^{-6}$.

其次, 我们还必须加进近似于函数值的误差, 设法使这个新的误差小于 3.6×10^{-6} , 这样, 就能保证总误差小于 10^{-5} . 为了这个目的, 只要计算 $\frac{1}{1+x^2}$ 的值到六位小数精确到 0.5×10^{-6} 就够了.

现取 $n = 12$, 则有

$$x_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$x_1 = \frac{1}{12}, y_1 = 0.993103;$$

$$x_2 = \frac{1}{6}, y_2 = 0.972973;$$

$$x_3 = \frac{1}{4}, y_3 = 0.941176;$$

$$x_4 = \frac{1}{3}, y_4 = 0.900000;$$

$$x_5 = \frac{5}{12}, y_5 = 0.852071;$$

$$x_6 = \frac{1}{2}, y_6 = 0.800000;$$

$$x_7 = \frac{7}{12}, y_7 = 0.746114;$$

$$x_8 = \frac{2}{3}, y_8 = 0.692308;$$

$$x_9 = \frac{3}{4}, y_9 = 0.640000;$$

$$x_{10} = \frac{5}{6}, y_{10} = 0.590164;$$

$$x_{11} = \frac{11}{12}, y_{11} = 0.543396;$$

$$x_{12} = 1, y_{12} = 0.500000.$$

最后得到

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{36} [(y_0 + y_{12}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9 \\ &\quad + y_{11}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8 + y_{10})] \\ &= 0.785398, \end{aligned}$$

所以

$$\pi \doteq 0.785398 \times 4 = 3.14159,$$

精确到 0.00001.

2541. 计算

$$\int_0^1 e^{x^2} dx$$

精确到 0.001.

解 采用辛普森公式计算, 则其误差

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -\frac{1}{180n^4} 2e^{\xi^2} (8\xi^4 + 24\xi^2 + 6) \\ &\quad (0 < \xi < 1), \end{aligned}$$

$$\text{故有 } |R_n(x)| < \frac{1}{180n^4} \cdot 2e \cdot 38.$$

要 $|R_n(x)| < 10^{-3}$, 只须 $\frac{2 \cdot 38 \cdot e^1}{180n^4} < 10^{-3}$, 即只须取

$$n = 6.$$

现取 $n = 6$, 则有

$$x_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$x_1 = \frac{1}{6}, y_1 = e^{\frac{1}{36}} = 1.0282;$$

$$x_2 = \frac{1}{3}, y_2 = e^{\frac{1}{9}} = 1.1175;$$

$$x_3 = \frac{1}{2}, y_3 = e^{\frac{1}{4}} = 1.2840;$$

$$x_4 = \frac{2}{3}, y_4 = e^{\frac{4}{9}} = 1.5596;$$

$$x_5 = \frac{5}{6}, y_5 = e^{\frac{25}{36}} = 2.0026;$$

$$x_6 = 1, y_6 = e = 2.7183.$$

于是,

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \frac{1}{18} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \doteq 1.463.$$

2542. 计算

$$\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx \text{ 精确到 } 10^{-4}.$$

解 对于函数 $f(x) = e^x$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上采用台劳展式以及相应的拉格朗日余项公式来估算误差:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \Delta_{n+1},$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1} &= \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \\ &= \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

于是

$$|\Delta_{n+1}| \leq \frac{e}{(n+1)!} x^{n+1},$$

从而原来的积分数值为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \int_0^1 x^k \ln \frac{1}{x} dx + R_{n+1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} |R_{n+1}| &= \left| \int_0^1 \Delta_{n+1} \ln \frac{1}{x} dx \right| \\ &\leq \frac{e}{(n+1)!} \int_0^1 x^{n+1} \ln \frac{1}{x} dx. \end{aligned}$$

记 $I_k = \int_0^1 x^k \ln \frac{1}{x} dx$ ($k \geq 1$), 则有

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{k+1} \int_0^1 \ln \frac{1}{x} d(x^{k+1}) \\ &= \frac{1}{k+1} x^{k+1} \ln \frac{1}{x} \Big|_0^1 + \frac{1}{k+1} \int_0^1 x^k dx \\ &= \frac{1}{(k+1)^2}. \end{aligned}$$

如果取 $n = 5$, 则有

$$\begin{aligned} |R_6| &\leq \frac{e}{6!} I_6 = \frac{e}{6!} \cdot \frac{1}{7^2} = \frac{e}{7 \times 7!} \\ &= \frac{e}{35280} < \frac{3}{35280} < \frac{1}{1.1 \times 10^4} < 10^{-4}. \end{aligned}$$

记 $I = J + R_6$, 则有

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} I_k = \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(k+1)^2} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{1}{(k+1)! (k+1)} \\ &= \frac{1}{2!2} + \frac{1}{3!3} + \frac{1}{4!4} + \frac{1}{5!5} + \frac{1}{6!6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{4320} \\
&= 0.31787^+ = 0.3179 + \Delta',
\end{aligned}$$

其中 $|\Delta'| \leq 0.00004 = 4 \times 10^{-5}$ 且 $\Delta' < 0$.

注意到由 $\Delta_{n+1} > 0$ 即可推知 $R_{n+1} > 0$. 于是

$$\begin{aligned}
I &= J + R_6 = 0.3179 + (R_6 + \Delta') \\
&= 0.3179 + (R_6 - |\Delta'|) = 0.3179 + \Delta,
\end{aligned}$$

且有 $I \doteq 0.3179$, 而此时其相应的误差已有

$$\begin{aligned}
|\Delta| = |R_6 - |\Delta'|| &\leq \begin{cases} R_6, & \text{若 } |\Delta'| \leq R_6, \\ |\Delta'|, & \text{若 } |\Delta'| > R_6 \end{cases} \\
&\leq \max(R_6, |\Delta'|) < 10^{-4}.
\end{aligned}$$

注 本题不能直接利用辛普森公式来计算所给的定积分的近似值, 因为被积函数 $(e^x - 1)\ln \frac{1}{x}$ 的四阶导函数在 $x = 0$ 的右近旁是无界的, 从而不能估计出误差. 所以, 上面我们用台劳公式来作近似计算. 这样, 计算以及估计误差都较为简单. 当然, 也可间接地利用辛普森公式来计算所给定积分的近似值, 这时需要或者改变被积函数或者把积分区间分成两个. 例如, 我们可以改变被积函数如下: 令

$$I = \int_0^1 (e^x - 1)\ln \frac{1}{x} dx = - \int_0^1 (e^x - 1)\ln x dx,$$

设 $f(x) = (e^x - 1)\ln x$, 若补充定义

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow +0} f(x) = 0,$$

则 $f(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数. 由于

$$f'(x) = e^x \ln x + \frac{e^x - 1}{x}$$

$$= f(x) + \frac{e^x - 1}{x} + \ln x (0 < x \leq 1),$$

故

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx \\ &\quad + \int_0^1 \ln x dx. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x) dx &= f(1) - f(0) = 0, \\ \int_0^1 \ln x dx &= (x \ln x - x) \Big|_0^1 = -1, \end{aligned}$$

得

$$I = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx - 1.$$

于是,我们把求 $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$ 的近似值问题,归结

为求 $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$ 的近似值问题. 令 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$, 并补充定义

$$g(0) = \lim_{x \rightarrow +0} g(x) = 1,$$

则 $g(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数. 由求高阶导数的莱布尼兹法则, 易得

$$g^{(n)}(x) = \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}} (0 < x \leq 1),$$

其中 $P_n(x) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k k! x^{n-k} \quad (n = 1, 2, \dots).$

下面证明 $g^{(n)}(0)$ 存在并且 $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} (n = 1, 2, \dots)$. 首先, 由洛比塔法则, 我们有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} g^{(n)}(x) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x P_n(x) - (-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x [P_n(x) + P'_n(x)]}{(n+1)x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x x^n}{(n+1)x^n} = \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是, 根据中值定理, 得

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{\xi \rightarrow +0} g'(\xi) \\ &= \frac{1}{2} \quad (0 < \xi < x). \end{aligned}$$

今假定 $g^{(n)}(0)$ 存在且 $g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$. 于是,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{g^{(n)}(x) - g^{(n)}(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} g^{(n+1)}(\eta) = \frac{1}{n+2} \quad (0 < \eta < x). \end{aligned}$$

根据数学归纳法, 知 $g^{(n)}(0)$ 存在且

$$g^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots).$$

由此又知 $g^{(n)}(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的连续函数 ($n=1, 2, \dots$). 令 $h(x) = e^x P_n(x) - (-1)^n n!$. 由于

$$\begin{aligned} h'(x) &= e^x [P_n(x) + P'_n(x)] = e^x x^n > 0 \\ &\quad (\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时}), \end{aligned}$$

故 $h(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是严格增大的, 从而

$$h(x) > h(0) = 0 \quad (\text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时}).$$

因此, 当 $0 < x \leq 1$ 时 $g^{(n)}(x) > 0$ ($n=1, 2, \dots$), 所以 $g^{(n-1)}(x)$ 是 $0 \leq x \leq 1$ 上的严格增函数 ($n=1, 2, \dots$).

特别, $g^{(4)}(x)$ 当然是 $0 \leq x \leq 1$ 上的严格增函数. 于

令 $u = \frac{1-x}{x}$ ($0 < x < 1$), 则 $\frac{1}{x} = 1 + u$ ($u > 0$).

于是, 当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} 0 < (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} &= (e^x - 1) \ln(1 + u) \\ &< (e^x - 1)u = \frac{1-x}{x}(e^x - 1) < \frac{e^x - 1}{x}. \end{aligned}$$

前面已证函数 $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上是严格增大的(注意, 规定 $g(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$), 故当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$1 < \frac{e^x - 1}{x} < g(1) = e - 1 < 2;$$

从而

$$\begin{aligned} 0 < \int_0^{10^{-5}} (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx &< \int_0^{10^{-5}} \frac{e^x - 1}{x} dx \\ &< 2 \int_0^{10^{-5}} dx = 0.2 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

求出函数 $(e^x - 1) \ln \frac{1}{x}$ 的四阶导函数的表达式后, 易知它在闭区间 $10^{-5} \leq x \leq 1$ 上是连续的, 从而是有界的, 并且不难估计出其绝对值的上界. 因此, 可利用辛普森公式计算积分

$$\int_{10^{-5}}^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x} dx$$

的近似值, 使误差的绝对值小于 0.8×10^{-4} . 显然, 若以此作为积分 $\int_0^1 (e^x - 1) \ln \frac{1}{x}$ 的近似值, 则其误差的

绝对值小于 10^{-4} . 由于计算较繁, 从略.

2543. 近似地计算概率积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

解 作变换

$$x = \frac{t}{1-t},$$

则积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt.$$

由于题中对精确度未提出明确要求, 故 n 可任取. 例如

取 $n = 2k = 18, \Delta t = \frac{1}{18}$, 则有

$$t_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{1}{18}, 4y_1 = 4.46894;$$

$$t_2 = \frac{1}{9}, 2y_2 = 2.49201;$$

$$t_3 = \frac{1}{6}, 4y_3 = 5.53415;$$

$$t_4 = \frac{2}{9}, 2y_4 = 3.04696;$$

$$t_5 = \frac{5}{18}, 4y_5 = 6.61414;$$

$$t_6 = \frac{1}{3}, 2y_6 = 3.50460;$$

$$t_7 = \frac{7}{18}, 4y_7 = 7.14411;$$

$$t_8 = \frac{4}{9}, 2y_8 = 3.41685;$$

$$t_9 = \frac{1}{2}, 4y_9 = 5.88607;$$

$$t_{10} = \frac{5}{9}, 2y_{10} = 2.12232;$$

$$t_{11} = \frac{11}{18}, 4y_{11} = 2.23855;$$

$$t_{12} = \frac{2}{3}, 2y_{12} = 0.32968;$$

$$t_{13} = \frac{13}{18}, 4y_{13} = 0.06009;$$

$$t_{14} = \frac{7}{9}, 2y_{14} = 0.00010;$$

$$t_{15} = \frac{5}{6}, 4y_{15} = 0;$$

$$t_{16} = \frac{8}{9}, 2y_{16} = 0;$$

$$t_{17} = \frac{17}{18}, 4y_{17} = 0;$$

$$t_{18} = 1, y_{18} = \lim_{t \rightarrow 1} e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \left(\frac{1}{1-t}\right)^2 = 0.$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \int_0^1 e^{-\left(\frac{t}{1-t}\right)^2} \frac{1}{(1-t)^2} dt \\ &= \frac{1}{54} (1 + 4.46894 + 2.49201 \\ &\quad + 5.53415 + 3.04696 + 6.61414 \\ &\quad + 3.50460 + 7.14411 + 3.41685 \\ &\quad + 5.88607 + 2.12232 + 2.23855 \\ &\quad + 0.32968 + 0.06009 + 0.00010) \\ &= \frac{47.85857}{54} \doteq 0.88627. \end{aligned}$$

2544. 近似地求出半轴为 $a = 10$ 及 $b = 6$ 的椭圆的周长.

解 设椭圆的参数方程为

$$x = 10\cos t, y = 6\sin t.$$

于是有 $ds = \sqrt{x_i'^2 + y_i'^2} dt = 10\sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t} dt$,

从而得椭圆的周长为

$$s = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} ds = 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t} dt.$$

现取 $n = 2k = 6$ 近似计算积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25}\sin^2 t} dt.$$

注意到 $\sin^2 \frac{\pi}{12} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4}$, $\sin^2 \frac{5\pi}{12} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}$,

$h = \frac{\pi}{12}$, 即有

$$t_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{12}, 4y_1 = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4}(2 - \sqrt{3})} \\ = 3.913;$$

$$t_2 = \frac{\pi}{6}, 2y_2 = 2\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4}} = 1.833;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{4}, 4y_3 = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{2}} = 3.293;$$

$$t_4 = \frac{\pi}{3}, 2y_4 = 2\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{3}{4}} = 1.442;$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{12}, 4y_5 = 4\sqrt{1 - \frac{16}{25} \cdot \frac{1}{4}(2 + \sqrt{3})}$$

$$= 2.539;$$

$$t_6 = \frac{\pi}{2}, y_6 = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = 0.6.$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt \\ &= \frac{h}{3} [(y_0 + y_6) + 4(y_1 + y_3 + y_5) + 2(y_2 + y_4)] \\ &= \frac{\pi}{36} (1 + 0.6 + 3.913 + 3.298 + 2.539 + 1.833 \\ & \quad + 1.442) \\ &\doteq 1.276, \end{aligned}$$

所以,椭圆周长的近似值为

$$\begin{aligned} s &= 40 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \frac{16}{25} \sin^2 t} dt \\ &= 40 \times 1.276 = 51.04. \end{aligned}$$

2545. 取 $\Delta x = \frac{\pi}{3}$, 按点子作出函数

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

的图形.

解 取 $n = 2k = 6$ 计算函数 $y = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$ 的值.

先计算 $y = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt$. 由于 $h = \frac{\pi}{18}$, 且

$$t_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{18}, 4y_1 = 3.980;$$

$$t_2 = \frac{\pi}{9}, 2y_2 = 1.960;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{6}, 4y_3 = 3.820;$$

$$t_4 = \frac{2\pi}{9}, 2y_4 = 1.841;$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{18}, 4y_5 = 3.511;$$

$$t_6 = \frac{\pi}{3}, y_6 = 0.827.$$

按辛普森公式,得

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt &= \frac{\pi}{54} (1 + 0.827 + 3.980 + 3.820 \\ &\quad + 3.511 + 1.960 + 1.841) \\ &\doteq 0.99. \end{aligned}$$

再计算 $y = \int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt$. 由于 $h = \frac{\pi}{9}$, 且

$$t_0 = 0, y_0 = 1;$$

$$t_1 = \frac{\pi}{9}, 4y_1 = 3.919;$$

$$t_2 = \frac{2\pi}{9}, 2y_2 = 1.841;$$

$$t_3 = \frac{\pi}{3}, 4y_3 = 3.308;$$

$$t_4 = \frac{4\pi}{9}, 2y_4 = 1.411;$$

$$t_5 = \frac{5\pi}{9}, 4y_5 = 2.257;$$

$$t_6 = \frac{2\pi}{3}, y_6 = 0.413.$$

所以,

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

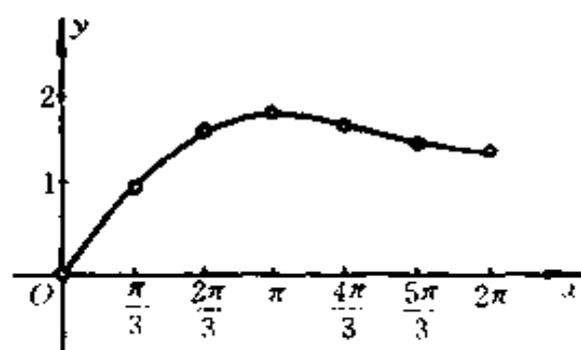


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

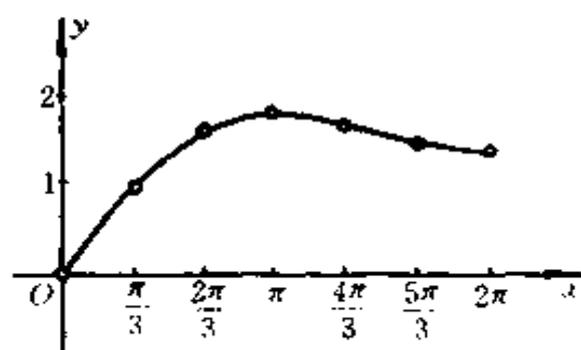


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

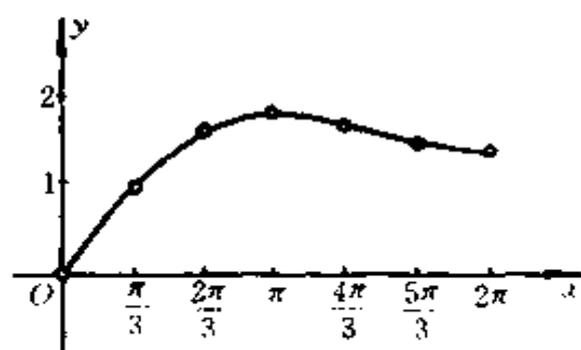


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

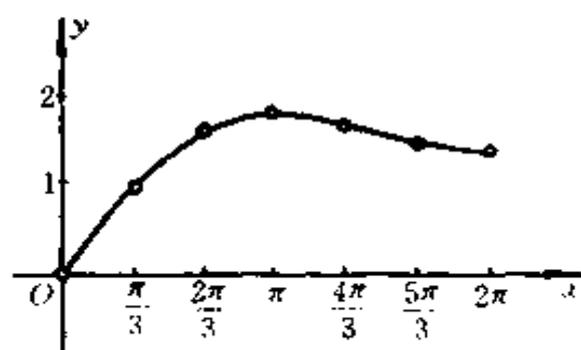


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

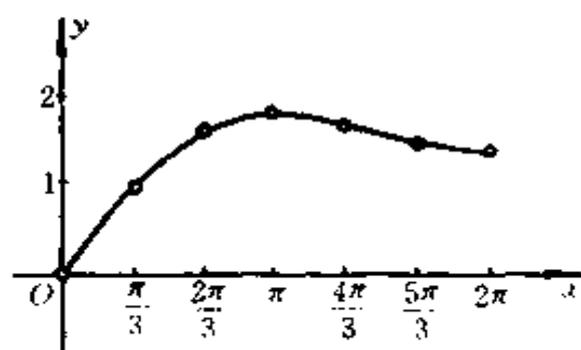


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

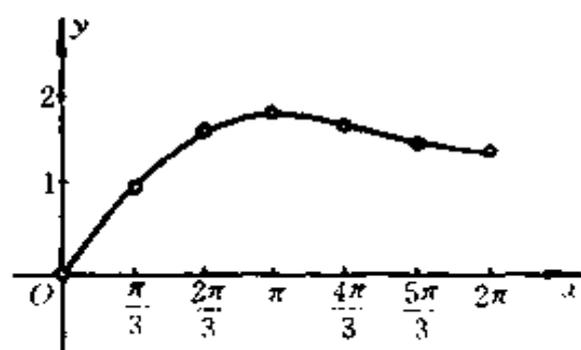


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

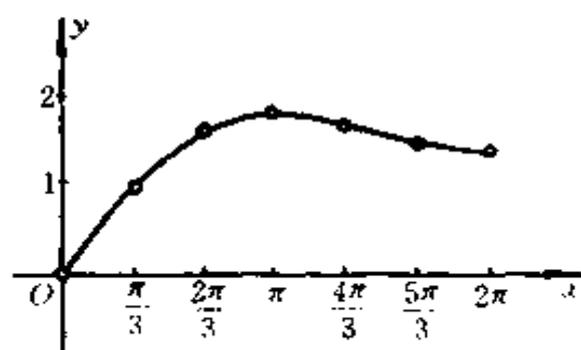


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

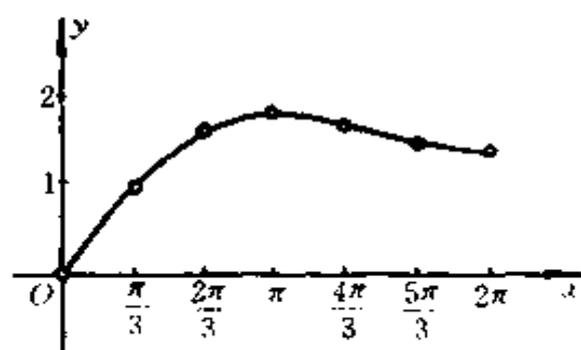


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

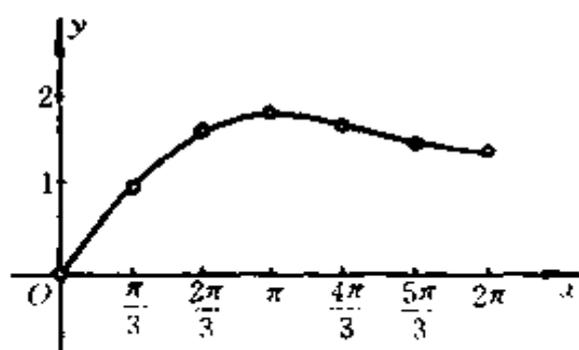


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

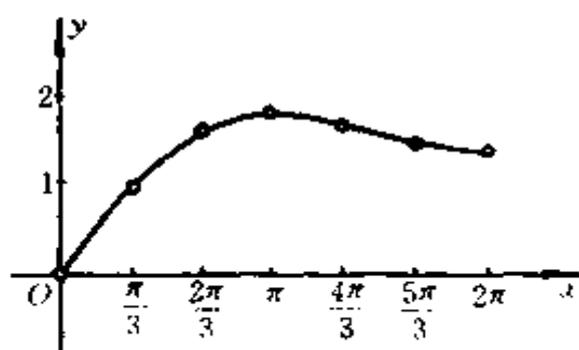


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

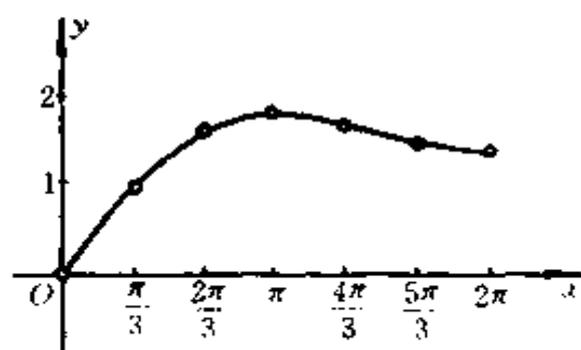


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

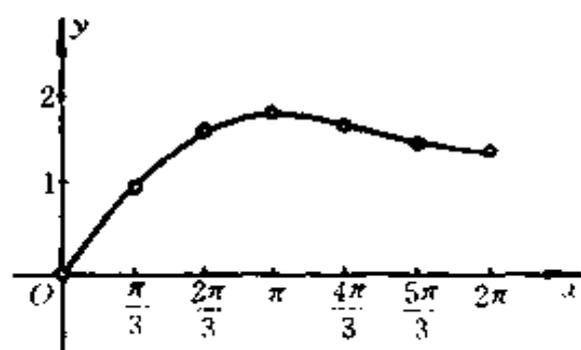


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

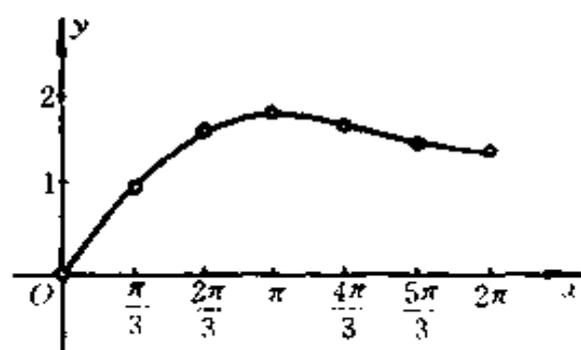


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

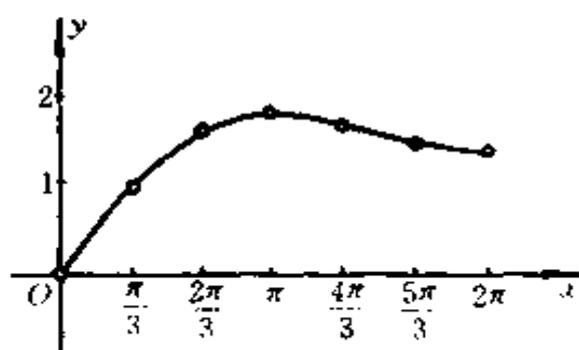


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

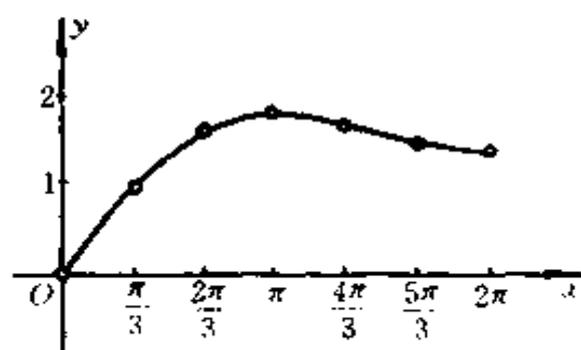


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

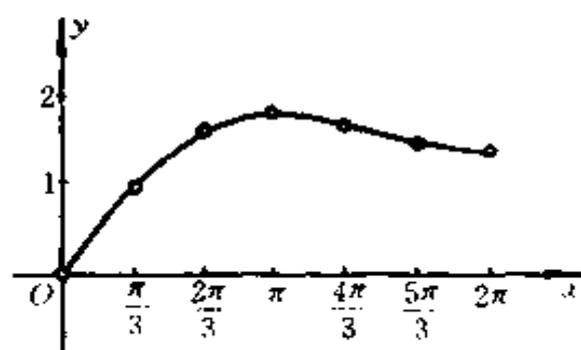


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

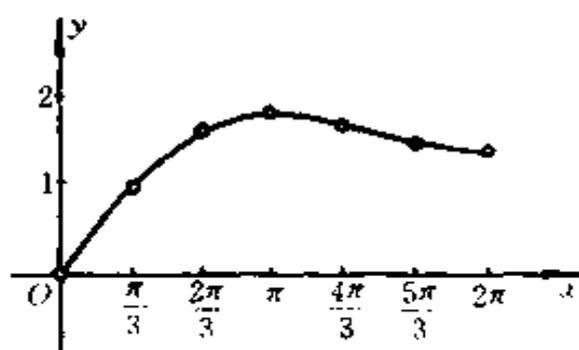


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

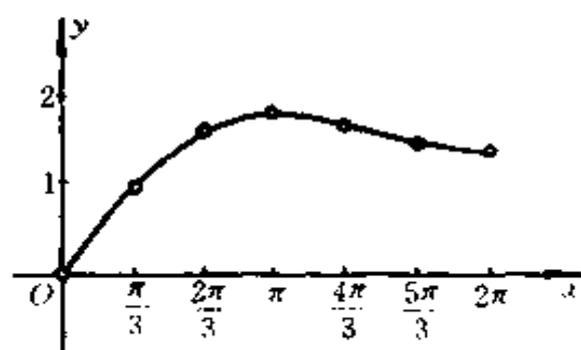


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

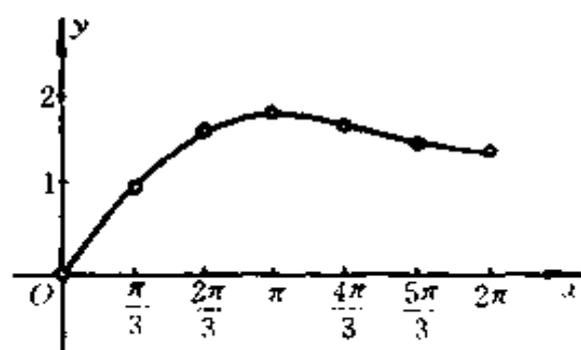


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

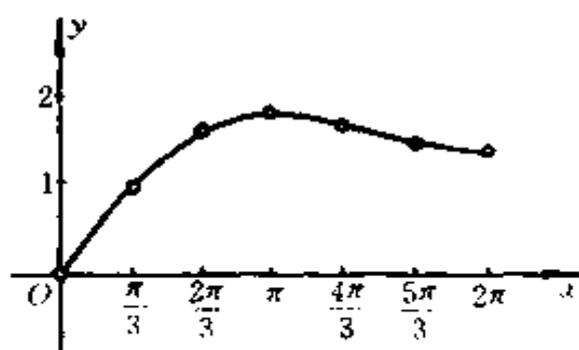


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

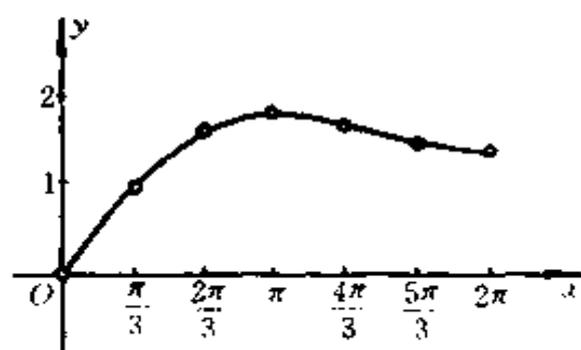


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

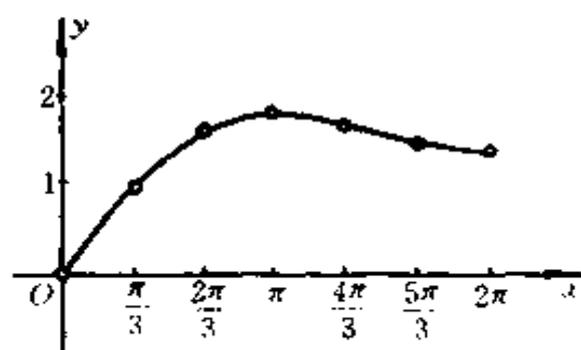


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

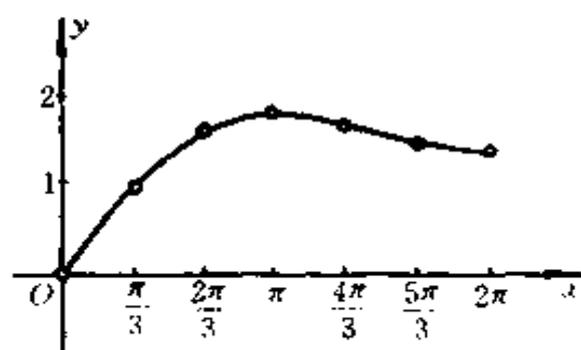


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

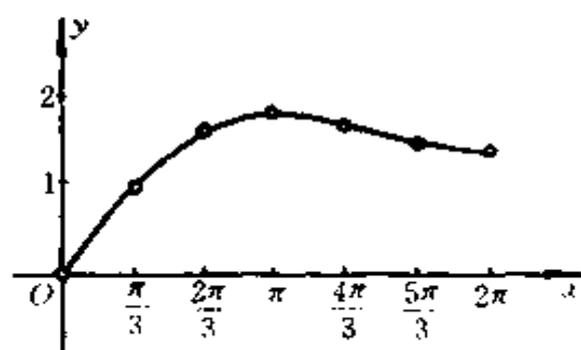


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

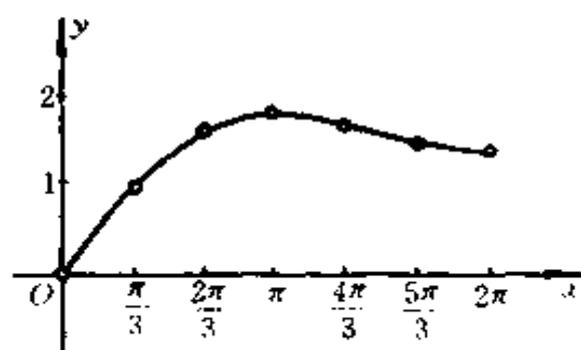


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

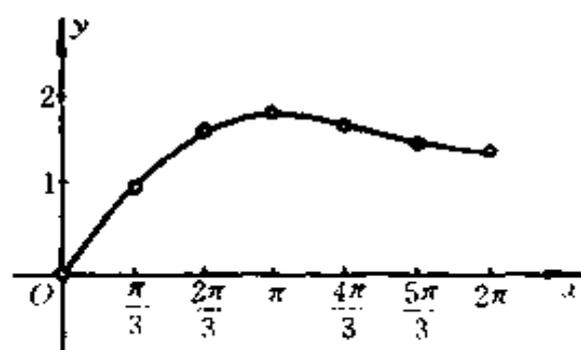


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

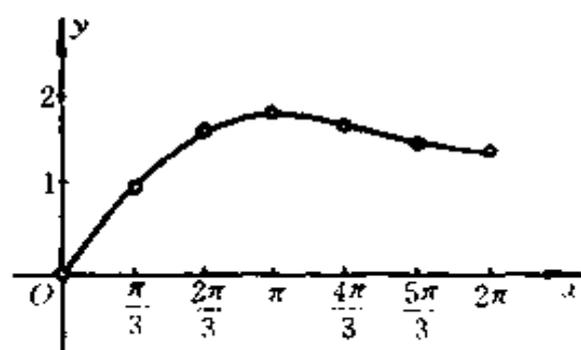


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

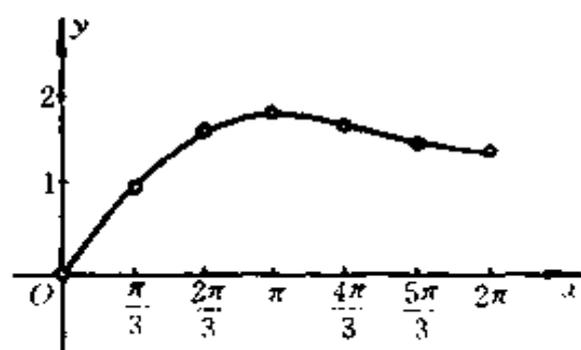


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

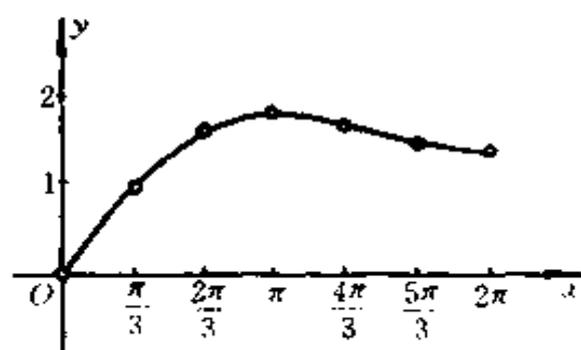


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

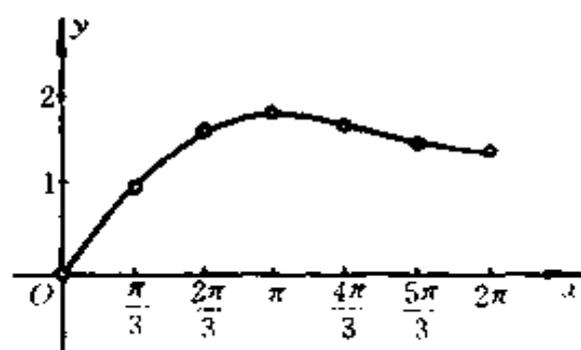


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

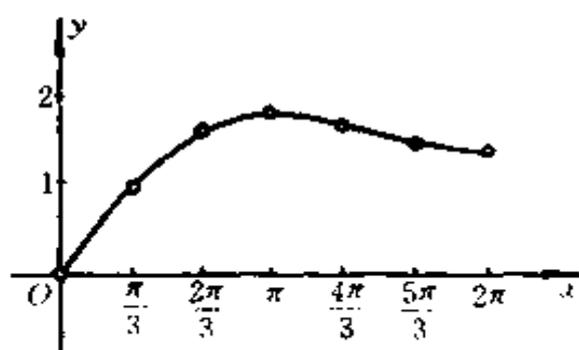


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

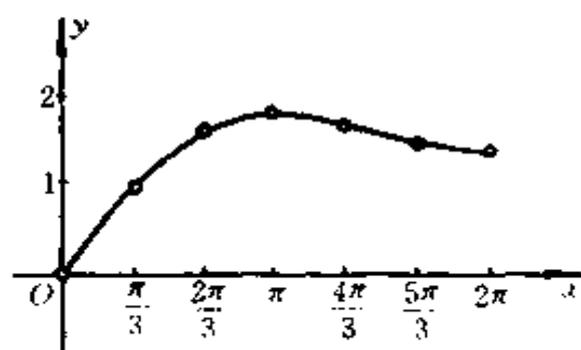


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

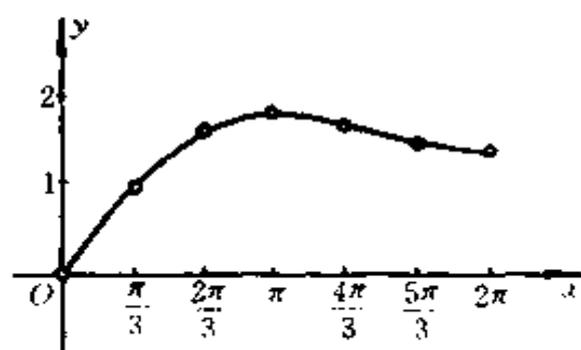


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

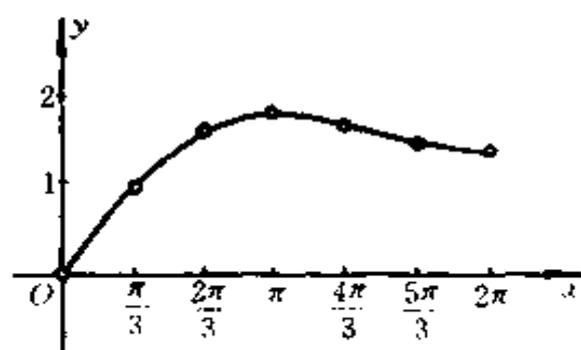


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

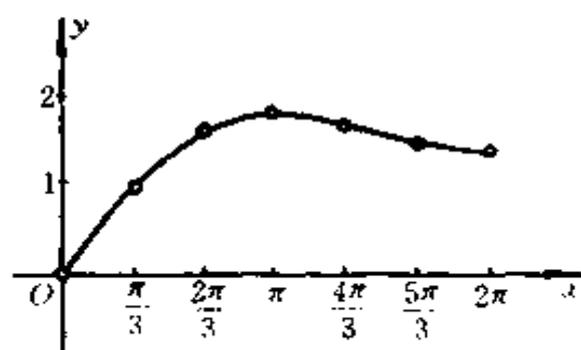


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

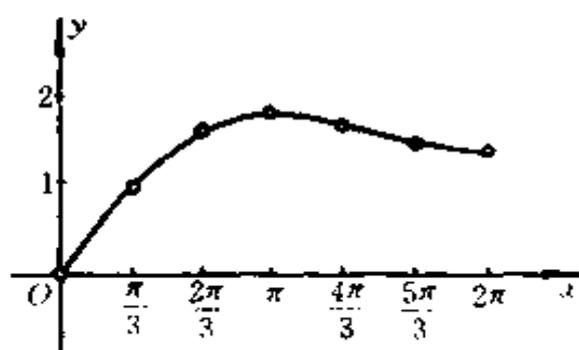


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

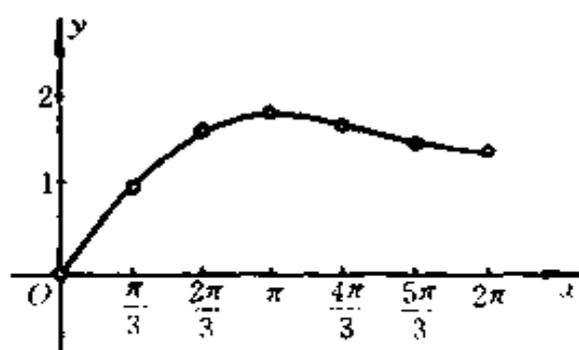


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

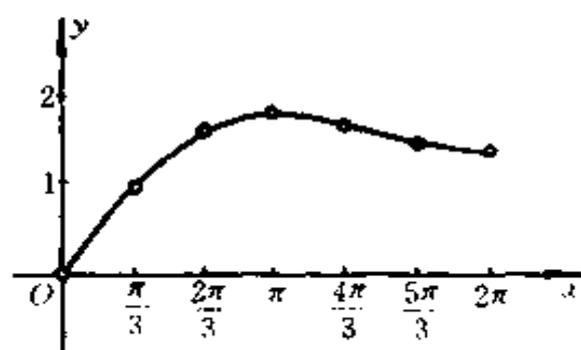


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

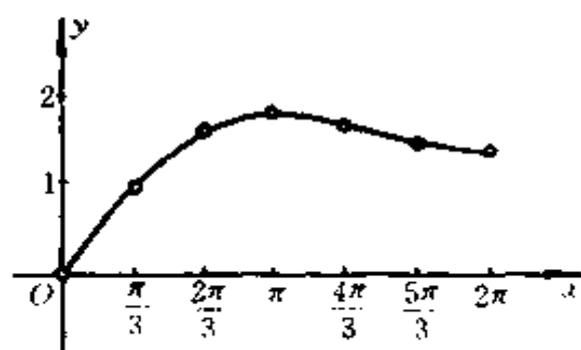


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

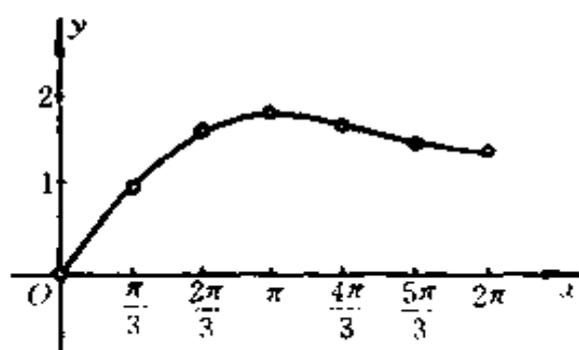


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

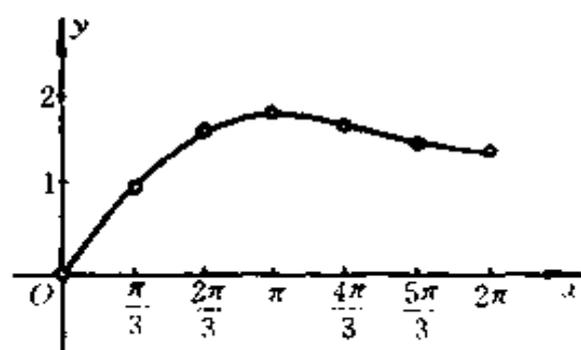


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

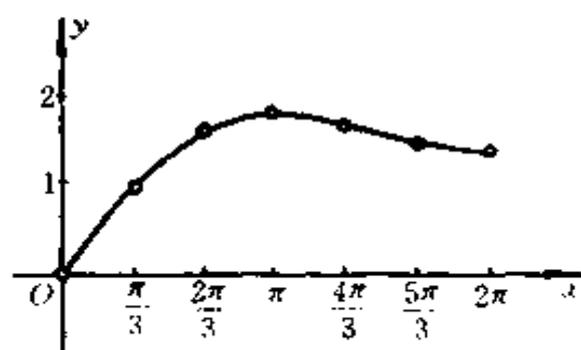


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

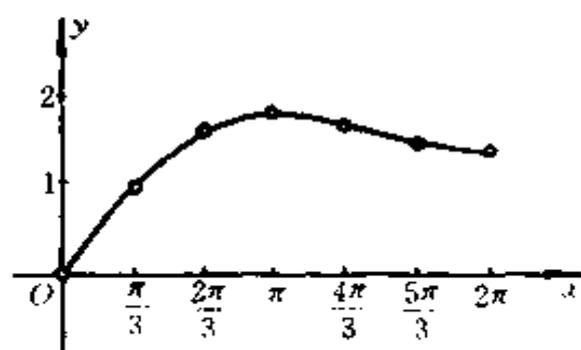


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

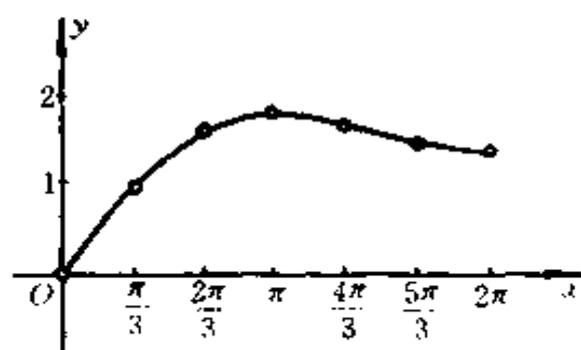


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

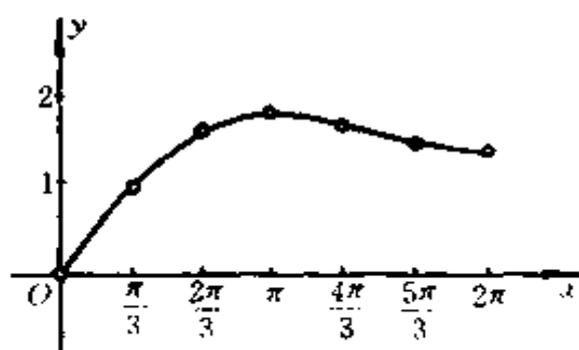


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 + 2.257 + 1.841 + 1.411) \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

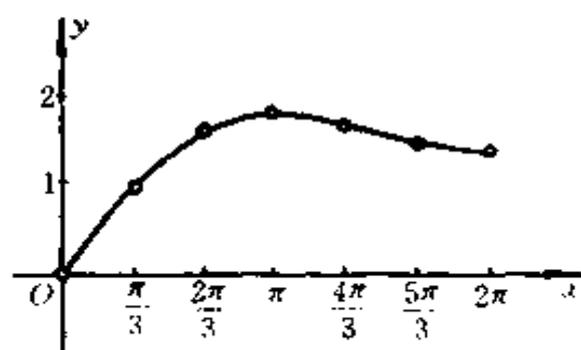


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

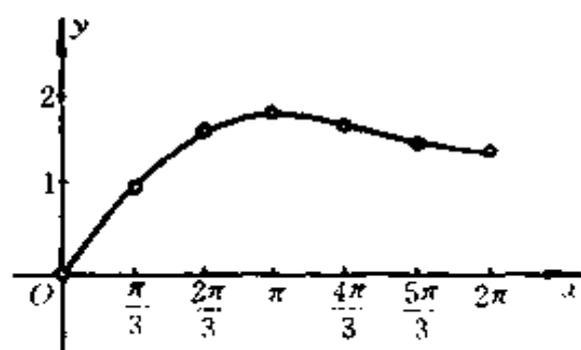


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

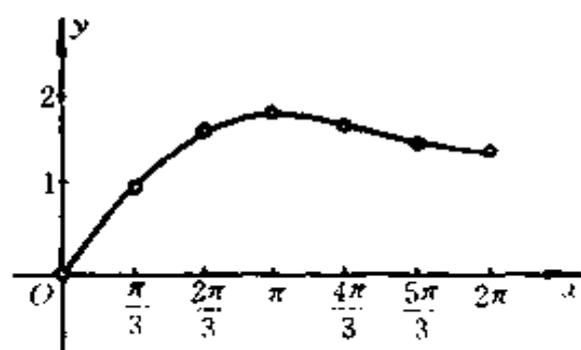


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

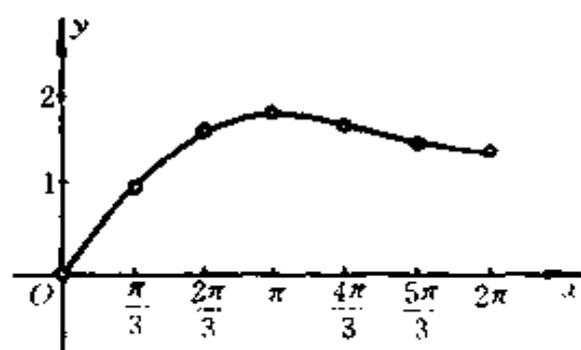


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

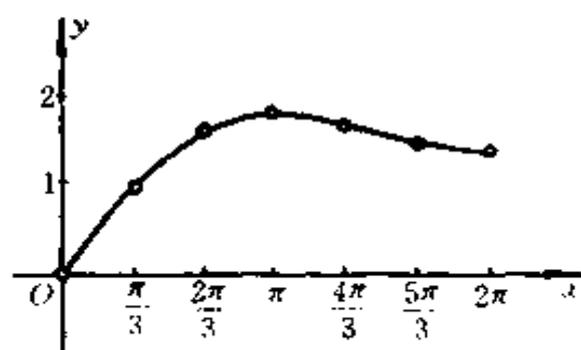


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

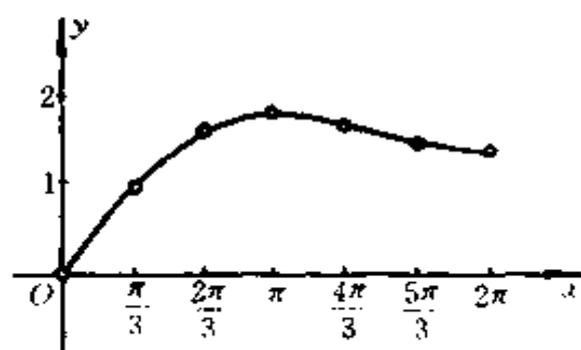


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

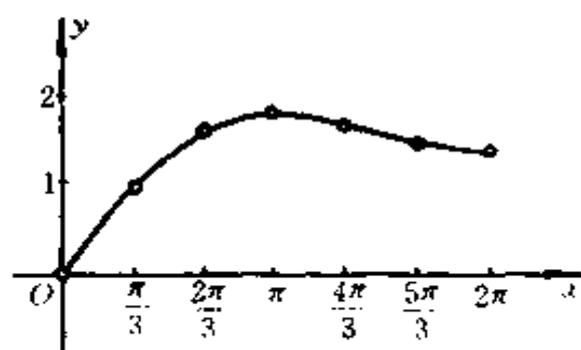


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

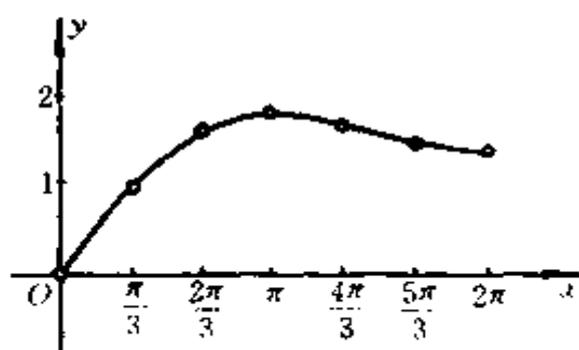


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

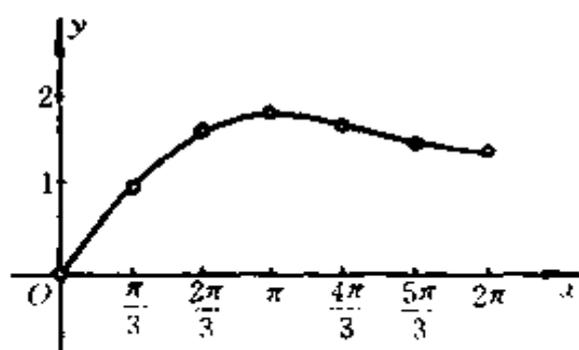


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

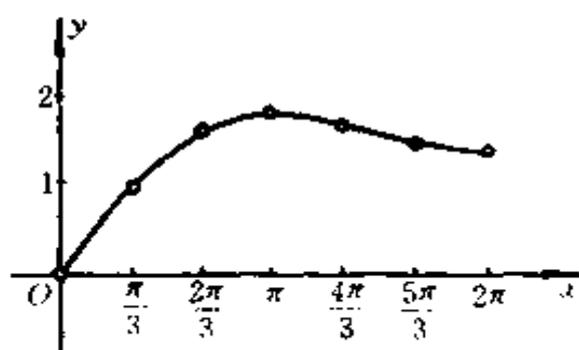


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

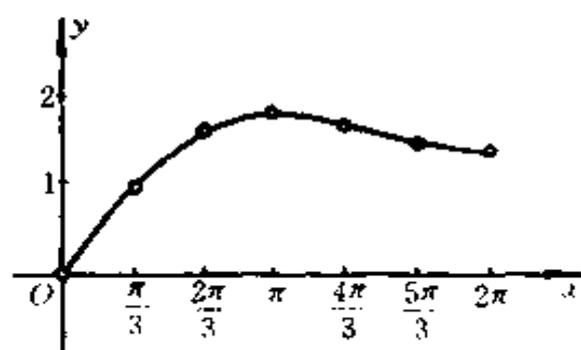


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

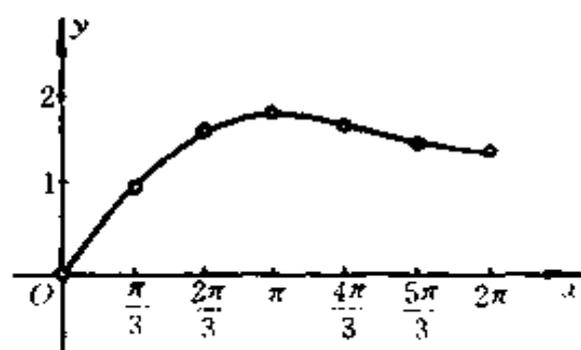


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

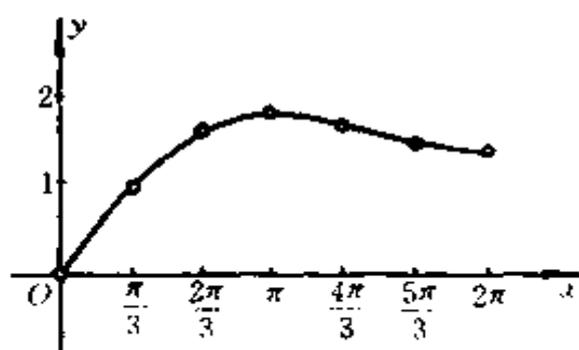


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

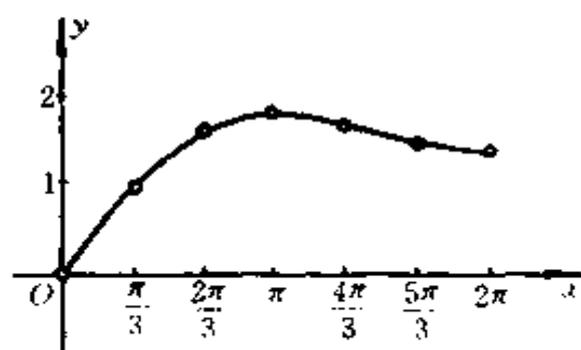


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

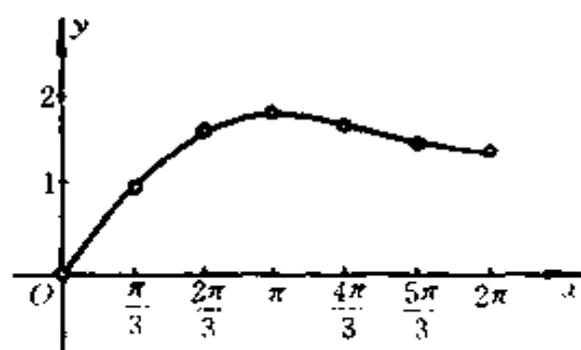


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

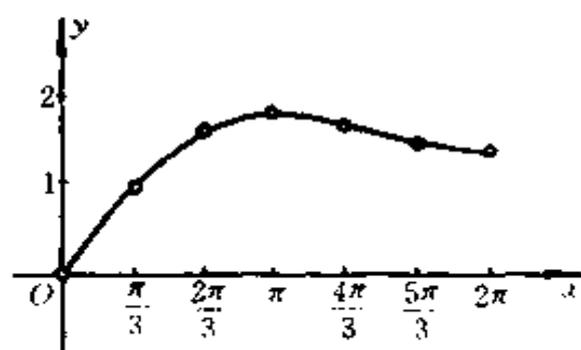


图 4.55

$$\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{27} (1 + 0.413 + 3.919 + 3.308 \\ + 2.257 + 1.841 + 1.411) \\ \doteq 1.65.$$

选取适当的 n , 类似地可求得

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.85, \quad \int_0^{\frac{4\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.72$$

$$\int_0^{\frac{5\pi}{3}} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.52; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{t} dt \doteq 1.42.$$

列表作图如下(图 4.55):

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
y	0	0.99	1.65	1.85	1.72	1.52	1.42

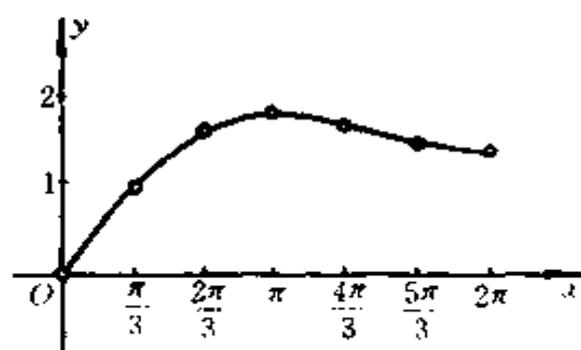


图 4.55

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析 习题集题解

山东科学技术出版社



Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(四)

费定晖 周学圣 编
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(四)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路16号 邮编250002)
山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路16号 电话2064651)
济南新华印刷厂印刷

*

787mm×1092mm 32开本 17印张 406千字

2001年3月第2版第9次印刷

印数:201 901—203 900

ISBN 7—5331—0102—2
0·8 定价:15.50元

图书在版编目(CIP)数据

Б.П.吉米多维奇数学分析习题集题解 (4)/费定
晖编.—2版.—济南:山东科学技术出版社,1999.9
(2001.3重印)

ISBN 7-5331-0102-2

I.Б… II.费… III.数学分析—高等学校—解题
IV.017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43958 号



出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄

本书的解答,因为任何削弱独立思索的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有周家云同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

目 录

第五章 级 数	1
§ 1. 数项级数, 同号级数收敛性的判别法	1
§ 2. 变号级数收敛性的判别法	70
§ 3. 级数的运算	119
§ 4. 函数项级数	131
§ 5. 幂级数	216
§ 6. 福里叶级数	333
§ 7. 级数求和法	388
§ 8. 利用级数求定积分之值	439
§ 9. 无穷乘积	451
§ 10. 斯特林格公式	507
§ 11. 用多项式逼近连续函数	511

第五章 级数

§ 1. 数项级数. 同号级数收敛性的判别法

1° 一般概念 对于数项级数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ (级数的和)

存在, 式中 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则称级数(1)为收敛的. 反之, 则称级数(1)为发散的.

2° 哥西准则 级数(1)收敛的充分且必要的条件为对于任何的 $\epsilon > 0$, 都存在有数 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon$$

成立.

特别是, 若级数收敛, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

3° 比较判别法 I. 设除级数(1)外, 还有级数

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n + \cdots, \quad (2)$$

若当 $n \geq n_0$, 不等式

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

成立, 则 1) 从级数(2)收敛可推得级数(1)收敛; 2) 从级数(1)发散可推得级数(2)发散.

特别是,当 $n \rightarrow \infty$ 若 $a_n \sim b_n$, 则正项级数(1)和(2)同时收敛或同时发散.

4° 比较判别法 I. 设

$$a_n = O^* \left(\frac{1}{n^p} \right)^{\textcircled{1}},$$

则(a)当 $p > 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $p \leq 1$ 时级数(1)发散.

5° 达朗伯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q,$$

则(a)当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

6° 哥西判别法 若 $a_n \geq 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

则(a)当 $q < 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $q > 1$ 时级数(1)发散.

7° 拉阿伯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则(a)当 $p > 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $p < 1$ 时级数(1)发散.

8° 高斯判别法 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 及

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\epsilon}},$$

式中 $|\theta_n| < C$ 而 $\epsilon > 0$, 则(a)当 $\lambda > 1$ 时级数(1)收敛, (6)当 $\lambda < 1$ 时级数(1)发散; (b)当 $\lambda = 1$ 时, 若 $\mu > 1$ 则级数(1)收敛; 若 $\mu \leq 1$ 则级数(1)发散.

9° 哥西积分的判别法 若 $f(x) (x > 0)$ 是非负的不增函数, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

① 记号 O^* 的意义参阅第一章 § 6.1'.

与积分

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx$$

同时收敛或同时发散。

直接证明下列级数的收敛性并求它们的和：

$$2546. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots.$$

解 由于

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{(-1)^n}{2^n}}{1 + \frac{1}{2}},$$

故得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3},$$

即所给级数收敛,且其和为 $\frac{2}{3}$ 。(以下有关各题省略这两句话)

$$2547. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

$$2548. \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} + \cdots.$$

解 由于

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n},$$

从而有

$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

并且

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}S_n &= S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{2}{2^n} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + 1 + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^n} \right], \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

$$2549. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots.$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

$$2550. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \cdots$$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right), \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

$$2551. (a) q \sin \alpha + q^2 \sin 2\alpha + \cdots + q^n \sin n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1);$$

$$(b) q \cos \alpha + q^2 \cos 2\alpha + \cdots + q^n \cos n\alpha + \cdots \quad (|q| < 1).$$

解 令 $z = q(\cos \alpha + i \sin \alpha) = qe^{i\alpha}$, 其中 $i = \sqrt{-1}$.

于是得 $|z| = |q| < 1$, 并且有

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha + i \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin n\alpha \quad (1)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-q\cos\alpha - iqs\sin\alpha} \\ &= \frac{(1-q\cos\alpha) + iqs\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

比较(1)、(2)两式的实部及虚部, 即得

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \sin \alpha = \frac{qs\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha + q^2};$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha - 1$$

$$= \frac{1 - q \cos \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2} - 1 = \frac{q \cos \alpha - q^2}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}.$$

2552. $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n-2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}).$

解 由于

$$\begin{aligned} S_n &= (\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{4} - 2\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &\quad + (\sqrt{5} - 2\sqrt{4} + \sqrt{3}) + (\sqrt{6} - 2\sqrt{5} \\ &\quad + \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \\ &= 1 - \sqrt{2} + \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = 1 - \sqrt{2} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1 - \sqrt{2}.$$

2553. 研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的收敛性.

解 记 $x = k\pi$. 若 k 为整数, 则由 $\sin nx = 0$ 知级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 是收敛的, 且其和为零. 若 k 非整数, 我们以下

将证 $\sin nx$ 并不趋于零, 于是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 发散. 可采用反证法. 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin nx = 0,$$

则当 $n \rightarrow \infty$ 时也有 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$. 但是

$$\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x,$$

由 $\sin(n+1)x \rightarrow 0$ 及 $\sin nx \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 知

$\cos nx \sin x \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 而 $\sin x = \sin k\pi \neq 0$, 故必有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos nx = 0.$$

但

$$1 = \sin^2 nx + \cos^2 nx.$$

令 $n \rightarrow \infty$, 两端取极限, 即得左端为 1 而右端为 0, 这就产生了 1 与 0 相等的谬论. 这个矛盾证明了此假设不真, 也即 $\sin nx \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的发散性获证.

2554. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则把该级数的项经过组合而不变更其先后次序所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ 其中 } A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \quad (p_1 = 1, p_1 < p_2 < \dots)$$

也收敛且有相同的和. 反之不真. 举出例子.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和叙列为

$$l_1, l_2, \dots, l_n, \dots,$$

$$\text{则 } l_n = \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^{p_{n+1}-1} a_i.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故其部分和叙列 $\{S_n\}$ 趋于定值 S . 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_{n+1}-1} = S,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 是收敛的, 且与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 有相同的和.

反之不真. 例如, 级数

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + \dots$$

是发散的, 但按下述方法组成的级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

却是收敛的.

2555. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项是正的, 而把这级数的项经过组合而得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 则原来的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 记其和为 S . 考虑原级数的部分和 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 并注意到 $a_k > 0 (k = 1, 2, \dots)$, 故存在 n_0 , 使

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k < \sum_{l=1}^{n_0} A_l < S.$$

显然 $S_n < S_{n+1}$ 对一切 n 成立. 于是, $\{S_n\}$ 单调上升且有界. 因此, 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在有限, 即原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

研究下列级数的收敛性:

2556. $1-1+1-1+1-1+\cdots$.

解 由于通项 $a_n = (-1)^{n-1}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限不存在, 更不可能趋于零, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ 发散.

2557. $0.001 + \sqrt{0.001} + \sqrt[3]{0.001} + \cdots$.

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{0.001} = 1 \neq 0,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0.001}$ 发散.

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 也收敛.

$$2563. \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \cdots.$$

解 由于 $0 < \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ 也收敛.

$$2564. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 5}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} + \cdots.$$

解 由于 $\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}} > \frac{1}{2n} > 0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$ 也发散.

2565. 证明, 由等差级数各项的倒数组成的级数是发散的.

证 设等差级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} [a + (n-1)d]$, 其中 d 为公差.

当 $d > 0$ 时, 总存在正整数 n_0 , 使 $a < (n_0-1)d$, 则当 $n \geq n_0$ 时, 总有 $a + (n-1)d < 2(n-1)d$. 于是,

$$\frac{1}{a + (n-1)d} > \frac{1}{2(n-1)d} > \frac{1}{2nd} > 0,$$

注意到级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{2nd}$ 发散, 因而级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$

发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a + (n-1)d}$ 也发散.

当 $d=0$ 时, a 不可能为零, 此时级数 $\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \cdots$

$+\frac{1}{a}+\dots$ 显然发散.

当 $d < 0$ 时, 将此级数的各项乘以 -1 即化为 $d > 0$ 的情形, 于是, 这级数也发散.

综上所述, 不论 d 为何值, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a+(n-1)d}$ 均发散.

2566. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (A)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n (B)$ 皆收敛且 $a_n \leq c_n \leq b_n (n=1, 2, \dots)$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (C)$ 也收敛. 若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 问级数 (C) 的收敛性若何?

证 当级数 (A) 及 (B) 收敛时, 由于 $a_n \leq c_n \leq b_n$, 故 $0 \leq c_n - a_n \leq b_n - a_n$. 因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 也收敛, 再由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} (c_n - a_n)$ 的收敛性即得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [a_n + (c_n - a_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛.

若级数 (A) 与 (B) 皆发散, 则级数 (C) 可能收敛, 也可能发散. 例如, 级数

$$-1 - 1 - 1 - \dots \quad \text{及} \quad 1 + 1 + 1 + \dots$$

皆发散, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 当 $c_n = 0 (-1 < c_n < 1)$ 时收敛;

当 $c_n = \frac{1}{2} (-1 < c_n < 1)$ 也发散.

2567. 设已知二发散级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

的各项不为负数,问下列二级数的收敛性若何:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 及 (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$?

解 (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n)$ 可能收敛,也可能发散.例如,级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(-1)^n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{2}$ 皆发散,但是

$\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots$ 却收敛.又如,级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 皆发散,但是 $\sum_{n=1}^{\infty} \min(a_n, b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

也发散.

(6) $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 一定发散.事实上,

$$\max(a_n, b_n) \geq a_n \geq 0,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \max(a_n, b_n)$ 也发散.

2568. 证明,若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n \geq 0)$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

倒过来不成立,举出例子.

证 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 于是,总存在 n_0 . 使

当 $n \geq n_0$ 时,有 $0 \leq a_n < 1$. 从而,当 $n \geq n_0$ 时,有

$0 \leq a_n^2 < a_n$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,当然级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛,

故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 从而, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛.

反之不真. 例如, $a_n = \frac{1}{n}$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 却发散.

2569. 证明, 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$$

也收敛.

证 由于 $0 \leq 2|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

其次, 由于 $(a_n + b_n)^2 = a_n^2 + b_n^2 + 2a_n b_n$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 皆收敛, 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$ 也收敛.

最后, 设 $b_n = \frac{1}{n}$, 利用第一个结果即证得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \text{ 收敛.}$$

2570. 证明, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = a \neq 0,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 $na_n = \frac{a_n}{\frac{1}{n}}$. 不妨设 $a > 0$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = a$, 故对于任

给的 $0 < \varepsilon < a$, 总存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $\frac{a_n}{\frac{1}{n}} > a -$

$\varepsilon > 0$ 或 $a_n > (a - \varepsilon) \frac{1}{n} > 0$.

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 也收敛, 从而会
得出级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$ 收敛的错误结论. 因此, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发
散.

2571. 证明, 若各项为正且其值单调减少的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$.

证 对于任何的 m 与 $n > m$, 我们有

$$(n-m)a_n < a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < a_m,$$

其中 a_m 为该收敛级数的余式, 由此得

$$na_n < \frac{n}{n-m} a_m.$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 我们可
取定某 m_0 , 使

$$a_{m_0} < \varepsilon.$$

其次, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n-m_0} = 1$, 故存在 $n_0 (n_0 > m_0)$,
使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{n}{n-m_0} < 2.$$

于是, 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < na_n < 2\epsilon.$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$. 本题获证.

2572. 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p})$

$= 0$. 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛?

解 若当 $p = 1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}) = 0, \quad (1)$$

并不一定有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 例如, 取 $a_n = \frac{1}{n}$, 显然级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 但却有

$$\begin{aligned} 0 &< a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} < \frac{p}{n+1}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p}{n+1} = 0$, 故对一切 p , (1) 式均成立.

这个事实与哥西准则并不矛盾, 因为在哥西准则中, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时, 不等式

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon$$

成立, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 其中的 N 只依赖于 ϵ , 而与 p 无

关. 本题的叙述中, 条件并没有排除 N 要与 p 有关.

利用哥西准则, 证明下列正项级数的收敛性:

2573. $a_0 + \frac{a_1}{10} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots$ ($|a_n| < 10$).

$$\begin{aligned} \text{证 } |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{a_n}{10^n} + \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} + \dots + \frac{a_{n+p-1}}{10^{n+p-1}} \right| \\ &\leq \frac{|a_n|}{10^n} + \frac{|a_{n+1}|}{10^{n+1}} + \dots + \frac{|a_{n+p-1}|}{10^{n+p-1}} \\ &< \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{10^{p-1}} \right) \\ &< \frac{1}{10^{n-1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{1}{9 \cdot 10^{n-2}}. \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要 $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{10^{n-2}} < 9\epsilon$, 即只要

$$n > 2 + \lg \frac{1}{9\epsilon}.$$

取 $N = 2 + \lceil \lg \frac{1}{9\epsilon} \rceil$, 则当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

对一切正整数 p 皆成立, 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$ 收敛.

2574. $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$.

$$\begin{aligned} \text{证 } |S_{n+p} - S_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)x}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}}. \end{aligned} \quad (1)$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛, 故按哥西准则, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在正整数 N , 使当 $n > N$ 时, 对任意正整数

p , 有

$$\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} < \epsilon. \quad (2)$$

由(1)式及(2)式得知, 当 $n > N$ 时, 不等式

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

对一切正整数 p 皆成立. 因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛.

$$2575. \frac{\cos x - \cos 2x}{1} + \frac{\cos 2x - \cos 3x}{2} + \cdots \\ + \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n} + \cdots.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } S_{n+p} - S_n &= \sum_{i=n+1}^{n+p} \frac{\cos ix - \cos(i+1)x}{i} \\ &= \frac{\cos(n+1)x}{n+1} - \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) \cos(i+1)x \\ &\quad - \frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{故 } |S_{n+p} - S_n| &\leq \frac{1}{n+1} + \sum_{i=n+1}^{n+p-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) + \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

对于任给的 $\epsilon > 0$, 取正整数 $N = \lceil \frac{2}{\epsilon} \rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切正整数 p , 有

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{2}{n} < \epsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n}$ 收敛.

利用哥西准则,证明下列级数的发散性:

$$2576. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots.$$

解 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$. 不论 n 多大,若令 $p = n$,则有

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \underbrace{\frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n \text{ 项}} \\ &= \frac{1}{2} > \epsilon_0. \end{aligned}$$

因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

$$2577. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots.$$

解 取 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{6}$. 不论 n 多大,若令 $p = 3n$,则有

$$\begin{aligned} |S_{3n+p} - S_{3n}| &= \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n} \\ &> \frac{1}{3n+3} + \frac{1}{3n+3} - \frac{1}{3n+3} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{6n} + \frac{1}{6n} - \frac{1}{6n} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &> \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)}_{n \text{ 项}} \\ &= \frac{1}{6} > \epsilon_0. \end{aligned}$$

因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} - \frac{1}{3n+3} \right)$ 发散.

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛.

$$2581. (a) \frac{2 \cdot 1!}{1^1} + \frac{2^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{2^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{2^n n!}{n^n} + \dots;$$

$$(b) \frac{3 \cdot 1!}{1^1} + \frac{3^2 \cdot 2!}{2^2} + \frac{3^3 \cdot 3!}{3^3} + \dots + \frac{3^n n!}{n^n} + \dots.$$

解 (a) 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1} \frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛.

(b) 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} (n+1)!}{(n+1)^{n+1} \frac{3^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\ &= \frac{3}{e} > 1, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$ 发散.

$$2582. \frac{(1!)^2}{2} + \frac{(2!)^2}{2^4} + \frac{(3!)^2}{2^9} + \dots + \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} + \dots.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}$$

$$=0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ 收敛.

$$2583. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000+n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1000 \cdot 1001 \cdots (1000+n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$ 收敛.

$$2584. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} < 1,$$

故级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n+2)}$ 收敛.

$$2585. \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2}),$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} - \sqrt[2n+3]{2}) = \sqrt{2} - 1 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} - \sqrt[3]{2})(\sqrt{2} - \sqrt[5]{2}) \cdots (\sqrt{2} - \sqrt[2n+1]{2})$ 收敛.

$$2586. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1}{2} < 1,\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$ 收敛.

2587. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}.$

解 $\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{n^n \cdot n^{\frac{1}{n}}}{(n+1)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \sqrt[n]{n} > 0,$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot \sqrt[n]{n},$$

由于其通项趋于 $\frac{1}{e} \neq 0$, 故它是发散的. 因此, 原级数也是发散的.

注意, 若用达朗伯耳判别法, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, 无明确结论, 此时还应改用高斯判别法.

2588. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}.$

解 当 $n > 1$ 时, $\ln n < n$. 于是,

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > 0.$$

对于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}},$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$, 故它是发散的. 因此, 原级数也发散.

注意, 若用达朗伯耳判别法, 将遇到与 2587 题类似的情况.

2589.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

解 由于

$$0 < \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} < \frac{n^{n-1}}{(n^2)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{1}{n^2},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数也收敛.

注意, 若用达朗伯耳判别法, 则有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \cdot \frac{(2n^2 + n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2n^2 + 5n + 4)^{\frac{n+2}{2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n}{(2n^2 + 5n + 4)^{\frac{1}{2}}} \cdot \left(\frac{2n^2 + n + 1}{2n^2 + 5n + 4}\right)^{\frac{n+1}{2}} \\ &= e \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1, \end{aligned}$$

也可证得原级数收敛.

2590.
$$\begin{aligned} &\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &+ \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots \end{aligned}$$

解 方法一:

$$\sqrt{2} = 2\cos \frac{\pi}{4} = 2\sin \frac{\pi}{4},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}} = \sqrt{2 - 2\cos \frac{\pi}{4}} = 2\sin \frac{\pi}{8},$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos \frac{\pi}{4}}}$$

$$= \sqrt{2 - 2\cos \frac{\pi}{8}} = 2\sin \frac{\pi}{16},$$

利用数学归纳法, 可证得通项为

$$a_n = 2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sin \frac{\pi}{2^{n+2}}}{2\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \frac{1}{2} < 1, \end{aligned}$$

故级数收敛.

方法二:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 - \sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \end{aligned}$$

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \\
 &= \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}.
 \end{aligned}$$

利用数学归纳法,可证得

$$\begin{aligned}
 &\sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}}} \\
 &\cdot \sqrt{2-\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{(n-1) \text{ 重根号}}}.
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n \text{ 重根号}}}} \\
 &= \frac{1}{2}^{*}) < 1,
 \end{aligned}$$

故级数收敛.

*)利用 637 题的结果.

2591. 证明:若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q (a_n > 0),$$

则 $a_n = o(q_1^n)$, 其中 $q_1 > q$.

证 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, 故利用 141 题的结果, 即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

令 $\varepsilon = \frac{1}{2}(q_1 - q) > 0$, 则由上式知存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon,$$

从而有

$$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon = \lambda q_1 (n \geq n_0),$$

其中 $\lambda = \frac{q_1 + q}{2q_1} < 1$. 利用 $\lambda^n = o(1)$, 即证得

$$a_n = \lambda^n q_1^n = o(q_1^n).$$

2592. 证明:若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1 (a_n > 0),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

相反的结论不真. 研究例子

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

证 取 $0 < \varepsilon < 1 - q$, 由于

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1,$$

故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \epsilon = l < 1.$$

从而

$$0 < a_n \leq a_{n_0} l^{n-n_0} (n \geq n_0).$$

由于级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} l^{n-n_0}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛.}$$

反之不真, 例如, 级数

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots$$

显然是收敛的. 但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} (\frac{2}{3})^{n+1}, & \text{当 } n=2m+1; \\ \frac{1}{2}(\frac{3}{2})^m, & \text{当 } n=2m, \end{cases}$$

故有

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty.$$

2593. 证明, 若对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (a_n > 0)$ 极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \tag{A}$$

存在, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \tag{B}$$

也存在.

相反的结论不真: 若极限(B)存在, 则极限(A)可以不存在. 研究例子

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}.$$

证 利用 141 题的结论, 本题的前半部分即得证.

反之不真. 例如, 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^n}{2^{n+1}}$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{3 + (-1)^n}}{2 \cdot \sqrt[n]{2}} = \frac{1}{2}.$$

但是,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3 + (-1)^{n+1}}{2[3 + (-1)^n]} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ 1, & \text{当 } n \text{ 为奇数,} \end{cases}$$

故极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 不存在.

2594. 证明, 若

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q (a_n \geq 0),$$

则 (a) 当 $q < 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; (b) 当 $q > 1$ 时这级数发散 (哥西判别法的推广).

证 (a) 取 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(1 - q)$. 由于 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon.$$

从而

$$0 < \sqrt[n]{a_n} < \frac{q+1}{2} (n \geq n_0)$$

或

$$0 < a_n < \left(\frac{q+1}{2}\right)^n \quad (n \geq n_0).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

故它是收敛的, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 也是收敛的.

2597. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$.

解 $0 < \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n} \leq \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$.

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + 1)^n}{3^n}$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} + 1}{3} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \\ &= \frac{\sqrt{2} + 1}{3} < 1, \end{aligned}$$

故它是收敛的, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 [\sqrt{2} + (-1)^n]^n}{3^n}$ 也是收敛的.

利用拉阿伯和高斯判别法, 研究下列级数的收敛性:

2598. $\left(\frac{1}{2}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^p + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^p + \dots$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{p}{2n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{p}{2},$$

故当 $\frac{p}{2} > 1$ 即 $p > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p$ 收敛.

2599. $\frac{a}{b} + \frac{a(a+d)}{b(b+d)} + \frac{a(a+d)(a+2d)}{b(b+d)(b+2d)} + \dots$ ($a > 0, b > 0, d > 0$).

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{b+nd}{a+nd}$, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b+nd}{a+nd} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(b-a)n}{a+nd} = \frac{b-a}{d}, \end{aligned}$$

故当 $\frac{b-a}{d} > 1$ 时,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\dots[a+(n-1)d]}{b(b+d)\dots[b+(n-1)d]}$ 收敛.

2600. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^n}{n^{n+p}}$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n! e^n}{n^{n+p}}}{\frac{(n+1)! e^{n+1}}{(n+1)^{n+1+p}}} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p}$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n+p} - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e}(1+x)^{\frac{1}{x}+\rho}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e}e^{(\frac{1}{x}+\rho)\ln(1+x)}-1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{e}e^{1+(\rho-\frac{1}{2})x+o(x)}-1}{x} = \rho - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

故当 $\rho - \frac{1}{2} > 1$ 即 $\rho > \frac{3}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^{2+\rho}}$ 收敛.

2601. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$,

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}}$. 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2+\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} - 1 \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n+1}} = +\infty,
\end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$ 收敛.

2602. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)} (p > 0, q > 0)$.

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1}\right)$. 由于

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \left(1 + \frac{q}{n+1}\right) - 1 \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p \left(1 + \frac{qx}{1+x}\right) - 1}{x} = p+q,
\end{aligned}$$

故当 $p+q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^{-p}}{q(q+1)\cdots(q+n)}$ 收敛.

$$2603. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} (p > 0, q > 0).$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^q \frac{1+n}{p+n}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^q \frac{1+n}{p+n} - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{q+1} - 1}{1+px} = q+1-p, \end{aligned}$$

故当 $q+1-p > 1$ 即 $q > p$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q} \text{ 收敛.}$$

$$2604. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}.$$

解 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p \left(\frac{n+1}{n}\right)^q - 1 \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{2+2x}{2+x}\right)^p (1+x)^q - 1}{x} = q + \frac{p}{2}, \end{aligned}$$

故当 $q + \frac{p}{2} > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^p \cdot \frac{1}{n^q}$

收敛.

$$2605. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n}\right)^n (p > 0).$$

解 令 $a_n = \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{x \ln n}{n}\right)^n$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \ln n}{n} = 0$ 故当 n 充

分大时, $a_n > 0$.

当 $x = 0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 它当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散, 当 $x \neq 0$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\ln(a_n n^{p+x}) &= x \ln n + n \ln \left(1 - \frac{x \ln n}{n} \right) \\ &= nu_n + n \ln(1 - u_n) = nu_n^2 \cdot \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2},\end{aligned}$$

其中 $u_n = \frac{x \ln n}{n}$, $u_n \neq 0 (n > 1)$, $u_n \rightarrow 0$, $nu_n^2 \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 由洛比塔法则, 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n + \ln(1 - u_n)}{u_n^2} &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{v + \ln(1 - v)}{v^2} \\ &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1-v}}{2v} = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{2(v-1)} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(a_n n^{p+x}) = 0 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{p+x}}} = 1.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+x}}$ 有相同的敛散性, 故当 $p+x > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 而当 $p+x \leq 1$ 时发散.

综上所述, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 仅当 $x > 1 - p$ 时收敛.

2606. 证明: 若 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$ 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = p,$$

则 $a_n = o\left(\frac{1}{n^{\rho-\varepsilon}}\right)$ ($\varepsilon > 0$).

证 下面记 $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n, \beta'_n, \beta''_n, \varepsilon_n$ 为无穷小量, 即 $\alpha_n = o(1), \alpha'_n = o(1), \beta_n = o(1), \beta'_n = o(1), \beta''_n = o(1), \varepsilon_n = o(1)$ ($n \rightarrow \infty$).

由题设知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n}.$$

取对数, 即得

$$\begin{aligned} \ln a_n - \ln a_{n+1} &= \ln\left(1 + \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n}\right) \\ &= \frac{p}{n} + \frac{\alpha_n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}(p + \alpha'_n). \end{aligned}$$

令 $n=1, 2, \dots, N-1$ 并求和, 则得

$$\ln a_1 - \ln a_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}(p + \alpha'_n).$$

由 143 题(在其中令 $x_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n}, y_N = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}$) 知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n}}{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}} \right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \alpha'_N = 0.$$

又由 146 题知

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} = C + \ln(N-1) + \varepsilon_N,$$

其中 C 是尤拉常数, $\varepsilon_N \rightarrow 0$. 于是, 令

$$\beta_N = \left(\frac{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha'_n}{n}}{\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n}} \right),$$

$$\begin{aligned} \text{有 } \ln a_1 - \ln a_N &= (p + \beta_N) \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \\ &= (p + \beta_N)[C + \ln(N-1) + \varepsilon_N] \end{aligned}$$

$$= (p + \beta_N) \ln(N-1) + k + \beta'_N,$$

其中 $k = Cp$ 为常数. 于是,

$$\ln a_N = -(p + \beta_N) \ln(N-1) + k' - \beta'_N,$$

其中 $k' = \ln a_1 - k$ 为常数, 从而

$$\begin{aligned} a_N &= e^{k' - \beta'_N - (p + \beta_N) \ln(N-1)} \\ &= e^{k' - \beta'_N} \cdot \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p + \beta_N)} \cdot N^{\beta_N} \cdot N^{-p}. \end{aligned}$$

其中 $\beta''_N = -\beta'_N$. 由于 $\beta''_N = o(1)$, 故对于任给的 $\epsilon > 0$, 当 N 充分大时, 有 $|\beta''_N| < \frac{\epsilon}{2}$, 从而 $N^{\beta''_N} < N^{\frac{\epsilon}{2}}$. 再注意到

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{N-1}{N} \right)^{-(p + \beta_N)} = 1,$$

即知: 当 N 充分大时, 有

$$0 < a_N \leq k'' \cdot N^{\frac{\epsilon}{2}} \cdot N^{-p} = O\left(\frac{1}{N^{p - \frac{\epsilon}{2}}}\right),$$

其中 k'' 是常数. 于是, 得

$$a_N = o\left(\frac{1}{N^{p - \epsilon}}\right).$$

本题获证.

求出通项 a_n 的减小的阶, 从而研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性, 设:

$$2607. \quad a_n = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \dots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q}, \text{ 其中 } n^q + b_1 n^{q-1} + \dots + b_q > 0.$$

解 由于 $a_n = O^*\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)$, 故当 $q - p > 1$ 即 $q > 1 + p$ 时, 级数收敛.

$$2608. a_n = \frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}.$$

解 由于 $a_n \geq 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^p} \sin \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^{p+1}}} = \pi \text{ 或 } a_n = O^* \left(\frac{1}{n^{p+1}} \right),$$

故仅当 $1+p > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

$$2609. a_n = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1} (n > 1).$$

解 由于 $a_n < 0$, 且

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \right)^p \ln \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) = O^* \left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}} \right),$$

故仅当 $\frac{p}{2} + 1 > 1$ 即 $p > 0$ 时, 级数收敛.

$$2610. a_n = \ln^p \left(\sec \frac{\pi}{n} \right).$$

解 由于 $a_n > 0$ ($n > 2$ 时), 且

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2^p} \ln^p \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{n} \right) \sim \frac{1}{2^p} \operatorname{tg}^{2p} \frac{\pi}{n} \sim \frac{1}{2^p} \left(\frac{\pi}{n} \right)^{2p} \\ &= O^* \left(\frac{1}{n^{2p}} \right), \end{aligned}$$

故仅当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 级数收敛.

$$2611. a_n = \lg_b \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right) \quad (a > 0, b > 0).$$

解 显然 $b \neq 1$ (否则 a_n 无意义). 由于

$$a_n = \frac{\ln \left(1 + \frac{\sqrt[n]{a}}{n} \right)}{n \ln b} \sim \frac{1}{n \ln b} \cdot \frac{\sqrt[n]{a}}{n} = O^* \left(\frac{1}{n^2} \right),$$

故级数收敛.

$$2612. a_n = \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]^p.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n &= e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &= e^{n \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O^* \left(\frac{1}{n^3} \right) \right]} \\ &= e^{1 - \frac{1}{2n} + O^* \left(\frac{1}{n^2} \right)}. \end{aligned}$$

由于 $a_n > 0$, 且

$$\begin{aligned} a_n &= \left[e \left(1 - e^{-\frac{1}{2n} + O^* \left(\frac{1}{n^2} \right)} \right) \right]^p \sim e^{p} \left[\frac{1}{2n} + O^* \left(\frac{1}{n^2} \right) \right]^p \\ &= O^* \left(\frac{1}{n^p} \right), \end{aligned}$$

故仅当 $p > 1$ 时, 级数收敛.

$$2613. a_n = \frac{1}{n^1 + \frac{k}{\ln n}}.$$

解 由于

$$a_n = n^{-(1 + \frac{k}{\ln n})} = e^{-(1 + \frac{k}{\ln n}) \ln n} = e^{-(\ln n + k)} = \frac{1}{n} e^{-k},$$

故级数显然发散.

$$2614. a_n = \frac{1}{n^{1 + \frac{1}{n}}}.$$

解 由于

$$a_n = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{n}} = O^* \left(\frac{1}{n} \right),$$

故级数发散.

$$2615. \text{证明: 若有 } \alpha > 0 \text{ 使当 } n \geq n_0 \text{ 时 } \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} \geq 1 + \alpha (a_n > 0),$$

解 $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n}$. 由洛比塔法则知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln \ln x)^2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \ln x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\ln x} = 0,$$

故 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = 0$, 从而存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < 1$, 利用 2615 题的结论, 即知级数发散.

利用哥西积分判别法, 研究具如下通项的级数的收敛性:

2619. $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$.

解 由于不论 p 为何数, 当 x 充分大时, 函数 $\frac{1}{x \ln^p x}$ 都是非负递减的, 并且

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^p x} = \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-p) \ln^{p-1} x} \right|_2^{+\infty}, & p \neq 1; \\ \left. \ln \ln x \right|_2^{+\infty}, & p = 1 \end{cases}$$

仅当 $p > 1$ 时收敛, 故级数仅当 $p > 1$ 时收敛.

2620. $a_n = \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q} (n > 2)$.

解 易知函数 $f(x) = \frac{1}{x (\ln x)^p (\ln \ln x)^q}$ (不论 p, q 为何实数) 的导函数当 x 充分大时是负的, 故当 x 充分大时, $f(x)$ 是非负递减函数.

若 $p = 1$, 则

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x (\ln \ln x)^q}$$

$$= \begin{cases} \left. \frac{1}{(1-q)(\ln \ln x)^{q-1}} \right|_3^{+\infty}, & q \neq 1; \\ \ln \ln \ln x \Big|_3^{+\infty}, & q = 1. \end{cases}$$

当 $q > 1$ 时收敛, $q \leq 1$ 时发散, 故由哥西积分判别法知, 原级数当 $p = 1, q > 1$ 时收敛, $p = 1, q \leq 1$ 时发散.

若 $p \neq 1$, 作代换 $\ln x = t$, 有

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p (\ln \ln x)^q} = \int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}.$$

当 $p > 1$ 时, 取 $\eta > 0$ 使 $p - \eta > 1$, 由于 (不论 q 为何实数)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\eta} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^{\eta} (\ln t)^q} = 0,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 收敛, 从而原级数收敛; 当 $p < 1$ 时, 取 $\tau > 0$ 使 $p + \tau < 1$. 由于

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^{\tau} \cdot \frac{1}{t^p (\ln t)^q} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{\tau}}{(\ln t)^q} = +\infty,$$

故积分 $\int_{\ln 3}^{+\infty} \frac{dt}{t^p (\ln t)^q}$ 发散, 从而原级数发散.

综上所述, 可知原级数仅当 $p = 1, q > 1$ 及 $p > 1, q$ 任意时收敛.

2621. 研究级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$$

的收敛性.

解 由于

$$\ln(n!) = \sum_{k=1}^n \ln k < n \ln n,$$

故

$$\frac{1}{\ln(n!)} > \frac{1}{n \ln n} > 0.$$

利用 2619 题中 $p = 1$ 的结果, 知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ 也发散.

2622. 证明: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调减小, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 同时收敛或同时发散.

证 设 $S_{2^r} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2^r}$, 则因

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_{2^r} > a_{2^r+1} > \cdots > 0,$$

故得

$$0 < S_{2^r} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^{r-1}+1} + \cdots + a_{2^r-1}) < a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^r a_{2^r}, \quad (1)$$

且有

$$\begin{aligned} S_{2^r} &= a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{r-1}+1} + \cdots + a_{2^r}) \\ &> \frac{1}{2} a_1 + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{r-1} a_{2^r} \\ &= \frac{1}{2} (a_1 + 2a_2 + 2^2 a_{2^2} + \cdots + 2^r a_{2^r}) > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛; 由(2)

式得知: 若 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ 发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也发散. 由此本题获证.

注意, 在此命题中, 用作比较的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$$

可以用更普遍的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^n a_n$$

来代替,其中 m 为任一自然数. 证法类似.

2623. 设 $f(x)$ 为单调不增加的正值函数. 证明,若级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛,则对于其余项 $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ 有以下的

估计:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx < R_n < f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx.$$

利用此式,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和精确到 0.01.

解 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 的收敛性,根据哥西积分判别法,

知积分 $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛. 由于 $f(x)$ 单调不增加,故

$$f(n+k+1) \leq \int_{n+k}^{n+k+1} f(x) dx \leq f(n+k)$$

$$(k=1, 2, 3, \dots).$$

将这些不等式相加,得

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(n+k+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(n+k),$$

$$\text{即 } R_n - f(n+1) \leq \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n,$$

或

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \leq R_n \leq f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx,$$

(1)

这就是所需证的不等式.

注意,原题中将(1)中的“ \leq ”误写为“ $<$ ”,这是不

对的,例如,若令

$f(x) = \frac{1}{n^2}$, 当 $n \leq x < n+1$ 时 ($n=1, 2, \dots$), 则不等

式(1)中左端的“ \leq ”号成为“ $=$ ”号:

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx = R_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots;$$

若令

$f(x) = \frac{1}{n^2}$, 当 $n < x \leq n+1$ 时 ($n=1, 2, \dots$),

则不等式(1)中右端的“ \leq ”成为“ $=$ ”号:

$$\begin{aligned} R_n &= f(n+1) + \int_{n+1}^{+\infty} f(x) dx \\ &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots. \end{aligned}$$

最后,利用不等式(1)来求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的和,精确到

0.01. 易知,当取 $n=8$ 时,即有

$$R_8 \leq \frac{1}{9^3} + \int_9^{+\infty} \frac{dx}{x^3} < 0.008,$$

故取 $\sum_{k=1}^8 \frac{1}{k^3} \doteq 1.20$ 作为级数和的近似值,即可保证误差
不超过 0.01.

2624. 证明厄耳玛可夫判别法: 设 $f(x)$ 为单调减少的正值函数, 又设

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda.$$

若 $\lambda < 1$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛; 若 $\lambda > 1$, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

证 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = \lambda$, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $N > 0$, 使当 $x > N$ 时, 有

$$e^x f(x) < (\lambda + \varepsilon) f(x).$$

当 $\lambda < 1$ 时, 取 ε 使 $\lambda + \varepsilon = \rho < 1$, 则有

$$e^x f(e^x) < \rho f(x).$$

于是, 当 $m > N$ 时有

$$\int_N^m e^x f(e^x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx,$$

即 $\int_N^{e^m} f(x) dx < \rho \int_N^m f(x) dx$,

也即

$$\begin{aligned} (1-\rho) \int_N^{e^m} f(x) dx &< \rho \int_N^m f(x) dx - \rho \int_N^{e^m} f(x) \\ &= \rho \int_N^{e^m} f(x) dx - \rho \int_m^{e^m} f(x) dx. \end{aligned}$$

由于 N 充分大且 $m > N$, 故 $m < e^m$. 又因 $f(x) > 0$, 故 $\int_m^{e^m} f(x) dx > 0$. 从而

$$(1-\rho) \int_N^{e^m} f(x) dx < \rho \int_N^{e^m} f(x) dx,$$

$$\int_N^{e^m} f(x) dx < \frac{\rho}{1-\rho} \int_N^{e^m} f(x) dx.$$

固定 N , 让 $m \rightarrow +\infty$, 取极限即得

$$\int_N^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{\rho}{1-\rho} \int_N^{e^N} f(x) dx = \text{常数}.$$

于是, 由哥西积分判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 收敛.

当 $\lambda > 1$ 时, 则取 N 为充分大, 可得

$$e^x f(e^x) \geq f(x) \quad (x > N).$$

从而

$$\int_N^m e^x f(e^x) dx \geq \int_N^m f(x) dx,$$

即

$$\int_{e^N}^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^m f(x) dx$$

或

$$\int_{e^N}^m + \int_m^{e^m} \geq \int_N^{e^N} + \int_{e^N}^m,$$

故

$$\int_m^{e^m} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx \quad (m > N).$$

今设 $e_0 = N + 1, e_1 = e^{e_0}, e_2 = e^{e_1}, \dots, e_{k+1} = e^{e_k}, \dots$, 并分别取 $m = e_0, e_1, e_2, \dots$, 则

$$\int_{e_1}^{e_2} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

$$\int_{e_2}^{e_3} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx,$$

.....

$$\int_{e_k}^{e_{k+1}} f(x) dx \geq \int_N^{e^N} f(x) dx$$

.....

最后得

$$\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_{e_{k-1}}^{e_k} f(x) dx$$

$$\geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_N^{e^N} f(x) dx = +\infty,$$

即 $\int_{e_0}^{+\infty} f(x) dx$ 为发散的, 故由哥西积分判别法

知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ 发散.

2625. 证明罗巴契夫斯基判别法: 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项单调

趋于零, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n 2^{-n}$$

同时收敛或同时发散, 其中 p_m 是满足不等式

$$a_n \geq 2^{-n} (n = 1, 2, \dots, p_m)$$

的项 a_n 的最大的指标.

证 由题设 p_m 是满足不等式 $a_n \geq 2^{-n}$ 的项 a_n 的最大指数, 故有

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+1} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_{m-1}+2} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

.....

$$\frac{1}{2^m} \leq a_{p_m} < \frac{1}{2^{m-1}},$$

$$a_{p_m+1} < \frac{1}{2^m},$$

于是,

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \dots + a_{p_m} \geq (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m}, \quad (1)$$

$$a_{p_{m-1}+1} + a_{p_{m-1}+2} + \dots + a_{p_m} < (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}. \quad (2)$$

将(1)式及(2)式对 m 从 1 到 N 求和(其中 N 为任意正整数), 得

$$\sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m}) \geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^m},$$

$$\sum_{m=1}^N (a_{p_{m-1}+1} + \cdots + a_{p_m}) < \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}.$$

由上述两个不等式可知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 同时收敛或同时发散. 因此,我们如果能证明级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 与级数 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 同时收敛或同时发散,则命题即获证.

由 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 的收敛性易得 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 的收敛性. 反之,若级数 $\sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}}$ 收敛,则 $\sum_{m=1}^{\infty} p_m 2^{-m}$ 也收敛. 事实上,记 $A = \sum_{m=1}^{\infty} (p_m - p_{m-1}) \cdot \frac{1}{2^{m-1}}$, 由于 $p_m - p_{m-1} \geq 0 (m = 1, 2, \dots)$, 故有

$$\begin{aligned} A &\geq \sum_{m=1}^N (p_m - p_{m-1}) \frac{1}{2^{m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^N p_m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{m=1}^N p_{m-1} \cdot \frac{1}{2^{m-1}} \\ &= \sum_{m=1}^N p_m \cdot \frac{1}{2^{m-1}} - \sum_{l=0}^{N-1} p_l \cdot \frac{1}{2^l} \\ &= \frac{1}{2^{N-1}} p_N + \sum_{m=1}^{N-1} p_m \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^m} \right) - p_0 \\ &= \sum_{m=1}^{N-1} p_m 2^{-m} + \frac{1}{2^{N-1}} p_N - p_0. \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{n+a} - \sqrt[4]{n^2+n+b}}{(2a-1)n+a^2-b} = \frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})}$$

由此可知, 不论 $a = \frac{1}{2}$ 还是 $a \neq \frac{1}{2}$, 当 n 充分大时, 上式右端均保持定号, 故原级数可当成正项级数处理.

若 $a = \frac{1}{2}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2-b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})} \bigg/ \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2-b}{4},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数收敛;

若 $a \neq \frac{1}{2}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a-1)n+a^2-b}{(\sqrt{n+a} + \sqrt[4]{n^2+n+b})(n+a + \sqrt{n^2+n+b})} \bigg/ \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{2a-1}{4} \neq 0, \text{ 而级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散, 故原}$$

级数发散.

2628. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right).$

解 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - 1 \right) + \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) \right].$$

分别考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} \right) \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right),$$

它们都是正项级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2}}{\frac{1}{n}} = \frac{\pi}{4},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{\pi^2}{32},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} \right)$ 发

散, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right)$ 收敛, 从而, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ctg} \frac{n\pi}{4n-2} - \sin \frac{n\pi}{2n+1} \right) \text{ 发散.}$$

2629. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} \right].$

解 当 $x \neq 0$ 及 $-1 < x < +\infty$ 时, 有

$$\ln(1+x) < x.$$

利用上式, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n},$$

$$\ln \frac{n+1}{n} = -\ln \frac{n}{n+1}$$

$$= -\ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) > \frac{1}{n+1}.$$

即

$$\frac{1}{n+1} < \ln \frac{n+1}{n} < \frac{1}{n}$$

于是,

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln \frac{n+1}{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}} < \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{2}{\sqrt{n+1}}} < \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故原级数也收敛.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$.

解 先设 $a > 2$. 利用斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad (0 < \theta_n < 1),$$

即得

$$\frac{\ln(n!)}{n^a} = \frac{\ln 2\pi}{2n^a} + \frac{\ln n}{2n^a} + \frac{\ln n}{n^{a-1}} + \frac{\theta_n}{12n^{a+1}} - \frac{1}{n^{a-1}}.$$

显然, 当 $a > 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{a-1}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\theta_n}{n^{a+1}}$ 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-1}}$ 均收敛, 故原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 收敛.

现设 $a \leq 2$. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$, 利用 139 题的结果

可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty,$$

从而

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n!)}{n^a} \bigg/ \frac{1}{n^{a-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n} = +\infty, \end{aligned}$$

再注意到此时 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{a-1}}$ 发散, 即知原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{n^a}$ 发散.

2631. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$.

解 方法一:

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \left(e^{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} - 1 \right) \\ &= \frac{e^{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} - 1}{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}} \cdot n \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} = 0, \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(n+1)^2} + \sqrt[3]{n(n+1)} + \sqrt[3]{n^2}} = +\infty, \end{aligned}$$

利用 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, 即得 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = +\infty$, 故级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt[3]{n}}$ 收敛.

方法二:

当 t 充分大时, 有

$e^t \geq At^4$ (A 为大于零的常数),
故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$e^{\sqrt{n}} \geq An^{\frac{4}{3}}.$$

从而

$$e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{A} n^{-\frac{4}{3}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{4}{3}}$ 收敛, 故原级数收敛.

2632. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$

解 当 t 充分大时, 有 $e^t \geq Bt^7$ ($B > 0$ 为常数), 故存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$0 < n^2 e^{-\sqrt{n}} \leq \frac{1}{B} n^{-\frac{7}{2}+2} = \frac{1}{B} n^{-\frac{3}{2}}.$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故原级数收敛.

2633. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1).$

解 $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = \frac{\ln n}{e^{\frac{1}{n^2+1}}} - 1 \sim \frac{\ln n}{n^2+1} \sim \frac{\ln n}{n^2}$. 又由于

存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, 有 $0 < \frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{A}{n^{\frac{3}{2}}}$ ($A > 0$, 常数),

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 收敛, 从而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$ 收敛.

2634. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d}}.$

解 先设 $c \neq 0$. 若 $bc - ad \neq 0$, 应用阿拉伯判别法, 我们有

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= n \frac{\frac{a \ln n + b}{c \ln n + d} - \frac{a \ln(n+1) + b}{c \ln(n+1) + d}}{1} \\ &= n \left\{ \frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{e^{(c \ln n + d)(c \ln(n+1) + d)} - 1} \right\} \\ &= \frac{\frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{e^{(c \ln n + d)(c \ln(n+1) + d)} - 1}}{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \cdot \frac{(bc - ad) \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \\ &\quad \cdot \frac{1}{(c \ln n + d)(c \ln(n+1) + d)}. \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上述等式右端的第一个因子趋于 1, 第二个因子趋于 $bc - ad$, 第三个因子趋于零, 因此,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = 0.$$

从而级数发散; 若 $bc - ad = 0$, 此时 $a_n = \text{常数} > 0 (n = 1, 2, \dots)$, 故级数发散.

若 $c = 0$, 则,

$$\begin{aligned} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \frac{e^{-\frac{a \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{d}} - 1}{-\frac{a}{d} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)} \\ &\quad \cdot \left(-\frac{a}{d} \right) \cdot \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \rightarrow -\frac{a}{d} \quad (d \neq 0). \end{aligned}$$

于是, 如果 $-\frac{a}{d} > 1$ 即 $\frac{a}{d} < -1$, 则级数收敛; 如果 $-\frac{a}{d} < 1$, 则级数发散; 若 $-\frac{a}{d} = 1$, 则 $a_n = \frac{C}{n} (C > 0)$ 是常

数), 从而级数发散.

$$2635. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)}.$$

解 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}$, 由于

$$\frac{\frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}}}{\frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)}} = \left(\frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} \right)^2$$

并且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sin \frac{1}{n}}{\ln \frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = 1,$$

故
$$\frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{\ln^2 \frac{1}{n}} = \frac{1}{\ln^2 n}.$$

又当 $n > 1$ 时, $0 < \ln n < \sqrt{n}$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由于级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散, 从而原级数发散.

$$2636. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^3}.$$

解 若 $a=0$, 级数显然发散.

若 $a \neq 0$. 由于

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\cos \frac{a}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2 \ln \cos \frac{a}{n}}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{n^2 \ln \left(1 - \frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)} \\
&= e^{n^2 \left(-\frac{a^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right)} = e^{-\frac{a^2}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

并且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = e^{-\frac{a^2}{2}} < 1$, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{a}{n} \right)^{n^3}$ 当 $a \neq 0$ 时收敛.

2637. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]$.

解 $a_n = \ln \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \right]$

$$= \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}},$$

其中 $\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时).

由于

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \pi x - \cos \pi x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi \operatorname{sh} \pi x + \pi \sin \pi x}{2x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi^2 \operatorname{ch} \pi x + \pi^2 \cos \pi x}{2} = \pi^2,
\end{aligned}$$

故得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^2}}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}}}{\frac{1}{n^2}} \cdot \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}} \\
&\quad \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[1 + \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n}} - 1 \right) \right]^{\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\pi}{n}}} \\
&= 1 \cdot \pi^2 \cdot 1 = \pi^2,
\end{aligned}$$

故存在常数 $k > 0$, 有 $\left| \frac{a_n}{n^2} \right| \leq k$ (n 充分大), 即 $|a_n| \leq k$

$\cdot \frac{1}{n^2}$, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故原级数收敛.

2638. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\sqrt{n}}}$.

解 由于

$$n! > \left(\frac{n}{e} \right)^{n-1},$$

故有

$$\frac{n!}{n^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{e^{n-1}} \cdot \frac{1}{n^{\sqrt{n}}} = b_n.$$

但 $\sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{e} n^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因此级数

当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时 $\ln \frac{a}{\sqrt{bc}} \neq 0$, 且当 n 充分大时, 级数的项不变号, 故当 $a \neq \sqrt{bc}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^{\frac{1}{n}} - \frac{b^{\frac{1}{n}} + c^{\frac{1}{n}}}{2} \right)$ 发散.

当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$. 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2}}{\frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{1}{8} (\ln b - \ln c)^2,$$

并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{(b^{\frac{1}{2n}} - c^{\frac{1}{2n}})^2}{2} \right]$ 收敛, 即当 $a = \sqrt{bc}$ 时, 原级数收敛.

2641. $\sum_{n=1}^{\infty} (n^{n^a} - 1)$.

解 当 $a \geq 0$ 时, $a_n = n^{n^a} - 1 \rightarrow \infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数发散.

当 $-1 \leq a < 0$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{\frac{1}{x^{|a|}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e_x^{\frac{\ln x}{|a|}} - 1}{\frac{1}{x^{|a|}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{e_x^{\frac{\ln x}{|a|}} \left(\frac{1}{x^{|a|+1}} - |a| \cdot \frac{\ln x}{x^{|a|+1}} \right)}{-|a| \cdot \frac{1}{x^{|a|+1}}} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e_x^{\frac{\ln x}{|a|}} (\ln x - |a|^{-1}) = +\infty, \end{aligned}$$

故对于 $a_n = n^{n^a} - 1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{|a|}}} \rightarrow \infty.$$

因此,存在常数 $k > 0$, 使 $a_n \geq k \cdot \frac{1}{n^{|a|}}$, 但当 $|a| \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|a|}}$ 发散, 从而当 $-1 \leq a < 0$ 时, 原级数发散.

当 $a < -1$ 时, 取 β 使 $a < \beta < -1$, 于是 $|a| > |\beta| > 1$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{x^a} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\beta|}}} - 1}{\frac{1}{x^{|\beta|}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln x}{x^{|\beta|}}} \left(\frac{1}{x^{|\beta|+1}} - |\beta| \cdot \frac{\ln x}{x^{|\beta|+1}} \right)}{-|\beta| \cdot \frac{1}{x^{|\beta|+1}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x^{|\beta|}}} \left(\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \frac{\ln x}{x^{|\alpha|-|\beta|}} - \frac{1}{|\beta|} \cdot \frac{1}{x^{|\alpha|-|\beta|}} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{|\beta|}}} = 0,$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{|\beta|}}$ 收敛, 从而当 $a < -1$ 时, 原级数收敛.

2642. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right) \right].$

解 $a_n = \ln \frac{1}{n^a} - \ln \left(\sin \frac{1}{n^a} \right)$. 显然必须设 $a \geq 0$. 因若 $a < 0$, 则对于某些 n , $\ln(\sin n^{-a})$ 可能无意义. 当 $a = 0$ 时,

$a_n = -\ln \sin 1 = \text{常数} > 0 (n=1, 2, \dots)$, 故此时级数发散, 当 $a > 0$ 时, 将 a_n 改写为

$$\begin{aligned} a_n &= \ln \frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} = \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \right] \\ &= \left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \ln \left[1 + \left(\frac{\frac{1}{n^a}}{\sin \frac{1}{n^a}} - 1 \right) \right]^{\frac{\sin \frac{1}{n^a}}{\frac{1}{n^a} - \sin \frac{1}{n^a}}}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^a}{\sin x^a} - 1}{x^{2a}} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{y}{\sin y} - 1}{y^2} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^2 \sin y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y - \sin y}{y^3} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 - \cos y}{3y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{6y} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^{2a}}} = \frac{1}{6}.$$

从而得知: 当 $2a > 1$ 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛;

而当 $2a \leq 1$ 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2643. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)} (a > 0)$.

解 $a_n = a^{-(b \ln n + c \ln^2 n)}$. 当 $a=1$ 时, 显然 $a_n=1$, 因而级数发散. 当 $a \neq 1$ 时, 考虑

$$\ln \frac{1}{a_n} = (b + c \ln n) \ln a.$$

利用 2615 题的结果(对数判别法), 即知:

(1) 当 $c=0, b \ln a > 1$, 即 $a^b > e$ 时, 原级数收敛; 而当 $c=0, b \ln a \leq 1$, 即 $a^b \leq e$ 时, 原级数发散.

(2) 当 $c \neq 0, c \ln a > 0$, 即 $a^c > 1$ 时, 原级数收敛; 而当 $c \neq 0, c \ln a < 0$ 即 $a^c < 1$ 时, 原级数发散.

综上所述, 仅当 $c=0, a^b > e$ 及 $a^c > 1$ 时, 原级数收敛.

$$2644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \quad (a > 0, b > 0).$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2n+a+b}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^{n+b} \left(1 + \frac{b}{n}\right)^{n+a}} = \frac{1}{e^a \cdot e^b} \\ &= e^{-(a+b)}, \end{aligned}$$

故当 $a+b > 1$ 时, 级数收敛; 而当 $a+b \leq 1$ 时, 级数发散.

$$2645. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}$$

解 $a_n = \frac{[(n+1)!]^n}{2! \cdot 4! \cdots (2n)!}$. 由于

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^n}{(n+3) \cdots (2n+2)} < \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^n$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{n+2} \right)^{n+2-2} \right]^{-1} \rightarrow \frac{1}{e} < 1$$

(当 $n \rightarrow +\infty$ 时),

于是由 2592 题的结论知原级数收敛.

研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性, 其通项如下:

$$2646. u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x} dx}{1+x^2}$$

解 由于

$$0 < u_n \leq \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1} dx = n^{-\frac{3}{2}},$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{3}{2}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2647. u_n = \int_0^n \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx.$$

解 由于

$$0 < u_n \leq \int_0^n \frac{1}{x} dx = \frac{2}{n^2}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2648. u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx.$$

解 由于

$$u_n \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2(n+1)} > 0,$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

$$2649. u_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

解 由于

$$0 < u_n \leq e^{-\sqrt{n}},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$ 是收敛的^{*}), 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

^{*})事实上, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} = 0$, 利用比较判别法即

获证.

$$2650. u_n = \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx.$$

解 由于函数 $\sin^3 x$ 在 $(0, \frac{\pi}{n})$ ($n \geq 2$) 内是单调增加的, 故有

$$0 \leq u_n \leq \frac{\sin^3 \frac{\pi}{n}}{1+0} \cdot \frac{\pi}{n} \leq \left(\frac{\pi}{n}\right)^4 \quad (n \geq 2).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2651. u_n = \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{(2n)!}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} 0 < u_n &\leq \frac{n \cdot n!}{n! (n+1) \cdots (2n)} = \frac{n}{(n+1) \cdots (2n)} \\ &< \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n} \quad (\text{当 } n \text{ 足够大}), \end{aligned}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1) \cdot 2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

$$2652. u_n = \frac{\sum_{k=1}^n \ln^2 k}{n^n}.$$

解 首先,我们证明:当 $\alpha > 2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.事实上,

$$0 < u_n \leq \frac{n \ln^2 n}{n^\alpha} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}},$$

取 $\delta > 0$ 使 $\alpha - 1 - \delta > 1$, 由于

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} = \frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1-\delta}}.$$

而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 n}{n^\delta} = 0$, 故当 n 充分大时,有

$$\frac{\ln^2 n}{n^{\alpha-1}} \leq \frac{C}{n^{\alpha-1-\delta}} \quad (C \text{ 为正的常数}).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1-\delta}}$ 收敛,故当 $\alpha > 2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

其次,我们证明:当 $\alpha \leq 2$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.事实上,当 n 充分大时,有

$$u_n \geq \frac{\sum_{k=1}^n \ln k}{n^2} = \frac{\ln n!}{n^2}.$$

因为当 $1 \leq r \leq n$ 时, $(n-r)(r-1) \geq 0$, 故有

$$r(n-r+1) \geq n.$$

令 $r=1$, 得 $1 \cdot n = n$;

$r=2$, 得 $2(n-1) \geq n$;

.....

$r=n$, 得 $n \cdot 1 = n$.

连乘得

$$(n!)^2 \geq n^n \quad \text{或} \quad n! \geq n^{\frac{n}{2}}.$$

利用上述不等式, 可得

$$u_n \geq \frac{\ln n^{\frac{n}{2}}}{n^2} = \frac{\ln n}{2n} > \frac{1}{n} > 0 \quad (\text{当 } n \geq n_0 \text{ 时}),$$

从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

用对应的级数来代替叙列 $x_n (n=1, 2, \dots)$, 然后研究它们的收敛性, 设:

$$2653. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad x_{n+1} - x_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^2} \\ &= O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 记 $x_0 = 0$, 故

$$x_n = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极根存在, 即叙列 $\{x_n\}$ 收敛.

$$2654. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{(\ln n)^2}{2}.$$

$$\text{解} \quad x_n - x_{n-1} = \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \{(\ln n)^2 - (\ln(n-1))^2\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \frac{n}{n-1} \cdot \ln[n(n-1)] \\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right) \left[\ln n^2 + \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] \\
&= \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \left[2 \ln n - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\
&= \frac{\ln n}{n} - \left\{ \frac{\ln n}{n} + O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) \right\} = O\left(\frac{\ln n}{n^2}\right).
\end{aligned}$$

考虑级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$. 由级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 的收敛性可知

级数 $\sum_{n=2}^{\infty} (x_n - x_{n-1})$ 收敛, 于是

$$x_n = \sum_{k=2}^n (x_k - x_{k-1})$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在, 即数列 $\{x_n\}$ 收敛.

2655. 假如

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad (b)^+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \quad *;$$

$$(B) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!},$$

约需取级数的多少项来求级数的和方可精确到 10^{-5} .

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad (a) \text{ 余项 } R_N &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \\
&= \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{N}.
\end{aligned}$$

欲精确到 10^{-5} , 只要 $\frac{1}{N} < 10^{-5}$, 即只要

* 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明, 中译本基本是按俄文第二版翻译的, 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

(B) 余项 $R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!}$. 仍用不等式

$$k! > \left(\frac{k}{e}\right)^k \quad (k=1, 2, \dots),$$

则有

$$\begin{aligned} R_N &< \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2n-1}\right)^{2n-1} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2n-1} \\ &= \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2l}. \end{aligned}$$

取 $N \geq 1$, 则 $\frac{e}{2N+1} < 1$, 故有

$$R_N < \left(\frac{e}{2N+1}\right)^{2N+1} \frac{1}{1 - \left(\frac{e}{2N+1}\right)^2}.$$

今取 $N=5$, 则有

$$R_N < \left(\frac{e}{11}\right)^{11} \cdot \frac{121}{113.614} \approx 10^{-6.6374} < 10^{-5},$$

即此级数取 $N \geq 5$ 项求和就可保证精确到 10^{-5} .

§ 2. 变号级数收敛性的判别法

1° 级数的绝对收敛性 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

称为绝对收敛, 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{2}$$

收敛. 这时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛, 绝对收敛级数的和与项相加的顺序无关.

要确定级数(1)的绝对收敛性, 只须把对于同号级数收敛性的已知

判别法应用于级数(2)就够了.

若级数(1)收敛,而级数(2)发散,则称级数(1)为条件收敛(非绝对收敛).条件收敛级数的各项顺序加以改变后可使其和等于任何数(黎曼定理).

2° 莱布尼兹判别法 交错级数

$$b_1 - b_2 + b_3 - \cdots + (-1)^{n-1}b_n + \cdots$$

($b_n \geq 0$)收敛(一般说来,非绝对地),若(a) $b_n \geq b_{n+1}$ ($n = 1, 2, \dots$)和(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.在这种情形下,对于级数的余项

$$R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \cdots$$

有以下的估计

$$R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1} \quad (0 \leq \theta_n \leq 1).$$

3° 亚伯耳判别法 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \quad (3)$$

收敛,若1),级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,2)数 b_n ($n = 1, 2, \dots$)形成一单调并有界的数列.

4° 迪里黑里判别法 级数(3)收敛若:1)部分和 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ 是有界的;2)当 $n \rightarrow \infty$ 时 b_n 单调地趋近于零.

2656. 证明:可把非绝对收敛级数的各项不变更其顺序而分群组合起来使所得的新级数绝对收敛.

证 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一收敛而非绝对收敛的级数.利用哥西准则,即知:

对于给定的 $\epsilon_1 = \frac{1}{2}$,存在 N_1 ,使对于任意自然数 m_1 ,有

$$|a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_1+m_1}| < \epsilon_1;$$

对于给定的 $\epsilon_2 = \frac{1}{2^2}$, 存在 N_2 (可取 $N_2 > N_1$), 使对于任意自然数 m_2 , 有

$$|a_{N_2+1} + \cdots + a_{N_2+m_2}| < \epsilon_2;$$

.....

对于给定的 $\epsilon_k = \frac{1}{2^k}$, 存在 N_k (可取 $N_k > N_{k-1}$), 使对于任意自然数 m_k , 有

$$|a_{N_k+1} + \cdots + a_{N_k+m_k}| < \epsilon_k.$$

.....

令 $A_0 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1},$

$$A_1 = a_{N_1+1} + a_{N_1+2} + \cdots + a_{N_2},$$

.....

$$A_k = a_{N_k+1} + a_{N_k+2} + \cdots + a_{N_{k+1}},$$

.....

则有 $|A_k| < \epsilon_k = \frac{1}{2^k}$ ($k = 1, 2, \dots$), 且 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 是原级数的各项不变更其顺序而分群组合起来所得的新级数. 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

收敛, 故级数 $\sum_{k=0}^{\infty} |A_k|$ 收敛, 即级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A_k$ 绝对收敛. 证毕.

2657. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 若 (a) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 此级数的通项 a_n 趋于零; (b) 由组合已给级数的各项但不变更原有顺序所得的某一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛; (B) 在项 $A_n = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i$ ($p_1 <$

$p_2 < \dots$) 中相加项 a_i 的数目是有界的, 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是收敛的.

证 设 A_n 中相加项的数目不超过某一固定的自然数 m , 即

$$p_{n+1} - p_n \leq m \quad (n = 1, 2, \dots).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 考虑 $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2m+1} > 0$. 由 $a_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故存在 N' , 使当 $n \geq N'$ 时, 有

$$|a_n| < \varepsilon_1.$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的收敛性知, 存在 $N_1 \geq N'$, 使当 $n \geq N_1$ 及 p 为任意自然数时, 有

$$|A_n + A_{n+1} + \dots + A_{n+p}| < \varepsilon_1.$$

今取 $N = p_{N_1}$, 当 $n \geq N$ 时, 对任意自然数 s , 考察 $\Delta_{n,s} = a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+s}$, 注意每一个 a_i 必属于某一个 A_k . 记 A_n 内各项 a_i 元素的集合为 \tilde{A}_n , 即知: 当 $i < j$ 时, 若 $a_i \in \tilde{A}_k, a_j \in \tilde{A}_l$, 则必有 $k \leq l$. 今在 $\Delta_{n,s}$ 中看各项. 显然 $a_n \in \tilde{A}_{N_1+r}$ ($r \geq 0$). 再看以后各项, 便有

$$\Delta_{n,s} = B + A_{N_1+r+1} + \dots + A_{N_1+r+q} + B'$$

其中 $B = a_n + \dots + a_{p_{N_1+r+1}} - 1, B' = a_{p_{N_1+r+q+1}} + \dots + a_{n+s}$. 很明显, B 是 A_{N_1+r} 中一部分项之和, B' 是 $A_{N_1+r+q+1}$ 中一部分项之和, 于是 (注意 $n \geq N \geq N_1 \geq N'$)

$$|B| \leq (p_{N_1+r+1} - p_{N_1+r}) \varepsilon_1 \leq m \varepsilon_1,$$

$$|B'| \leq (p_{N_1+r+q+2} - p_{N_1+r+q+1}) \varepsilon_1 \leq m \varepsilon_1,$$

$$|A_{N_1+r+1} + \dots + A_{N_1+r+q}| < \varepsilon_1,$$

从而(当 $n \geq N, s$ 为任何自然数)

$$|\Delta_{n,s}| \leq |B| + |A_{N_1+r+1} + \cdots + A_{N_1+r+q}| \\ + |B'| < (2m+1)\epsilon_1 = \epsilon.$$

根据哥西收敛准则即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 证毕.

2658. 证明: 若将收敛级数的各项重新排列, 而使每一项离开原有的位置不超过 m 个位置 (m 为预先给定的数), 则其和不变.

证 设原收敛级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 当然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 又记重

排出的新级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, 再记 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 N 项部分和为

$$S_N = \sum_{n=1}^N a_n, \text{ 记 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 的前 } N \text{ 项部分和为 } \sigma_N = \sum_{n=1}^N b_n.$$

当然有 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$. 今证 σ_N 的极限也存在, 且等于 S .

考察 σ_N 与 S_N 之差

$$\Delta_N = \sigma_N - S_N.$$

任给 $\epsilon > 0$, 取 $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2m} > 0$, 则存在 N_1 , 使当 $n \geq N_1$ 时, 有 $|a_n| < \epsilon_1$. 今取

$$N \geq N_1 + 2m,$$

又记 S_k 内各 a_n 项元素集合为 \tilde{S}_k , 记 σ_k 内各 b_n 项元素集合为 $\tilde{\sigma}_k$, 则有

$$\Delta_N = \sum b_n - \sum a_n.$$

$$b_n \in \tilde{\sigma}_N \quad a_n \in \tilde{S}_N.$$

今从 a_1 查起, 看 a_1, a_2, \dots 至 a_N , 注意每一个 a_i 被重排

成 b_j 时, i 与 j 的标号差不超过 m . 因此, 对每一个 a_i 总可以在 b_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $b_j = a_i$. 反过来, 从 b_1 查起, 看 b_1, b_2, \dots 至 b_N , 对每一个 b_j 总可以在 a_i 的前后各不超过 m 个元素内找到一个 $a_i = b_j$. 但也可能且只有那种可能: 最后一段不超过 m 个元素的 a_i , 即 $a_N, a_{N-1}, \dots, a_{N-m}$ 之内若干个元素可能被迁到 b_N 之后, 从而在 σ_N 内找不到搬迁元素, 但个数 (设为 r 个) 不超过 m . 同样, 也有可能最后一段不超过 m 个元素的 b_j , 即 $b_N, b_{N-1}, \dots, b_{N-m}$ 之内若干个元素在 \tilde{S}_N 内找不到搬迁元素, 但个数 (设为 s 个) 不超过 m . 除此之外均有对应的搬迁元素且一一对应. 于是,

$$\begin{aligned}
 |\Delta_N| &= \left| \sum_{\substack{b_n \in \tilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \tilde{S}_N}} b_n - \sum_{\substack{a_n \in \tilde{S}_N \\ a_n \notin \tilde{\sigma}_N}} a_n \right| \\
 &\leq \sum_{\substack{b_n \in \tilde{\sigma}_N \\ b_n \notin \tilde{S}_N}} |b_n| + \sum_{\substack{a_n \in \tilde{S}_N \\ a_n \notin \tilde{\sigma}_N}} |a_n| \\
 &< s\varepsilon_1 + r\varepsilon_1 \leq m\varepsilon_1 + m\varepsilon_1 = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

上式中 a_n 的下标 $n \geq N_1 + m > N_1$, 故 $|a_n| < \varepsilon$. 而 b_n 的下标 $n \geq N_1 + m$, 记住 b_n 由某 a_i 搬迁而来, 其下标 i 在 n 的前后距离不超过 m , 故此时 $i \geq N_1$, 因而此时 $|b_n| = |a_i| < \varepsilon_1$. 从而上述不等式是成立的. 由极限定义知

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N = 0,$$

也即有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S.$$

从而命题获证.

证明下列级数的收敛性并求它们的和:

$$2659. 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \dots.$$

$$\text{解 } S_n = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_n &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} - \dots + (-1)^{n-2} \frac{2n-3}{2^{n-1}} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n}, \end{aligned}$$

将上面两式相加, 得

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} S_n &= 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{2}{2^3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-1}} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^n}. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} 3S_n &= 2 - 2 + \frac{2}{2} - \frac{2}{2^2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{2}{2^{n-2}} \\ &\quad + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} + (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2^{n-1}} \rightarrow \frac{2}{3} \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{9}.$$

因此, 原级数收敛. 其和为 $\frac{2}{9}$.

$$2660. 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \dots$$

解 显然该级数绝对收敛,从而它是收敛的,记其和为 S . 考虑一个特殊的部分和

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \dots + \frac{1}{2^{3n-3}} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^4} + \dots + \frac{1}{2^{3n-2}} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{3n-1}} \right) \\ &= \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} \right) \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^{3n}}}{1 - \frac{1}{2^3}}, \end{aligned}$$

故得

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{10}{7}.$$

$$2661. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

解 考虑部分和 S_m . 当 $m=2n$ 时,有

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= C + \ln 2n + \epsilon_{2n} - 2 \cdot \frac{1}{2} (C + \ln n + \epsilon_n)^* \end{aligned}$$

$$= \ln 2 + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n = \ln 2 + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \ln 2.$$

同样, 当 $m = 2n + 1$ 时, 也有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \right) = \ln 2.$$

故有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2,$$

即原级数收敛, 其和为 $\ln 2$.

*) 利用 146 题的结果.

2662. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$, 求从已知级数把各项重排后

所成级数:

$$(a) 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

$$(b) 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

的和.

解 (a) 考虑部分和 S_m . 当 $m = 3n$ 时, 有

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \\ &\quad + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4n-1} + \frac{1}{4n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\
&\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4n}\right) \\
&= \sigma_{2n} - \frac{1}{2}\sigma_n - \frac{1}{2}\sigma_{2n} = \frac{1}{2}(\sigma_{2n} - \sigma_n) \\
&= \frac{1}{2}l_{2n},
\end{aligned}$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \frac{1}{2} \ln 2$. 同样有

$$S_{3n+1} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right), S_{3n+2} = S_{3n} + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们与 S_{3n} 有相同的极限, 从而

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \frac{1}{2} \ln 2,$$

即原级数收敛, 其和为 $\frac{1}{2} \ln 2$

2663. 把收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的项重排, 使它成发散的.

解 我们这样进行重排: 先取两个正项, 然后取一个负项, 得

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \\
&+ \cdots + \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} + \cdots \quad (1)
\end{aligned}$$

将上述重排后所得的级数(1)每相邻三项结合而得一个新级数,如果它发散,当然上述重排后所得的级数也发散. 由于

$$\frac{1}{\sqrt{4n-3}} > \frac{1}{\sqrt{4n}}, \quad \frac{1}{\sqrt{4n-1}} > \frac{1}{\sqrt{4n}},$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} &> \frac{2}{\sqrt{4n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2n}}, \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \\ > \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2n}} > 0 \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散,故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{4n-3}} + \frac{1}{\sqrt{4n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$

发散,从而,重排后所得的级数(1)也发散.

研究变号级数的收敛性:

2664. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$.

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 收敛,故原级数绝对收敛,从而也是收敛的.

$$2665. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n.$$

解 $a_n = (-1)^n \left(\frac{2n+100}{3n+1} \right)^n$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+100}{3n+1} = \frac{2}{3} < 1,$$

故原级数绝对收敛, 从而也是收敛的.

$$2666. 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \dots.$$

解 将此级数每相邻三项组合得一新级数, 它是交错级数, 满足莱布尼兹判别法的两个条件, 因而它是收敛的. 利用 2657 题的结果, 即知原级数收敛. 显然此级数仅为条件收敛.

$$2667. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

解 由于当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{\ln^{100} n}{n}$ 单调下降趋于零, 且

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$$

为有界的, 故按迪里黑里判别法即知原级数收敛.

$$2668. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

解 将通项改写为

$$(-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = (-1)^n \frac{1}{2n} + (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}.$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n}$ 收敛. 下面证明级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 也收敛. 事实上, 部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{\cos 2n}{2n} - \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \frac{2\cos 4n}{4n} \\ &= S_N^{(1)} - S_N^{(2)}. \end{aligned}$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 4n}{2n}$ 均收敛 (因为当 $k \rightarrow \infty$

时, $\frac{1}{2k}$ 单调趋于零, 且

$$\left| \sum_{n=1}^k \cos 2n \right| = \left| \frac{\sin(2k+1) - \sin 1}{2\sin 1} \right| \leq \frac{1}{\sin 1},$$

故由迪里黑里判别法即获证), 记它们的和分别为 $S^{(1)}$ 及 $S^{(2)}$, 则当 $N \rightarrow \infty$ 时, $S_N \rightarrow S^{(1)} - S^{(2)}$, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2n}{2n}$ 收敛. 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ 收敛.

2669. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$.

解 $(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

显见级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 故原级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100} \text{ 收敛.}$$

2670. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} \\
 &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \\
 &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right).
 \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 均收敛, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原级数发散.

2671. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}).$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \sin(\pi \sqrt{n^2 + k^2}) &= \sin\left[n\pi \sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}\right] \\
 &= \sin n\pi \left[1 + \frac{k^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right] \\
 &= \sin\left[n\pi + \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\
 &= (-1)^n \sin\left[\frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] \\
 &= (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)
 \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{k^2\pi}{2n}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 收敛, 故原级数收敛.

2672. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(\sqrt{n})}}{n}.$

解 这级数首先出现三个负项, 之后出现五个正项, 如此下去, 若将这些相邻且具相同符号的几项合并成

一项,则所得的新级数为一交错级数:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1} \right]. \quad (1)$$

容易证明不等式

$$\begin{aligned} \frac{2}{k+1} &< \underbrace{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2+1} + \cdots}_{k \text{ 项}} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{k^2+k} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2-1}}_{(k+1) \text{ 项}} < \frac{2}{k} \end{aligned}$$

事实上,开头 k 项的和小于 $k \cdot \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k}$,而后面 $k+1$ 项

的和小于 $(k+1) \cdot \frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{k}$,所以整个和数小于 $\frac{2}{k}$.

左面的不等式可由整个和数大于 $k \cdot \frac{1}{k^2+k} + (k+1) \cdot$

$\frac{1}{(k+1)^2} = \frac{2}{k+1}$ 而得.

于是,级数(1)的通项当 $k \rightarrow \infty$ 时趋于零,并且它的绝对值单调减小,由莱布尼兹判别法即知级数(1)收敛.

注意,原级数的部分和恰好包含在级数(1)的某相邻两部分和之间,由级数(1)的收敛性知此两相邻部分和趋于同一极限,因此原级数部分和有极限,从而原级数收敛.

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} \right|$ 发散,故原级数仅为条件收敛.

$$2673. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, 即通项不趋于零, 故级数发散.

2674. 证明: 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) > 0,$$

则交错级数 $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots (b_n > 0)$ 收敛.

证 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) = A$, 我们取 $\epsilon > 0$, 使得 $A - \epsilon > 0$, 则存在自然数 N , 使当 $n \geq N$ 时, 有

$$A - \epsilon < n \left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1 \right) < A + \epsilon$$

或

$$1 < 1 + \frac{A - \epsilon}{n} < \frac{b_n}{b_{n+1}} < 1 + \frac{A + \epsilon}{n}.$$

因此当 $n \geq N$ 时, $b_n > b_{n+1}$, 即 b_n 单调下降.

下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. 事实上, 利用 2606 题的结果即知

$$b_n = o\left(\frac{1}{n^{A-\epsilon}}\right).$$

例如, 取 $\epsilon = \frac{A}{2}$, 于是, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有 $b_n \rightarrow 0$.

因此, 交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$ 收敛.

研究下列级数的绝对收敛性和条件收敛性:

$$2675. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}.$$

解 当 $p < 0$ 时, 由于 $n^{-p} \rightarrow +\infty$, 故级数发散.

当 $p = 0$ 时, 由于 $n^{-p} = 1$, 故级数也发散.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $a_n > a_{n+1}$ 且 $a_n \rightarrow 0$ (其中 $a_n = \frac{1}{n^p}$), 故此交错级数收敛; 然当 $0 < p \leq 1$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, 故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 仅为条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 绝对收敛.

2676. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$.

解 首先研究此级数当 p 为何值时绝对收敛. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

且当 $p > 1$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故当 $p > 1$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

下面研究当 $0 < p \leq 1$ 时原级数的收敛性, 将通项改写成 $\frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 当

$0 < p \leq 1$ 时条件收敛, 而数列 $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 为一单调上升且趋

于 1 的数列, 故由亚伯耳判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{p+\frac{1}{n}}}$

收敛. 但因级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+\frac{1}{n}}}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散, 故当

$0 < p \leq 1$ 时, 原级数仅为条件收敛.

$$2677. \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right).$$

$$\text{解 } \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right).$$

考虑级数

$$(1) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, (2) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}, (3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3p}}.$$

显然当 $p > 1$ 时, 级数(1), (2), (3)均绝对收敛,

故当 $p > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数(1)条件收敛, 级数(2)及(3)

均绝对收敛, 故当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 由于通项不趋于零, 故原级数发散.

最后, 设 $0 < p \leq \frac{1}{2}$. 令 m 是满足

$$mp \leq 1 < (m+1)p$$

的唯一正整数(显然 $m \geq 2$). 我们有

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right) &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2p}} \\ &+ \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{3n}}{n^{3p}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^{4p}} + \cdots + (-1)^{m-1} \\ &\cdot \frac{1}{m} \cdot \frac{(-1)^{mn}}{n^{mp}} + O\left(\frac{1}{n^{(m+1)p}}\right). \end{aligned}$$

若 m 为偶数, 则由于交错级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$,

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq a \text{ 或 } |a_n| \geq a^n > 1,$$

上式表明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, a_n 并非趋于零, 故此时原级数发散.

$$2679. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

解 当 x 为负整数时, 级数显然无意义.

当 x 不为负整数时, 此交错级数满足莱布尼兹判别法的条件, 故它是收敛的. 但因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}$ 发散, 故原级数当 x 不为负整数时仅为条件收敛.

$$2680. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} &= \frac{(-1)^n}{n^p \left[1 + \frac{(-1)^n}{n}\right]^p} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} \left[1 - \frac{p \cdot (-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{p}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \end{aligned}$$

当 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$ 及

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{p+2}}$ 绝对收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} = O\left(\frac{1}{n^p}\right)$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 通项不趋于零, 原级数显然发散.

$$2681. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p}$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{n-1}}{[\sqrt{n} + (-1)^{n-1}]^p} &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} \left(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)^{-p} \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}} - \frac{p}{n^{\frac{p+1}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{p}{2}+1}}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

故原级数当 $p > 2$ 时绝对收敛; 而当 $p \leq 0$ 时原级数显然发散. 下面我们再来研究当 $0 < p \leq 2$ 时原级数的收敛性.

当 $1 < p \leq 2$ 时, 由 (1) 式第一项组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\frac{p}{2}}}$$

条件收敛, 而由第二项、第三项组成的级数显然收敛, 故此时原级数条件收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由第一项及第三项组成的级数收敛, 但由第二项组成的级数发散, 故此时原级数发散.

$$2682. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left(1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)^{-1} \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} \left[1 - \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\right] \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{3p}}\right). \end{aligned}$$

当 $2p > 1$ 即 $p > \frac{1}{2}$ 时, 由第二项及第三项所组成的级

数均收敛, 而对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$, 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ 且 $\frac{1}{n^p}$ 单调减小, 又

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| = \left| \frac{\cos \frac{\pi}{8} - \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{8}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}},$$

故由迪里黑里判别法知它是收敛的. 从而当 $p > \frac{1}{2}$ 时,

原级数收敛. 又因 $\frac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{2n^p}$,

且当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p}$ 收敛, 故当

$\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin \frac{n\pi}{4}|}{n^p}$ 发散, 从而此时原级数条件收敛.

当 $p > 1$ 时, 由 $\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} = O(\frac{1}{n^p})$ 即知原级数绝对收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n^{2p}} \geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{2n} \geq 0,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{8}}{2n}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n}$ 发散, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}$ 发散. 再仿 2677 题 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 情形之证, 即易知原级数发散.

2683. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}.$

解 通项为

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \\ &= (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}} + O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}\right). \end{aligned}$$

显然 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{100}}}$ 绝对收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$ 条件收敛, 故原级数条件收敛.

2684. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n},$

解 考虑绝对值组成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \frac{n^{100}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{2^n}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{100}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{100}}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{100} = \frac{1}{2} < 1,$$

故原级数绝对收敛.

$$2685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{2}} = e_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2} = e^0 = 1,$$

从而知通项 $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2 \sqrt{n}}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 故原级数发散.

$$2686. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n}$$

解 由于 $\frac{1}{\ln n}$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时单调下降趋于零, 又部分和

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m=2}^n \sin \frac{m\pi}{12} \right| &= \left| \frac{\cos \frac{\pi}{24} - \cos(n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{12}}{2 \sin \frac{\pi}{24}} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

有界, 故级数收敛.

但是

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right| &\geq \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{12}}{\ln n} = \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n} \\ &= \frac{1}{2 \ln n} - \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{2 \ln n}, \end{aligned}$$

而级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 发散, 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{6}}{\ln n}$ 收敛, 故级数

$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{12}}{\ln n} \right|$ 发散. 从而, 原级数仅为条件收敛.

2687.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}.$$

解 记 $A_l = \{n \mid [\sqrt{n}] = l\} (l=1, 2, \dots)$. 显然 A_l 中的元素 n 满足

$$l^2 \leq n < (l+1)^2,$$

于是 A_l 中元素的个数为 $2l+1$. 考虑,

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p},$$

则有

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^l}{n^p} = (-1)^l v_l,$$

其中

$$v_l = \sum_{n \in A_l} \frac{1}{n^p}.$$

当 $p > 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} v_l - v_{l+1} &= \sum_{s=0}^{2l} \frac{1}{(l^2 + s)^p} - \sum_{s=0}^{2(l+1)} \frac{1}{[(l+1)^2 + s]^p} \\ &= \sum_{s=0}^{2l} \left\{ \frac{1}{(l^2 + s)^p} - \frac{1}{[(l+1)^2 + s]^p} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 1]^p} \\ &\quad - \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 2]^p} \\ &= \sum_{s=0}^{2l} \frac{[(l+1)^2 + s]^p - (l^2 + s)^p}{(l^2 + s)^p [(l+1)^2 + s]^p} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 1]^p}$$

$$= \frac{1}{[(l+1)^2 + 2l + 2]^p}$$

考虑函数 $f(x) = x^r$ ($r > 1$). 当 $x > y > 0$ 时, 由微分学中值公式, 有

$$x^r - y^r = r\xi^{r-1}(x-y) \geq ry^{r-1}(x-y),$$

其中 $y < \xi < x$.

于是, 令 $r = 2p$, $x = \sqrt{(l+1)^2 + s}$, $y = \sqrt{l^2 + s}$,

则当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} & [(l+1)^2 + s]^p - (l^2 + s)^p \\ &= (\sqrt{(l+1)^2 + s})^{2p} - (\sqrt{l^2 + s})^{2p} \\ &\geq 2p \cdot (\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} \{ \sqrt{(l+1)^2 + s} - \sqrt{l^2 + s} \} \\ &= 2p (\sqrt{l^2 + s})^{2p-1} \cdot \frac{2l+1}{\sqrt{(l+1)^2 + s} + \sqrt{l^2 + s}} \\ &\geq \frac{2pl^{2p-1}(2l+1)}{2\sqrt{l^2 + 4l + 1}}, \end{aligned}$$

从而当 $p > \frac{1}{2}$ 时, 有

$$\begin{aligned} v_l - v_{l+1} &\geq \frac{pl^{2p-1}(2l+1)^2}{(l^2 + 4l + 1)^{2p + \frac{1}{2}}} - \frac{2}{(l^2 + 4l + 2)^p} \\ &\geq \frac{2l^{2p-1}(l^2 + l + \frac{1}{4})}{(l^2 + 4l + 1)^{2p + \frac{1}{2}}} \\ &\quad \cdot \left[2p - \frac{(l^2 + 4l + 1)^{p + \frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2 + l + \frac{1}{4})} \right]. \end{aligned}$$

由于 $2p > 1$, 而

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{(l^2 + 4l + 1)^{p + \frac{1}{2}}}{l^{2p-1}(l^2 + l + \frac{1}{4})} = 1,$$

故当 l 充分大时, $v_l - v_{l+1} > 0$.

于是存在 l_0 , 使当 $l \geq l_0$ 时, v_l 是单调下降的叙列. 又当 $n \in A_l, p > 0$ 时有

$$\frac{1}{(l+1)^{2p}} < \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{l^{2p}},$$

故

$$\frac{2l+1}{(l+1)^{2p}} < v_l \leq \frac{2l+1}{l^{2p}}.$$

上述不等式说明, 当 $p > \frac{1}{2}$ 时, v_l 是单调下降且趋于零的叙列(当 $l \rightarrow +\infty$), 从而知级数

$$\sum_{l=1}^{\infty} u_l = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l v_l$$

是一个收敛级数. 显然当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 仅为

条件收敛. 当 $p > 1$ 时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 绝对收敛. 当 $p \leq \frac{1}{2}$

时, 级数 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 发散.

现在看原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n^p}$. 记其

部分和为 $S_N = \sum_{n=1}^N a_n$, 又记 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和为 $\sigma_M =$

$\sum_{n=1}^M u_n$. 那末任意一个部分和 S_N 均被包含在某相邻两个

部分和 σ_M 与 σ_{M+1} 之间, 即有

$$|S_N - \sigma_M| \leq |\sigma_{M+1} - \sigma_M|.$$

注意, 当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 而当 $p > 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛. 此时记其和为 σ , 则有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma.$$

因此,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \lim_{M \rightarrow \infty} \sigma_M = \sigma,$$

也即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有同样的收敛结论. 从而当

$\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛; 当 $p > 1$ 时绝对

收敛, 当 $p \leq \frac{1}{2}$ 时发散 (否则这时的 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛), 其中

当 $p = 1$ 时就是 2672 题.

2688.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}.$$

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$. 为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性,

我们引进集合

$$A_k = \{n \mid [\ln n] = k\} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

那末集合 A_k 内的元素 n 具有性质

$$k \leq \ln n < k+1,$$

或写成

$$e^k \leq n < e \cdot e^k$$

其个数 $p_k = [(e-1)e^k]$. 将 A_k 内的元素从小到大排列, 可记为

$$= |u_k| = v_k \geq \frac{e-1}{2e} = 2\varepsilon > \varepsilon. \quad (2)$$

(1)式与(2)式矛盾. 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

2689. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$

解 设 $a_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$

当 $p \leq 0$ 时, 显然 $|a_n| \geq 1$, 故 a_n 不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

当 $0 < p \leq 2$ 时, 记 $a_n = (-1)^{n-1} b_n$, 其中

$$b_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p.$$

由 $\left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p < 1$ 易知

$$b_n > \left[\frac{2n+1}{2(n+1)} \right]^p b_n = b_{n+1} \quad (n=1, 2, \dots),$$

且有 (见第 10 题的不等式)

$$0 < b_n < \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} \right)^p \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故由莱布尼兹判别法即知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 但由 2598

题的结果知, 当 $0 < p \leq 2$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 于是,

当 $0 < p \leq 2$ 时, 原级数条件收敛.

当 $p > 2$ 时, 由 2598 题的结果知, 原级数绝对收敛.

2690. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \cdot \sin n^2}{n}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \sin n \cdot \sin n^2$. 显然 $\{a_n\}$ 单调下降趋于零, 且

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^N b_n \right| &= \left| \sum_{n=1}^N \frac{1}{2} [\cos n(n-1) - \cos n(n+1)] \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} [\cos 0 - \cos N(N+1)] \right| \leq 1, \end{aligned}$$

有界 ($N=1, 2, \dots$), 故由迪里黑里判别法知级数收敛.

2691. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$.

解 我们即将指出 $\sin n^2$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时并不趋于零, 因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ 发散. 现用反证法, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0,$$

于是, $\sin^2(n^2) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由 $\sin^2(n^2) + \cos^2(n^2) = 1$ 知 $\cos^2(n^2) \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 由于

$$\begin{aligned} \sin(n+1)^2 &= \sin(n^2 + 2n + 1) \\ &= \sin n^2 \cos(2n+1) + \cos n^2 \sin(2n+1), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\cos^2(n^2) \sin^2(2n+1) \\ &= [\sin(n+1)^2 - \sin n^2 \cos(2n+1)]^2. \end{aligned}$$

让 $n \rightarrow \infty$, 注意 $\sin n^2 \rightarrow 0$, 于是, 由

$$\sin(n+1)^2 \rightarrow 0 \text{ 及 } \cos^2(n^2) \rightarrow 1.$$

便有 $\sin^2(2n+1) \rightarrow 0$, 因此 $\sin(2n+1) \rightarrow 0$. 同理

可得 $\sin(2n-1) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$). 又从

$$\sin(2n+1) + \sin(2n-1) = 2\sin 2n \cos 1$$

知还有 $\sin 2n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 即有

$$\sin m \rightarrow 0 \quad (\text{当 } m \rightarrow \infty \text{ 时}).$$

从而也有 $\sin^2 n \rightarrow 0$ 及 $\cos^2 n \rightarrow 1$. 但

$$\sin(n+1) = \sin n \cos 1 + \cos n \sin 1,$$

或写成

$$\cos^2 n \sin^2 1 = [\sin(n+1) - \sin n \cos 1]^2.$$

让 $n \rightarrow \infty$, 于上式的两端取极限, 并注意到 $\sin^2 1 \neq 0$, $\cos^2 n \rightarrow 1$, 从而产生左端为 $\sin^2 1$ 而右端为零的矛盾. 因此, 假设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n^2 = 0$$

不真, 即原命题 $\sin n^2 \not\rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时) 成立. 因此, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n^2$ 发散.

2692. 设

$$R(x) = \frac{a_0 x^p + a_1 x^{p-1} + \dots + a_p}{b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q}$$

为有理函数, 式中 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ 及当 $x \geq n_0$ 时,

$$|b_0 x^q + b_1 x^{q-1} + \dots + b_q| > 0.$$

研究级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$

的绝对收敛性和条件收敛性.

解 首先考虑绝对收敛性.

当 $q - p > 1$ 即当 $q > p + 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} |R(n)| &= \left| \frac{a_0 + a_1 n^{-1} + \dots + a_p n^{-p}}{b_0 n^{q-p} + b_1 n^{q-p-1} + \dots + b_q n^{-p}} \right| \\ &\sim \frac{|a_0|}{|b_0| n^{q-p}}, \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{q-p}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 绝对收敛.

当 $q \leq p + 1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} |R(n)|$ 发散.

但当 $p < q$ 时, $(-1)^n R(n) \sim (-1)^n \frac{a_0}{b_0 n^{q-p}}$,

容易验证原级数符合莱布尼兹判别法的条件, 故当

$p < q \leq p + 1$ 时, 级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 条件收敛.

当 $p \geq q$ 时, 显见 $R(n) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故级数

$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n R(n)$ 发散.

研究下列级数的收敛性:

2693. $\frac{1}{1^p} - \frac{1}{2^q} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^q} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{6^q} + \dots$.

解 当 $p > 1, q > 1$ 时, 显然级数绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 显然级数并非绝对收敛, 但由莱布尼兹判别法知级数收敛. 因此, 当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 级数条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 由于通项不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$), 故级数发散.

2694. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{4^p} + \dots$.

解 当 $p > 1$ 时, 由于原级数是由绝对收敛的级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p}$ 交换项数重排而得来的, 因此它也是绝对收敛的. 下面我们再讨论条件收敛性.

当 $0 < p < 1$ 时, 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 其中

$$u_n = \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(4n)^p \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^p} + \frac{1}{(4n)^p \left(1 - \frac{1}{4n}\right)^p} - \frac{1}{(2n)^p} \\
&= \frac{1}{(4n)^p} \left[1 + \frac{3p}{4n} + 1 + \frac{p}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \\
&= \frac{1}{2^p (2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - \frac{1}{(2n)^p} \\
&= \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1 \right) + \frac{4p}{(4n)^{p+1}} \\
&\quad + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \tag{1}
\end{aligned}$$

由第一项组成的级数发散到 $+\infty$, 而由其余各项分别组成的级数均收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 易证原级数与

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散(这可用部分和作比较而得), 从而当 $0 < p < 1$ 时, 原级数发散.

当 $p=1$ 时, (1) 式第一项为零, 而由第二项及第三项分别组成的级数显然收敛, 故当 $p=1$ 时, 原级数收敛, 并且显然不是绝对收敛的, 即原级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

2695. $1 + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{1^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{1}{3^p} + \frac{1}{9^p} + \frac{1}{11^p} - \frac{1}{5^p} + \dots$

解 易证原级数与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 同时收敛或同时发散, 其中

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{(4n-3)^p} + \frac{1}{(4n-1)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p} \\
&= \frac{1}{2^p (2n)^p} \left[2 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{(2n)^p} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2n}\right)^p} \\
& = \frac{1}{(2n)^p} \left(\frac{1}{2^{p-1}} - 1\right) + \frac{1}{2^p} \left(\frac{p}{2^p} - \frac{p}{2}\right) \\
& \quad \cdot \frac{1}{n^{p+1}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right). \tag{1}
\end{aligned}$$

当 $p > 1$ 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p < 1$ 时, 由(1)式第一项组成的级数发散, 而由(1)式第二项及第三项所分别组成的级数均收敛.

因此, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. 从而当 $0 < p < 1$ 时, 原级数发散.

当 $p = 1$ 时, 原级数条件收敛. 事实上, 此时(1)式中第一项及第二项均为零, 而由第三项所组成的级数收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 从而原级数收敛. 但级数

$$1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{5} + \dots$$

是发散的.

当 $p \leq 0$ 时, 原级数显然发散.

2696. $1 - \frac{2}{2^q} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} - \frac{2}{5^q} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} - \frac{2}{8^q} + \frac{1}{9^p} + \dots$

解 当 $p > 1, q > 1$ 时, 记 $\delta = \min(p, q) > 1$. 由于级数

$$1 + \frac{2}{2^\delta} - \frac{1}{3^\delta} + \frac{1}{4^\delta} + \frac{2}{5^\delta} + \frac{1}{6^\delta} + \frac{1}{7^\delta} + \frac{2}{8^\delta} + \frac{1}{9^\delta} + \dots \tag{1}$$

的前 N 项部分和 S_N 有

$$S_N \leq \sum_{k=1}^N \frac{2}{k^\delta} = 2 \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^\delta} < +\infty,$$

故 $\{S_N\}$ 单调上升且有界, 从而 $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ 存在. 于是, 原级数当 $p > 1, q > 1$ 时绝对收敛.

当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 由于级数(1)的 S_N 有

$$S_N \geq \sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \rightarrow +\infty \text{ (当 } N \rightarrow +\infty \text{ 时),}$$

故原级数并不绝对收敛. 但当 $0 < p = q \leq 1$ 时, 可考虑

级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k$, 其中

$$\begin{aligned} u_k &= \frac{1}{(3k)^p} + \frac{1}{(3k+1)^p} - \frac{2}{(3k+2)^p} \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{2}{3k}\right)^{-p} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{3k+1}\right)^{-p} \right] \\ &= \frac{1}{(3k)^p} \left[\frac{p}{3k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{(3k+1)^p} \left[\frac{p}{3k+1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right] \\ &= \frac{2p}{(3k)^{p+1}} + \frac{2p}{(3k+1)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right) \\ &= \frac{3p}{(3k)^{p+1}} + O\left(\frac{1}{k^{p+2}}\right). \end{aligned}$$

因此, 显然 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 易证原级数与级数 $(1 - \frac{2}{2^p}) +$

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 同时收敛或同时发散. 因而原级数当 $0 < p = q \leq 1$ 时条件收敛.

当 p, q 中有一个小于或等于零时, 原级数显然发散.

2697. 证明: 级数

$$(a) \sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots,$$

$$(6) \cos x + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 3x}{3} + \dots$$

在区间 $(0, \pi)$ 内不绝对收敛.

$$\text{证 (a) } \left| \frac{\sin nx}{n} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n} = \frac{1 - \cos 2nx}{2n} \\ = \frac{1}{2n} - \frac{\cos 2nx}{2n}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ 发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n}$ 收敛 (这是因为 $\frac{1}{2n}$

单调趋于零, 且 $\sum_{n=1}^N \cos 2nx$ 有界, 故由迪里黑里判别法

即获证), 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的. 因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

(6) 可用 (a) 的方法证明. 事实上, 由

$$\left| \frac{\cos nx}{n} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n} = \frac{1}{2n} + \frac{\cos 2nx}{2n}$$

即知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\cos nx}{n} \right|$$

在 $(0, \pi)$ 内发散. 至于原级数的收敛性是显然的.

因此, 原级数在 $(0, \pi)$ 内仅为条件收敛.

2698. 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (0 < x < \pi)$$

对全体参数 (p, x) 定出: (a) 绝对收敛域; (6) 非绝对收敛域.

解 当 $p > 1$ 时, 由于

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}, \quad \left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p} \quad (0 < x < \pi),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 故这两个级数当 $p > 1$ 时, 对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值均绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 时, 由于 $\frac{1}{n^p}$ 单调下降趋于零, 且部分和 $\sum_{n=1}^N \cos nx$ 及 $\sum_{n=1}^N \sin nx$ 均有界 ($0 < x < \pi$), 故由迪里黑里判别法知两级数均收敛. 但绝对值组成的级数均发散, 事实上,

$$\left| \frac{\cos nx}{n^p} \right| \geq \frac{\cos^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} + \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

$$\left| \frac{\sin nx}{n^p} \right| \geq \frac{\sin^2 nx}{n^p} = \frac{1}{2n^p} - \frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时发散到 $+\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{2n^p}$ 当 $0 < p \leq 1$ 时收敛, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx|}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin nx|}{n^p}$$

当 $0 < p \leq 1$ 时均发散. 因此, 当 $0 < p \leq 1$ 时, 对于 $(0, \pi)$ 内任一 x 值, 级数,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}$$

均为条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 两级数显然发散.

总之, 当 $0 < x < \pi$ 时, 两级数的 (a) 绝对收敛域为 $p > 1$; (b) 条件收敛域为 $0 < p \leq 1$.

$$a_n = \frac{(1+p)(2+p)\cdots(n+p)}{n! n^{p+\epsilon}},$$

取对数,有

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{p}{k}\right) - (p+\epsilon)\ln n \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{p}{k} + \sum_{k=1}^n O\left(\frac{1}{k^2}\right) - (p+\epsilon)\ln n \\ &= p\ln n + pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - p\ln n - \epsilon\ln n \\ &= pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - \epsilon\ln n \rightarrow -\infty \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow +\infty$ 时),

其中 r 及 A_1 为某些常数,从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 由莱布尼兹

判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ 收敛. 因此,当 $p < q \leq p+1$ 时,原级数条件收敛.

当 $q = p$ 时,有

$$\ln a_n = pr + A_1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow pr + A_1 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

也即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{pr+A_1} \neq 0$,原级数发散.

当 $q < p$ 时,对于足够大的 n 有 $a_n < a_{n+1}$,可见通项也不趋于零,故原级数也发散.

总之,(a)级数的绝对收敛域为 $q > p+1$;

(b)级数的条件收敛域为 $p < q \leq p+1$.

2700. 研究级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$$

的收敛性,其中 $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$

解 记 $a_n = \binom{m}{n}$, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| &= \left| \frac{n+1}{m-n} \right| \\ &= \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{m}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \right| \\ &= 1 + \frac{m+1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故由高斯判别法知: 当 $m+1 > 1$ 即当 $m > 0$ 时, 级数绝对收敛. 当 $m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 至于当 $m=0$ 时, 级数每一项为零, 因此, 级数显然绝对收敛.

下面我们证明: 当 $-1 < m < 0$ 时, 级数收敛, 从而知级数条件收敛. 事实上, 当 n 足够大之后, 易见

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \binom{m}{n} \text{ 为交错级数. 又因 } -1 < m < 0, \text{ 故 } \left| \frac{m-n}{n+1} \right| < 1,$$

它等价于 $|a_{n+1}| < |a_n|$, 这表明级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 的通项的绝对值是单调减少的. 现在再证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 为此, 取对数, 有

$$\begin{aligned} \ln |a_n| &= \ln \left| \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \right| \\ &= \ln \left| \left(1 - \frac{m+1}{1}\right) \left(1 - \frac{m+1}{2}\right) \cdots \left(1 - \frac{m+1}{n}\right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{m+1}{k}\right). \end{aligned}$$

由于当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\ln\left(1 - \frac{m+1}{k}\right) / \left(-\frac{m+1}{k}\right) \rightarrow 1$,

而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散到 $+\infty$, 故 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{m+1}{k}\right)$ 发散到 $-\infty$.

∞ . 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$. 由莱布尼兹判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

当 $m \leq -1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $m \geq 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 绝对收敛; 当 $-1 < m < 0$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n}$ 条件收敛.

2701. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = 1,$$

则可否断定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛?

解 如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为正项级数, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛可断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛. 但当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 不一定是正项级数时, 则由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性不能断定 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛.

例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

是收敛的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = 1,$$

但级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$$

却是发散的. 事实上, 它是由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 及发

散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 相加而得的, 故它是发散的.

2702. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为非绝对收敛的级数及

$$P_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| + a_i}{2}, N_n = \sum_{i=1}^n \frac{|a_i| - a_i}{2},$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1$.

证 首先注意, 非绝对收敛即条件收敛, 若级数发散, 本命题不一定成立. 例如, 取 $a_i = 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 0$; 若

$a_i = 1$ (当 $i = 1 \pmod{2}$ 时) 或 $a_i = -\frac{1}{2}$ (当 $i = 0 \pmod{2}$)

时), 此时将有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = \frac{1}{2}$, 等等,

当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, 有

$$\frac{N_n}{P_n} = \frac{\sum_{i=1}^n |a_i| - \sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n a_i} = \frac{1 - \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}{1 + \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{\sum_{i=1}^n |a_i|} = 0,$$

从而即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_n}{P_n} = 1.$$

2703. 证明: 对于每一个 $p > 0$, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$$

的和是在 $\frac{1}{2}$ 与 1 之间.

证 首先, 由于此级数的前 $2n$ 项的和

$$S_{2n} = \left(1 - \frac{1}{2^p}\right) + \left(\frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \dots \\ + \left[\frac{1}{(2n-1)^p} - \frac{1}{(2n)^p}\right]$$

中每一个括号内的数大于零, 故 $\{S_{2n}\}$ 是一个单调上升的数列. 又因

$$S_{2n} = 1 - \left(\frac{1}{2^p} - \frac{1}{3^p} \right) - \left(\frac{1}{4^p} - \frac{1}{5^p} \right) - \dots \\ - \left[\frac{1}{(2n-2)^p} - \frac{1}{(2n-1)^p} \right] - \frac{1}{(2n)^p} < 1,$$

故 $\{S_{2n}\}$ 是以 1 为上界的数列. 从而知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在且不超过 1.

由于此级数当 $p > 0$ 时是收敛的, 故对于数列 $\{S_{2n}\}$, 它的极限与级数的和相等, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \leq 1 \quad (p > 0)$$

(对于 $p=1$, 此级数的和为 $\ln 2$).

其次, 我们证明此和不少于 $\frac{1}{2}$, 仍考虑前 $2n$ 项的部分和 S_{2n} , 则有 $S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \tilde{S}_{2n}$, 其中

$$\tilde{S}_{2n} = \sum_{k=2}^n \left[\frac{1}{(2k-1)^p} - \frac{1}{(2k)^p} \right] \\ = \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}},$$

这里 $0 < \theta_k < 1$ ($k=2, 3, \dots, n$). 由于 $p > 0$ 以及

$$\frac{1}{(2k-1+\theta_k)^{p+1}} \geq \frac{1}{(2k)^{p+1}} \quad (k=2, 3, \dots).$$

即得

$$\tilde{S}_{2n} \geq \sum_{k=2}^n \frac{p}{(2k)^{p+1}} = \frac{p}{2^{p+1}} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^{p+1}} \\ \geq \frac{p}{2^{p+1}} \left[\int_2^n \frac{dx}{x^{p+1}} + \frac{1}{n^{p+1}} \right] \\ = \frac{1}{2^{p+1}} \left[-\frac{1}{px^p} \Big|_2^n + \frac{1}{n^{p+1}} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} + \frac{p}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^{p+1}} \\
&= \frac{1}{2^{2p+1}} - \frac{1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2^{2p+1}} + \Delta_n,
\end{aligned}$$

此处

$$\Delta_n = \frac{-1}{2^{p+1}} \cdot \frac{1}{n^p} \left(1 - \frac{p}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^p}\right) \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时).}$$

于是, 对任给的 $\epsilon > 0$, 存在正整数 N_0 , 使当 $n \geq N_0$ 时, 有 $|\Delta_n| < \epsilon$. 这时有

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2^p} + \tilde{S}_{2n} \geq 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} - \epsilon.$$

但当 $p > 0$ 时,

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2},$$

这是因为

$$2^p + \frac{1}{2^p} > 2,$$

故得

$$1 + \frac{1}{2^{2p}} > \frac{2}{2^p} \text{ 或 } \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} > \frac{1}{2^p},$$

从而

$$S_{2n} > \frac{1}{2} - \epsilon,$$

故收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 的和

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} \geq \frac{1}{2} - \epsilon.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 即得 $S \geq \frac{1}{2}$. 综上所述,

$$\frac{1}{2} \leq S \leq 1.$$

2704. 证明:若把级数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

的各项重新安排,而使挨次 p 个正项的一组与挨次 q 个负项的一组相交替,则新级数的和为

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

证 按题意,我们欲证

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} \\ & + \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \dots \\ & = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}. \end{aligned} \quad (1)$$

首先,我们有

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \epsilon_n,$$

其中 C 为尤拉常数,而 ϵ_n 为无穷小,由此即得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2m} &= \frac{1}{2} H_m = \frac{1}{2} \ln m + \frac{1}{2} C + \frac{1}{2} \epsilon_m, \\ 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2k-1} &= H_{2k} - \frac{1}{2} H_k \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2} \ln k + \frac{C}{2} + \epsilon_{2k} - \frac{1}{2} \epsilon_k. \end{aligned}$$

于是,若把级数(1)的 p 项或 q 项的数串组合起来,考虑

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \dots - \frac{1}{2q} \\ &+ \frac{1}{2p+1} + \dots + \frac{1}{2(n-1)q} + \frac{1}{2(n-1)p+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \cdots + \frac{1}{2np-1} \\
& = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{2np}{2(n-1)q} + a_n \\
& = \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + a_n',
\end{aligned}$$

其中 $a_n \rightarrow 0, a_n' \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$); 又因 $S_{2n+1} = S_{2n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q} + \ln 2$. 从而级数(1)的和为 $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

2705. 证明: 若将调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

之项的符号改变使得 p 个正项之后跟随着 q 个负项 ($p \neq q$), 但不变更原来的顺序, 则此级数始终是发散的. 仅当 $p = q$ 时为收敛的.

证 若 $p \neq q$, 不妨设 $p > q$, 记

$$\begin{aligned}
a_k = & \frac{1}{(p+q)k+1} + \cdots + \frac{1}{(p+q)k+p} \\
& - \frac{1}{(p+q)k+p+1} - \cdots - \frac{1}{(p+q)k+p+q}.
\end{aligned}$$

由于其中正项的项数比负数的项数为多, 且所有正项中任一项均比任一负项的绝对值为大, 故有

$$a_k > \frac{1}{(p+q)k+1} > 0 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

但 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(p+q)k+1}$ 发散, 故 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 发散, 从而比较一下即知所得级数发散 (若 $p < q$ 同理可证).

若 $p = q$, 记

其和 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 则将有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

也收敛, 得出矛盾. 于是, 此时两级数的和一定发散.

(6) 可为收敛, 可为发散. 例如:

(1) 设 $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 均

发散, 但 $c_n = 0$, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛,

(2) 设 $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, 则 $c_n = \frac{2}{n}$. 显见, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

均发散.

2707. 求二级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \right].$$

解 两级数显然是收敛的. 因此, 它们的和也是收敛的. 逐项相加, 即可求得两级数的和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3^{n+1}} = \frac{4}{3^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

求下列级数的和:

2708. $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n} \right].$

解 此级数是由两收敛级数逐项相加而得的, 因此它是收敛的, 且其和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{4}.$$

2709. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n}.$

解 原级数显然绝对收敛, 记其和为 S , 则有

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1.$$

设将 $n=0, 1, 2, \dots$ 分成三类:

$$A_1 = \{n \mid n=3k, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_2 = \{n \mid n=3k+1, k=0, 1, 2, \dots\},$$

$$A_3 = \{n \mid n=3k+2, k=0, 1, 2, \dots\},$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} &= \sum_{n \in A_1} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\ &+ \sum_{n \in A_2} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} + \sum_{n \in A_3} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{3k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi}{3}}{2^{3k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(\pi + \frac{\pi}{3})}{2^{3k+2}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi}{3} + \frac{1}{2^2} \cos(\pi + \frac{\pi}{3})\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^3}\right)^k \end{aligned}$$

$$= \left(1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{5}{7},$$

以上计算是合理的,因为上述三个级数均绝对收敛,故其和为 $\frac{5}{7}$.从而知原级数的和为

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{2^n} - 1 \\ &= \frac{5}{7} - 1 = -\frac{2}{7}. \end{aligned}$$

$$2710^+ . \sum_{n=0}^{\infty} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} (|xy| < 1).$$

解 设将 $n=0,1,2,\dots$ 分成二类:

$$A_1 = \{n | n=2k, k=0,1,2,\dots\},$$

$$A_2 = \{n | n=2k+1, k=0,1,2,\dots\},$$

则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} &= \sum_{n \in A_1} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} \\ &\quad + \sum_{n \in A_2} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^k + \sum_{k=0}^{\infty} x^k y^{k+1}. \end{aligned}$$

显然上式右端两级数当 $|xy| < 1$ 时绝对收敛,故原级数收敛,且其和为

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^{\binom{n}{2}} y^{\binom{n+1}{2}} &= \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k + y \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k \\ &= (1+y) \sum_{k=0}^{\infty} (xy)^k = \frac{1+y}{1-xy}. \end{aligned}$$

2711. 证明:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$$

证 此两级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 均绝对收敛, 其中

$$a_n = \frac{1}{n!}, b_n = \frac{(-1)^n}{n!},$$

故可写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} = \sum_{i=0}^n \left\{ \frac{1}{i!} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i)!} \right\} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \cdot \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{1}{n!} (1-1)^n = 0 \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

从而知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1.$$

当然, 由 e 的定义知

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e \quad \text{及} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1},$$

从而也就可以直接计算得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e \cdot e^{-1} = 1.$$

2712. 证明:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n \quad (|q| < 1).$$

证 由 $|q| < 1$ 知级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 绝对收敛, 故可写成

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

其中

$$c_n = \sum_{i=0}^n q^i \cdot q^{n-i} = q^n \cdot \sum_{i=0}^n 1 = (n+1)q^n$$

$(n = 0, 1, 2, \dots).$

因此,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)q^n.$$

2713. 证明: 收敛级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

的平方是发散级数.

证 如果此级数的平方收敛, 则可写其积为 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, 即

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n,$$

其中

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{1} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-1}} \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} \cdot \frac{(-1)^{n-k+2}}{\sqrt{n-k+1}} \\ &\quad + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1} \\ &= (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{n-1}} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{k} \cdot \sqrt{n-k+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} \cdot 1}.$$

由于括号中的每一项都大于 $\frac{1}{n}$ ^{*}, 故 $|c_n| > 1$, 这与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛相矛盾. 因此, 级数 $(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}})^2$ 发散.

*) 只要证 $k(n-k+1) < n^2$ 或 $n^2 - nk + k^2 - k > 0$. 由于

$$n^2 - nk + k^2 - k = (n - \frac{k}{2})^2 + \frac{3k^2 - 4k}{4},$$

故只要证 $3k^2 - 4k > 0$. 但 $3k^2 - 4k = 3k(k - \frac{4}{3})$, 可见对于 $k = 2, 3, \dots$ 上式成立. 至于当 $k = 1$ 时, 显然有 $1 \cdot (n - 1 + 1) = n \leq n^2$ 或 $\frac{1}{1 \cdot \sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. 因而不等式 $k(n - k + 1) < n^2$ 成立.

2714. 证明: 下面二级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} (\alpha > 0) \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} (\beta > 0)$$

的积当 $\alpha + \beta > 1$ 时是收敛级数, 而当 $\alpha + \beta < 1$ 时是发散级数.

证 记

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\beta}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

按乘法法则应有

$$\begin{aligned}
 c_n &= \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \cdot \frac{(-1)^{n-i}}{(n-i+1)^\beta} \right\} \\
 &= (-1)^{n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i+j=n+1}} \frac{1}{i^\alpha j^\beta} = (-1)^{n-1} d_n,
 \end{aligned}$$

其中

$$d_n = \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

(1) 当 $\alpha + \beta \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 d_n &\geq \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\
 &\geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-i+1)^\beta} \\
 &= \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \sum_{\frac{n}{2} < i \leq n} \frac{1}{j^\beta} \geq \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha} \int_{\frac{n}{2}}^n \frac{dt}{t^\beta} \\
 &= 2^\alpha \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}}\right) n^{1-(\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

于是, 当 $\alpha + \beta < 1$ 时, $d_n \rightarrow +\infty$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时); 当 $\alpha + \beta = 1$ 时, $d_n \geq 2^\alpha \cdot \frac{1}{1-\beta} \left(1 - \frac{1}{2^{1-\beta}}\right) > 0$, 即当 $\alpha + \beta \leq 1$ 时, d_n 不趋于零 (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而知

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} d_n$$

为发散级数.

(2) 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
 d_n &= \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} + \sum_{\frac{n}{2} < i \leq n} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta}
 \end{aligned}$$

$$= \sum_1 + \sum_2,$$

其中

$$\begin{aligned} \sum_1 &= \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha (n-i+1)^\beta} \\ &\leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^\beta} \sum_{1 \leq i \leq \frac{n}{2}} \frac{1}{i^\alpha} \\ &\leq \frac{1}{\left(\frac{n}{2} + 1\right)^\beta} \left(1 + \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{n^\beta}\right) + O\left(n^{-\beta} - \int_1^{\frac{n}{2}} \frac{dt}{t^\alpha}\right) \\ &= O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}), \end{aligned}$$

同理有

$$\sum_2 \leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}).$$

由于 $\alpha > 0, \beta > 0, 1 - (\alpha + \beta) < 0$, 故有 d_n 趋于零:

$$\begin{aligned} d_n &\leq O(n^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O(n^{1-(\alpha+\beta)}) \rightarrow 0 \\ &\quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}). \end{aligned}$$

记 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分和为

$$S_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n.$$

考虑原两级数的部分和

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}, B_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k^\beta}.$$

今考察下列差数

$$\begin{aligned} \Delta_n &= A_n B_n - S_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right) - S_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^a} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^b} \right) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{1}{i^a j^b} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \frac{(-1)^i}{i^a} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{(-1)^j}{j^b} \right) \\
&\quad - \sum_{\substack{2 \leq i+j \leq n+1 \\ 1 \leq i, j \leq n}} \left(\frac{(-1)^i}{i^a} \right) \left(\frac{(-1)^j}{j^b} \right). \\
&= \sum_{s=1}^{2n-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i+j=s+1}} \frac{(-1)^{s+1}}{i^a j^b} - \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{1 \leq i \leq k \\ i+j=k+1}} \frac{(-1)^{k-1}}{i^a j^b} \\
&= \sum_{s=n+1}^{2n-1} (-1)^{s-1} \sum_{\substack{1 \leq i \leq s \\ i+j=s+1}} \frac{1}{i^a j^b}.
\end{aligned}$$

为估计上述差数各项,可看下列乘法表(图 5.1). $A_n B_n$

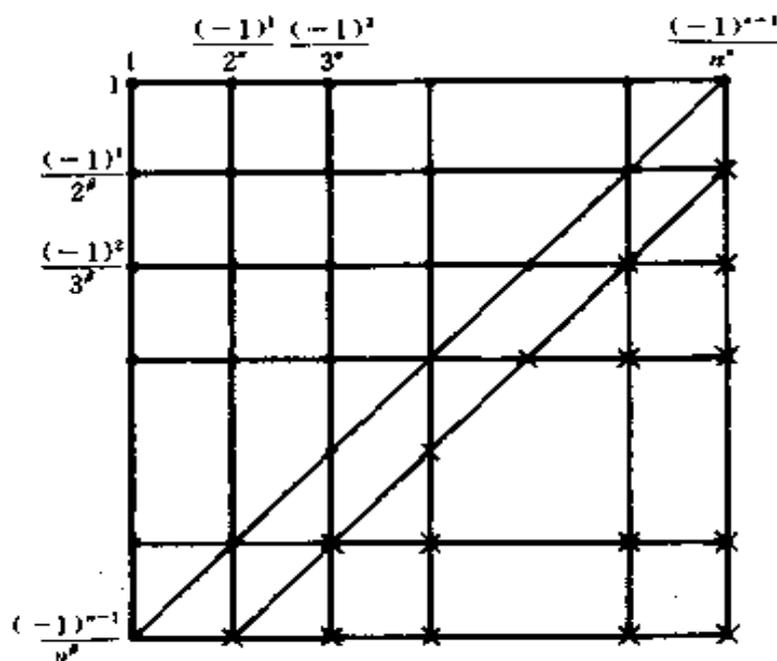


图 5.1

$$= d_{n+1}.$$

由前已证:当 $\alpha + \beta > 1$ 时, $d_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故有 $\Delta_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时). 于是

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A_n B_n - \Delta_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} B_n \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i^\alpha} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j^\beta} \right), \end{aligned}$$

其中右端两级数的收敛性是由 $\alpha > 0, \beta > 0$, 按莱布尼兹判别法获得的. 于是, 当 $\alpha + \beta > 1$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} (\alpha > 0) \text{ 与级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^\beta} (\beta > 0) \text{ 的积 } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ 为收敛级数.}$$

2715. 验证下面二发散级数

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \text{ 和 } 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

的积是绝对收敛级数.

$$\text{证 记 } 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{m=1}^{\infty} u_m,$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \left(2^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m,$$

其中

$$u_1 = 1, u_2 = -\frac{3}{2}, u_3 = -\left(\frac{3}{2}\right)^2, \dots, u_m = -\left(\frac{3}{2}\right)^{m-1} \quad (m=2, 3, \dots),$$

$$v_1 = 1, v_2 = 2 + \frac{1}{2^2}, v_3 = \frac{3}{2} \left(2^2 + \frac{1}{2^3}\right), \dots, v_m = \left(\frac{3}{2}\right)^{m-2}$$

$$\left(2^{m-1} + \frac{1}{2^m}\right) \quad (m=2, 3, \dots).$$

因此 $c_1 = u_1 v_1 = 1$. 一般地, 在

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

中, 按乘积定义有

$$\begin{aligned} c_n &= u_1 v_n + u_1 v_{n-1} + \cdots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1 \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^n}\right) + \left(-\frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}\right)^{n-3} \\ &\quad \cdot \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \cdots + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\right] \\ &\quad \cdot \left(2 + \frac{1}{2^2}\right) + \left[-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[(2^{n-1} - 2^{n-2} - 2^{n-3} - \cdots \right. \\ &\quad \left. - 2 - 2^0) + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} - \cdots - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left[\left(2^{n-1} - \frac{2^{n-1}-1}{2-1}\right) + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}\right) \right] \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{3}{2^n} \\ &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ 绝对收敛.

§ 4. 函数项级数

1° 收敛域 使函数项级数

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots \quad (1)$$

收敛的 x 值的总体 X 叫做此级数的收敛域, 而函数

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (x \in X)$$

称为级数的和.

2° 一致收敛性 对于函数叙列

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$$

如果: 1) 存在有极限函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (a < x < b);$$

2) 对于任何的数 $\epsilon > 0$ 可以确定 $N = N(\epsilon)$, 使得当 $n > N$ 和 $a < x < b$ 时,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

成立, 则称这函数叙列在区间 (a, b) 内为一致收敛. 此种情形写:

$$f_n(x) \rightarrow f(x).$$

若函数项级数(1)的部分和叙列:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在区间 (a, b) 内一致收敛, 则称(1)在此已知区间内为一致收敛.

3° 哥西判别准则 级数(1)在已知区间 (a, b) 内一致收敛的充分而且必要的条件为: 对于每一个 $\epsilon > 0$, 有数 $N = N(\epsilon)$ 存在, 使得当 $n > N$ 和 $p > 0$ 时不等式

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x) \right| < \epsilon \quad (a < x < b)$$

成立.

4° 外耳什特拉斯判别法 对于级数(1), 若有收敛的数项级数

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (2)$$

存在, 使对于 $a < x < b$ 下列不等式都成立

$$|u_n(x)| \leq c_n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

则级数(1)在区间 (a, b) 内绝对并一致收敛.

5° 亚伯耳判别法 如果: 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛; 2) 函数 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 全体是有界的并对每一个 x 形成一单调的叙列, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) \quad (3)$$

于区间 (a, b) 内一致收敛.

6° 迪里黑里判别法 如果 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的部分和全体是有界的; 2) 叙列 $b_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 对于每一个 x 都是单调的, 并且当 $n \rightarrow \infty$ 时在 (a, b) 内一致地趋于零, 则级数 (3) 在区间 (a, b) 内一致收敛.

7° 函数项级数的性质 (a) 以连续函数为项的一致收敛级数的和是连续函数.

(6) 若函数项级数 (1) 在区间 (a, b) 内一致收敛且有有穷的极限 $\lim_{x \rightarrow a} u_n(x) = A_n (n = 1, 2, \dots)$, 则 1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 收敛, 2) 下之等式成立:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} [\lim_{x \rightarrow a} u_n(x)].$$

(b) 若收敛级数 (1) 的各项当 $a < x < b$ 时皆可微分并且导函数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x).$$

(c) 若级数 (1) 的各项连续, 并且此级数在有穷区间 (a, b) 内一致收敛, 则

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx. \quad (4)$$

一般说来, 若当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\int_a^b R_n(x) dx \rightarrow 0$, 则公式 (4) 为真, 这里

$R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)$. 这个最后的条件对于积分的限是无穷大的时候也适合.

定出下列函数项级数的(绝对的和条件的)收敛域.

$$2716. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}.$$

解 令 $\frac{1}{x} = y$, 则有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n y^n.$$

显然上式右端级数的收敛半径为 1. 因此, 仅当

$|y| = \left| \frac{1}{x} \right| < 1$ 即 $|x| > 1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2717. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^n}{2n-1} \right|}{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \right|} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ 即 $(1-x)^2 < (1+x)^2$ 或 $x > 0$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = 0$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$, 显见它为条件收

敛. 当 $x < 0$ 时, 原级数通项不趋于零, 故发散.

$$2718. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2x+1} \right)^n.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n+1}{n+2}} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{x}{2x+1} \right| < 1$ 即 $x^2 < 4x^2 + 4x + 1$ 或

$$(3x+1)(x+1) > 0 \quad (1)$$

时, 级数绝对收敛, 解不等式(1), 得

$$x > -\frac{1}{3} \text{ 或 } x < -1,$$

即为所求的绝对收敛域. 当 $x = -\frac{1}{3}$ 或 $x = -1$ 时, 原级数通项不趋于零, 故发散.

2719. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)^n.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}}{\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n+1} = 1,$$

故仅当 $\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| < 1$ 时, 级数绝对收敛. 解此不等式:

$$4x^2 < 1 + 2x^2 + x^4, (x^2 - 1)^2 > 0,$$

即 $|x| \neq 1$. 于是, 当 $|x| \neq 1$ 时, 级数绝对收敛.

当 $x = -1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 由 2689 题的结果知它是条件收敛的.

当 $x = 1$ 时, 原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$, 仍由同题的结果知它是发散的.

2720. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n} x^n (1-x)^n.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n \cdot 3^{2n}}{2^n}}{\frac{(n+1)3^{2n+2}}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3^2(n+1)} = \frac{2}{9},$$

故仅当 $|x(1-x)| < \frac{2}{9}$ 时, 级数绝对收敛. 解此不等式:

$$-\frac{2}{9} < x(1-x) < \frac{2}{9}.$$

于是, x 的值应为

$$x^2 - x - \frac{2}{9} < 0 \text{ 及 } x^2 - x + \frac{2}{9} > 0$$

的公共部分, 也即

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{3+\sqrt{17}}{6} \text{ 及 } x > \frac{2}{3} \text{ 或 } x < \frac{1}{3}$$

的公共部分, 合并得

$$-\frac{\sqrt{17}-3}{6} < x < \frac{1}{3} \text{ 及 } \frac{2}{3} < x < \frac{\sqrt{17}+3}{6},$$

此即级数的绝对收敛域.

当在此二区间的端点时, 级数显然发散.

2721. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \sin^n x}{n^2}.$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^n}{n^2}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

故仅当 $|\sin x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛. 解之, 得

$$|x - k\pi| < \frac{\pi}{6} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

当 $|x - k\pi| = \frac{\pi}{6}$ 时, 由绝对值组成的级数为

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 它是收敛的.

因此, 当 $|x - k\pi| \leq \frac{\pi}{6}$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 级数绝对收敛.

2722. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^p}$.

解 当 $p > 1$ 及 $x \neq k$ ($k = -1, -2, \dots$) 时, 级数显然绝对收敛.

当 $0 < p \leq 1$ 及 $x \neq k$ ($k = -1, -2, \dots$) 时, 级数条件收敛.

当 $p \leq 0$ 时, 级数发散.

2723. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p \sin nx}{1+n^q}$ ($q > 0; 0 < x < \pi$).

解 由于

$$\frac{|\sin nx|}{2n^{q-p}} \leq \left| \frac{n^p \sin nx}{1+n^q} \right| \leq \frac{1}{n^{q-p}},$$

故当 $q - p > 1$ 即 $q > p + 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $q \leq p + 1$ 时, 由绝对值组成的级数发散 (理由可参看 2698 题的题解).

当 $p < q \leq p + 1$ 时, 由于对 $0 < x < \pi$ 内任一固定的 x , $\sum_{k=1}^{\infty} \sin kx$ 有界, 且

$$\frac{n^p}{1+n^q} \sim \frac{1}{n^{q-p}} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时})$$

故级数收敛.

当 $q \leq p$ 时, 级数显然发散.

总之,当 $q > p + 1$ 时,级数绝对收敛;而当 $p < q \leq p + 1$ 时,级数条件收敛.

2724. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$ (拉伯耳特级数).

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} \quad (\text{A}) \quad \text{与} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \quad (\text{B}).$$

当 $|x| < 1$ 时,级数(B)绝对收敛.根据亚伯耳判别法,以单调递减且有下界的因子 $\frac{1}{1-x^{2n}}$ 乘此级数的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}} \quad (\text{B})$$

也收敛,且为绝对收敛.

同理,再以单调递减且有界的因子 x^n 乘级数(B)的对应项所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}}$$

仍然收敛,且为绝对收敛.由于

$$\frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^n}{1-x^{2n}} + \frac{x^{2n}}{1-x^{2n}},$$

故原级数当 $|x| < 1$ 时绝对收敛.

当 $|x| = 1$ 时,级数(A)显然无意义.

当 $|x| > 1$ 时,级数(B)显然发散.下证级数(A)也发散.若不然,当 $|x| > 1$ 时,由级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-\left(\frac{1}{x}\right)^n}$$

收敛,再根据亚伯耳判别法,我们就会推出级数

当 $|x| > 1$ 时, 原级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^{2n}}$.

由于 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$, 再根据上面的讨论, 故原级数绝对收敛.

总之, 当 $|x| \neq 1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2727. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$, 则当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|1+x^{n+1}|} = |x| < 1,$$

故级数绝对收敛.

当 $|x| > 1$ 时, 级数可写为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(1-n)}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 当 $|x| > 1$ 即 $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ 时绝对收敛. 与 $|x| < 1$ 的情况一样, 得知级数(1)当 $|x| > 1$ 时绝对收敛.

当 $x = -1$ 时, 通项无意义. 但当 $x = 1$ 时, 原级数的通项 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 显然级数收敛.

总之, 当 $x \neq -1$ 时, 原级数绝对收敛.

$$2728. \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}.$$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)e^{-(n+1)x}}{ne^{-nx}} = e^{-x},$$

故当 $x > 0$ 时, $e^{-x} < 1$, 级数绝对收敛. 而当 $x = 0$ 时, 级数可写为 $\sum_{n=1}^{\infty} n$, 显然发散. 又当 $x < 0$ 时, $e^{-x} > 1$, 级数发散.

$$2729. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1+a^{2n}x^2}.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \frac{1}{1+a^{2n}x^2}$, 则当 $x = 0$ 时,

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} > \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n},$$

故原级数发散. 当 $x \neq 0$ 时:

(1) 当 $|a| > 1$ 时, 有

$$0 < a_n < \frac{1}{a^{2n}x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|} \right)^{2n},$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{|a|} \right)^{2n}$ 的收敛性即知原级数绝对收敛.

(2) 当 $|a| \leq 1$ 时, 有

$$|a_n| \geq \frac{1}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} > \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{n},$$

故原级数发散.

$$2730. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})(2-x^{\frac{1}{3}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}}) (x > 0).$$

解 记 $a_n = (2-x)(2-x^{\frac{1}{2}})\cdots(2-x^{\frac{1}{n}})$.

(1) 当 $x=2$ 时, 显然 $a_n = 0 (n=1, 2, \dots)$, 故级数绝

对收敛.

(2) 当 $x \neq 2$ 时, 注意 $x > 0$, 故有 $x^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$). 因此, 当 n 足够大时, a_n 不变号, 从而若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则必绝对收敛. 今用阿拉伯判别法, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(x^{\frac{1}{n+1}} - 1)}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{x^{\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2 - x^{\frac{1}{n+1}}} \right] = \ln x, \end{aligned}$$

故当 $\ln x > 1$ 即 $x > e$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x < e$ 时, 原级数发散. 而当 $x = e$ 时, 此时有 (考虑当 n 足够大时)

$$\begin{aligned} \frac{a_{n-1}}{a_n} &= \frac{1}{2 - e^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1 - (e^{\frac{1}{n}} - 1)} \\ &= 1 + (e^{\frac{1}{n}} - 1) + O((e^{\frac{1}{n}} - 1)^2), \end{aligned}$$

但 $e^{\frac{1}{n}} - 1 = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故得

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

按高斯判别法, 原级数发散.

总之, 当 $x = 2$ 及当 $x > e$ 时, 原级数绝对收敛.

2731. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}$.

解 对于任意的 x , 只要 n 足够大, 该项就为正. 因此, 它可以看成正项级数. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+x)^n}{n^{n+x}}}{\frac{1}{n^x}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n = e^x,$$

故利用正项级数的判别法知:当 $x > 1$ 时,级数收敛,且为绝对收敛;当 $x \leq 1$ 时,级数发散.

$$2732. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n y^n}{x^n + y^n} (x > 0, y > 0).$$

解 若 $x < 1$,将原级数写成

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n}.$$

由于

$$0 < \frac{x^n}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^n} \leq x^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛,故原级数绝对收敛.

同理,当 $y < 1$ 时,原级数绝对收敛.总之,当 $0 < \min(x, y) < 1$ 时,原级数绝对收敛.

$$2733. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n + y^n} (y \geq 0).$$

解 记 $a_n = \frac{x^n}{n + y^n} (y \geq 0)$.

(1) 当 $|x| < 1$ 时,易见

$$|a_n| \leq |x|^n (n=1, 2, \dots).$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 的收敛性知原级数绝对收敛.

(2) 当 $x=1$ 时,1°若 $y > 1$,则由

$$|a_n| = \frac{1}{n + y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n,$$

易见原级数绝对收敛,2°若 $0 \leq y \leq 1$,由于

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+y^n} \rightarrow 1 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

易见原级数发散.

(3) 当 $x = -1$ 时, 1° 若 $y > 1$, 由

$$|a_n| = \frac{1}{n+y^n} < \left(\frac{1}{y}\right)^n \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数绝对收敛. 2° 若 $0 \leq y \leq 1$, 由

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n+y^n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数条件收敛.

(4) 当 $|x| > 1$ 时, 1° 若 $y = 0$, 则由

$$a_n = \frac{x^n}{n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

易见原级数发散. 2° 若 $y > 0$, 则当 $\left|\frac{x}{y}\right| < 1$ 即 $|x| < y$ 时, 有

$$|a_n| = \frac{|x|^n}{n+y^n} < \left|\frac{x}{y}\right|^n,$$

故原级数绝对收敛. 当 $\left|\frac{x}{y}\right| \geq 1$ 时, 若 $y > 1$, 有

$$|a_n| = \left|\frac{x}{y}\right|^n \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{y^n}} \rightarrow +\infty \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)};$$

若 $0 < y \leq 1$, 有

$$|a_n| > \frac{|x|^n}{n+1} \rightarrow +\infty \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

故当 $\left|\frac{x}{y}\right| \geq 1$ 时, 原级数发散.

总之, 当 $|x| < 1, 0 \leq y < +\infty$; 当 $|x| = 1, y > 1$ 及当 $|x| > 1, |x| < y$ 时, 原级数绝对收敛. 当 $x = -1, 0 \leq y$

≤ 1 时,原级数条件收敛.

$$2734. \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt[n]{|x|^{n^2} + |y|^{n^2}} \\ &= \sqrt[n]{\left(\frac{|x|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2} + \left(\frac{|y|}{\max(|x|, |y|)}\right)^{n^2}} \\ &\quad \cdot (\max(|x|, |y|))^n \end{aligned}$$

及 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \max(|x|, |y|)$, 故当 $\max(|x|, |y|) < 1$ 时,级数绝对收敛;当 $\max(|x|, |y|) > 1$ 时,级数发散;当 $\max(|x|, |y|) = 1$ 时,由于 $a_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$),故级数发散.

$$2735. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} (x \geq 0).$$

解 (1) 当 $0 \leq x < 1$ 时,此级数可与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}$ 相比,它们具有相同的敛散性.事实上

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x^n)}{x^n} = 1,$$

且这两个级数均为正项级数.对于正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^y}, \quad (1)$$

其通项 $\frac{x^n}{n^y} \leq n^{|y|} x^n = b_n (n=1, 2, \dots)$, 但因

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b_n} = x < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛,且为绝对收敛.因此,级数(1)绝对

收敛,从而原级数也是绝对收敛的.

(2) 当 $x = 1$ 时,级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln 2}{n^y}$. 于是,当 $y > 1$ 时收敛,且为绝对收敛;当 $y \leq 1$ 时发散.

(3) 当 $x > 1$ 时,原级数的通项可写成

$$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^n)}{n^y} &= \frac{\ln x^n \left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y} \\ &= \frac{\ln x}{n^{y-1}} + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)}{n^y}. \end{aligned}$$

由上式右端第一项所组成的级数当 $y-1 > 1$ 即 $y > 2$ 时收敛,而当 $y \leq 2$ 时发散. 由上式右端第二项所组成的级数,利用 $0 < \frac{1}{x} < 1$ 及最初讨论的结果,得知它对任意的 y 值均收敛. 因此,原级数当 $x > 1, y > 2$ 时收敛,且为绝对收敛.

总之,当 $0 \leq x < 1, -\infty < y < +\infty$; 当 $x = 1, y > 1$ 及当 $x > 1, y > 2$ 时,原级数绝对收敛.

2736. $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n}\right).$

解 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n}\right)|} = |\operatorname{tg} x|,$$

故当 $|x - k\pi| < \frac{\pi}{4}$ (其中 k 为整数) 时, $|\operatorname{tg} x| < 1$, 从而级数绝对收敛. 而当 $|x - k\pi| \geq \frac{\pi}{4}$ 时, 由于 $\operatorname{tg}^n \left(x + \frac{y}{n}\right) \rightarrow \infty$, 故级数发散.

2737. 证明: 若劳郎级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ ($|x_1| < |x_2|$) 时收敛, 则此级数当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时也收敛.

证 由于劳郎级数当 $x = x_1$ 和 $x = x_2$ 时收敛, 故级数

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_1^{-n},$$

$$(3) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x_2^{-n}$$

均收敛. 于是, 由(3)知, 当 $|x| < |x_2|$ 时, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

收敛. 由(2)知, 当 $\left| \frac{1}{x} \right| < \left| \frac{1}{x_1} \right|$ 即当 $|x_1| < |x|$ 时, 级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 收敛. 因而, 当 $|x_1| < |x| < |x_2|$ 时, 级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} x^{-n}$ 均收敛, 也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n$ 收敛.

2738. 求劳郎级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n}{2^{|n|}} x^n$$

的收敛域并求它的和.

解 考虑级数

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n, \quad (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2^n} x^{-n}.$$

显然仅当 $|x| < 2$ 时, 级数(1)收敛; 仅当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级

数(2)收敛. 因此, 当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 原级数收敛.

当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 记级数(1)的和为 $S_+(x)$, 级数(2)的和为 $S_-(x)$. 显然有

$$S_-(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = - S_+ \left(\frac{1}{x} \right).$$

今求 $S_+(x)$. 注意当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$$

均收敛, 且有

$$\begin{aligned} S_+(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n+1}} x^{n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n \\ &= \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n + \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \\ &= \frac{x}{2} S_+(x) + \frac{x}{2-x}, \end{aligned}$$

得

$$S_+(x) = \frac{\frac{x}{2-x}}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{2x}{(2-x)^2}.$$

从而

$$S_-(x) = - \frac{2 \cdot \frac{1}{x}}{\left(2 - \frac{1}{x} \right)^2} = - \frac{2x}{(2x-1)^2},$$

故当 $\frac{1}{2} < |x| < 2$ 时, 有

记 $a_n = \frac{(ex)^n y^{[n]}}{n^n}$. 显然, 当 x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$

时, $a_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$. 于是, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛. 研究一

下 $y \neq k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 的情形, 有

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n+1}} &= -\frac{n+1}{n+1+y} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= -\frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{ex} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

(1) 当 $|x| < 1$ 时, 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left| \frac{n+1}{n-y} \right| \cdot \frac{1}{e|x|} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{|x|} > 1, \end{aligned}$$

故此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

(2) 当 $|x| > 1$ 且 n 充分大时, 有 $|a_n| < |a_{n+1}|$, 故 $a_n \not\rightarrow$

0, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

(3) 当 $|x| = 1$ (考虑 n 足够大) 时, 有

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{n+1}{n-y} \cdot \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left[1 + \frac{1+y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \cdot \left[1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] \\ &= 1 + \frac{1 + \left(y - \frac{1}{2}\right)}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

于是, 1° 当 $y > \frac{1}{2}$ 时, 由高斯判别法知, 此时级数绝对

收敛. 2° 当 $y \leq \frac{1}{2}$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散. 但当 $|y| < \frac{1}{2}$ 时,

有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = -\frac{1}{x} \left[1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right],$$

其中 $0 < \mu < 1$. 显然, 当 $x = -1$ 时, a_n 不变号, 因此可看成正项级数, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

由高斯判别法知此时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 当 $x = 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为交错级数, 且当 n 足够大时,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\mu}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) > 1,$$

也即 $|a_n|$ 单调下降. 此外, 还有

$$\begin{aligned} |a_n| &= |y| = (1-y)(2-y)\cdots(n-1-y) \frac{e}{n^n} \\ &= e|y| \frac{1-y}{n} \frac{2-y}{n} \cdots \frac{n-1-y}{n} \frac{1}{n} < \frac{e|y|}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$).

由莱布尼兹判别法, 便知当 $x = 1, |y| < \frac{1}{2}$ 时, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛.

总之, 当: (1) $|x| < 1, y$ 为任意数; (2) $|x| = 1, y > \frac{1}{2}$; (3) x 为任意数, $y = 0, 1, 2, \dots$ 时, 原级数绝对收敛.

当 $x = 1, |y| < \frac{1}{2}$ 时, 原级数条件收敛.

2740. 证明: 若迪里黑里级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x = x_0$ 收敛, 则此级数当 $x > x_0$ 时也收敛.

证 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}} \cdot \frac{1}{n^{x-x_0}}$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 并

且 $\frac{1}{n^{x-x_0}}$ 当 $x > x_0$ 时单调下降趋于零, 故根据亚伯耳判

别法即知: 当 $x > x_0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

2741. 证明: 叙列 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 内一致收敛于极限函数 $f(x)$ 的充分而且必要的条件是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0,$$

式中 $\gamma_n(x) = |f(x) - f_n(x)|$.

证 先证必要性.

由于 $f_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $f(x)$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, 对于区间 (a, b) 内的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, 当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sup_{a < x < b} \{ \gamma_n(x) \} \leq \epsilon,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0.$$

再证充分性.

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sup_{a < x < b} \gamma_n(x) \right\} = 0$, 故对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N(\epsilon) > 0$, 使当 $n > N(\epsilon)$ 时, 有

$$\sup_{a < x < b} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

于是, 对于 (a, b) 内的一切 x 值, 只要当 $n > N(\epsilon)$ 时, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $f(x)$.

2742. 叙列 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$). (a) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛;
(b) 在每一个有穷的区间 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$ 上一致收敛;
(c) 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛是什么意思?

解 (a) 对于任意的 $\epsilon > 0$ 及任意的 $x_0 < x < +\infty$, 都存在一个正整数 $N=N(\epsilon, x)$, 使得当 $n > N$ 时, 恒有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称叙列 $f_n(x)$ 在区间 $(x_0, +\infty)$ 上收敛. 要注意的是, N 不仅与 ϵ 有关, 而且与值 x 有关.

(b) 对每一个 $(a, b) \subset (x_0, +\infty)$, 如果对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在一个 $N=N(\epsilon, a, b)$, 使当 $n > N$ 时, 对于 (a, b) 内的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

则称 $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

(c) 如果对于任给的 $\epsilon > 0$, 都有正整数 $N=N(\epsilon)$ 存在 ($N(\epsilon)$ 仅与 ϵ 有关), 使当 $n > N$ 时, 对所有的 $x_0 < x < +\infty$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

则称 $f_n(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上一致收敛.

2743. 对于叙列

$$f_n(x) = x^n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

求出其项的最小号码 $N=N(\epsilon, x)$, 使从这项起叙列的项在已知点 x 与极限函数的差不超过 0.001, 设 $x =$

$$\frac{1}{10}, \frac{1}{\sqrt{10}}, \dots, \frac{1}{\sqrt[10]{10}}, \dots$$

此叙列在已知区间 $(0, 1)$ 内是否一致收敛?

解 显见极限函数为零, 于是考虑

$$|x^n - 0| < \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon = 0.001$. 当 $0 < x < 1$ 时, 上式即 $x^n < \varepsilon$ 或 $n >$

$\frac{\lg \varepsilon}{\lg x}$, 故最小号码为 $N = \left\lceil \frac{\lg \varepsilon}{\lg x} \right\rceil$.

当 $x = \frac{1}{10}$ 时, $N = 3$;

当 $x = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 时, $N = 6$;

.....

当 $x = \frac{1}{\sqrt[3]{10}}$ 时, $N = 3m$,

.....

下面研究此叙列在 $(0, 1)$ 内的一致收敛性. 由于当 x 趋于 1 时, $\lg x$ 趋于零, 故

$$\frac{\lg \varepsilon}{\lg x} \rightarrow +\infty \quad (0 < \varepsilon < 1, x \rightarrow 1-0),$$

即 $\frac{\lg \varepsilon}{\lg x}$ 无限增加. 因此, 不可能找到一个公共的 N (它仅与 ε 有关) 值, 使当 $n > N$ 时, 对于 $(0, 1)$ 内的一切 x 值, 皆有 $x^n < \varepsilon$. 因此, 叙列

$$f_n(x) = x^n \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (0 < x < 1)$$

在区间 $(0, 1)$ 内不一致收敛.

2744. 应当取级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}$$

的若干项方可使部分和 $S_n(x)$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时与级数的和之差小于 ε ? 设:

$$(a) \varepsilon = 0.1; \quad (b) \varepsilon = 0.01;$$

(B) $\epsilon = 0.001$.

求出 n 的数值来.

解 易证此级数收敛, 记其和为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

如果取 n 项, 其部分和为 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k(k+1)}$. 欲使其误差 $\Delta_n(x) = |S(x) - S_n(x)|$ 小于 ϵ , 问项数 n 为若干? 可用下列估计法:

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \\ &= \left| \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{\sin kx}{k(k+1)} \right| \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{|\sin kx|}{k(k+1)} \\ &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{N+1} \right) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

若令 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 也即当 $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$ 时就有 $\Delta_n(x) < \epsilon$.

记 $N_0 = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > \left[\frac{1}{\epsilon} \right] + \left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\} - 1 = N_0 - (1 - \left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\})$ 时, 即有 $\Delta_n(x) < \epsilon$, 其中 $\left\{ \frac{1}{\epsilon} \right\}$ 表示 $\frac{1}{\epsilon}$ 的零头部分. 也即可取

$$n = N_0, N_0 + 1, N_0 + 2, \dots$$

均有 $\Delta_n(x) < \epsilon$. 所取的项数 N_0 与 ϵ 的关系, 按题设数值, 可有

ϵ	(a) 0.1	(b) 0.01	(c) 0.001
N_0	10	100	1000

2745⁺. 对怎样的 n , 不等式

$$\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 \quad (0 \leq x \leq 10)$$

能保证成立?

解 由台劳公式, 有

$$\begin{aligned} \Delta_n(x) &= \left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| \\ &= \left| \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1}, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$. 欲 $\Delta_n(x) < 0.001$, 只要

$$\frac{e^{10}}{(n+1)!} 10^{n+1} < \frac{1}{1000}.$$

也即要求 n , 使

$$e^{10} 10^{n+4} < (n+1)!.$$

为此, 两边取对数, 有

$$10 + (n+4)\ln 10 < \sum_{k=2}^{n+1} \ln k = p_n. \quad (1)$$

注意到

$$p_n > \int_1^{n+1} \ln t dt = (n+1)\ln(n+1) - n.$$

若能

$$(n+1)\ln(n+1) > n(1+\ln 10) + 10 + 4\ln 10, (2)$$

就可保证(1)式成立,从而 $\Delta_n(x) < 0.001$. 为解(2)中的 n ,可用估算法,例如当 $n = 39$ 时,(2)式就成立,故对于 n 取 39,即取 39 项时就能保证 $\left| e^x - \sum_{i=0}^n \frac{x^i}{i!} \right| < 0.001 (0 \leq x \leq 10)$.

研究叙列在所示区间上的一致收敛性:

$$2746. f_n(x) = x^n; \quad (a) 0 \leq x \leq \frac{1}{2}; \quad (b) 0 \leq x \leq 1.$$

解 (a) 当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

任给 $\epsilon > 0$, 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{2^n} < \epsilon$, 即只要

$$n > \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2}.$$

取 $N = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\epsilon}}{\ln 2} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上的一切 x

值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x) = x^n$ 在 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛于零.

$$(b) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } x=1, \\ 0, & \text{若 } 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) - f\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2747. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}; 0 \leq x \leq 1$.

解 当 $x=0$ 或 1 时, $f_n(x)=0$; 当 $0 < x < 1$ 时,

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$. 因此, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = x^n - x^{n+1} = g(x).$$

由于 $g'(x) = x^{n-1}[n - (n+1)x]$, 故若令 $g'(x) = 0$, 即

求得 $x = \frac{n}{n+1}$. 显然, 当 $0 < x < \frac{n}{n+1}$ 时, $g'(x) > 0$; 当

$\frac{n}{n+1} < x < 1$ 时, $g'(x) < 0$, 故 $g(x)$ 在 $x = \frac{n}{n+1}$ 达到

$[0, 1]$ 上的最大值. 于是, 对于 $0 \leq x \leq 1$, 有

$$\begin{aligned} g(x) &\leq \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, 即只

要 $n > \frac{1}{\epsilon}$. 取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的

一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零.

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left| \frac{nx}{1+n+x} - x \right| \\ &= \frac{x+x^2}{1+n+x} < \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\epsilon}$. 取 $N =$

$\left\lceil \frac{2}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - x| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于 x .

2751. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$; (a) $0 \leq x \leq 1 - \epsilon$; (b) $1 - \epsilon \leq x \leq 1 + \epsilon$; (c) $1 + \epsilon \leq x < +\infty$, 其中 $\epsilon > 0$.

解 (a) 当 $0 \leq x \leq 1 - \epsilon$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^n}{1+x^n} < (1-\epsilon)^n.$$

任给 $\epsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'$, 只要 $(1-\epsilon)^n <$

ϵ' , 即只要 $n > \frac{\lg \epsilon'}{\lg(1-\epsilon)}$. 取 $N = \left\lceil \frac{\lg \epsilon'}{\lg(1-\epsilon)} \right\rceil$, 则当 $n > N$

时, 对于 $[0, 1-\epsilon]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon'.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1-\epsilon]$ 上一致收敛于零.

$$(6) f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } 1-\epsilon \leq x < 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{若 } x=1, \\ 1, & \text{若 } 1 < x \leq 1+\epsilon. \end{cases}$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{3}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}}$, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{3} > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ 上收敛而不一致收敛.

(B) 当 $1+\varepsilon \leq x < +\infty$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{1+x^n} < \frac{1}{(1+\varepsilon)^n}.$$

任给 $\varepsilon' > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon'$, 只要 $\frac{1}{(1+\varepsilon)^n} <$

ε' , 即只要 $n > \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)}$. 取 $N = \left\lceil \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon'}}{\lg(1+\varepsilon)} \right\rceil$, 则当 $n > N$

时, 对于 $x \geq 1+\varepsilon$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 1| < \varepsilon'.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛于 1.

2752. $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$; (a) $0 \leq x \leq 1$; (b) $1 < x < +\infty$.

解 (a) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = 1 > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

(b) 当 $1 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2} < \frac{2nx}{n^2x^2} < \frac{2}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{2}{\varepsilon}$. 取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 1$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2753. f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}; -\infty < x < +\infty.$$

解 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = |x| = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x|} < \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.$$

任给 $\varepsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\varepsilon}$. 取

$N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2754. f_n(x) = n \left[\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right]; 0 < x < +\infty.$$

解 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left[\left(x + \frac{1}{n} \right) - x \right]}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = f(x).$$

若取 $x = \frac{1}{n}$, 则有

$$\begin{aligned} \left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| &= \left| n \left[\sqrt{\frac{2}{n}} - \sqrt{\frac{1}{n}} \right] - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{n}}} \right| \\ &= \sqrt{n} \left| \sqrt{2} - 1 - \frac{1}{2} \right| = \sqrt{n} \frac{\sqrt{2} - 1}{2(\sqrt{2} + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2(\sqrt{2} + 1)^2} > \frac{1}{18} \sqrt{n}. \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 它就可以大于指定的 $\epsilon_0 > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2755. (a) $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}; -\infty < x < +\infty;$

(b) $f_n(x) = \sin \frac{x}{n}; -\infty < x < +\infty.$

解 (a) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|\sin nx|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$.

取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于一切实数 x , 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(6) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{n\pi}{2}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{n\pi}{2}\right) - f\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right| = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2756. (a) $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx; 0 < x < +\infty$; (6) $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx; 0 < x < +\infty$.

解 (a) 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx = \frac{\pi}{2} = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{\pi}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1 - \frac{\pi}{2} \right| = \frac{\pi}{4} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

(6) 当 $0 < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \frac{\pi}{2} x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= x \left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx - \frac{\pi}{2} \right| \\ &= x \left| -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{nx} \right| \\ &\leq x \cdot \frac{1}{nx} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > \frac{1}{\epsilon}$.

取 $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $x > 0$ 的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

2757. $f_n(x) = e^{x(x-1)}$; $0 < x < 1$.

解 当 $0 < x < 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < e^{-1}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| f_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) - f\left(1 - \frac{1}{n}\right) \right| = e^{x(1-\frac{1}{n}-1)} = e^{-1} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上收敛而不一致收敛.

2758. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}$; (a) $-l < x < l$, 其中 l 为任意的正数; (b) $-\infty < x < +\infty$.

解 (a) 当 $-l < x < l$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x),$$

并有(当 $n > [l]$ 时)

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-(x-n)^2} \leq e^{-(n-l)^2}.$$

任给 $\epsilon > 0$, (可设 $\epsilon < 1$), 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$,

只要 $n > [l]$ 且 $e^{-(n-l)^2} < \epsilon$, 即只要 $n > l + \ln \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$.

取 $N = \left\lceil l + \ln \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \right\rceil$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $(-l, l)$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-l, l)$ 上一致收敛.

(6) 当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 1 > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2759. $f_n(x) = \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n}; 0 < x < 1.$

解 当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{n} = 0$. 又 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right|.$$

任给 $\epsilon > 0$. 由于 $\lim_{t \rightarrow +0} t \ln t = 0$, 故存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$,

使当 $0 < t < \delta$ 时, 恒有 $|t \ln t| < \epsilon$. 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\delta} \right\rceil$,

则当 $n > N$ 时, $\frac{1}{n} < \delta$, 从而对一切 $0 < x < 1$, 都

有 $0 < \frac{x}{n} < \delta$, 故

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{n} \ln \frac{x}{n} \right| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上一致收敛.

2760. $f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$; (a) 在有穷的区间 (a, b) 上;

(6) 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上.

解 (a) 当 $a < x < b$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} \right\}^x = e^x = f(x).$$

记 $C = \max\{|a|, |b|\}$. 由台劳公式知

$$\begin{aligned} \ln f_n(x) &= n \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \\ &= n \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{\theta x}{n} \right)^3} \cdot \frac{x^3}{n^3} \right], \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, $\left| \frac{\theta x}{n} \right| \leq \frac{c}{n}$, $|x^3| \leq c^3$, 故

$$\ln f_n(x) = x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

于是易知

$$f_n(x) = e^{x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = e^x \left[1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

取适当的 N_1 , 则当 $n > N_1$ 时, 就有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= e^x \left| -\frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| \\ &\leq \frac{c^2 e^c}{n} \quad (a < x < b) \end{aligned}$$

任给 $\epsilon > 0$, 要使 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, 只要 $n > N_1$,

且 $n > \frac{c^2 e^c}{\epsilon}$. 取 $N = \max\left\{N_1, \left\lceil \frac{c^2 e^c}{\epsilon} \right\rceil\right\}$, 则当 $n > N$ 时, 对于 (a, b) 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛.

$$(5) |f_n(x) - f(x)| = \left| \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n - e^x \right|.$$

不论 n 多么大, 只要取 $x = n$, 就有

$$|f_n(n) - f(n)| = 2^n \left[\left(\frac{e}{2} \right)^n - 1 \right],$$

它趋于 $+\infty$, 不可能小于任给的 $\epsilon > 0$. 因此, $f_n(x)$ 在

$(-\infty, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2761. $f_n(x) = n(x^{\frac{1}{n}} - 1); 1 \leq x \leq a.$

解 当 $1 \leq x \leq a$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln x = f(x),$$

并有

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= |n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n \ln(1 + (x^{\frac{1}{n}} - 1))| \\ &= \left| n(x^{\frac{1}{n}} - 1) - n(x^{\frac{1}{n}} - 1) + \frac{n}{2}(x^{\frac{1}{n}} - 1)^2 \right. \\ &\quad \left. + nO((x^{\frac{1}{n}} - 1)^3) \right| \\ &= \frac{1}{2n} \left[\frac{x^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} \right]^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) < \frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

其中 $A > 0$ 为常数, 上述不等式可在适当大的 N_1 取定后当 $n > N_1$ 时成立. 显然对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 N_2 , 使当 $n > N_2$ 时, $\frac{(\ln a)^2}{n} + A \cdot \frac{1}{n^2} < \epsilon$, 于是, 取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[1, a]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[1, a]$ 上一致收敛.

2762. $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}; 0 \leq x \leq 2.$

解 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$

(1) 当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt[n]{1+x^n} - 1 \right|$$

$< \frac{2}{N} \leq x$. 于是, $f_n(x) = 0$. 因此,

当 $0 \leq x \leq 1$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x).$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < 1$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n^2}$,

就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n^2}\right) - f\left(\frac{1}{n^2}\right) \right| = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} = 1 > \varepsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2764. 设 $f(x)$ 为定义于区间 (a, b) 内的任意函数, 且

$$f_n(x) = \frac{[nf(x)]}{n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

证明, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$f_n(x) \xrightarrow{p} f(x) \quad (a < x < b).$$

证 由于

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |[nf(x)] - nf(x)| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给的 $\varepsilon > 0$, 若取 $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$, 则当 $n > N$ 时,

对于一切 $x \in (a, b)$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 (a, b) 上一致收敛于 $f(x)$.

2765. 设函数 $f(x)$ 于区间 (a, b) 内有连续的导函数 $f'(x)$,

且

$$f_n(x) = n \left[f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x) \right].$$

证明: 在闭区间 $a \leq x \leq \beta$ 上 (其中 $a < a < \beta < b$),

$$f_n(x) \xrightarrow{p} f'(x).$$

证 考虑 $[\alpha', \beta']$, 其中 $a < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < b$.
 由于 $f_n(x)$ (n 充分大) 在 $[\alpha', \beta']$ 上有连续的导函数,
 故由微分学中值公式, 得

$$\begin{aligned} f_n(x) &= n \left[f \left(x + \frac{1}{n} \right) - f(x) \right] = n f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) \cdot \frac{1}{n} \\ &= f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

又因 $f'(x)$ 在 $[\alpha', \beta']$ 上连续, 所以 $f'(x)$ 在 $[\alpha', \beta']$ 上一致连续, 即对任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使对于 $[\alpha', \beta']$ 上的任意点 x' 及 x'' , 只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f'(x') - f'(x'')| < \epsilon$. 今取 $N = \left[\frac{1}{\delta} \right] + 1 = N(\epsilon)$,

则当 $n > N$ 时, 有 $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$.

于是, 对 $[\alpha, \beta]$ 上的一切 x 值, 只要 N 足够大, 就可保证 x 与 $x + \frac{\theta}{n}$ 均属于 $[\alpha', \beta']$. 于是, 对于 $[\alpha, \beta]$ 上的一切值 x , 均有

$$|f_n(x) - f'(x)| = \left| f' \left(x + \frac{\theta}{n} \right) - f'(x) \right| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

2766. 设 $f_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f \left(x + \frac{i}{n} \right)$, 其中 $f(x)$ 为连续函数.

证明数列 $f_n(x)$ 在任何有穷闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛.

证 记 $f_n(x)$ 的极限函数为 $F(x)$, 则

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x+\frac{i}{n}}^{x+\frac{i+1}{n}} f(t) dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) \\
&\quad (0 < \theta_i < 1; i = 0, 1, \dots, n-1).
\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $[a, b+1]$ 上连续, 故它在 $[a, b+1]$ 上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于 $[a, b+1]$ 上的任意点 x' 及 x'' , 只要当 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 今取 $N = \left[\frac{1}{\delta}\right] + 1$, 则当 $n > N$, $a \leq x \leq b$ 时, 有 $\left| \left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - \left(x + \frac{i}{n}\right) \right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta$ 且 $x + \frac{i}{n} \in [a, b+1]$, $x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n} \in [a, b+1]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

于是

$$\begin{aligned}
&|F(x) - f_n(x)| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \left| f\left(x + \frac{i}{n} + \frac{\theta_i}{n}\right) - f\left(x + \frac{i}{n}\right) \right| \\
&< \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \varepsilon = \frac{1}{n} \cdot n\varepsilon = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

研究下列级数的收敛性:

2767. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$; (a) 在区间 $|x| < q$ 内, 此处 $q < 1$, (σ) 在区间 $|x| < 1$ 内.

解 (a) 由于 $|x^n| < q^n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛 ($0 < q < 1$), 故由

外耳什特拉斯判别法知,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < q < 1$ 内绝对并一致收敛.

$$(6) S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}. \text{ 当 } |x| < 1 \text{ 时, 有}$$

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \frac{1}{1-x}.$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) - S\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{n+1\sqrt{2}}} \right| > \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 在 $|x| < 1$ 内收敛而不一致收敛.

2768. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$; 在闭区间 $-1 \leq x \leq 1$ 上.

解 由于 $\left| \frac{x^n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上绝对并一致收敛.

2769. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$; 在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上.

$$\begin{aligned} \text{解 } S_n(x) &= \sum_{k=0}^n (1-x)x^k \\ &= (1-x) \sum_{k=0}^n x^k = 1 - x^{n+1}. \end{aligned}$$

于是,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{若 } 0 \leq x < 1; \\ 0, & \text{若 } x = 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n+1\sqrt{2}}$,

就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) - S\left(\frac{1}{n+1\sqrt{2}}\right) \right| = \left| \frac{1}{2} - 1 \right| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛.

2770. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right), -1 \leq x \leq 1.$

解 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right) = x - \frac{x^{n+1}}{n+1}.$

当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = x,$$

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

于是对任给的 $\epsilon > 0$, 若取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 则当 $n > N$ 时, 对于 $[-1, 1]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{n} < \epsilon.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛.

2771. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}, 0 < x < +\infty.$

解 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x}{[(k-1)x+1](kx+1)}$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{nx+1}.
 \end{aligned}$$

当 $0 < x < +\infty$ 时, 有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 1.$$

取 ε_0 使 $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x = \frac{1}{n}$, 就有

$$\left| S_n\left(\frac{1}{n}\right) - S\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2} > \varepsilon_0.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{[(n-1)x+1](nx+1)}$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛而不一致收敛.

2772. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)}; 0 < x < +\infty.$

解 由于 $\left| \frac{1}{(x+n)(x+n+1)} \right| < \frac{1}{n^2} (x > 0)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 原级数在 $(0, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2773. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$

(a) $0 \leq x \leq \varepsilon$, 其中 $\varepsilon > 0$; (b) $\varepsilon \leq x \leq +\infty$.

解 当 $x=0$ 时, 显然级数收敛于零.

当 $x > 0$ 时, 令

$$u_n(x) = \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)},$$

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{1+(n+1)x} \right] = 0 < 1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛 ($x \geq 0$). 易见, 此时

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n u_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{kx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+kx)} \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{(1+x)\cdots(1+(k-1)x)} - \frac{1}{(1+x)\cdots(1+kx)} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$),

因此有

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \begin{cases} 0, & \text{若 } x=0; \\ 1, & \text{若 } x>0. \end{cases}$$

(a) 当 $x > 0$ 时, 有

$$|S_n(x) - S(x)| = \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)}$$

取 $0 < \epsilon_0 < 1$. 对于任意大 (但固定的) n , 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} = 1,$$

故可取 $0 < x_0 < \epsilon$, 使

$$\frac{1}{(1+x_0)(1+2x_0)\cdots(1+nx_0)} > \epsilon_0,$$

即

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| > \epsilon_0.$$

由此可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq \epsilon$ 上不一致收敛.

(6) 当 $x \geq \epsilon$ 及 $n \geq 3$ 时, 由于

$$|u_n(x)| = \left| \frac{nx}{(1+x)(1+2x)\cdots(1+nx)} \right|$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{nx}{(1+x)^n} \\
&= \frac{nx}{1+nx+\frac{1}{2!}n(n-1)x^2+\cdots+x^n} \\
&< \frac{nx}{\frac{1}{3!}n(n-1)(n-2)x^3} \\
&= \frac{6}{(n-1)(n-2)x^2} < \frac{6}{(n-2)^2\epsilon^2},
\end{aligned}$$

且级数 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{6}{(n-2)^2\epsilon^2}$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 原级数在 $(\epsilon, +\infty)$ 上绝对并一致收敛.

2774. 利用外耳什特拉斯判别法, 证明下列函数项级数在所指定区间内的一致收敛性:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2+n^2}, -\infty < x < +\infty;$

(б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, -2 < x < +\infty;$

(в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, 0 \leq x \leq +\infty;$

(г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, |x| < +\infty;$

(д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n+x^{-n}), \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2;$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}, |x| < a, a \text{ 为任意正数};$

(ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}, |x| < +\infty;$

$$(3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}, |x| < +\infty;$$

$$(и) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \sqrt{n}}, |x| < +\infty;$$

$$(к) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n} \right), |x| < a;$$

$$(л) \sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, 0 \leq x < +\infty;$$

$$(м) \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{x^2 + n^3}, |x| < +\infty.$$

解 (a) 由于 $\left| \frac{1}{x^2 + n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$(б) \text{考虑 } n \geq 2, \text{ 有 } \left| \frac{(-1)^n}{x + 2^n} \right| < \frac{1}{2^n - 2} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

$(x > -2)$. 但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n}$ 在 $(-2, +\infty)$ 上一致收敛.

(в) 当 $x=0$ 时, 级数显然收敛于零. 当 $x > 0$ 时,

$$1 + n^4 x^2 \geq 2 n^2 x, \text{ 于是 } \left| \frac{x}{1 + n^4 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + n^4 x^2}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致收敛.

(г) 当 $|x| < +\infty$ 时, $1 + n^5 x^2 \geq 2n^{\frac{5}{2}} x$, 于是, $\left| \frac{nx}{1 + n^5 x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}$

一致收敛. 从而, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(\frac{n}{2}\right)!}$ 当 $|x| < a$ 时一致收敛.

(ж) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4 + x^4}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(з) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(и) 当 $|x| < +\infty$ 时, $\left| \frac{\sin nx}{n \sqrt{n}} \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \sqrt{n}}$ 当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

(к) 当 n 充分大 (即 $n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < a$, 有

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right) = \frac{x}{n \ln^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

但当 $|x| < a$ 时, $\left| \frac{x}{n \ln^2 n} \right| \leq \frac{a}{n \ln^2 n}$, 而 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{a}{n \ln^2 n}$ 收敛*)

以及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 也收敛, 故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{n \ln^2 n}\right)$ 当 $|x| < a$ 时, 一致收敛.

*) 利用 2619 题的结果.

(л) 当 $x > 0$ 时, $e^{nx} > 1 + nx + \frac{n^2 x^2}{2} > \frac{n^2 x^2}{2}$, 故

$e^{-nx} < \frac{2}{n^2 x^2}$. 于是, $|x^2 e^{-nx}| < \frac{2}{n^2}$, 此式对 $x=0$ 也成

立. 又因 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$ 当 $0 \leq x < +\infty$ 时一致收敛.

(M) 由于 $x^2 + n^3 \geq 2n^{\frac{3}{2}} |x|$, 故 $\left| \frac{x}{x^2 + n^3} \right| \leq \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$.

当 n 充分大 ($n \geq n_0$) 时, 对于 $|x| < +\infty$, 有

$$\left| \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2x}{x^2 + n^3} \right| = \left| \frac{2x}{x^2 + n^3} + O\left(\left(\frac{2x}{x^2 + n^3} \right)^2 \right) \right| \leq \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^3} \right).$$

又因 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 及 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 均收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{x^2 + n^3}$

当 $|x| < +\infty$ 时一致收敛.

研究下列函数项级数在指定区间上的一致收敛性:

2775. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$; (a) 在闭区间 $\epsilon \leq x \leq 2\pi - \epsilon$ 上, 其中 $\epsilon > 0$;

(b) 在闭区间 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上.

解 (a) 当 $\epsilon \leq x \leq 2\pi - \epsilon$ 时,

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \leq \frac{1}{\sin \frac{\epsilon}{2}},$$

又 $\frac{1}{n}$ 趋于零并且不依赖于 x , 故由迪里黑里判别法知,

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ 上一致收敛.

(b) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上条件收敛*). 但它不

一致收敛, 这可用反证法获证. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上

一致收敛, 其中 $u_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$ ($n=1, 2, \dots$),

则应有: 任给 $\epsilon > 0$, 例如取 $\epsilon = \frac{1}{4}$, 必存在 $N_1 = N_1(\epsilon)$ (它与 x 无关), 使当 $n \geq N_1$ 时, 对于 $[0, 2\pi]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 取 $N_2 \geq 2N_1$, 记 $n_0 = \max\left(\left[\frac{N_2}{2}\right], \left[\frac{N_2+1}{2}\right]\right)$, 则 $n_0 \geq N_1$, 又取 p 使 $n_0 + p = N_2 + 1$, 则应有

$$|u_{n_0+1}(x) + u_{n_0+2}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)| < \epsilon,$$

也即有

$$\left| \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} u_n(x) \right| < \epsilon = \frac{1}{4} \quad (x \in [0, 2\pi]). \quad (1)$$

今取 $x_0 = \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{\pi}{2}$, 当然上式(1)也应成立.

但是另一方面, 由于当 $\frac{N_2}{2} + 1 \leq n < N_2 + 2$ 时,

显然有 $0 < nx_0 < \frac{\pi}{2}$, 故有 $\sin nx_0 \geq nx_0 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{n}{N_2+2}$.

于是, $u_n(x_0) = \frac{\sin nx_0}{n} \geq \frac{1}{N_2+2}$, 从而有

$$\begin{aligned} \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} u_n(x_0) &\geq \frac{1}{N_2+2} \sum_{\frac{N_2}{2}+1 \leq n < N_2+2} 1 \\ &\geq \frac{1}{N_2+2} \cdot \frac{1}{2}(N_2+2) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

它与(1)中当 $x = x_0$ 时相矛盾. 这就证明了级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上条件收敛而不一致收敛的结论.

*) 利用 2698 题的结果.

2776. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$; $0 < x < +\infty$.

解 记 $u_n(x) = 2^n \sin \frac{1}{3^n x}$ ($n=1, 2, \dots$), 当 $0 < x < +\infty$ 时, 由于

$$|u_n(x)| \leq 2^n \cdot \frac{1}{3^n x} = \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛, 故原级数绝对收敛, 从而收敛.

但它在 $(0, +\infty)$ 内并不一致收敛. 如若不然, 即设它一致收敛, 则对任给 $\epsilon > 0$, 例如取 $\epsilon = 1$, 必存在 $N = N(\epsilon)$ (它与 x 无关), 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $(0, +\infty)$ 内的一切 x 值, 均有

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 今取 $p=1, n=N$, 则对于一切 $x \in (0, +\infty)$, 应有

$$|u_{N+1}(x)| < \epsilon = 1.$$

又取 $x_0 = \frac{2}{3^{N+1}\pi} \in (0, +\infty)$, 则也应有 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$. 但事实上却有

$$\begin{aligned} u_{N+1}(x_0) &= 2^{N+1} \sin \frac{1}{3^{N+1}x_0} = 2^{N+1} \sin \frac{\pi}{2} \\ &= 2^{N+1} > 1, \end{aligned}$$

这与 $|u_{N+1}(x_0)| < 1$ 矛盾. 证毕.

2777. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$; $0 < x < +\infty$.

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$. 当 $0 < x < +\infty$ 时, $\frac{1}{n+x} < \frac{1}{n}$, 它单调一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ 当 $0 < x < +\infty$ 时一致收敛.

2778. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}; 0 \leq x \leq 2\pi$.

解 当 $0 \leq x \leq 2\pi$ 时, 显然 $\frac{1}{n+\sin x}$ 对于 n 单调递减, 同时由于 $0 < \frac{1}{n+\sin x} < \frac{1}{n-1}$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{n+\sin x}$ 在 $0 \leq x \leq 2\pi$ 上一致地趋于零. 又由于 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^k \right| \leq 1$, 故原级数在 $(0, 2\pi)$ 上一致收敛.

2779. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}; |x| \leq 10$.

解 $\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \right| \leq 2$, 记 $b_n(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}}$, 由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} > \frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2+e^x}},$$

故 $b_n(x)$ 单调下降. 又由于

$$\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+e^x}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \rightarrow 0 \quad (|x| \leq 10),$$

故 $b_n(x)$ 单调一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $[-10, 10]$ 上一致收敛.

$$2780. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2n\pi}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}; -\infty < x < +\infty.$$

$$\text{解} \quad \left| \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{2k\pi}{3} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{\pi}{3} \right|} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \text{ 又 } \frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}}$$

对于每一个 $x \in (-\infty, +\infty)$ 都是单调递减的, 且由于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+x^2}} \leq \frac{1}{n}$, 故对每一个 x 一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2781. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin nx}{\sqrt{n+x}}; 0 \leq x < +\infty.$$

解 当 $x = 2m\pi (m = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\sum_{k=1}^n \sin x \sin kx = 0.$$

当 $x \neq 2m\pi (m = 0, 1, 2, \dots)$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| &= |\sin x| \cdot \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| \\ &\leq |\sin x| \cdot \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|} \\ &= 2 \left| \cos \frac{x}{2} \right| \leq 2 \end{aligned}$$

于是, 对于一切 $x \in [0, +\infty]$, 均有

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin x \sin kx \right| \leq 2.$$

又 $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 关于 n 都是单调递

减的, 且由 $\frac{1}{\sqrt{n+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\frac{1}{\sqrt{n+x}}$ 关于 x

在 $0 \leq x < +\infty$ 上一致地趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知, 级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

$$2782. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{\sqrt{n(n+x)}}; 0 \leq x < +\infty.$$

解 $\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{\sqrt{n(n+x)}} = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$. 由于

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]} }{n}$ 收敛*) , 且与 x 无关, 故它对 x 而言是一致收敛的.

另一方面, $\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}}$ 对于每一个 $x \in [0, +\infty)$ 都是

单调递增的且有界: $\left| \frac{1}{\sqrt{1+\frac{x}{n}}} \right| \leq 1$.

因此, 由亚伯耳判别法知, 原级数在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

*) 利用 2672 题的结果.

2783. 不连续函数的叙列可否一致收敛于连续函数?

解 可以. 例如, 函数叙列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \varphi(x) \quad (n=1, 2, \dots)$$

其中 $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数;} \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数.} \end{cases}$

显然, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上每一点均不连续, 但由于

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \dots; -\infty < x < +\infty),$$

故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f_n(x)$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致趋于零. 而 $f(x) \equiv 0$ ($-\infty < x < +\infty$) 显然是连续函数. 此例说明, 不连续函数的叙列仍然可以一致收敛于连续函数.

2784. 证明: 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也一致收敛.

证 由哥西准则及题设知: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 存在 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n > N$ 时, 对于 $[a, b]$ 上的一切 x 值, 均有

$$|f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

其中 p 为任意自然数. 由于

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + |f_{n+2}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| < \epsilon,$$

故根据一致收敛的哥西准则知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上一致收敛.

2785. 若级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛, 则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$$

在 $[a, b]$ 上是否必定一致收敛?

解 未必. 例如, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$$

在 $[0, 1]$ 上绝对并一致收敛, 但其绝对值级数不一致收敛. 事实上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n (1-x)x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n$$

在 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛*). 因此, 我们只要证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛就可以了.

首先, 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot (1-x)x^n$ 显然收敛. 当 $0 < x < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$

$= (1-x) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^n$ 是交错级数且满足莱布尼兹条件, 故也收敛. 要证其一致收敛, 只要证其余式

$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k (1-x)x^k$ 一致趋于零(对 $0 \leq x \leq 1$)即可. 按满足莱布尼兹条件的交错级数的余式估计, 有

$$|R_n(x)| \leq (1-x)x^{n+1} \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (1)$$

令 $f(x) = (1-x)x^{n+1}$, 通过求导数易知此函数在 $x = \frac{n+1}{n+2}$ 时达到其在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值, 故当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 恒有

$$0 \leq f(x) \leq f\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} < \frac{1}{n+2}.$$

于是, 由(1)式知

$$R_{N,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{N+1} \sin^2(2^{N+2}\pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+2)}, 2^{-(N+1)}), \\ \frac{1}{N+2} \sin^2(2^{N+3}\pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+3)}, 2^{-(N+2)}); \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{N+p} \sin^2(2^{N+p+1}\pi x), & \text{当 } x \in (2^{-(N+p+1)}, 2^{-(N+p)}); \\ 0, & \text{其它点 } x \end{cases}$$

因此,当 $0 \leq x \leq 1$ 时,恒有

$$|R_{N,p}(x)| < \frac{1}{N}.$$

由此即知,对于任给的 $\epsilon > 0$,只要取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$,则当 $n > N$ 时,对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值,均有 $|R_{N,p}(x)| < \epsilon$,其中 p 为任意自然数.由哥西准则知,正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $(0, 1)$ 上绝对收敛且一致收敛.下面证明:不可能用某正项收敛数项级数作为其强级数.采用反证法,假设有某收敛的强级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,其中 $a_n \geq 0$ 是常数,即在 $[0, 1]$ 上有

$$|f_n(x)| \leq a_n (n=1, 2, \dots), \quad (1)$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,以下将说明由此引出矛盾.事实上,据(1)

式对一切 $x \in [0, 1]$ 均成立.今取 $x_n = \frac{3}{2} 2^{-(n+1)}$,显然

有

$$2^{-(n+1)} < x_n < 2^{-n}.$$

因此得

$$a_n \geq |f_n(x_n)| = \frac{1}{n} \sin^2(2^{n+1}\pi x_n) = \frac{1}{n} > 0.$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也应收敛, 这与众所周知的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散结论相抵触. 证毕.

2787. 证明: 若各项是单调函数的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在闭区间 $[a, b]$ 的端点绝对收敛, 则此级数在闭区间 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

证 按题设, $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(a)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(b)|$ 均收敛. 令 $a_n = \max(|\varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|)$, 由于 $0 \leq a_n \leq |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|$, 故知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛. 由于 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上是单调的, 故

$$|\varphi_n(x)| \leq a_n \quad (a \leq x \leq b; n=1, 2, \dots).$$

由外耳什特拉斯判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$$

在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛.

2788. 证明: 幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在全部位于其收敛区间内的任何闭区间上一致收敛.

证 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛区间为 $(-R, R)$ ($R > 0$), $[a, b] \subset (-R, R)$. 令

$$r = \max(|a|, |b|),$$

则当 $x \in [a, b]$ 时, 有

$$|a_n x^n| \leq |a_n| \cdot |r|^n = |a_n r^n|.$$

由题设知 $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n r^n|$ 收敛, 故原幂级数在 $[a, b]$ 上绝对并一致收敛. 由 $[a, b]$ 的任意性, 本题获证.

2789. 设 $a_n \rightarrow \infty$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x - a_n}$$

在不包含点 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 的任何有界闭集合上绝对并一致收敛.

证 设 E 是任一不包含点 a_n ($n = 1, 2, \dots$) 的有界闭集, 则存在常数 $M > 0$, 当 $x \in E$ 时有

$$|x| \leq M \text{ 且 } \left| \frac{x}{a_n} \right| \neq 1 \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{)}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_n} \right|$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|a_n|} = 0$. 因此, 存在 N , 使当 $n > N, x \in E$ 时,

$$\left| \frac{x}{a_n} \right| < \frac{1}{2}$$

于是,当 $n > N$ 时,有

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x-a_n} \right| &= \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{\left| 1 - \frac{x}{a_n} \right|} \leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \left| \frac{x}{a_n} \right|} \\ &\leq \frac{1}{|a_n|} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{|a_n|}. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{|a_n|}$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{x-a_n} \right|$ 在 E 上绝对并一致收敛.

2790. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,则迪里黑里级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

证 $0 < \frac{1}{n^x} \leq 1$,且 $\frac{1}{n^x}$ 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的.又

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛,故由亚伯耳判别法知,级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

2791. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.证明:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$$

在域 $x \geq 0$ 内一致收敛.

证 $0 < e^{-nx} \leq 1$,且 e^{-nx} 对每一个 $x \geq 0$ 是单调的.又

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛,故由亚伯耳判别法知,级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx}$ 当 $x \geq 0$ 时一致收敛.

2792. 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

在域 $-\infty < x < +\infty$ 内连续并有连续的导函数.

证 首先证明 $f(x)$ 连续. 事实上, 由 $\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3}$ 及

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ 的收敛性即知, 原级数当 $-\infty < x < +\infty$ 时一

致收敛. 又由于 $\frac{\sin nx}{n^3}$ 在域 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 故级

数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ 的和 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续.

其次再证明 $f'(x)$ 连续. 由于 $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin nx}{n^3} \right) = \frac{\cos nx}{n^2}$

连续, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ 当 $-\infty < x < +\infty$ 时一致收

敛, 故再次根据函数项级数一致收敛的性质, 即知上述

级数的和在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 且有 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}$

$$\frac{\cos nx}{n^2}.$$

2793. 证明: 函数

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$$

(a) 除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外, 在一切的点有定义并且是连续的; (b) 为周期函数, 其周期等于 1.

证 考虑级数(1) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$.
显然, 当 $x \neq k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时, 级数(1)收敛; 当 $x \neq -l (l = 1, 2, \dots)$ 时, 级数(2)收敛. 因此, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 级数 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 收敛.

(a) 因而在除 $x = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 外的一切点上 $f(x)$ 有定义. 下面为了证明 $f(x)$ 在任一点 $x = x_0 (x_0 \neq k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 处 $f(x)$ 连续, 我们可以在 $([x_0], [x_0] + 1)$ 内考虑一个包含 x_0 的区间 $[a, b]$:

$$[x_0] < a < x_0 < b < [x_0] + 1.$$

记 $p = \max(|a|, |b|)$. 在 $[a, b]$ 上考虑级数(1)及(2). 当 n 适当大时(例如 $n \geq n_0$), 由于

$$\left| \frac{1}{(n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2},$$

$$\left| \frac{1}{(-n-x)^2} \right| \leq \frac{1}{(n-|x|)^2} \leq \frac{1}{(n-p)^2},$$

且 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-p)^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及

$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 从而, 级数

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛,

也即 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛. 于是, 其和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 因而 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

(6) 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, 有 $f(x+1) =$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[n - (x+1)]^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{[(n-1) - x]^2},$$

作指标变换 $m = n - 1$, 则当 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时有 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. 因而得

$$f(x+1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(m-x)^2} = f(x),$$

上式表明, 当 $x \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 时, $f(x)$ 是一个以 1 为周期的周期函数. 证毕.

2794. 证明: 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} [nxe^{-nx} - (n-1)xe^{-(n-1)x}]$$

在闭区间 $0 \leq x \leq 1$ 上收敛但不一致收敛, 而它的和在此线段上是连续函数.

证 考虑部分和

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n [kxe^{-kx} - (k-1)xe^{-(k-1)x}] \\ &= nxe^{-nx}, \end{aligned}$$

显然, 在 $[0, 1]$ 上其极限函数 $S(x)$ 存在 (即级数的和) 且连续:

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = 0.$$

但此级数在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 用反证法. 若不然, 即若一致收敛, 则对任给的 $\epsilon > 0$, 存在数 $N = N(\epsilon)$, 使当 $n \geq N$ 时, 对于 $[0, 1]$ 上的一切 x 值, 均有 $|S_n(x)$

$- S(x)| < \epsilon$. 今取 $\epsilon_0 = \frac{1}{2}e^{-1}$, 应有

$$|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}.$$

取 $x = x_0 = \frac{1}{n}$, 则也应有 $|S_n(x) - S(x)| < \frac{1}{2}e^{-1}$. 但另一方面, 却有

$$|S_n(x_0) - S(x_0)| = S_n(x_0) = e^{-1} > \epsilon_0,$$

矛盾. 证毕.

2795. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的连续性, 设:

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n;$$

$$(b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x + (-1)^n n}{x^2 + n^2};$$

$$(c) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}.$$

解 (a) 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|x + \frac{1}{n}\right|^n} = |x|$, 故当 $|x| < 1$ 时, 级数绝对收敛; 而当 $|x| > 1$ 时, 级数发散. 当 $|x| = 1$ 时, 通项不趋于零, 因而级数也发散. 于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-1, 1)$. 下面证明 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内连续. 设 $0 < \delta < 1$, 则当 $|x| \leq 1 - \delta$ 时, 有

$$\left|x + \frac{1}{n}\right|^n \leq \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n.$$

上面已证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \delta + \frac{1}{n}\right)^n$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{1}{n}\right)^n$ 在 $[-1 + \delta, 1 - \delta]$ 上一致收敛, 从而 $f(x)$ 在该区间上连续. 由于 δ 可以任意的小, 故知 $f(x)$ 在开区间 $(-1, 1)$ 内连续.

$$(b) \frac{x + n(-1)^n}{x^2 + n^2} = \frac{x}{x^2 + n^2} + (-1)^n \frac{n}{x^2 + n^2}.$$

由迪里黑里判别法易知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{x^2+n^2}$ 在整个数轴上一致收敛,故其和函数在整个数轴上连续.又对于任意的 $M > 0$,当 $x \in (-M, M)$ 时,由于 $\left| \frac{x}{x^2+n^2} \right| \leq \frac{M}{n^2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ 收敛,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^2+n^2}$ 在 $(-M, M)$ 上一致收敛,从而其和函数在 $(-M, M)$ 上连续.由 M 的任意性知上述和函数在整个数轴上连续.

于是,作为这两个级数的和 $f(x)$ 在整个数轴上有定义且是连续的.

(b) 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 且 $x \neq 0$ 时,有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|}{(1+x^2)^n}} = \frac{1}{1+x^2} < 1,$$

故此时级数绝对收敛.显然当 $x=0$ 时级数收敛于零.于是, $f(x)$ 的存在域为 $(-\infty, +\infty)$.

注意在任一点 $x_0 \neq 0$ 上,例如 $x_0 > 0$ 时,我们可选 a, b 使 $0 < a < x_0 < b$. 考虑 $x \in [a, b]$, 显然有

$$\left| \frac{x}{(1+x^2)^n} \right| \leq \frac{b}{(1+a^2)^n}.$$

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{(1+a^2)^n}$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ 在 $[a, b]$ 上一致

收敛.注意每一个 $\frac{x}{(1+x^2)^n}$ 连续,因而和函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续.于是, $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续(对于 $x_0 < 0$ 的情况可同理证明),而且易得

$$f(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1, x \neq x_0$ 上一致收敛. 另外, 对于每个固定的 k , 由于 $x_0 \neq r_k$, 故当 x 与 x_0 充分近时, $(x - r_k)$ 必与 $(x_0 - r_k)$ 同号, 由此易知

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k) \quad (k=1, 2, \dots).$$

从而, 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k(x)$ 可逐项求极限, 再根据 (1) 式即得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k). \end{aligned}$$

由此可知, $f(x)$ 在点 x_0 可微且

$$f'(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

现设 x_0 是 $[0, 1]$ 中一个有理点, 于是 $x_0 = r_m, m$ 为某正整数. 这时, (1) 式为: 当 $x \neq x_0$ 时,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = v_m(x) + \sum_{k \neq m} v_k(x), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } v_m(x) &= \frac{|x - r_m| - |x_0 - r_m|}{3^m(x - x_0)} = \frac{|x - x_0|}{3^m(x - x_0)} \\ &= \frac{1}{3^m} \operatorname{sgn}(x - x_0). \end{aligned}$$

仿前段之证, 可知: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, 级数 $\sum_{k \neq m} v_k(x)$ 可逐项取极限, 得

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k \neq m} v_k(x) = \sum_{k \neq m} \lim_{x \rightarrow x_0} v_k(x)$$

$$= \sum_{k \neq m} \frac{1}{3^k} \operatorname{sgn}(x_0 - r_k).$$

由于显然 $\lim_{x \rightarrow x_0+0} v_m(x) = \frac{1}{3^m}$, $\lim_{x \rightarrow x_0-0} v_m(x) = -\frac{1}{3^m}$, 故极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} v_m(x)$ 不存在. 于是, 根据 (2) 式即知极限

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ 不存在, 故 $f(x)$ 在点 x_0 不可微. 证毕.

2797. 证明: 黎曼 ζ 函数

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

在域 $x > 1$ 内是连续的并且在此域内有各阶的连续导函数.

证 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ 当 $x > 1$ 时收敛. 各项求导数所得

级数为 $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$. 下证它在 $1 < a \leq x < +\infty$ 上一致收敛 (a 为大于 1 的任何数). 事实上, 当 $a \leq x < +\infty$ 时, 有

$$0 < \frac{\ln n}{n^x} \leq \frac{\ln n}{n^a},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a}$ 收敛 (这是由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^a} / \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{a-1}{2}}} = 0,$$

而 $\frac{a+1}{2} > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{a+1}{2}}}$ 收敛), 故知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到每项 $\frac{\ln n}{n^x}$ 都是 x 的连续函

数,即知:在 $a \leq x < +\infty$ 上可逐项求导数,得

$$\zeta'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}, \quad (1)$$

并且 $\zeta'(x)$ 在 $a \leq x < +\infty$ 上连续.再由 $a > 1$ 的任意性即知(1)式对一切 $1 < x < +\infty$ 成立,并且 $\zeta'(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上连续.当然 $\zeta(x)$ 更在 $1 < x < +\infty$ 上连续.

利用数学归纳法,并注意到对任何正整数 k ,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^a}$ ($a > 1$) 都收敛,仿照上述,可证:对任何正整数 k , $\zeta^{(k)}(x)$ 在 $1 < x < +\infty$ 上都存在且连续,并且可由原级数逐项求导数 k 次而得:

$$\zeta^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x} \quad (1 < x < +\infty).$$

2798. 证明: θ 函数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 x}$$

当 $x > 0$ 时有定义并可微分无穷次.

证 首先,我们证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有定义且可微.

在级数 $\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(x)$ 中, $u_n(x) = e^{-n^2 x}$. 显然有 $u_{-n}(x) = u_n(x)$, 故只要考虑级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x} \quad (x > 0)$$

即可. 对于每一个 $x > 0$ 及充分大的 n , 有

$$0 < e^{-n^2 x} < \frac{1}{n^2 x},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$ 收敛. 对此级数逐项求导后, 得级数

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x},$$

它在 $(\varepsilon, +\infty)$ 内是一致收敛的 (ε 为任意正数). 事实上, 当 n 充分大时, 对一切 $\varepsilon \leq x < +\infty$, 均有

$$0 < \pi n^2 e^{-\pi n^2 x} \leq \pi n^2 e^{-\pi n^2 \varepsilon} < \frac{1}{n^2 \varepsilon}$$

而 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \varepsilon}$ 收敛, 故级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \pi n^2 e^{-\pi n^2 x}$$

在 $\varepsilon \leq x < +\infty$ 上一致收敛. 再注意到各项都是连续函数, 即知级数

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}$$

在 $(\varepsilon, +\infty)$ 内连续可微, 且可逐项求导数. 由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续可微且可逐项求导数.

其次, 仿照前段可证明 $\theta'(x)$ 的可微性.

再次, 利用数学归纳法, 并注意到当 n 充分大时, 对于一切 $x \in (\varepsilon, +\infty)$, 均有

$$0 < (\pi n^2)^k e^{-\pi n^2 x} < \frac{1}{n^2 \varepsilon},$$

仿照前段可证明 $\theta(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内可微分 k 次, 其中 k 为任意自然数, 从而 $\theta(x)$ 当 $x > 0$ 时可微分无穷次.

2799. 确定函数 $f(x)$ 的存在域并研究它们的可微分性, 设:

$$(a) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}; (b) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}.$$

解 (a) 易知当 $x \neq -k (k=1, 2, \dots)$ 时, 级数是莱布尼兹型, 因而收敛. 任取 $x=x_0, x_0 \neq -k (k=1, 2, \dots)$.

1° 当 $x_0 \geq 0$, 取 $\beta > x_0$, 则 $x_0 \in [-\frac{1}{2}, \beta]$. 在区间 $[-\frac{1}{2}, \beta]$ 上, 注意 $u_n(x) = \frac{(-1)^n x}{n+x}$, 有

$$u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2} (n=1, 2, \dots)$$

且连续. $\frac{n}{(n+x)^2}$ 随 n 单调下降且一致趋于零, 事实上, 当 $x \in [-\frac{1}{2}, \beta], n > 1$ 时, 有

$$\left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| \leq \frac{n}{(n-1)^2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty);$$

显然 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界 (小于或等于 1). 因此, 级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[0, \beta]$ 上一致收敛. 从而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $[0, \beta]$ 上可微, 当然它在 $x=x_0$ 点可微.

2° 当 $x_0 < 0$ 时, 必有 k_0 , 使

$$-(k_0+1) < x_0 < -k_0.$$

今选取 α, β , 使

$$-(k_0+1) < \alpha < x_0 < \beta < -k_0.$$

在区间 $[\alpha, \beta]$ 上, $u'_n(x) = \frac{(-1)^n n}{(n+x)^2}$ 连续且随 n 单调下

降,并且一致趋于零(考虑充分大的 n):

$$\begin{aligned} \left| \frac{n}{(n+x)^2} \right| &= \frac{n}{n^2+2nx+x^2} \leq \frac{n}{n^2-2n|x|} \\ &\leq \frac{n}{n^2-2n|\alpha|} = \frac{1}{n-2|\alpha|} \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

又显然知 $\sum_{k=1}^n (-1)^k$ 有界,故 $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 (α, β) 上一致收敛. 因而

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 (α, β) 上可微,当然它在 $x = x_0$ 点可微.

总之,函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$$

在 $x \neq -k (k = 1, 2, \dots)$ 上有定义且可微.

(6) 当 $x=0$ 时,级数显然收敛.

当 $x \neq 0$ 时,由于

$$\frac{\frac{|x|}{n^2+x^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+x^2} |x| \rightarrow |x| \quad (n \rightarrow \infty),$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ 当 $x \neq 0$ 时也收敛. 从而可知 $f(x) =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛. 令

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^2},$$

显然它在 $(-\infty, +\infty)$ 上收敛,故可记 $f(x) = |x|$

• $\varphi(x)$. 任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, 则有 $l > 0$ 使 $-l < x_0 < l$. 当 $x \in [-l, l]$ 时, 由于

$$\left| \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)' \right| = \left| \frac{-2x}{(n^2 + x^2)^2} \right| \leq \frac{2l}{n^4} \quad (n=1, 2, \dots),$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2l}{n^4}$ 收敛. 因此, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2 + x^2} \right)'$ 在 $[-l, l]$ 上一致收敛. 从而知 $\varphi(x)$ 在 $[-l, l]$ 上可微, 当然它在 $x = x_0$ 点可微. 又因 $|x|$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微, 再注意到恒有 $\varphi(x) > 0$, 即知 $f(x) = |x|\varphi(x)$ 在 $x \neq 0$ 点可微, 而在 $x = 0$ 点不可微.

2800. 证明: 叙列

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \arctg x^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]'_{x=1} \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1).$$

证 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$|\arctg x^n| \leq \frac{\pi}{2} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故有

$$|f_n(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \quad (n=1, 2, \dots).$$

易见 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 = f(x)$. 任给 $\epsilon > 0$, 选取 $N = \left\lceil \frac{\pi}{2\epsilon} \right\rceil$, 则

当 $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in (-\infty, +\infty)$, 均有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2(N+1)} < \frac{\pi}{2 \cdot \frac{\pi}{2\epsilon}} = \epsilon.$$

于是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零. 但

$$f'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$

易见

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]'_{x=1} = f'(x)|_{x=1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(1) = \frac{1}{2} \neq 0.$$

因此,两个极限不相等.值得注意的是, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛于零,但 $f'_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内却不一致收敛于其极限函数:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x \neq 1; \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

2801. 证明: 叙列

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right)$$

在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

证 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^2 = f(x)$. 由于当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{n} \sin n \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right| \leq \frac{1}{n},$$

故对任给 $\epsilon > 0$, 只要取 $N = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$, 当 $n > N$ 时, 对于一切 $x \in (-\infty, +\infty)$, 就有

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛.

其次, 由于

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' = (x^2)' = 2x,$$

而 $f_n(x) = 2x + \cos n(x + \frac{\pi}{2})$ 当 $n \rightarrow \infty$ 时极限不存在, 当然有

$$[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f_n'(x).$$

2802. 当参数 α 取甚么值: (a) 叙列

$$f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx} \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛; (b) 叙列 (1) 在 $[0, 1]$ 上一致收敛; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ 可在积分号下取极限?

解 (a) 当 $x=0$ 时, 对于任意 α , 均有 $f_n(x)=0$; 当 $x \neq 0$ 且 $x \in (0, 1]$ 时, 对于任意 α , 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha x e^{-nx} = 0.$$

因此, 对于任意的 α , $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于函数 $f(x)=0$.

(b) 由于 $f_n'(x) = n^\alpha e^{-nx} (1 - nx)$, 故当 $x = \frac{1}{n}$ 时, $f_n'(x) = 0$. 又由于当 $x < \frac{1}{n}$ 时, $f_n'(x) > 0$; 当 $x > \frac{1}{n}$ 时, $f_n'(x) < 0$, 故 $x = \frac{1}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 上的最大值点. 因此,

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\frac{1}{n}) = n^{\alpha-1} e^{-1} \quad (0 \leq x \leq 1).$$

当 $\alpha < 1$ 且 $n \rightarrow \infty$ 时, $n^{\alpha-1} e^{-1} \rightarrow 0$. 于是, 当 $\alpha < 1$ 时, 对任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 N , 使当 $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in [0, 1]$, 均有

$$|f_n(x) - 0| < \epsilon,$$

即当 $\alpha < 1$ 时, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛于零. 当 $\alpha \geq 1$

注意到

$$\begin{aligned}\int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx &= \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n} \right) = \frac{1}{2} \neq 0,\end{aligned}$$

本题获证.

2804. 证明: 叙列

$$f_n(x) = nx(1-x)^n \quad (n=1, 2, \dots)$$

在闭区间 $[0, 1]$ 上收敛而不一致收敛, 但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx.$$

证 先证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛. 事实上, 当 $x=0$ 及 $x=1$ 时, 对任意的 n , 均有 $f_n(x)=0$; 而当 $0 < x < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} nx(1-x)^n = 0$. 因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上收敛于零.

下证 $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛. 为此, 取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2e}$, 不论 n 多么大, 只要取 $x_n = \frac{1}{n+1}$, 就有

$$\begin{aligned}|f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) - 0| &= n \cdot \frac{1}{n+1} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \rightarrow e^{-1} \quad (n \rightarrow \infty).\end{aligned}$$

那末取适当大的 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, 就有

$$|f_n(x_n)| > \frac{1}{2e} > \epsilon_0.$$

因此, $f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

最后证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx$.

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)] dx &= \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx(1-x)^n dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n(1-y)y^n dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} y^{n+1} - \frac{n}{n+2} y^{n+2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} = 0, \end{aligned}$$

故得证.

2805. 于下式中

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx$$

在积分符号下取极限合理否?

解 由于

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{1+n^2x^4} \right) dx &= \int_0^1 0 \cdot dx = 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^4} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} nx^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

故在积分号下取极限不合理.

一般说来,若数列 $f_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛,则是保证在积分号下取极限为合理的一个充分条件,但当它不一致收敛时,则就不一定能保证可以在积分号下取极限了,本题就是其中一例.事实上,取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$,

不论 n 多么大,只要取 $x = \frac{1}{n}$,就有

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0 \right| = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^4}} > \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} > \varepsilon_0,$$

故此处的 $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^4}$ 在 $(0, 1)$ 上并不一致收敛.

求出:

2806. $\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1}.$

解 由于 $x \rightarrow 1-0$, 故可设 $0 \leq x \leq 1$. 此时, 由于 $\frac{x^n}{x^n+1}$ 小于 1, 且当 n 增加时单调下降, 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛, 故根据亚伯耳判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n + 1} \quad (1)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1}$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 且

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \quad (n=1, 2, \dots),$$

故当 $x \rightarrow 1-0$ 时, 级数(1)可以逐项取极限, 其结果为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{x^n+1} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln 2^*).$$

*) 利用 2661 题的结果.

$$2807. \lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}).$$

解 由于 $x \rightarrow 1-0$, 故可设 $0 \leq x < 1$. 在此区间上, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x) = \frac{x(1-x)}{1-x} = x, \text{ 故}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1}) = \lim_{x \rightarrow 1-0} x = 1.$$

$$2808. \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}.$$

解 由于 $\frac{1}{n^x}$ 在 $[0, l]$ ($l > 0$) 上单调下降且小于或等于

1, 而数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛, 故级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上一致收敛. 又因 $\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0, l]$ 上连续,

且

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} = \frac{1}{2^n},$$

故当 $x \rightarrow +0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$ 可以逐项取极限, 其结果

为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2^n n^x} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1. \end{aligned}$$

2809. 逐项微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 合理否?

解 由于当 $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n^2} \right)^2} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2}{n^4 + x^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故逐项微分后所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\arctg \frac{x}{n^2} \right)'_x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + x^2}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 再由 $\left| \arctg \frac{x}{n^2} \right| \leq \frac{|x|}{n^2}$ 知

原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 收敛; 因此, 原级数和的导数用逐项

微分级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{x}{n^2}$ 来计算是合理的.

2810. 在闭区间 $[0, 1]$ 上逐项积分级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n+1} - x^{2n-1})$$

合理否?

解 令 $S_n(x) = \sum_{k=1}^n (x^{2k+1} - x^{2k-1})$, 则当 $x = 0, 1$ 时,

$S_n(x) = 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $S_n(x) = x^{2n+1} - x$. 因此,

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0, 1; \\ 1 - x, & \text{当 } 0 < x < 1. \end{cases}$$

取 ϵ_0 使 $0 < \epsilon_0 < \frac{1}{2}$, 不论 n 多么大, 只要取

$x_n = \frac{1}{2^{2n+1}}$ 就有

$$|S_n(x_n) - S(x_n)| = \frac{1}{2} > \epsilon_0.$$

因此, $S_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不一致收敛.

注意, 对于不一致收敛的级数而言, 一般地讲逐项积分级数不一定合理. 但对于本题来说, 由于

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (x^{2n+1} - x^{2n-1}) \right] dx = \int_0^1 (1-x) dx = \frac{1}{2}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{2n+1} - x^{2n-1}) dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n+2} - \frac{2n-1}{2n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2n+2} \right) - \left(1 - \frac{1}{2n} \right) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+2} \right) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故本题所给出的级数在 $(0, 1]$ 上作逐项积分计算还是对的.

由此题说明, 级数在 $[a, b]$ 上一致收敛仅是可以逐项积分的一个充分条件, 并不是必要条件.

2811. 设 $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) 是可微分任何次的函数, 且其导函数 $f^{(n)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 的叙列在每一个有穷区间 (a, b) 内一致收敛于函数 $\varphi(x)$. 证明 $\varphi(x) = Ce^x$, 其中 C 为常数.

证 由于 $f(x)$ 可微分任意次, 故 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内连续且可微 ($n = 1, 2, \dots$). 又按题设 $f^{(n)}(x)$ 在 (a, b) 内一致收敛于 $\varphi(x)$, 且其导函数叙列 $f^{(n+1)}(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 (a, b) 内也一致收敛于 $\varphi(x)$, 故 $\varphi(x)$ 在 (a, b) 内可微, 并且

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= [\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x)]' = \lim_{n \rightarrow \infty} [f^{(n)}(x)]' \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n+1)}(x) = \phi(x).\end{aligned}$$

积分之,即得

$$\ln \phi(x) = x + C_1,$$

也即

$$\phi(x) = Ce^x,$$

其中 $C = e^{C_1}$ 为常数.

§ 5. 幂级数

1° 收敛区间 对于每一个幂级数

$$a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

都存在有收敛区间: $|x-a| \leq R$, 已知的级数在其内收敛, 而在其外发散. 收敛半径 R 可按哥西—哈达玛公式

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

来确定.

收敛半径 R 也可按公式

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

来计算(若此极限存在).

2° 亚伯耳定理 若幂级数 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($|x| < R$) 在收敛区间的端点 $x = R$ 处收敛, 则

$$S(R) = \lim_{x \rightarrow R-0} S(x).$$

3° 台劳级数 在 a 点的解析函数可展为幂级数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

此级数的余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

可以写成下形

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a+\theta(x-a)]}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$$

(拉格朗日形式)或

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta_1(x-a))}{n!} (1-\theta_1)^n (x-a)^{n+1} \\ (0 < \theta_1 < 1)$$

(哥西形式).

必须记住下列五个基本的展开式:

$$I. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$II. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots \\ (-\infty < x < +\infty).$$

$$III. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \\ (-\infty < x < +\infty).$$

$$IV. (1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ (-1 < x < 1).$$

$$V. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \\ + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (-1 < x \leq 1).$$

4° 幂级数的运算 在公共的收敛区间 $|x-a| < R$ 内有:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n \\ = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) (x-a)^n;$$

$$(5) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n,$$

式中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$;

$$(6) \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right]' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}(x-a)^n;$$

$$(7) \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}.$$

5° 在复数域内的幂级数 研究级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n.$$

式中 $c_n = a_n + ib_n, a = \alpha + i\beta, z = x + iy, i = \sqrt{-1}$. 对于每一个如像这样的级数都有一收敛圆 $|z-a| \leq R$, 原来的级数在其内收敛 (并且是绝对地), 而在其外发散. 收敛半径 R 等于幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| r^n$$

在实数域内的收敛半径.

求下列幂级数的收敛半径和收敛区间并研究其在收敛区间端点的性质:

2812. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^p}.$

解 记 $a_n = \frac{1}{n^p}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=-1$ 时, 若 $p > 1$, 则幂级数为绝对收敛; 若 $0 < p \leq 1$, 则为条件收敛; 当 $p \leq 0$ 时, 则为发散.

当 $x=1$ 时, 若 $p > 1$, 则为绝对收敛; 若 $p \leq 1$ 则为发散.

$(x+1)^n$ 条件收敛.

当 $x = -\frac{2}{3}$ 时, 幂级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n \left(\frac{1}{3}\right)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}. \end{aligned}$$

由于上式右端第一个级数发散, 第二个级数收敛, 故原级数发散.

2814. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 记 $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = 4,$$

故收敛半径 $R=4$; 收敛区间为 $(-4, 4)$.

当 $x=-4$ 时, 利用斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} (1+o(1))$$

得

$$\begin{aligned} \left| \frac{(n!)^2}{(2n)!} (-4)^n \right| &= \frac{(\sqrt{2\pi n} n^n e^{-n})^2 + o(1)}{\sqrt{4\pi n} (2n)^{2n} e^{-2n} + o(1)} \cdot 4^n \\ &= \sqrt{n\pi} (1+o(1)) \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此, 当 $x=-4$ 时级数发散.

当 $x=4$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} 4^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n}{2n+2} \right) = -\frac{1}{2} < 1,$$

故由拉阿伯判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2815. $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} \cdot x^n (0 < a < 1).$

解 记 $a_n = a^{n^2}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{2n+1}} = +\infty,$$

故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2816. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} x^n.$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}} \right]^n \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{e}, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{e}$; 收敛区间为 $(-\frac{1}{e}, \frac{1}{e})$.

当 $|x| = \frac{1}{e}$ 时, 由于

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2} \left(\frac{1}{e} \right)^n \cdot (\pm 1)^n \right| \rightarrow 1 \neq 0 (n \rightarrow \infty),$$

故级数发散.

$$2817. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{a^{n^2}} x^n (a > 1).$$

解 记 $a_n = \frac{n!}{a^{n^2}}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{2n+1}}{n+1} = +\infty,$$

故收敛半径 $R = +\infty$; 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

$$2818. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p \left(\frac{x-1}{2} \right)^n.$$

解 记 $a_n = \left[\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \right]^p \cdot \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \cdot \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^p = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$; 收敛区间为 $(-2+1, 2+1)$, 即 $(-1, 3)$.

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p,$$

由 2689 题的结果知: 若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $0 < p \leq 2$, 为条件收敛; 若 $p \leq 0$, 为发散.

当 $x = 3$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \right]^p.$$

若 $p > 2$, 为绝对收敛; 若 $p \leq 2$, 为发散.

$$2819. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p x^n.$$

解 记 $a_n = (-1)^n \left[\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^p = 2^p,$$

故收敛半径 $R = 2^p$; 收敛区间为 $(-2^p, 2^p)$.

当 $x = -2^p$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p = \sum_{n=1}^{\infty} u_n,$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{u_{n+1}} &= \left(\frac{2n+3}{2n+2} \right)^p = \left(1 + \frac{1}{2n+2} \right)^p \\ &= 1 + \frac{p}{2n+2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + \frac{p}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故由高斯判别法知: 当 $\frac{p}{2} > 1$ (即 $p > 2$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (由于是正项级数, 故也是绝对收敛); 当 $\frac{p}{2} \leq 1$ (即 $p \leq 2$) 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

当 $x = 2^p$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{2 \cdot 4 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \right]^p, \end{aligned} \quad (1)$$

由前段知, 当 $p > 2$ 时, 为绝对收敛; 当 $0 < p \leq 2$ 时, 由于

$$\begin{aligned} &\left| (-1)^n \left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p \right| \\ &\sim \left[\frac{4^n \cdot 2n\pi \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n}}{\sqrt{(4n+2)\pi} \cdot (2n+1)^{2n+1} e^{-(2n+1)}} \right]^p \\ &= \left[\frac{4^n \cdot 2\pi e}{\sqrt{(4n+2)\pi} \cdot 2^{2n+1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n+1}} \right]^p \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$(n \rightarrow \infty)$,

且

$$\frac{\left[\frac{4^{n+1} [(n+1)!]^2}{(2n+3)!} \right]^p}{\left[\frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right]^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+3} \right)^p < 1,$$

故级数(1)逐项下降,根据莱布尼兹判别法知级数(1)收敛,但由于由其绝对值组成的级数发散.因此,当 $0 < p \leq 2$ 时,级数(1)条件收敛.当 $p=0$ 时,通项为 $(-1)^n$,故级数为发散;当 $p < 0$ 时,通项趋于无穷,因而级数也发散.

2820.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{m-n} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{m}{n},$$

利用 2700 题的结果,即知:当 $m \geq 0$ 时,绝对收敛;当 $-1 < m < 0$ 时,条件收敛;当 $m \leq -1$ 时,发散.

当 $x=-1$ 时,级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}, \end{aligned}$$

显见当 $m \geq 0$ 时为绝对收敛;当 $m < 0$ 时;若 m 为负整

数, 设为 $-k$ (k 为正整数), 则通项为

$$\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\cdots(k+n-1)}{(k-1)!} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

故级数发散; 若 m 不为负整数, 由于通项为正, 并且总可以大于 $\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}$, 其中 $-m > k$, 故

级数也发散. 因此, 当 $m < 0$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{m}{n}$ 发散.

2821. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) x^n \quad (a > 0, b > 0).$

解 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^2} x^n,$$

容易求得它们的收敛半径分别为 $R_1 = \frac{1}{a}$ 及 $R_2 = \frac{1}{b}$, 故

原级数的收敛半径 $R = \min(R_1, R_2) = \min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$, 收敛区间为 $(-R, R)$.

当 $x = -R$ 时, 若 $a < b$, 则级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{b} \right)^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2}, \quad (1)$$

对于上式右端的第一个级数, 利用达朗伯耳判别法有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{n+1}}{(-1)^n \cdot \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n}{n}} \right| = \frac{a}{b} < 1,$$

故知其为绝对收敛,而第二个级数显然为绝对收敛. 因此,当 $a < b$ 时,级数(1)绝对收敛. 当 $a \geq b$ 时,级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(-\frac{1}{a} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^n, \quad (2) \end{aligned}$$

上式右端的第一个级数条件收敛,第二个级数绝对收敛($b < a$)或条件收敛($b = a$),故当 $a \geq b$ 时,级数(2)条件收敛.

当 $x=R$ 时,若 $a < b$,级数为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{b} \right)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{a}{b} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \end{aligned}$$

由前段知其为绝对收敛;若 $a \geq b$,级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} \right) \left(\frac{1}{a} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{b}{a} \right)^n,$$

它是一个发散级数与收敛级数的和,故为发散级数.

2822. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} (a > 0, b > 0).$

解 记 $a_n = \frac{1}{a^n + b^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \max(a, b) \cdot \frac{1 + \theta^{n+1}}{1 + \theta^n} = \max(a, b),$$

其中 $\theta = \frac{\min(a, b)}{\max(a, b)}$, $0 < \theta \leq 1$, 故收敛半径

$R = \max(a, b)$; 收敛区间为 $(-R, R)$.

当 $|x| = R$ 时, 由于 $\frac{R^n}{a^n + b^n} \rightarrow 1 \neq 0$, 故级数发散.

2823. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a \sqrt{n}} (a > 0)$.

解 记 $a_n = \frac{1}{a \sqrt{n}}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a \sqrt{n}}.$$

由于

$$n \left[\frac{a \frac{1}{\sqrt{n}}}{a \frac{1}{\sqrt{n+1}}} - 1 \right] = \frac{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}} \cdot \frac{n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}},$$

且上式右端第一个因式当 $n \rightarrow \infty$ 时趋于 $\ln a$, 故当 $a > 1$ 时, 上式趋于 $+\infty$, 因而级数收敛; 当 $a < 1$ 时, 上式趋于 $-\infty$, 因而级数发散; 而当 $a = 1$ 时, 由于通项为 1, 故级数也发散.

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

当 $a > 1$ 时, 级数绝对收敛; 当 $a \leq 1$ 时, 由于通项不趋于零, 故级数发散.

总之, 当 $|x| = 1$ 时, 若 $a > 1$, 则级数绝对收敛; 若 $a \leq 1$, 则级数发散.

2824.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}} x^n}{\sqrt{n^2 + 1}}$$

解 记 $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{(n+1)^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 1}} = 1, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (1)$$

由于

$$0 < \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2 + 1}} < \frac{1}{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\frac{1}{\sqrt{n}}}}$ 收敛*), 故级数(1)收敛.

当 $x = -1$ 时, 级数绝对收敛.

总之, 当 $|x| = 1$ 时, 级数绝对收敛.

*) 利用 2823 题的结果.

2825.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} x^n.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{n} > 0$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故级数(1) 发散.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (2)$$

由于

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n = 0$. 又由于

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} > 1 \quad (n=1, 2, \dots),$$

故 $|a_n| > |a_{n+1}|$. 因此, 级数(2) 收敛. 但由于级数(1) 发散, 故级数(2) 条件收敛.

2827. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n.$

解 记 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $|x| = 1$ 时, 由于 $a_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$, 故级数发散.

2828. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n} x^n.$

解 记 $a_n = \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n}$. 由于

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 4,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{4}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

当 $x = \frac{1}{4}$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3 + (-1)^n]^n}{n \cdot 4^n}. \quad (1)$$

将它拆成两部分, 一部分为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$, 一部分为

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)2^{2k+1}}$. 前一级数显然发散; 而对于后一级数, 利用哥西判别法或达朗伯耳判别法易知其为收敛. 因此, 级数(1) 发散.

当 $x = -\frac{1}{4}$, 同法可证, 原级数可拆成一个发散级数与一个收敛级数. 因此, 它也是发散的.

$$2829. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n} x^n.$$

解 记 $a_n = \frac{\left(1 + 2\cos \frac{\pi n}{4}\right)^n}{\ln n}$. 由于

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 3,$$

故收敛半径 $R = \frac{1}{3}$; 收敛区间为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 对于 $n = 8k$, 由于

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + 2\cos 2k\pi)^{8k}}{\ln 8k} \cdot \frac{1}{3^{8k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$$

及

$$\frac{1}{\ln k + \ln 8} > \frac{1}{k + \ln 8} > 0,$$

且 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \ln 8}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k + \ln 8}$ 发散.

不难证明: 当 $n = 8k + 1, 8k + 2, \dots, 8k + 7$ ($k = 1, 2, \dots$) 时, 级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n}{\ln n} \left(\pm \frac{1}{3}\right)^n \quad (1)$$

收敛. 事实上, $\frac{1}{\ln n}$ 单调趋于零, 且

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^m \left| \left(1 + 2\cos \frac{n\pi}{4}\right)^n \right| \cdot \frac{1}{3^n} \\ & \leq \sum_{n=2}^m \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{3}\right)^n < \sum_{n=1}^m \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{3}\right)^n \\ & < \frac{1 + \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1 + \sqrt{2}}{3}} \\ & = \frac{1 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} < 5, \end{aligned}$$

根据迪里黑里判别法可知级数(1)收敛.

于是, 当 $|x| = \frac{1}{3}$ 时, 原级数是由一个发散级数与诸收敛级数依次相加而成的. 因此, 它是发散的.

2830. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

解 记 $a_n = \frac{1}{2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} \quad \text{及} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $|x| = 1$ 时, 由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(\pm 1)^{n^2}}{2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

收敛, 故原级数绝对收敛.

2831. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} x^n$ (普林斯格木级数).

解 记 $a_n = \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故收敛半径 $R = 1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x = 1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n]}}{n},$$

它是条件收敛的*).

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

记 $A_l = \{n \mid [\sqrt{n}] = l\} (l = 1, 2, \dots)$. 显然 A_l 内的元素可写成 $n = l^2 + s$, 而 $s = 0, 1, 2, \dots, 2l$.

考虑

$$u_l = \sum_{n \in A_l} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]+n}}{n} = \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^{l^2+l+s}}{l^2+s}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s=0}^{2l} \frac{(-1)^s}{l^2 + s} \\
&= \frac{1}{l^2} - \left(\frac{1}{l^2 + 1} - \frac{1}{l^2 + 2} \right) - \cdots \\
&\quad - \left(\frac{1}{l^2 + 2l - 1} - \frac{1}{l^2 + 2l} \right) \\
&\leq \frac{1}{l^2} \quad (l = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

由于 $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2}$ 收敛, 故 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 收敛. 注意 $A_i \cap A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 且 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots$ 就是全体自然数. 易证 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{l=1}^{\infty} u_l$ 同时收敛或同时发散. 由此可见, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 因而显然是条件收敛的.

*) 利用 2672 题的结果.

2832. 求超越几何级数

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \cdots \\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)} x^n \\
&\quad + \cdots
\end{aligned}$$

的收敛域.

解 记 a_n

$$= \frac{\alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)\beta(\beta+1) \cdots (\beta+n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n \cdot \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1)}.$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1,$$

故收敛半径 $R=1$; 收敛区间为 $(-1, 1)$.

当 $x=1$ 时,级数为

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

$$+ \dots$$

由于

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2} \quad (|\theta_n| \leq L),$$

故当 $\gamma - \alpha - \beta + 1 > 1$ 即 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时,级数收敛且也是绝对收敛的;当 $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$ 时,级数发散.

当 $x=-1$ 时,由上可知,

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

当 $\gamma - \alpha - \beta > 0$ 时,级数绝对收敛;当 $\gamma - \alpha - \beta < -1$ 时,从某项开始,将有

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < 1 \quad \text{即} \quad |a_n| < |a_{n+1}|,$$

a_n 不趋于零,级数发散;当 $-1 < \gamma - \alpha - \beta$ 时,在弃去若干个开始项以后,就变成每项的绝对值单调递减的交错级数了,并在这里,把求通项(绝对值)的极限化成下列无穷乘积

$$\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}$$

的值更为方便. 由于

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{n} + \frac{\theta'_n}{n^2} \right)$$

$$= -\infty \quad (|\theta_n| \leq M),$$

故上述无穷乘积的值为零, 即 $a_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$. 因此, 级数收敛. 当 $\gamma - \alpha - \beta = -1$ 时, 由于 $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\theta_n}{n^2}$, 故无穷乘积的值异于零, 因而 $a_n \rightarrow 0$, 级数发散.

综上所述, 现将超越几何级数的敛散情况列表如下:

$ x < 1$		绝对收敛
$ x > 1$		发 散
$x = 1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq 0$	发 散
$x = -1$	$\gamma - \alpha - \beta > 0$	绝对收敛
	$-1 < \gamma - \alpha - \beta \leq 0$	条件收敛
	$\gamma - \alpha - \beta \leq -1$	发 散

求下列广义的幂级数的收敛域:

$$2833. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n.$$

解 记 $a_n = \frac{1}{2n+1}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1,$$

故当 $\left| \frac{1-x}{1+x} \right| < 1$ (即 $x > 0$) 时, 级数绝对收敛;

当 $x < 0$ 时, 级数发散; 当 $x = 0$ 时, 级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1},$$

显然发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n$$

的收敛域为 $(0, +\infty)$.

2834. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$.

解 记 $a_n = \sin \frac{\pi}{2^n}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\pi}{2^n}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 2, \end{aligned}$$

故当 $\left| \frac{1}{x} \right| < 2$ 即当 $|x| > \frac{1}{2}$ 时, 级数绝对收敛; 当 $|x| < \frac{1}{2}$ 时, 级数发散; 当 $|x| = \frac{1}{2}$ 时, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{\pi}{2^n} = \pi \neq 0,$$

故级数发散. 于是, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n} \sin \frac{\pi}{2^n}$$

的收敛域为 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 及 $(\frac{1}{2}, +\infty)$, 即满足不等式

$|x| > \frac{1}{2}$ 的一切 x 值所成的集合.

2835. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{x^n}{2^{n^2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}. \end{aligned}$$

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n^2}}$$

的收敛域为 $(-\infty, +\infty)^*$ 。而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^2}} \cdot \frac{1}{x^n}$$

的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$ 。因此,级数

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{n^2}} x^n$$

的收敛域为 $(-\infty, 0)$ 及 $(0, +\infty)$,即满足不等式 $0 < |x| < +\infty$ 的一切 x 值所成的集合。

*) 利用 2815 题的结果。

$$2836. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^{-nx}.$$

解 记 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$,则原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{-x})^n$ 。由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-1},$$

故当 $|e^{-x}| < \frac{1}{e^{-1}} = e$ 即当 $1+x > 0$ 或 $x > -1$ 时,级数绝对收敛;当 $x < -1$ 时,级数发散;当 $x = -1$ 时,由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2} e^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^n = 1 \neq 0,$$

解 方法一:

$$\begin{aligned}f(x) &= [(x+1)-1]^3 \\ &= (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1.\end{aligned}$$

方法二:

$$\begin{aligned}f(-1) &= -1, f'(-1) = 3, f''(-1) = -6, \\ f'''(-1) &= 6, f^{(4)}(-1) = f^{(5)}(-1) = \cdots = 0.\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}f(x) &= -1 + 3(x+1) - \frac{6}{2!}(x+1)^2 \\ &\quad + \frac{6}{3!}(x+1)^3 \\ &= -1 + 3(x+1) - 3(x+1)^2 + (x+1)^3.\end{aligned}$$

2839. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{a+x} \quad (a \neq 0)$$

按以下的方式展为幂级数:(a)依 x 的乘幂展开;(b)依二项式 $x-b$ 的乘幂展开,此处 $b \neq a$;(c)依 $\frac{1}{x}$ 的乘幂展开. 求出对应的收敛域.

$$\begin{aligned}\text{解 (a)} \quad f(x) &= \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{a}} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^{n+1}},\end{aligned}$$

收敛域为 $|x| < |a|$.

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad f(x) &= \frac{1}{a-b-(x-b)} \\ &= \frac{1}{a-b} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x-b}{a-b}}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}},$$

收敛域为 $|x-b| < |a-b|$.

$$\begin{aligned} \text{(B)} f(x) &= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{a}{x} - 1} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{x}} \\ &= -\frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{x^{n+1}}, \end{aligned}$$

收敛域为 $|x| > |a|$.

2840. 把函数 $f(x) = \ln x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂来展开, 并说明展开式的收敛区间. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的和.

解 $f(x) = \ln[1 + (x-1)]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}. \quad (1)$$

收敛区间为

$$|x-1| < 1 \text{ 或 } 0 < x < 2.$$

当 $x-1=1$ 即当 $x=2$ 时, 级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n},$$

显然收敛, 故当 $0 < x \leq 2$ 时, 级数(1)收敛.

由于 $\ln x$ 在 $x=2$ 连续, 故当 $x=2$ 时, (1) 式也成立, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2.$$

写出下列函数按变数 x 的正整数幂的展开式, 并求出对应的收敛区间:

2841. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},
 \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < +\infty$ 或 $(-\infty, +\infty)$.

2842. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

$$\text{解 } f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2843. $f(x) = \sin^2 x$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n}}{(2n)!} \right] \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},
 \end{aligned}$$

收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2844. $f(x) = a^x (a > 0)$.

$$\text{解 } f(x) = e^{x \ln a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln^n a}{n!} x^n. \text{ 由于}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{\ln^n a}{n!} \right|} = |\ln a| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0,$$

故收敛半径 $R = +\infty$, 收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2845. $f(x) = \sin(\operatorname{arcsin} x)$.

$$\text{解 } \operatorname{arcsin} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \left(1 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}t^4 + \dots\right) dt \\
&= x + \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \dots \\
&\quad (|x| < 1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x) &= u \arcsin x - \frac{u^3}{3!} (\arcsin x)^3 \\
&\quad + \frac{u^5}{5!} (\arcsin x)^5 - \dots \\
&= ux + \frac{u(1^2 - u^2)}{3!} x^3 \\
&\quad + \frac{u(1^2 - u^2)(3^2 - u^2)}{5!} x^5 + \dots,
\end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2846. $f(x) = \cos(u \arcsin x)$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } f(x) &= 1 - \frac{u^2}{2!} (\arcsin x)^2 \\
&\quad + \frac{u^4}{4!} (\arcsin x)^4 - \dots \\
&= 1 - \frac{u^2}{2!} x^2 - \frac{u^2(2^2 - u^2)}{4!} x^4 - \dots.
\end{aligned}$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2847. 写出函数 $f(x) = x^x$ 按差 $x-1$ 的正整数幂展开式的前三项.

$$\begin{aligned}
\text{解 } f(x) &= x^x, f(1) = 1; \\
f'(x) &= x^x(1 + \ln x), f'(1) = 1; \\
f''(x) &= x^x(1 + \ln x)^2 + x^{x-1}, f''(1) = 2; \\
f'''(x) &= x^x(1 + \ln x)^3 + 2x^{x-1} \\
&\quad + x^{x-1} \left(\ln x + \frac{x-1}{x} \right), \\
f'''(1) &= 3.
\end{aligned}$$

于是,展式的前三项为

$$1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{2}(x-1)^3 + \dots,$$

收敛区间为 $|x-1| < 1$, 即 $0 < x < 2$.

2848. 写出函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ ($x \neq 0$) 和 $f(0) = e$ 按变数 x 的正整数幂展开式的前三项.

解 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}}$, $f(0) = e$;

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{1}{x^2} \ln(1+x) + \frac{1}{x(1+x)} \right\} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{1}{x^2} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right\} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right\} \\ &\quad (x \neq 0). \end{aligned}$$

由微分学中值定理知

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(\xi),$$

其中 ξ 介于 0 与 x 之间, 从而

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} f'(\xi) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} f'(\xi) = -\frac{e}{2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{x^3} \ln(1+x) - \frac{1}{x^2(1+x)} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1+x)^2} \right\} \\ &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left[\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right\} \end{aligned}$$

($x \neq 0$).

仿上可得

$$f''(0) = \frac{11}{12}e;$$

$$\begin{aligned} f''(x) = & (1+x)^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right)^3 \right. \\ & + 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{3} - \frac{1}{1+x} + o(x) \right) \\ & \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} + o_1(x) \right) \\ & + \left[-\frac{6}{x^4} \ln(1+x) + \frac{2}{x^3(1+x)} \right. \\ & \left. + \frac{4}{x^3} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{(1+x)^3} \right] \left. \right\} \\ & (x \neq 0). \end{aligned}$$

同理可得

$$f'''(0) = -\frac{21}{8}e.$$

于是,展式的前三项为

$$e \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \dots \right),$$

收敛区间为 $(-1, 1)$.

2849. 把函数 $\sin(x+h)$ 和 $\cos(x+h)$ 按变数 h 的正整数幂展开.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sin(x+h) &= \sin x \cosh + \cos x \sinh \\ &= \sin x \cdot \left(1 - \frac{h^2}{2!} + \frac{h^4}{4!} - \dots \right) \\ &\quad + \cos x \cdot \left(h - \frac{h^3}{3!} + \frac{h^5}{5!} - \dots \right) \\ &= \sin x + h \cos x - \frac{h^2}{2!} \sin x - \frac{h^3}{3!} \cos x + \dots, \end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}\cos(x+h) &= \cos x - h \sin x - \frac{h^2}{2!} \cos x \\ &\quad + \frac{h^3}{3!} \sin x + \dots,\end{aligned}$$

它们的收敛区间为 $(-\infty, +\infty)$.

2850. 不进行实际的展开工作而求函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ 的幂级数展开式的收敛区间: (a) 依 x 的乘幂展开; (6) 依二项式 $x-5$ 的乘幂展开.

解 (a) 由于

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{x}{3}},\end{aligned}$$

及等式右端第一项的展开式的收敛区间为 $(-2, 2)$, 而第二项的展开式的收敛区间为 $(-3, 3)$, 故取其公共部分即得函数 $f(x)$ 展为关于 x 的乘幂的幂级数的收敛区间 $(-2, 2)$.

$$\begin{aligned}(6) \frac{x}{x^2 - 5x + 6} &= \frac{3}{(x-5)+2} - \frac{2}{(x-5)+3} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{2}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x-5}{3}}.\end{aligned}$$

上式右端第一项的展开式的收敛区间为 $|x-5| < 2$, 而第二项展开式的收敛区间为 $|x-5| < 3$, 取其公共部分, 即得函数 $f(x)$ 展为关于 $x-5$ 乘幂的幂级数的收敛区间为 $|x-5| < 2$ 或 $(3, 7)$.

利用 I - V 基本展开式, 写出下列函数关于 x 的幂级

数展开式:

2851. e^{-x^2} .

$$\begin{aligned}\text{解 } e^{-x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (|x| < +\infty)\end{aligned}$$

2852. $\cos^2 x$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n} \\ &\quad (|x| < +\infty).\end{aligned}$$

2853. $\sin^3 x$.

$$\begin{aligned}\text{解 } \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{3}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^{2n} - 1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &\quad (|x| < +\infty).\end{aligned}$$

2854. $\frac{x^{10}}{1-x}$.

$$\text{解 } \frac{x^{10}}{1-x} = x^{10} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=10}^{\infty} x^n \quad (|x| < 1).$$

$$2855. \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{1}{(1-x)^2} &= (1-x)^{-2} \\ &= 1 + (-2)(-x) + \frac{(-2)(-2-1)}{2!}(-x)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{(-2)(-2-1)\dots(-2-n+1)}{n!}(-x)^n + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

$$2856. \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{x}{\sqrt{1-2x}} &= x(1-2x)^{-\frac{1}{2}} \\ &= x \left[1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) \right. \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-2x)^2 \\ &\quad \left. + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-2x)^3 + \dots \right] \\ &= x + x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2!}x^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!}x^4 + \dots \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1} \quad \left(|x| < \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 上式右端为一交错级数

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

利用 2689 题的结果, 即知它是收敛的.

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{6^n} \right] x^n \quad (|x| < 1).$$

2860. $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

解 $\frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$= -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \quad (*)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) - \frac{1+(-1)^n}{2} \right] x^n$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[n + \frac{1-(-1)^n}{2} \right] x^n \quad (|x| < 1).$$

*) 利用 2855 题的结果.

2861. $\frac{1}{1-x-x^2}$

解 $\frac{1}{1-x-x^2} = \frac{1}{\frac{5}{4} - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2} + \left(x + \frac{1}{2}\right)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{2}{\sqrt{5}-1} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}-1}x\right)^{-1} + \frac{2}{\sqrt{5}+1} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}+1}x\right)^{-1} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{n+1} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}+1}\right)^{n+1} \right] x^n$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{5} + 1} \right)^{n+1} \Big) x^n \\
= & \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)^{n+1} \right. \\
& \left. + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^{n+1} \right] x^n \\
& (|x| < \frac{\sqrt{5} - 1}{2}).
\end{aligned}$$

2862. $\frac{1}{1+x+x^2}$

解 $\frac{1}{1+x+x^2}$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1}{x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{x + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}} \right] \\
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1+i\sqrt{3}}{2}x \right)^{-1} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}x \right)^{-1} \right] \\
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} x^n \right] \\
& = \frac{1}{i\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right. \\
& \quad \left. - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right] x^n.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
& (-1)^n \left\{ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^{n+1} \right\} \\
&= (-1)^n \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right. \\
&\quad \left. - \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{n+1} \right\} \\
&= (-1)^n \left\{ \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi + i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\cos \frac{n+1}{3} \pi - i \sin \frac{n+1}{3} \pi \right) \right\} \\
&= (-1)^n \cdot 2i \sin \frac{n+1}{3} \pi \\
&= 2i \cdot (-1)^n \sin \left[(n+1)\pi - \frac{2(n+1)}{3} \pi \right] \\
&= 2i \cdot (-1)^n \cdot \left[-\cos(n+1)\pi \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi \right] \\
&= 2i \cdot (-1)^n \cdot (-1) \cdot (-1)^{n+1} \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi \\
&= 2i \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi,
\end{aligned}$$

故得

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin \frac{2(n+1)}{3} \pi,$$

其中 $|x| < \min \left(\frac{2}{|1+i\sqrt{3}|}, \frac{2}{|1-i\sqrt{3}|} \right) = 1,$

即 $|x| < 1.$

2863. $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}.$

解 $\frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$
 $= -1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{x - (\cos \alpha + i \sin \alpha)} \right)$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{x - (\cos\alpha - i\sin\alpha)} \Big] \\
= & -1 + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right\} \\
= & -1 + \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n \right. \\
& \left. + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n \right] \\
= & \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} x^n (\cos n\alpha - i\sin n\alpha + \cos n\alpha + i\sin n\alpha) \\
= & \sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min\left(\frac{1}{|\cos\alpha + i\sin\alpha|}, \frac{1}{|\cos\alpha - i\sin\alpha|}\right) = 1$.

2864. $\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$ *

解 $\frac{x\sin\alpha}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$

$$\begin{aligned}
& = \frac{ix}{2} \left[\frac{1}{x - (\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{x - (\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right] \\
& = \frac{ix}{2} \left[-\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha + i\sin\alpha)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{1 - x(\cos\alpha - i\sin\alpha)} \right] \\
& = \frac{ix}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos\alpha + i\sin\alpha)^{n+1} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} x^n (\cos \alpha - i \sin \alpha)^{n+1} \\
& = \frac{ix}{2} \sum_{n=0}^{\infty} x^n [-\cos(n+1)\alpha - i \sin(n+1)\alpha \\
& \quad + \cos(n+1)\alpha - i \sin(n+1)\alpha] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \sin(n+1)\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < 1$.

*) 译本误为 $\frac{\sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}$.

2865. $\frac{x \operatorname{sh} \alpha}{1 - 2x \operatorname{ch} \alpha + x^2}$

解 $\frac{x \operatorname{sh} \alpha}{1 - 2x \operatorname{ch} \alpha + x^2}$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha}{x - (\operatorname{ch} \alpha + \operatorname{sh} \alpha)} - \frac{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha}{x - (\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha)} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[\frac{e^\alpha}{x - e^\alpha} - \frac{e^{-\alpha}}{x - e^{-\alpha}} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{1 - x e^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - x e^\alpha} \right] \\
& = \frac{1}{2} \left[-\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-n\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{n\alpha} \right] \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \operatorname{sh} n\alpha,
\end{aligned}$$

其中 $|x| < \min(e^{-\alpha}, e^\alpha) = e^{-|\alpha|}$.

2866. $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

解 $\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{3}{2}-n+1\right)}{n!} (-x^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n} (|x| < 1).
\end{aligned}$$

2867. $\ln(1+x+x^2+x^3)$.

解 $\ln(1+x+x^2+x^3)$

$$= \ln[(1+x)(1+x^2)] = \ln(1+x) + \ln(1+x^2)$$

但

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (-1 < x \leq 1),$$

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

故当 $-1 < x \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
&\ln(1+x+x^2+x^3) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} (1 + (-1)^n) \frac{x^n}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} + (-1)^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} (1 + (-1)^n)}{n} x^n.
\end{aligned}$$

2868. $e^{x \cos a} \cos(x \sin a)$.

解 首先注意到

$$e^{x \cos a + i x \sin a} = e^{x(\cos a + i \sin a)} = e^{x e^{ia}}$$

的实部就是 $e^{x \cos a} \cos(x \sin a)$. 为此, 先求 $e^{x e^{ia}}$,

$$\begin{aligned}
 e^{xe^{i\alpha}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (xe^{i\alpha})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{in\alpha} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (\cos n\alpha + i \sin n\alpha).
 \end{aligned}$$

比较上式两端的实部, 即得

$$\begin{aligned}
 e^{x \cos \alpha} \cos(x \sin \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n!} x^n \\
 & \quad (|x| < +\infty).
 \end{aligned}$$

比较虚部, 还可得到

$$\begin{aligned}
 e^{x \cos \alpha} \sin(x \sin \alpha) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n!} x^n \\
 & \quad (|x| < +\infty).
 \end{aligned}$$

首先展开导函数, 然后用逐项积分的方法以求下列函数的幂级数展开式.

2869. $f(x) = \operatorname{arctg} x$, 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ 的和.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \operatorname{arctg} x &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1},
 \end{aligned}$$

这里逐项积分的条件是满足的. 事实上, 当 $t \in [0, x]$ 且 $|x| < 1$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$ 是一致收敛的, 并且各项均连续. 以下各题类似, 不再一一说明. 上述级数的收敛区间为 $|x| < 1$, 当 $|x| = 1$ 时, 为交错级数, 且满足莱布尼兹判别法的条件, 故在端点 $x = \pm 1$ 处, 级数均收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

令 $x=1$, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

$$= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

2870. $f(x) = \arcsin x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \arcsin x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right) dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 利用 2604 题的结果, 由于 $\frac{p}{2} + q = \frac{1}{2} + 1 > 1$, 故级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

2871. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \ln(x + \sqrt{1+x^2}) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \int_0^x \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right) dt \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 级数为绝对收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$, 在其上展式成立.

2872. $f(x) = \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \ln(1 - 2x \cos \alpha + x^2) &= \int_0^x \frac{2t - 2 \cos \alpha}{1 - 2t \cos \alpha + t^2} dt \\ &= -2 \int_0^x \frac{1}{t} \cdot \frac{t \cos \alpha - t^2}{1 - 2t \cos \alpha + t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -2 \int_0^x \left(\frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} t^n \cos n\alpha \right) dt^* \\
 &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n} x^n.
 \end{aligned}$$

收敛区间为 $|x| < 1$. 当 $|x| = 1$ 时, 由 2698 题知, 对于 $0 < \alpha < \pi$, 级数收敛. 因此, 当 $0 < \alpha < \pi$ 时, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$. 但当 $\alpha = 0$ 且 $x = 1$ 时, 级数发散; 当 $\alpha = 0$ 且 $x = -1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = 1$ 时, 级数条件收敛; 当 $\alpha = \pi$ 且 $x = -1$ 时, 级数发散.

*) 利用 2863 题的结果.

2873. 利用各种方法, 求下列函数展为幂级数的展开式:

(a) $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$;

(б) $f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x$;

(в) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2-2x}{1+4x}$;

(г) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{2-x^2}$;

(д) $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}$;

(e) $f(x) = \arccos(1-2x^2)$;

(ж) $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$;

(з) $f(x) = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}$.

解 (a) $f(x) = (1+x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \quad (|x| < 1),$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \left[\left(1 + \frac{t^2}{2}\right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^4}{4}\right)^n \right] dt \\
&= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^n} \right] dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2^n(2n+1)} \quad (|x| < \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

当 $|x| = \sqrt{2}$ 时, 级数为

$$\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

及 $-\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1},$

它们均由两收敛级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+1} \text{ 及 } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{4n+3}$$

逐项相加并分别乘以常数 $\sqrt{2}$ 及 $-\sqrt{2}$ 而得, 故它们收敛. 因此, 原级数的收敛域为 $|x| \leq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
(\text{II}) f(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n-1} \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)} \\
&\quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n(2n-1)}$ 收敛. 因此, 级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

*) 利用 2869 题的结果.

(e) 由于

$$f'(x) = [\arccos(1-2x^2)]' = \frac{2\operatorname{sgn}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

及 $f(0) = 0$, 故

$$\begin{aligned} \arccos(1-2x^2) &= 2\operatorname{sgn}x \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= 2\operatorname{sgn}x \cdot \int_0^x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} t^{2n} \right] dt \\ &= 2\operatorname{sgn}x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \\ &= 2|x| \cdot \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] \end{aligned} \quad (|x| < 1). \quad (1)$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数为

$$2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1} \right].$$

对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 5n}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

即知它是收敛的. 因此, 级数(1)的收敛域为 $|x| \leq 1$.

$$(\kappa) f(x) = x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{**}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
& = 1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \\
& \qquad \qquad \qquad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

当 $|x|=1$ 时, 对于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{1}{2n+1}$$

应用拉阿伯判别法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10n^2 + 11n}{(2n+1)^2} = \frac{5}{2} > 1,$$

即知它是收敛的. 因此, 原级数的收敛域为 $|x| \leq 1$.

*) 利用 2870 题的结果.

$$\begin{aligned}
(3) f(x) & = x \cdot \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right. \\
& \quad \left. \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right]^{*}) - \left[1 + \frac{1}{2} x^2 \right. \\
& \quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} x^{2n+2} \right] \\
& = -1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \\
& \quad \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+1} \quad (|x| \leq 1).
\end{aligned}$$

*) 利用 2871 题的结果.

2874. 利用展开式

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \dots$$

的唯一性, 求下列函数的 n 阶导函数:

$$(a) f(x) = e^{x^2}; \quad (6)^+ f(x) = e^{\frac{x}{x}};$$

$$(B)^+ f(x) = \operatorname{arctg} x.$$

$$\begin{aligned} \text{解 (a)} \quad f(x+h) - f(x) &= e^{(x+h)^2} - e^{x^2} \\ &= e^{x^2} (e^{2xh+h^2} - 1) \\ &= e^{x^2} \left[(2xh+h^2) + \frac{1}{2!} (2xh+h^2)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n!} (2xh+h^2)^n + \dots \right], \end{aligned}$$

其中 h^n 的系数为

$$\begin{aligned} &e^{x^2} \left[\frac{1}{n!} (2x)^n + \frac{1}{(n-1)!} C_{n-1}^1 (2x)^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(n-2)!} C_{n-2}^2 (2x)^{n-4} + \dots \right] \\ &= \frac{e^{x^2}}{n!} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

将 $f(x+h) - f(x)$ 的展开式中 h^n 的系数 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ 与之比较, 即得

$$\begin{aligned} (e^{x^2})^{(n)} &= e^{x^2} \left[(2x)^n + \frac{n(n-1)}{1!} (2x)^{n-2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2x)^{n-4} + \dots \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad f(x+h) - f(x) &= e^{\frac{a}{x+h}} - e^{\frac{a}{x}} \\ &= e^{\frac{a}{x}} (e^{-\frac{ah}{x(x+h)}} - 1) = e^{\frac{a}{x}} (e^{\frac{-ah}{x^2}} - 1) \\ &= e^{\frac{a}{x}} \left[e^{-\frac{ah}{x^2} + \frac{ah^2}{x^3} - \frac{ah^3}{x^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} + \dots} - 1 \right] \\ &= e^{\frac{a}{x}} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{ah^{n+1}}{x^{n+2}} \right]^m \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \sum_{k_1=0}^{\infty} (-1)^{k_1+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+1} \\
&\quad \cdot \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_2+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_2+1} \dots \\
&\quad \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_m+1} \left(\frac{h}{x}\right)^{k_m+1} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m! x^m} \\
&\quad \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1+\dots+k_m=s} (-1)^{k_1+\dots+k_m+s} \\
&\quad \cdot \left(\frac{h}{x}\right)^{k_1+\dots+k_m+s} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \right. \\
&\quad \cdot \left. \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\dots+k_m=i} 1 \right) (-1)^i \left(\frac{h}{x}\right)^i \right] \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^m a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^m \right. \\
&\quad \cdot \left. \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+m-1}^i (-1)^i \left(\frac{h}{x}\right)^i \right]^* \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+i} a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^{m+i} C_{i+m-1}^i \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{s+m=n \\ s \geq 0, m \geq 1}} \frac{(-1)^s a^m}{m! x^m} \left(\frac{h}{x}\right)^n C_{s-1}^s \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n} \left(\frac{h}{x}\right)^n \sum_{\substack{s+m=n \\ i \geq 0, m \geq 1}} C_{s-1}^s x^{n-m} \frac{a^m}{m!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^{2n}} h^n \sum_{s=0}^{n-1} C_{n-1}^s \frac{x^s a^{n-s}}{(n-s)!} \\
&= e^{\frac{a}{x}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n h^n,
\end{aligned}$$

其中

$$A_n = \frac{(-1)^n}{x^{2n}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s.$$

于是,比较 h^n 的系数,即得

$$\begin{aligned}
(e^{\frac{a}{x}})^{(n)} &= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \sum_{s=0}^{n-1} s! C_n^s C_{n-1}^s a^{n-s} x^s \\
&= \frac{(-1)^n}{x^{2n}} e^{\frac{a}{x}} \left[a^n + \frac{n(n-1)}{1!} a^{n-1} x \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1) \cdot (n-1)(n-2)}{2!} a^{n-2} x^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{3!} a^{n-3} x^3 + \dots \right].
\end{aligned}$$

*) 其中 $\sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} 1 = C_{s+m-1}^m$ 推导如下:

令 $|t| < 1$, 一方面由 $\frac{1}{1-t} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$ 得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{1-t} \right)^m &= \sum_{k_1=0}^{\infty} t^{k_1} \sum_{k_2=0}^{\infty} t^{k_2} \dots \sum_{k_m=0}^{\infty} t^{k_m} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{k_1 + \dots + k_m = s} t^{k_1 + k_2 + \dots + k_m} \\
&= \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1 + \dots + k_m = s} 1 \right) t^s \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} P_j t^j,
\end{aligned}$$

其中 $P_s = \sum_{k_1 + \dots + k_n = s} 1$. 另一方面, 又由

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{1-t}\right)^m &= (1-t)^{-m} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-s+1)}{s!} \\ &\quad (-1)^s t^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{m(m+1)\cdots(m+s-1)}{s!} t^s \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} C_{m+s-1}^s t^s, \end{aligned}$$

由幂级数展开的唯一性, 即知 $P_s = C_{m+s-1}^s$.

(B) 根据

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy},$$

令 $y = \frac{h}{1+x^2}$, 就有 $\frac{x+y}{1-xy} = x+h$. 于是

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}(x+h) - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[\frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x^2}h} \right]. \end{aligned}$$

由 2869 题的结果知, 当 $|y| \leq 1$ 时, 有

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{2m+1}.$$

而当 h 很小 (且 $|x| \leq 1$) 时, 有

$$y = \frac{h}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x^2}h}$$

$$= \frac{h}{1+x^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2}h \right)^k.$$

于是

$$f(x+h) - f(x)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right.$$

$$\cdot \left. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{x}{1+x^2}h \right)^k \right)^m$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m$$

$$\cdot \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$\cdot \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^{k_1+k_2+\cdots+k_m}$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^m$$

$$\cdot \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1+\cdots+k_m=s} 1 \right) (-1)^s \left(\frac{xh}{1+x^2} \right)^s$$

$$= 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^{m+s} \frac{1}{2m+1} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{m+s} x^s$$

$$\cdot (-1)^s C_{m+s-1}^s$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} (-1)^{m+s} \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^{m+s}$$

$$\cdot \frac{x^s}{2m+1} C_{m+s-1}^s$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{h}{1+x^2} \right)^n A_n,$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{\substack{m+s=n \\ m \geq 1, s \geq 0}} \frac{x^s}{2m+1} C_{n-1}^s \\ &= \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s \quad (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因此, 比较 h^n 的系数, 即得

$$\begin{aligned} (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^{(n)} &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} A_n \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \sum_{s=0}^{n-1} \frac{x^s}{2(n-s)+1} C_{n-1}^s \\ &= (-1)^n \frac{n!}{(1+x^2)^n} \left[\frac{1}{3} x^{n-1} + \frac{1}{5} (n-1) x^{n-2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

2875. 把函数

$$f(x) = \ln \frac{1}{2+2x+x^2}$$

依二项式 $x+1$ 的正整数乘幂展开.

解 $f(x) = -\ln[1+(x+1)^2]$

$$\begin{aligned} &= -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} (x+1)^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{2n}}{n}, \end{aligned}$$

收敛域为 $|x+1| \leq 1$ 或 $-2 \leq x \leq 0$.

2876. 把函数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

按变数 x 的负乘幂展开成幂级数.

$$\begin{aligned} & \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(-\frac{x}{1+x} \right)^n \right) \\ & = \frac{x}{1+x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n+1}, \end{aligned}$$

当 $\left| \frac{x}{1+x} \right| < 1$ 即当 $x > -\frac{1}{2}$ 时, 级数收敛. 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, 由 2689 题的结果知, 它条件收敛. 因此, 级数的收敛域为 $x \geq -\frac{1}{2}$.

2879. 设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

直接证明

$$f(x)f(y) = f(x+y).$$

$$\begin{aligned} \text{证 } f(x)f(y) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{x^{n_1}}{(n_1)!} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{y^{n_2}}{(n_2)!} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n_1+n_2=n} \frac{1}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!}{(n_1)!(n_2)!} x^{n_1} y^{n_2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{n_1=0}^n C_n^{n_1} x^{n_1} y^{n-n_1} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y). \end{aligned}$$

上述级数在 $|x| < +\infty$ 及 $|y| < +\infty$ 上绝对收敛, 故

重新组合是允许的.

事实上, $f(x) = e^x$, 等式

$$f(x)f(y) = f(x+y)$$

即为指数函数的特征.

2880. 假如我们定义

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

及

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

证明: (a) $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$;

$$(6) \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

证 由于 $\sin x$ 及 $\cos x$ 的幂级数展开式在 $|x| < +\infty$ 内绝对收敛, 故级数相乘或相加、减均仍绝对收敛, 且可重新组合. 因此, 以下的级数运算都是合理的.

(a) $\sin x \cos x$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} \frac{x^{2n_1+1}}{(2n_1+1)!} \\ &\quad \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{2n_2}}{(2n_2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} (-1)^{n_1+n_2} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2n_1+2n_2+1}}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n x^{2n+1}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\ &= \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2)=2n+1 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2)!} \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{\substack{k_1+k_2=2n+1 \\ k_1 \text{ 一奇数} \\ k_2 \text{ 一偶数}}} \frac{(2n+1)!}{(k_1)!(k_2)!} \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k_1 \text{ 奇}, k_2 \text{ 偶}} + \sum_{k_1 \text{ 偶}, k_2 \text{ 奇}} \right) \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} 2^{2n+1}. \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} \sin x \cos x &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x. \end{aligned}$$

(6) $\sin^2 x + \cos^2 x$

$$= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{2(n_1+n_2)+2}}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2} \frac{x^{2(k_1+k_2)}}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{2n+2} \right. \\
& \quad \cdot \left. \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \right] \\
& \quad + \sum_{m=0}^{\infty} \left[(-1)^m x^{2m} \right. \\
& \quad \cdot \left. \sum_{\substack{k_1+k_2=m \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \right] \\
& = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} + \sum_{n=0}^{\infty} \\
& = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n+2} A_n,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
A_n & = \sum_{\substack{k_1+k_2=n+1 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{1}{(2k_1)!(2k_2)!} \\
& \quad - \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \\
& = \frac{1}{(2n+2)!} \\
& \quad \cdot \left(\sum_{\substack{2k_1+2k_2=2n+2 \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0}} \frac{(2n+2)!}{(2k_1)!(2k_2)!} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{\substack{(2n_1+1)+(2n_2+1)=2n+2 \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{(2n+2)!}{(2n_1+1)!(2n_2+1)!} \right\} \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{k'=0,2,\dots,2n+2} C_{2n+2}^{k'} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{k'=1,3,\dots,2n+1} C_{2n+2}^{k'} \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \left[\sum_{s=0,2,\dots,2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1,3,\dots,2n+1} (-1)^s C_{2n+2}^s \right] \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} \sum_{s=0}^{2n+2} (-1)^s C_{2n+2}^s \\
&= \frac{1}{(2n+2)!} [1 + (-1)]^{2n+2} \\
&= 0 \quad (n=0,1,2,\dots).
\end{aligned}$$

因而得

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (|x| < +\infty).$$

2881. 写出函数 $f(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n+1} \right) \right]^{-1}$ 展为幂级数的展开式中之若干项.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad f(x) &= \left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^{-1} \\
&= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right) \\
&\quad + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots \right)^2 \\
&\quad - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots \right)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{24} - \dots \quad (|x| < 1).
\end{aligned}$$

对于幂级数进行相应的运算以求下列函数展成幂级数

的展开式:

$$2882. f(x) = (1+x)e^{-x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } f(x) &= (1+x) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \right] x^n \\ &= 1 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n-1}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).\end{aligned}$$

$$2883. f(x) = (1-x)^2 \operatorname{ch} \sqrt{x}.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } \text{当 } x \geq 0 \text{ 时, } \operatorname{ch} \sqrt{x} &= \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} + \frac{(-1)^n}{n!} \right] x^{\frac{n}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!};\end{aligned}$$

当 $x < 0$ 时, 易知 $\operatorname{ch} \sqrt{x} = \cos \sqrt{|x|}$,

从而

$$\operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{|x|})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}.$$

$$\text{故 } \operatorname{ch} \sqrt{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \quad (|x| < +\infty).$$

从而

$$\begin{aligned}f(x) &= (1-2x+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!} \\ &= 1 - \frac{3}{2}x + \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n-2)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2n-4)!} \right] x^n \quad (|x| < +\infty).\end{aligned}$$

2884. $f(x) = \ln^2(1-x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } f(x) &= \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots\right)^2 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 \cdot n} + \frac{1}{2(n-1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3(n-2)} + \dots + \frac{1}{n \cdot 1}\right) x^{n+1} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n-1}\right) \frac{1}{n+1} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{1}\right) \frac{1}{n+1}\right] x^{n+1} \\
 &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
 &\qquad\qquad\qquad (|x| < 1).
 \end{aligned}$$

当 $x = -1$ 时, 级数为

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}.$$

由于

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} \\
 &> \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \frac{1}{n+2} \\
 &\qquad\qquad\qquad (n = 2, 3, \dots),
 \end{aligned}$$

并且有

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{C + \ln n + \epsilon_n^*}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),
 \end{aligned}$$

故它是收敛的.

当 $x = 1$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n+1}$ 发散且原级数为正项级数,

故 $2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n+1}$ 也发散.

因此, 级数

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

的收敛域为 $-1 \leq x < 1$.

*) 利用 146 题的结果.

2885. $f(x) = (1+x^2)\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x) &= (1+x^2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad *) \\ &= x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) x^{2n+1} \\ &= x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

($|x| \leq 1$).

*) 利用 2869 题的结果.

2886. $f(x) = e^x \cos x$.

解 $e^x \cos x$ 为 $e^x(\cos x + i \sin x)$ 的实部. 由于

$$\begin{aligned} e^x(\cos x + i \sin x) &= e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [(1+i)x]^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} (1+i)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

比较上式两端的实部,即得

$$e^x \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

2887. $f(x) = e^x \sin x.$

解 利用 2886 题的等式,并比较此等式两端的虚部,即得

$$e^x \sin x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n \quad (|x| < +\infty).$$

2888. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (-1)^{n_1} x^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_2} \frac{x^{n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2} \frac{x^{n_1+n_2+1}}{n_2+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n x^{n+1} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} \frac{1}{n_2+1} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) x^n \right] \\ &\quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时,通项的绝对值 ≥ 1 ,显然发散.因此,级数的收敛域为 $|x| < 1$.

2889. $f(x) = (\operatorname{arc} \operatorname{tg} x)^2.$

解
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \right)^{2*}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1) \cdot 1} + \frac{1}{(2n-3) \cdot 3} \right] \end{aligned}$$

$$(1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^n = 2$$

或
$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n x^n = 2,$$

也即

$$2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n] x^n = 2$$

($-1 < x < 1$).

比较上式 x 的同次幂的系数, 得

$$a_2 = 1, a_3 = 0,$$

$$a_{n+2} = \frac{n^2}{(n+2)(n+1)} a_n \quad (n \geq 2).$$

从而可得

$$a_{2k+1} = 0,$$

$$a_{2k+2} = \frac{2[(2k)!!]^2}{(2k+2)!} = \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!}$$

($k = 0, 1, 2, \dots$).

于是

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad (-1 < x < 1).$$

从而得

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k+1}(k!)^2}{(2k+2)!} x^{2k} \quad (-1 < x < 1).$$

显然右端的幂级数当 $x = \pm 1$ 时均收敛, 而左端的函数当 $x = \pm 1$ 时连续, 故由幂级数的亚伯耳定理知, 上述展式当 $x = 1$ 及 $x = -1$ 时也成立.

写出下列函数按变数 x 的正乘幂展开成幂级数的展开式(异于零)的前三项:

2891. $f(x) = \operatorname{tg} x$.

解 方法一:

直接应用台劳公式, 先求导数, 有

$$f(x) = \operatorname{tg} x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = \sec x, \quad f'(0) = 1;$$

$$f''(x) = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x, \quad f''(0) = 0;$$

$$f'''(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \operatorname{tg}^2 x, \quad f'''(0) = 2;$$

$$f^{(4)}(x) = 8\sec^4 x \operatorname{tg} x + 8\sec^2 x \operatorname{tg}^3 x \\ + 8\sec^4 x \operatorname{tg} x,$$

$$f^{(4)}(0) = 0;$$

$$f^{(5)}(x) = 32\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 8\sec^6 x \\ + 16\sec^2 x \operatorname{tg}^4 x + 24\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x \\ + 32\sec^4 x \operatorname{tg}^2 x + 8\sec^6 x,$$

$$f^{(5)}(0) = 16;$$

.....

于是,

$$f(x) = x + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \dots \\ = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}).$$

方法二:

当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时, 记 $\xi = 1 - \cos x$, 则 $|\xi| < 1$, 有

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sin x \cdot \frac{1}{1 - \xi} \\ = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=0}^{\infty} \xi^m$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \\
&\quad \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right]^m \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \\
&\quad \frac{x^{2l-1}}{(2l-1)!} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+\cdots+k_m+n} \\
&\quad \cdot \frac{x^{2(k_1+\cdots+k_m)}}{(2k_1)! \cdots (2k_m)!} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
&\quad + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{s+l+n-1} \\
&\quad \cdot \frac{x^{2s+2l-1}}{(2l-1)! (2k_1)! \cdots (2k_m)!} \\
&= x + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \\
&\quad (-1)^{n-1} x^{2n-1} \cdot \sum_{\substack{l+s=n-1 \\ l \geq 1}} \sum_{\substack{1 \leq m \leq s \\ k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \sum \\
&\quad (-1)^m \frac{1}{(2l-1)! (2k_1)! \cdots (2k_m)!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{2n-1},
\end{aligned}$$

其中 $A_1 = 1$, 而当 $n \geq 2$ 时, 有

$$A_n = (-1)^{n-1} \left[\frac{1}{(2n-1)!} \right]$$

$$+ \sum_{\substack{l+s=m \\ l \geq 1}} \sum_{\substack{1 \leq m \leq s \\ k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \sum_{\substack{(-1)^m \\ (2l-1)!(2k_1)!\dots(2k_m)!}} \Big\}.$$

例如, 当 $n=2$ ($l=1, s=1, m=1, k_1=1$) 时,

得 $A_2 = \frac{1}{3}$; 当 $n=3$ ($l=2, s=1, m=1, k_1=1$;

$l=1, s=2, m=1, k_1=2$; $l=1, s=2, m=2,$

$k_1=1, k_2=1$) 时, 得 $A_3 = \frac{1}{5!} + (-1) \frac{1}{3! 2!}$

$+ (-1) \frac{1}{4!} + \frac{1}{2! 2!} = \frac{2}{15}$, 等等. 于是有

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \dots \quad (|x| < \frac{\pi}{2}).$$

2892. $f(x) = \operatorname{th} x$.

解 运用幂级数展开式的唯一性定理, 为求展开式可以考虑在 $x=0$ 点附近作幂级数展开. 注意当 $|x|$ 很小, 且幂级数中常数项为零时, 其收敛的和是很小的. 于是, 以下的写法是可以的, 取其前三项, 有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots}{1 + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)} \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \\ &\quad \cdot \left[1 - \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right)^2 - \dots \right] \\ &= \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{24} + \dots \right) \\ & = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \dots \left(|x| < \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

如果详细一些,可进一步叙述如下:

首先,可有一特殊的幂级数

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots.$$

如若 $|x| < \rho$ 且 $\frac{\rho}{1 - \frac{\rho}{3}} = 1$, 例如取 $\rho = \frac{6}{5} = 1.2$ 时,

有 $\frac{\rho}{2!} + \frac{\rho^2}{3!} + \dots \leq 1$, 此时得

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + A_2x^2 + A_3x^3 + A_4x^4 + \dots \quad (|x| < 1.2).$$

易见 $A_3 = 0, A_5 = 0, A_7 = 0, \dots$. 于是,上式

可改写为

$$\begin{aligned} \frac{x}{e^x - 1} &= 1 - \frac{x}{2} + B_1 \cdot \frac{x^2}{2!} - B_2 \cdot \frac{x^4}{4!} \\ &\quad + B_3 \cdot \frac{x^6}{6!} - \dots, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 B_1, B_2, B_3, \dots 为伯努里 (Bernoulli) 常数 *),

有

$$B_1 = \frac{1}{6}, B_2 = \frac{1}{30}, B_3 = \frac{1}{42},$$

$$B_4 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{5}{66}, \dots.$$

由

$$x \operatorname{cth} \frac{x}{2} = x \cdot \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{2x}{e^x - 1} + x$$

及(1)式,即得

$$\frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = 1 + B_1 \frac{x^2}{2!} - B_2 \frac{x^4}{4!} + B_3 \frac{x^6}{6!} - \dots$$

于是

$$\begin{aligned} x \operatorname{cth} x &= 1 + B_1 \frac{2^2 x^2}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^4}{4!} \\ &\quad + B_3 \frac{2^6 x^6}{6!} - \dots \end{aligned}$$

若 $x \neq 0$, 则

$$\begin{aligned} \operatorname{cth} x &= \frac{1}{x} + B_1 \frac{2^2 x}{2!} - B_2 \frac{2^4 x^3}{4!} \\ &\quad + B_3 \frac{2^6 x^5}{6!} - \dots \end{aligned} \quad (2)$$

注意到

$$\operatorname{th} x = 2 \operatorname{cth} 2x - \operatorname{cth} x$$

及当 $x=0$ 时, $\operatorname{th} x=0$, 由(2)式即有

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x &= \frac{B_1}{2!} (2^4 - 2^2) x - \frac{B_2}{4!} (2^8 - 2^4) x^3 \\ &\quad + \frac{B_3}{6!} (2^{12} - 2^6) x^5 - \dots \\ &= x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 - \frac{17}{315} x^7 + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

还可指出的是, 它的系数与 $\operatorname{tg} x$ 展开式相应项的系数的绝对值是相同的, 两者相应各系数只是符号上有交错变异而已(可参看本题解末加注的 Bromwich 所著一书的相应章节), 而 $\operatorname{tg} x$ 的幂级数展开式当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛,

故上述的级数(3)当 $|x| < \frac{\pi}{2}$ 时收敛.

*)参看 Bromwich 著 An introduction to the theory of infinite series 一书第十一章 100 款.

$$2893. f(x) = \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}.$$

解 与 2892 题的想法一样, 可以考虑 $x \neq 0$ 且 $|x|$ 很小的情形. 于是有

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \cdot \left(1 + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{x^2}{3!} - \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} - \dots \right)^2 + \dots \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left\{ \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \right. \\ &\quad \cdot \left(1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7}{360}x^4 \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{31}{15120}x^6 + \dots \right) - 1 \right\} \\ &= \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{45}x^4 - \frac{2}{945}x^6 - \dots \right) \\ &= -\frac{1}{3}x - \frac{1}{45}x^3 - \frac{2}{945}x^5 - \dots \end{aligned}$$

$$(0 < |x| < \pi).$$

一般说来, 为求通项可作如下进一步的讨论:

考虑当 $x \neq 0$ 时, $g(x) = xf(x) = x \operatorname{ctg} x - 1$, 而当 $|x| < \pi$ 时, 有

$$g(x) = x \operatorname{ctg} x - 1 = \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}} - 1 = \frac{\cos x}{1 - \xi} - 1,$$

其中

$$\xi = 1 - \frac{\sin x}{x},$$

注意到 $|\sin x| < |x|$, 故 $|\xi| < 1$. 因而

$$\begin{aligned} g(x) &= \cos x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n - 1 \\ &= \left[1 + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \right] \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m \right) - 1 \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \\ &\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m. \end{aligned}$$

由于

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!},$$

故有

$$\begin{aligned} \xi^m &= \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \cdots \sum_{k_m=1}^{\infty} (-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_m+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2(k_1+k_2+\cdots+k_m)}}{(2k_1+1)!(2k_2+1)! \cdots (2k_m+1)!} \\ &= \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{k_1+\cdots+k_m=s} (-1)^{s+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)! \cdots (2k_m+1)!}. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \xi^m &= \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_m=s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m} \\ &\quad \cdot \frac{x^{2s}}{(2k_1+1)! \cdots (2k_m+1)!} \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s},$$

其中

$$A_s = \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2k_1 + 1)! \cdots (2k_m + 1)!} \\ (s = 1, 2, \dots).$$

又有

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \xi^m \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=m}^{\infty} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} (-1)^{s+m+l} \\ & \quad \cdot \frac{x^{2s+2l}}{(2l)! (2k_1 + 1)! \cdots (2k_m + 1)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n}, \end{aligned}$$

其中

$$B_n = \sum_{\substack{s+l=n \\ s \geq 1, l \geq 1}} \sum_{1 \leq m \leq s} \sum_{\substack{k_1 + \dots + k_m = s \\ k_1 \geq 1, \dots, k_m \geq 1}} \frac{(-1)^m}{(2l)! (2k_1 + 1)! \cdots (2k_m + 1)!} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

于是,

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s A_s x^{2s} + \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \frac{x^{2l}}{(2l)!} \\ & \quad + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n B_n x^{2n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{2n}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \cos x \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{E_s}{(2s)!} x^{2s} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s+k=n} (-1)^k x^{2(k+s)} \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{s+k=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \right] x^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{2n}.
\end{aligned}$$

根据幂级数展开式的唯一性, 就有 $A_0 = E_0 = 1$, 而 $A_n = 0 (n = 1, 2, \dots)$ 其中

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k+s=n} (-1)^k \frac{E_s}{(2k)!(2s)!} \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!},
\end{aligned}$$

故得递推关系

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{E_{n-k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0 (n = 1, 2, \dots)$$

例如已知 E_0 , 由上式令 $n=1$, 即得 $E_1 - E_0 = 0$, 从而 $E_1 = E_0 = 1$. 由 E_0, E_1 , 令 $n=2$, 又可推出 E_2, \dots , 等等. 一般说来, 由 $E_0, E_1, E_2, \dots, E_{n-1}$, 从上式可推出 E_n .

2895. 将函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} \quad (|x| < 1)$$

展开成幂级数.

解 只要 $x^2 + 2|tx| < 1$, 函数 $f(x)$ 就有展开的可能性. 记 x^n 的系数为 $P_n(t)$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+x^2}} = 1 + P_1(t)x + P_2(t)x^2 + \dots + P_n(t)x^n + \dots \quad (1)$$

下面我们只要确定 $P_n(t)$ 即可。为此,对(1)式两端同时对 x 求导数,得

$$\frac{t-x}{(1-2tx+x^2)^{\frac{3}{2}}} = P_1(t) + 2P_2(t)x + \dots + nP_n(t)x^{n-1} + \dots$$

把上式与(1)式比较,易得

$$(1-2tx+x^2)(P_1+2P_2x+\dots+nP_nx^{n-1}) = (t-x)(1+P_1x+P_2x^2+\dots+P_nx^n).$$

比较上式两端 x 的同次幂的系数,得

$$P_1(t) = t,$$

$$2P_2(t) - 2tP_1(t) = tP_1(t) - 1,$$

.....

$$(n+1)P_{n+1}(t) - 2ntP_n(t) + (n-1)P_{n-1}(t) = tP_n(t) - P_{n-1}(t).$$

由此得

$$P_1(t) = t,$$

$$P_2(t) = \frac{3t^2-1}{2},$$

.....

$$P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1}tP_n(t) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(t). \quad (2)$$

例如,取 $n=2$,则由 $P_1(t)$ 及 $P_2(t)$ 可推得

$$\begin{aligned} P_3(t) &= \frac{5}{3}t \cdot \frac{3t^2-1}{2} - \frac{2}{3}t \\ &= \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 2}t^3 - \frac{3}{2}t \end{aligned}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3!} \left[t^3 - \frac{3 \cdot 2}{2(2 \cdot 3 - 1)} t \right].$$

一般说来,由(2)式用数学归纳法可递推得

$$P_n(t) = \frac{(2n-1)!!}{n!} \left\{ t^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} t^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} t^{n-4} - \dots \right\}$$

($n \geq 1$, 勒襄德多项式).

2896. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. 写出函数 $F(x) = \frac{f(x)}{1-x}$ 的展开式.

解
$$F(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1} x^{n_1} \cdot \sum_{n_2=0}^{\infty} x^{n_2}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geq 0, n_2 \geq 0}} a_{n_1} \right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) x^n \quad (|x| < 1).$$

2897. 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有收敛半径 R_1 , 而级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有收敛半径 R_2 , 则级数

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$

的收敛半径 R 是怎样的?

解 (a) 记 $A_n = a_n + b_n$, 则有

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|A_n|} &= \sqrt[n]{|a_n + b_n|} \leq \sqrt[n]{|a_n| + |b_n|} \\ &\leq \sqrt[n]{2 \max(|a_n|, |b_n|)} \\ &= \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{\max(|a_n|, |b_n|)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}).$$

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 1$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[n]{2} \cdot \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \right\} \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \max(\sqrt[n]{|a_n|}, \sqrt[n]{|b_n|}) \} \\ &= \max \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \right\} \\ &= \max \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right), \end{aligned}$$

从而得

$$R \geq \frac{1}{\max \left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2} \right)} = \min(R_1, R_2).$$

(6) 记 $B_n = a_n b_n$, 则有

$$\sqrt[n]{|B_n|} = \sqrt[n]{|a_n b_n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|}.$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|B_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \cdot \sqrt[n]{|b_n|} \} \\ &\leq \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right\} \cdot \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} \right\} \\ &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1 R_2}, \end{aligned}$$

故得

$$R \geq R_1 R_2.$$

$$l = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{ 和 } L = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

证明幂级数的收敛半径 R 满足下述不等式

$$l \leq R \leq L.$$

证 记 $l_1 = \frac{1}{l}$, $L_1 = \frac{1}{L}$. 注意 $l \geq 0, L \geq 0$. 若 $l = 0$, 则记 $l_1 = +\infty$; 若 $l = +\infty$, 则记 $l_1 = 0$. 对 L 与 L_1 也作同样规定. 易见 $L_1 \leq l_1$. 任给 $\epsilon > 0$, 总可选 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使

$$\frac{1}{1+\delta_1} = 1 - \frac{\epsilon}{2}, \frac{1}{1-\delta_2} = 1 + \frac{\epsilon}{2}.$$

注意对 δ_1, δ_2 而言, 存在自然数 m , 使当 $n > m$ 时, 有

$$l \cdot (1 - \delta_2) < \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| < L \cdot (1 + \delta_1)$$

或

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{1}{1+\delta_1} < \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{1-\delta_2},$$

即当 $n > m$ 时, 有

$$L_1 \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < l_1 \cdot \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right).$$

易见当 $n > m$ 时, 有

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_m|} &= \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|} \cdot \frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|} \cdots \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} \\ &< \left(l_1 \cdot \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) \right)^{n-m} \end{aligned}$$

或

$$\frac{|a_n|^{1/n}}{l_1} < \left(\frac{|a_m|}{l_1^n} \right)^{1/n} \cdot \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (1)$$

同理可得

$$\frac{|a_n|^{1/n}}{L_1} > \left(\frac{|a_m|}{L_1^n} \right)^{1/n} \cdot \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right). \quad (2)$$

注意到若 $A > 0$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A} = 1$, 故存在充分大的 $n_0 (> m)$, 使当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(\frac{|a_n|}{l_1^n}\right)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 + \frac{\epsilon}{2}}$$

及

$$\left(\frac{|a_n|}{L_1^n}\right)^{\frac{1}{n}} > 1 - \frac{\frac{\epsilon}{2}}{1 - \frac{\epsilon}{2}}. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式及(2)式, 即得

$$\frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{l_1} < 1 + \epsilon \quad \text{及} \quad \frac{|a_n|^{\frac{1}{n}}}{L_1} > 1 - \epsilon.$$

于是有

$$L_1 \cdot (1 - \epsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \leq l_1 \cdot (1 + \epsilon).$$

从而得

$$\frac{1}{l_1(1 + \epsilon)} \leq R \leq \frac{1}{L_1(1 - \epsilon)} \quad *).$$

即

$$\frac{l}{1 + \epsilon} \leq R \leq \frac{L}{1 - \epsilon}.$$

由 $\epsilon > 0$ 的任意性, 即知

$$l \leq R \leq L.$$

*) 若 $L_1 = +\infty$, 即 $L = 0$, 此时显然有 $R = 0$ (级数除 $x_0 = 0$ 点收敛以外, 对任一点 $x \neq x_0$ 均发散), 故可设 $L_1 < +\infty$.

2899. 证明: 若函数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 且

$$|n!a_n| < M(n = 1, 2, \dots),$$

其中 M 是常数, 则: 1) $f(x)$ 在任一点 a 可微分无限多次; 2) 下述展开式成立

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (|x| < +\infty).$$

证 1) 由于 $|n!a_n| < M$, 故有

$$|a_n| < \frac{M}{n!} (n = 1, 2, \dots).$$

设 $(-N, N)$ 是包含 x_0 的任一有限区间. 由于

$$|a_n(x-x_0)^n| < \frac{M}{n!} (2N)^n$$

及级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{n!} (2N)^n$ 收敛, 故由外耳什特拉斯判别法知, 级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在包含 x_0 的任意有限区间上一致收敛, 即其收敛半径 $R = +\infty$. 于是, 此级数在任一点 $a \in (-\infty, +\infty)$ 可逐项微分任意多次.

$$2) \text{ 由 1) 段已证可知级数 } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$$

在任何点可逐项微分任意多次, 故

$$\begin{aligned} f^{(m)}(x) &= \sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-m+1)a_n(x-x_0)^{n-m} \\ &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n(x-x_0)^{n-m} \\ &\quad (m = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

今设 $|x-a| < R$ (R 为任意固定的正数), 于是

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\leq |x - a| + |a - x_0| \\ &< R + |a - x_0| = L, \end{aligned}$$

故由假定知

$$\begin{aligned} |f^{(m)}(x)| &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} |a_n| \cdot L^{n-m} \\ &\leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{M}{n!} L^{n-m} \\ &= M \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} = MP \quad (m = 1, 2, \dots), \end{aligned}$$

其中 $P = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{L^s}{s!} < +\infty$.

考虑余项

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

的拉格朗日形式

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)]}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

于是, 当 $|x-a| < R$ 时, 有

$$|R_n(x)| \leq \frac{MP}{(n+1)!} R^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!}$ 收敛, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

由此可知, 当 $|x-a| < R$ 时, 展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

成立. 再由 $R > 0$ 的任意性即知, 此展式对一切 $x (|x| < +\infty)$ 皆成立. 证毕.

2900. 证明: 若 1) $a_n \geq 0$ 及 2) 存在有

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S,$$

则
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

证 首先, 如果级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

收敛, 则根据亚伯耳定理可知, 函数

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

在点 $x = R$ 处左连续. 因此,

$$\lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(R) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = S.$$

其次, 我们证明级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

发散是不可能的. 采用反证法, 引出矛盾. 事实上, 根据

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n = +\infty$ 知, 对于任取的正整数 $A > S$, 总存在正整数 N , 使有

$$\sum_{n=0}^N a_n R^n > A > S.$$

由于

$$= x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{4n+1}}{4n+1} (|x| \leq 1).$$

2903. $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$

解 $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt.$

$$= \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} \right] dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} (|x| < +\infty).$$

2904. $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$

解 $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1} \right] dx$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2} (|x| \leq 1).$$

2905. $\int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)}$ (写出四项).

解 令 $0 < |t| < 1$, 注意

$$\frac{1}{t} \ln(1+t) = \frac{1}{t} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{m+1}$$

$$= 1 - \xi,$$

其中 $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{m+1}$. 容易判断交错级数

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{m+1}$$

当 $|t| < 1$ 时是收敛的, 且其和有性质 $|\xi| < 1$. 于是有

$$\frac{1}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} = \frac{1}{1-\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \xi^n.$$

因而当 $|x| < 1$ 时, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} &= \int_0^x \frac{dt}{\frac{1}{t} \ln(1+t)} \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1-\xi} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n \right) dt. \end{aligned}$$

为求四项近似, 取到 t^3 为止足够, 有

$$\begin{aligned} \xi^0 &= 1, \\ \xi^1 &= \frac{t}{2} - \frac{t^2}{3} + \frac{t^3}{4} - \dots, \\ \xi^2 &= \frac{t^2}{4} - \frac{t^3}{3} + \dots, \\ \xi^3 &= \frac{t^3}{8} - \dots, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

于是,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi^n = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} - \dots.$$

从而当 $|x| < 1$ 时, 得原积分的前四项为

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{t dt}{\ln(1+t)} &= \int_0^x \left(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{24} \right) dt + O(x^5) \\ &= x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{36} + \frac{x^4}{96} + O(x^5). \end{aligned}$$

运用逐项微分法计算下列级数的和:

2906. $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots.$

解 设 $F(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots$. 在收敛域 $|x| < 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots = \frac{1}{1-x^2}.$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (|x| < 1).$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

2907. $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$.

解 设 $F(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots$. 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc } \text{tg} x.$$

于是, 当 $|x| \leq 1$ 时, 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \text{arc } \text{tg} x.$$

2908. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$.

解 设 $F(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$. 在收敛域 $|x| < +\infty$ 内逐项微分之, 得

$$F'(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots.$$

于是有

$$F(x) - F'(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^{-x}, \quad (1)$$

$$F(x) + F'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = e^x. \quad (2)$$

将(1)式和(2)式相加,最后得

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

($|x| < +\infty$).

2909. $\frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots$.

解 设 $F(x) = \frac{x}{1 \cdot 2} + \frac{x^2}{2 \cdot 3} + \frac{x^3}{3 \cdot 4} + \cdots$. 在收敛域 $|x| \leq 1$ 内逐项微分之,得

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \cdots \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots \right) \\ &= -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} [-\ln(1-x)] \end{aligned}$$

($0 < |x| < 1$).

注意 $F(0) = 0$, 即得

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x F'(t) dt \\ &= 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x) \quad (0 < |x| < 1). \end{aligned}$$

当 $x=0$ 时,级数收敛于零,当 $x=1$ 时,级数收敛于 1.

当 $x=-1$ 时,级数收敛于 $1-2\ln 2$. 事实上,

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots \\ &= -\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots \right) + 1$$

$$= 1 - 2\ln 2.$$

于是,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), & \text{当 } 0 < |x| < 1; \\ 0, & \text{当 } x = 0; \\ 1 - 2\ln 2, & \text{当 } x = -1; \\ 1, & \text{当 } x = 1. \end{cases}$$

2910. $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

解 设 $F(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$

在收敛域内逐项微分之,得

$$F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}2x + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}3x^2 + \dots$$

以 $1-x$ 乘上式两端,得

$$(1-x)F'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

$$= \frac{1}{2}F(x),$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{2(1-x)}.$$

积分得

$$\ln F(x) = \ln \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

或

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + 1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $x = 1$ 时, 应用拉阿伯判别法:

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2} < 1,$$

因此, 级数是发散的.

当 $x = -1$ 时, 利用 2689 题的结果知, 级数条件收敛. 于是,

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad (-1 \leq x < 1).$$

运用逐项积分法计算下列级数的和:

2911. $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$.

解 设 $F(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots \\ &= (x^2 + x^3 + x^4 + \dots) - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \dots\right) \\ &= x(1 + x + x^2 + \dots) - \left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) \\ &= \frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \left(\frac{x}{1-x} + \ln(1-x) \right)'$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

当 $|x| = 1$ 时, 由于级数的通项不趋于零, 故它是发散的.

2912. $x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$.

解 设 $F(x) = x - 4x^2 + 9x^3 - 16x^4 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{9}{4}x^4 - \frac{16}{5}x^5 + \dots \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \left(1 + \frac{1}{3}\right)x^3 + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x^4 \\ &\quad - \left(3 + \frac{1}{5}\right)x^5 + \dots \\ &= x + \left(-x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \dots\right) \\ &\quad - x^3(1 - 2x + 3x^2 - \dots) \\ &= x - \ln(1+x) - x^3(x - x^2 + x^3 - \dots)' \\ &= x - \ln(1+x) - x^3 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)' \\ &= x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^2 x^n \\ &= \left[x - \ln(1+x) - \frac{x^3}{(1+x)^2} \right]' \\ &= \frac{x(1-x)}{(1+x)^2} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数显然发散.

2913. $1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$.

解 设 $F(x) = 1 \cdot 2x + 2 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 4x^3 + \dots$. 在收敛域内逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x F(t) dt &= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \dots \\ &= x(x + 2x^2 + 3x^3 + \dots) \\ &= x \cdot \frac{x}{(1-x)^2} \quad (*) = \frac{x^2}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)x^n = \left[\frac{x^2}{(1-x)^2} \right]' \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数显然发散.

*) 利用 2911 题的结果.

2914. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$$

满足方程

$$y^{(4)} = y.$$

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之, 得

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}, & y'' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}, \\ y''' &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}, & y^{(4)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}. \end{aligned}$$

于是,

$$y^{(4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = y.$$

2915. 证明: 级数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

满足方程

$$xy'' + y' - y = 0.$$

证 所给级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$. 在收敛域内逐项微分之, 得

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(n+1)!}$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!(n+1)!}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & xy'' + y' \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(n-1)!(n+1)!} + \frac{1}{n!(n+1)!} \right] x^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2} = y, \end{aligned}$$

从而得

$$xy'' + y' - y = 0.$$

求在复数域内 $(z = x + iy)$ 下列幂级数的收敛半径及收敛圆:

2916. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-1-i)^n}{n \cdot 2^n}.$

解 记 $c_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$. 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 2,$$

故收敛半径 $R = 2$; 收敛圆为

$$|z - 1 - i| < 2 \quad \text{即} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 2^2.$$

$$|z| < 1 \quad \text{即} \quad x^2 + y^2 < 1.$$

$$2920. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - e^{i\alpha})^n}{n(1 - e^{i\alpha})^n}.$$

解 记 $c_n = \frac{1}{n(1 - e^{i\alpha})^n}$. 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n} (1 - e^{i\alpha}) \right| \\ &= |1 - (\cos\alpha + i\sin\alpha)| = \sqrt{(1 - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha} \\ &= \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|, \end{aligned}$$

故收敛半径 $R = \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|$; 收敛圆为

$$|z - e^{i\alpha}| < \left| 2\sin \frac{\alpha}{2} \right|,$$

即

$$(x - \cos\alpha)^2 + (y - \sin\alpha)^2 < 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

2921. 利用牛顿的二项公式, 近似地计算 $\sqrt[3]{9}$, 并且估计当只取展开式的头三项时的误差.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sqrt[3]{9} &= 2 \left(1 + \frac{1}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{8^3} - \dots \right). \end{aligned}$$

当只取展开式的头三项时, 误差

$$|R_3| < 2 \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{2 \cdot 5}{3^3} \cdot \frac{1}{8^3} = \frac{10}{3^4 \cdot 8^3} < 0.001.$$

计算头三项, 每一项取到小数点后四位, 即得

$$\sqrt[3]{9} \doteq 2 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} - \frac{1}{2!} \cdot \frac{2}{3^2} \cdot \frac{1}{8^2} \right)$$

$\doteq 2.080$.

2922. 近似地计算: (a) $\operatorname{arctg} 1.2$; (b) ${}^{10}\sqrt{1000}$;

(c) $\frac{1}{\sqrt{e}}$; (d) $\ln 1.25$, 并估计对应的误差.

解 (a) 利用

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

并设 $x=1$, $\frac{x+y}{1-xy}=1.2$, 即得 $y=\frac{1}{11}$. 于是,

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} 1.2 &= \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{11} \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{11} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{11}\right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{11}\right)^5 - \dots\end{aligned}$$

若取头三项^{*}), 则其误差

$$|R_3| < \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^5 < 10^{-5}.$$

计算头三项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\operatorname{arctg} 1.2 \doteq 0.87606.$$

$$(b) {}^{10}\sqrt{1000} = {}^{10}\sqrt{1024-24} = 2(1-0.024)^{\frac{1}{10}}$$

$$= 2 \left[1 - \frac{0.024}{10} + \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right) \frac{(0.024)^2}{2!} - \dots \right].$$

若取头三项, 注意到上述级数的各项递减, 故其误差

$$\begin{aligned}|R_3| &< 2 \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10} - 1 \right) \left(\frac{1}{10} - 2 \right) \\ &\quad \cdot (0.024)^3 [1 + 0.024 + (0.024)^2 + \dots] \\ &< 10^{-6}.\end{aligned}$$

计算头三项, 每一项取到小数点后七位, 即得

$${}^{10}\sqrt{1000} \doteq 1.995263.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(B)} \quad \frac{1}{\sqrt{e}} &= e^{-\frac{1}{2}} \\
 &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2^4} \\
 &\quad - \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} + \frac{1}{6!} \cdot \frac{1}{2^6} - \dots
 \end{aligned}$$

若取头七项, 则其误差

$$|R_7| < \frac{1}{7! \cdot 2^7} < 10^{-5}.$$

计算头七项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \doteq 0.60653.$$

$$\begin{aligned}
 \text{(r)} \quad \ln 1.25 &= \ln \left(1 + \frac{1}{4} \right) \\
 &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 4^2} + \frac{1}{3 \cdot 4^3} - \frac{1}{4 \cdot 4^4} \\
 &\quad + \frac{1}{5 \cdot 4^5} - \frac{1}{6 \cdot 4^6} + \dots
 \end{aligned}$$

若取头六项, 则其误差

$$|R_6| < \frac{1}{7 \cdot 4^7} < 10^{-5}.$$

计算头六项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\ln 1.25 \doteq 0.22314.$$

*) 本题并未注明取多少项以估计误差, 因此, 我们可任意选取. 各小题均类似处理.

利用适当的展开式, 计算下列函数准确到所指出的程度的值.

2923. $\sin 18^\circ$, 准确到 10^{-5} .

$$\text{解} \quad \sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10}$$

$$= \frac{\pi}{10} - \frac{\pi^3}{3! 10^3} + \frac{\pi^5}{5! 10^5} - \dots$$

上述级数为交错级数,若取头 n 项,则其误差

$$\Delta < \frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{2n+1}$$

欲使 $\Delta < 10^{-5}$, 只要

$$\frac{1}{(2n+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{2n+1} < 10^{-5},$$

以 $n=3$ 代入上式即满足 ($n=2$ 达不到要求的准确程度). 计算头三项, 每一项取到小数点后六位, 即得

$$\sin 18^\circ \doteq 0.30902.$$

2924. $\cos 1^\circ$, 准确到 10^{-6} .

$$\text{解 } \cos 1^\circ = \cos \frac{\pi}{180} = 1 - \frac{1}{2!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^2 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 - \dots$$

取 $n=2$, 即可保证 $\Delta < \frac{1}{4!} \left(\frac{\pi}{180} \right)^4 < 10^{-6}$. 计算得

$$\cos 1^\circ \doteq 0.999848.$$

2925. $\text{tg} 9^\circ$, 准确到 10^{-3} .

$$\text{解 } \text{tg} 9^\circ = \text{tg} \frac{\pi}{20}$$

$$= \frac{\pi}{20} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{20} \right)^3 + \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 + \dots *).$$

若取头二项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\Delta < \frac{2}{15} \left(\frac{\pi}{20} \right)^5 \left[1 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{20} \right)^4 + \dots \right] < 10^{-3}.$$

取两项计算, 每一项取到小数点后四位, 计算得

$$\text{tg} 9^\circ \doteq 0.158.$$

*) 利用 2891 题的结果.

2926. e , 准确到 10^{-6} .

解 $e = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!}$.

若取 $1 + \sum_{m=1}^n \frac{1}{m!}$ 作为 e 的近似值, 则其误差

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdots m} \\ &< \frac{1}{n!} \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^{m-n}} = \frac{1}{n!n}. \end{aligned}$$

欲 $\Delta < 10^{-6}$, 只要 $\frac{1}{n!n} < 10^{-6}$, 也即只要 $n!n > 10^6$.

取 $n = 9$ 即可. 于是, 当每项取到小数点后七位, 即得

$$e \doteq 1 + \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n!} \doteq 2.718282.$$

2927. $\ln 1.2$, 准确到 10^{-4} .

解 $\ln 1.2 = \ln(1+0.2)$

$$= 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 + \cdots.$$

若取头 n 项, 则其误差

$$\Delta < \frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1}.$$

欲 $\Delta < 10^{-4}$, 只要 $\frac{1}{n+1}(0.2)^{n+1} < 10^{-4}$, 取 $n=4$ 即可保证

$$\Delta < \frac{1}{5}(0.2)^5 < 10^{-4}.$$

于是, 当每项取到小数点后五位, 即得

$$\begin{aligned} \ln 1.2 &\doteq 0.2 - \frac{1}{2}(0.2)^2 + \frac{1}{3}(0.2)^3 - \frac{1}{4}(0.2)^4 \\ &\doteq 0.1823. \end{aligned}$$

2928. 由等式

$$\frac{\pi}{6} = \arcsin \frac{1}{2}$$

求数 π , 准确到 10^{-4} .

解 $\pi = 6 \arcsin \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} &= 6 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right. \\ &\quad + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \right)^7 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{1}{9} \left(\frac{1}{2} \right)^9 \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2} \right)^{11} + \dots \right]. \end{aligned}$$

若取头六项, 考虑到上述级数的各项递减, 则其误差

$$\begin{aligned} \Delta &< 6 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \\ &\quad \cdot \frac{1}{13} \left(\frac{1}{2} \right)^{13} \left(1 + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \dots \right) \\ &< 10^{-4}. \end{aligned}$$

取头六项计算, 每一项取到小数点后五位, 即得

$$\pi \doteq 3.1416.$$

2929. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{3}$$

计算数 π , 准确到 0.001.

解 按题设, 有

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{2^9} - \dots \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} + \dots \right). \end{aligned}$$

注意到等式右端的两个级数都是莱布尼兹型的,所以在被加数与加数中,弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0 < \Delta_1 < \frac{4}{11 \cdot 2^{11}} < 0.0002,$$

$$0 < \Delta_2 < \frac{4}{9 \cdot 3^9} < 0.00002,$$

于是,总误差 $\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 < 0.001$. 计算保留下来的项近似到小数点后四位(末位由四舍五入而得),即可保证达到所需误差. 列成下表(括号中的正、负号指示校正数的符号):

正 项	负 项
$\frac{4}{2} = 2.0000$	$\frac{4}{3 \cdot 2^3} = 0.1667(-)$
$\frac{4}{5 \cdot 2^5} = 0.0250$	$\frac{4}{7 \cdot 2^7} = 0.0045(-)$
$\frac{4}{9 \cdot 2^9} = 0.0009(-)$	$\frac{4}{3 \cdot 3^3} = 0.0494(-)$
$\frac{4}{3} = 1.3333(+)$	+) $\frac{4}{7 \cdot 3^7} = 0.0003(-)$
+) $\frac{4}{5 \cdot 3^5} = 0.0033(-)$	<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	0.2209
3.3625	
0.2209	
<hr style="width: 100%; border: 0.5px solid black;"/>	
3.1416	

于是,

$$3.1415 < \pi < 3.1420.$$

因此,取 $\pi \doteq 3.142$ 即可准确到 0.001.

2930. 利用恒等式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

求数 π , 准确到 10^{-9} .

解 在此, 我们证明一下 2929 题及本题中的恒等式. 如果, 注意到反正切函数的加法公式

$$\begin{aligned} & \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x+y}{1-xy} \quad \left(|x+y| < \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

并选取任何两个满足关系式

$$\frac{x+y}{1-xy} = 1 \quad \text{或} \quad (1+x)(1+y) = 2$$

的真分数作为 x, y , 就有

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} y.$$

例如, 令 $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}$, 即得

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{2} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{3}.$$

这就是 2929 题中所出现的恒等式.

如果令 $x = \frac{1}{5}, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} = \alpha$, 则 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{5}$,

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12},$$

$$\operatorname{tg} 4\alpha = \frac{\frac{10}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119} \doteq 1.$$

可见, $4\alpha \doteq \frac{\pi}{4}$.

$$\text{令 } \beta = 4\alpha - \frac{\pi}{4}, \text{ 则 } \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239}.$$

于是,

$$\beta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}.$$

由此,得

$$\frac{\pi}{4} = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239}$$

$$\begin{aligned} \text{或 } \pi &= 16 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} \\ &= 16 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5^7} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{5^9} - \frac{1}{11} \cdot \frac{1}{5^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{5^{13}} - \dots \right\} \\ &\quad - 4 \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{239^3} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

这就是本题中所出现的恒等式,它就是著名的马信(J. Machin)公式.

我们要依靠此式计算 π , 准确到 10^{-9} , 只要上面已写出的那些项就够了. 事实上, 这两个级数都是莱布尼兹型的, 所以在被减数与减数中, 弃去了的未写出的项的校正数分别为

$$0 < \Delta_1 < \frac{16}{15 \cdot 15^{15}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}$$

$$\text{与 } 0 < \Delta_2 < \frac{4}{5 \cdot 239^5} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10^9}$$

于是, 总误差

$$\Delta \leq \Delta_1 + \Delta_2 < \frac{1}{10^9}.$$

取 $\pi \doteq 3.141592653\dots$ 所有写出的数字都是真确的。

2931. 利用公式

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \dots \right)$$

求 $\ln 2$ 和 $\ln 3$, 准确到 10^{-5} .

解 当 $n=1$ 时,

$$\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \dots \right).$$

如取已写出的那些项计算 $\ln 2$, 即知

$$\begin{aligned} 0 < \Delta < 2 \left(\frac{1}{11} \cdot \frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{3^{13}} + \dots \right) \\ < \frac{2}{11 \cdot 3^{11}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3^2}} < \frac{2}{10^6}. \end{aligned}$$

计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{3} = 0.666667(-) \\ \frac{2}{3 \cdot 3^3} = 0.024691(+) \\ \frac{2}{5 \cdot 3^5} = 0.001646(+) \\ \frac{2}{7 \cdot 3^7} = 0.000131(-) \\ +) \frac{2}{9 \cdot 3^9} = 0.000011(+) \\ \hline 0.693146 \end{array}$$

$$\therefore 0.693146 < \ln 2 < 0.693148.$$

于是, $\ln 2 = 0.69314\dots$, 并且所有写出来的五位数字都是真确的. 如果, 将第六位四舍五入, 即得 $\ln 2 \doteq 0.69315$, 准确到 10^{-5} .

令 $n=2$, 即得

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \frac{1}{9 \cdot 5^9} \right) + \dots \quad (1)$$

与 $\ln 2$ 一样, 取写出的诸项, 计算到小数点后六位, 并作出下表:

$$\begin{array}{r} \frac{2}{5} = 0.400000 \\ \frac{2}{3 \cdot 5^3} = 0.005333(+), \\ \frac{2}{5 \cdot 5^5} = 0.000128 \\ \frac{2}{7 \cdot 5^7} = 0.000004(-) \\ +) \frac{2}{9 \cdot 5^9} = 0.000000(+) \\ \hline 0.405465 \end{array}$$

于是, (1) 式右端的级数的和为 $0.40546\dots$, 并且写出来的五位数字都是真确的, 如将第六位四舍五入, 也得 0.40547 .

最后, 由 (1) 式得

$$\ln 3 \doteq 0.693146\dots + 0.405465\dots = 1.09861\dots,$$

并且所有写出来的数字都是真确的。

如果将第六位四舍五入, 即得

$$\ln 3 \doteq 0.69315 + 0.40546 = 1.09861,$$

它准确到 10^{-5} .

2932. 利用被积函数展成级数的展开式以计算下列积分之值, 并准确到 0.001 :

$$(a) \int_0^1 e^{-x^2} dx; \quad (b) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx;$$

$$(B) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx; \quad (r) \int_0^1 \cos x^2 dx;$$

$$(д) \int_0^1 \frac{\operatorname{sh} x}{x} dx; \quad (e) \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3};$$

$$(ж) \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}; \quad (з) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$$

$$(и) \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$$

$$(к) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} dx; \quad (л) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arc} \sin x}{x} dx;$$

$$(м) \int_0^1 x^x dx.$$

解 (a) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$

$$= \int_0^1 (1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \dots) dx$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots,$$

如取写出来的诸项, 计算到小数点后四位, 并作出下表:

$$1 = 1.0000$$

$$\frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000$$

$$+) \frac{1}{9 \cdot 4!} = 0.0046(+)$$

$$1.1046$$

$$-) \quad 0.3571$$

$$0.7475$$

$$\frac{1}{3} = 0.3333(+)$$

$$+) \frac{1}{7 \cdot 3!} = 0.0238(+)$$

$$0.3571$$

于是,

$$0.7473 < \int_0^1 e^{-x^2} dx < 0.7476,$$

即有 $\int_0^1 e^{-x^2} dx \doteq 0.747$, 准确到 0.001, 并且所有写出来的数字都是真确的.

$$(6) \int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx$$

$$= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2! x^2} + \frac{1}{3! x^3} + \frac{1}{4! x^4} + \dots \right) dx$$

$$= 2 + \ln 2 + \frac{1}{2! \cdot 4} + \frac{3}{3! \cdot 32} + \frac{7}{4! \cdot 192} + \dots$$

$$= 2 + 0. \overset{(+)}{6} 931 + 0. \overset{(+)}{12} 50 + 0. \overset{(+)}{015} 6 + 0. \overset{(+)}{001} 5 + \dots$$

$$\doteq 2.8352 \quad (0 < \Delta < 0.001).$$

于是,

$$\int_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx \doteq 2.835,$$

准确到 0.001.

$$(B) \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx$$

$$= 2 - \frac{2^3}{3 \cdot 3!} + \frac{2^5}{5 \cdot 5!} - \frac{2^7}{7 \cdot 7!} + \dots,$$

如取写出的诸项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta < \frac{2^9}{9 \cdot 9!}$

$< \frac{1}{10^3}$, 列表如下:

$$2 = 2.0000$$

$$\begin{array}{r}
 +) \frac{2^5}{5 \cdot 5!} = 0.0533(+)
 \hline
 2.0533
 -) 0.4480
 \hline
 1.6053
 \\
 \frac{2^3}{3 \cdot 3!} = 0.4444(+)
 +) \frac{2^7}{7 \cdot 7!} = 0.0036(+)
 \hline
 0.4480
 \end{array}$$

于是,

$$1.6051 < \int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx < 1.6054,$$

即

$$\int_0^2 \frac{\sin x}{x} dx \doteq 1.605,$$

并且所有写出的数字都是真确的.

$$\begin{aligned}
 (r) \int_0^1 \cos x^2 dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^4}{2!} + \frac{x^8}{4!} - \dots \right) dx \\
 &= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \dots,
 \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算积分值, 则其误差 $0 < \Delta <$

$\frac{1}{13 \cdot 6!} < \frac{1}{10^3}$. 列下表:

$$\begin{array}{r}
 1 = 1.0000
 +) \frac{1}{9 \cdot 4} = 0.0046(+)
 \hline
 1.0046
 -) 0.1000
 \hline
 0.9046
 \end{array}$$

$$\frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000$$

$$\frac{1}{5 \cdot 2!} = 0.1000$$

所以

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.9046.$$

于是,

$$\int_0^1 \cos x^2 dx \doteq 0.905,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned} (\text{II}) \int_0^1 \frac{\text{sh}x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) dx \\ &= 1 + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \frac{1}{5 \cdot 5!} + \dots, \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算积分值, 则其误差

$$\begin{aligned} 0 < \Delta < \frac{1}{7 \cdot 7!} \left(1 + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{7 \cdot 7!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{7^2}} < 10^{-3}. \end{aligned}$$

列下表:

$$\begin{array}{r} 1 = 1.0000 \\ \frac{1}{3 \cdot 3!} = 0.0556(-) \\ +) \frac{1}{5 \cdot 5!} = 0.0017(+) \\ \hline 1.0573 \end{array}$$

于是,

$$\int_0^1 \frac{\text{sh}x}{x} dx \doteq 1.057,$$

准确到 0.001.

(e) 当 $x \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x^3} &= \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^3} \\ &= \left(\frac{1}{x}\right)^3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3},\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}I &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3n+3} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+2} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^8 - \frac{1}{11} \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + \dots.\end{aligned}$$

取前两项的近似值就有

$$I = 0.119 + \theta \quad (0 < \theta < 0.001).$$

或者用直接积分法:

$$\begin{aligned}& \int_2^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} \\ &= \int_2^{+\infty} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_2^{+\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{6} \ln 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \ln 3$$

$$\doteq 0.119,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned} (\kappa) \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{3}} \\ &= 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{4x^4}{3^2 \cdot 2!} + \dots, \end{aligned}$$

故得

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^5} + \dots \doteq 0.337,$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned} (3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} &= \int_0^1 (1+x^4)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 2!}x^8 + \dots \right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{5 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{9 \cdot 2^2 \cdot 2!} - \dots \\ &\quad - \frac{1 \cdot 3 \cdots 45}{93 \cdot 2^{23} \cdot 23!} + \dots \\ &= (1.0000 + 0.0417 + 0.0160 + 0.0090 \\ &\quad + 0.0060 + 0.0043 + 0.0033 + 0.0026 \\ &\quad + 0.0022 + 0.0018 + 0.0014 + 0.0012) \\ &\quad - (0.1000 + 0.0240 + 0.0117 + 0.0072 \\ &\quad + 0.0050 + 0.0037 + 0.0029 + 0.0024 \\ &\quad + 0.0020 + 0.0016 + 0.0013 + 0.0010) + \dots \\ &\doteq 0.927, \end{aligned}$$

$$0 < \Delta < \frac{1 \cdot 3 \cdots 47}{97 \cdot 2^{24} \cdot 24!} < 10^{-3}.$$

(n) 注意, 当 $10 \leq x \leq 100$ 时, 有

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{x}\right)^n.\end{aligned}$$

于是,得

$$\begin{aligned}I &= \int_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \\ &= \int_{10}^{100} \frac{\ln x}{x} dx \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int_{10}^{100} x^{-n-1} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \frac{1}{10^n} \left(1 - \frac{1}{10^n}\right) \\ &= \frac{3}{2} \ln^2 10 + \frac{1}{10} \left(1 - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{4 \cdot 10^2} \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{9 \cdot 10^3} \left(1 - \frac{1}{10^3}\right) + \dots \\ &\doteq 8.040,\end{aligned}$$

准确到 0.001.

$$\begin{aligned}(\kappa) \quad &\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots\right) dx \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2 \cdot 2^3} + \frac{1}{5^2 \cdot 2^5} - \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} + \dots,\end{aligned}$$

如取前三项计算积分值,则其误差

$$0 < \Delta < \frac{1}{7^2 \cdot 2^7} < \frac{1}{10^3}.$$

于是,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx \doteq 0.487 \text{ (准确到 } 0.001\text{)}.$$

2933. 求正弦曲线

$$y = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

波之弧长, 并准确到 0.01.

解 弧长 s 为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^2} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2 x - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cos^4 x \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cos^6 x - \dots \right) dx. \end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x dx = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1} \cdot n! \cdot n!} \quad *)$$

即有

$$\begin{aligned} s &= 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi \cdot 2!}{2^4} - \frac{1}{2! \cdot 2^2} \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3! \cdot 3!} - \dots \right] \\ &= \pi \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{64} + \frac{5}{256} - \dots \right), \end{aligned}$$

如取写出的诸项计算 s 值, 则其误差

$$0 < \Delta < \frac{3 \cdot 5 \cdot 2\pi}{4! \cdot 2^4} \cdot \frac{8!}{2^9 \cdot 4! \cdot 4!} < \frac{1}{10^2}.$$

于是,

$$s \doteq 3.14(1 + 0.25 - 0.05 + 0.02) \doteq 3.83.$$

*) 利用 2290 题的结果, $m=0$.

2934. 椭圆之半轴为 $a=1$ 及 $b=\frac{1}{2}$, 求椭圆的弧长, 并准确到 0.01.

解 椭圆的参数方程为 $x = a \sin t, y = b \cos t$.

于是,

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} dt \\ &= a \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为椭圆的离心率. 从而得

$$\begin{aligned} s &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \sin^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{1}{2} \epsilon^2 \sin^2 t - \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} \epsilon^4 \sin^4 t \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \epsilon^6 \sin^6 t - \dots \right) dt \\ &= 4a \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \epsilon^2 \cdot \frac{\pi \cdot 2!}{2^3} - \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} \epsilon^4 \cdot \frac{\pi \cdot 4!}{2^5 \cdot 2! \cdot 2!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3}{3! \cdot 2^3} \epsilon^6 \cdot \frac{\pi \cdot 6!}{2^7 \cdot 3! \cdot 3!} - \dots \right), \end{aligned}$$

如取写出的前五项计算 s 值, 则其误差 $0 < \Delta < 10^{-3}$.

再以 a, b 值代入, 即得

$$\begin{aligned} s &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{64} \cdot \frac{9}{16} - \frac{5}{256} \cdot \frac{27}{64} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5 \cdot 27 \cdot 3}{256 \cdot 64 \cdot 4} - \dots \right) \\ &\doteq 2\pi(1 - 0.188 - 0.026 - 0.008 - 0.003 - \dots) \\ &\doteq 4.84. \end{aligned}$$

2935. 电线是扯在两根木桩上, 两桩的距离为 $2l = 20$ 米, 电线成抛物线的形状. 设凹处的矢 $h = 40$ 厘米, 计算电线的长度, 并准确到 1 厘米.

解 先建立抛物线 AOB 的方程.

取坐标系如图 5·2 所示, 则方程的标准形式为

$$x^2 = 2py.$$

由于此抛物线过点 $B(10, 0.4)$, 所以

$$10^2 = 2p(0.4), p = 125,$$

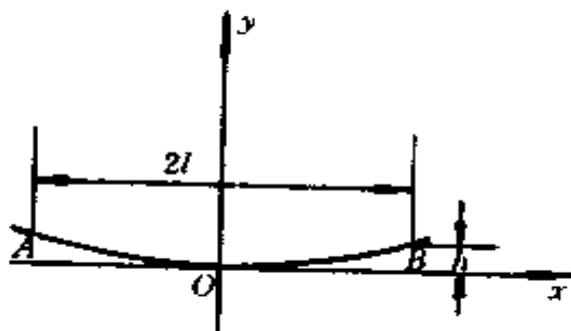


图 5.2

即

$$y = \frac{1}{250}x^2.$$

于是, 所求的电线长为

$$\begin{aligned} s &= 2 \int_0^{10} \sqrt{1 + \left(\frac{1}{125}x\right)^2} dx \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \sqrt{1+t^2} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} (1+t^2)^{\frac{1}{2}} dt \\ &= 250 \int_0^{\frac{2}{25}} \left(1 + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2}t^4 + \frac{1 \cdot 3}{3!} \frac{1}{2^3}t^6 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4!} \frac{1}{2^4}t^8 + \dots \right) dt \\ &= 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{5 \cdot 2!} \frac{2^5}{25^5} + \dots \right), \end{aligned}$$

如取前两项计算积分值, 则其误差

$$0 < \triangle < \frac{250}{5 \cdot 21 \cdot 2^2} \cdot \frac{2^5}{25^5} < 10^{-2}.$$

因此,

$$s = 250 \left(\frac{2}{25} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2^3}{25^3} \right) \\ \doteq 20 + 0.02 = 20.02 \text{ (米)},$$

即所求的电线长为 20.02 米, 准确到 0.01 米.

§ 6. 福里叶级数

1° 展开定理 若函数 $f(x)$ 在区间 $(-l, l)$ 内逐段连续并有逐段连续的导函数 $f'(x)$, 并且一切不连续点 ξ 是正则的 [即 $f(\xi) = \frac{1}{2} [f(\xi-0) + f(\xi+0)]$], 则函数 $f(x)$ 在此区间上可用福里叶级数表出

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1)$$

式中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

及

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=1, 2, \dots). \quad (2')$$

特别是:

(a) 若函数 $f(x)$ 是偶函数, 则有:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{l}, \quad (3)$$

式中 $a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots)$;

(b) 若函数 $f(x)$ 是奇函数, 则得:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4)$$

式中, $b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx (n=1, 2, \dots)$.

一个在区间 $(0, l)$ 中有定义的并具有上面所提到的连续条件的函数 $f(x)$, 可在该区间内用公式(3)及公式(4)表示.

2° 完全性条件 对于任一在区间 $(-l, l)$ 上可积的且其平方也是可积的函数 $f(x)$, 作具有系数(2), (2')的级数(1), 则李雅甫诺夫等式成立:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx.$$

3° 福里叶级数的积分法 在区间 $(-l, l)$ 内按黎曼意义可积分的函数 $f(x)$ 之福里叶级数(1) (即使是发散的), 可以在 $(-l, l)$ 内逐项积分.

2936. 将函数

$$f(x) = \sin^4 x$$

展开成福里叶级数.

解 在 $(-\pi, \pi)$ 上, 函数 $f(x) = \sin^4 x$ 展开成福里叶级数有

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

由于

$$\begin{aligned} \sin^4 x &= \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1 + \cos 4x}{2} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \right) dx = \frac{3}{4}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^4 x \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{8} \cos nx \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \cos 2x \cos nx + \frac{1}{8} \cos 4x \cos nx \right) dx \\
 &= \begin{cases} 0, n \neq 2, n \neq 4, \\ -\frac{1}{2}, n = 2, \\ \frac{1}{8}, n = 4; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^4 x \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

又函数 $f(x)$ 处处连续, 故其福里叶级数收敛于函数本身, 即

$$f(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$$

注 由此题可以看出, 周期为 2π 的三角多项式的福里叶级数就是它本身, 下面一题将给出一般的证明.

2937. 三角多项式

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix)$$

的福里叶级数是怎样的?

解 $p_n(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 不妨在 $[-\pi, \pi]$ 上展开成福里叶级数. 由于

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (\alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix) dx = 2\alpha_0;
 \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \cos nx dx$$

$$= a_n;$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} p_n(x) \sin nx dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix) \sin nx dx$$

$$= \beta_n.$$

于是,在 $(-\pi, \pi)$ 上,有

$$p_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$= \sum_{i=0}^n (a_i \cos ix + \beta_i \sin ix),$$

即 $p_n(x)$ 的福里叶级数就是它本身.

2938. 将函数

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \quad (-\pi < x < \pi)$$

展开为福里叶级数.

绘出函数的图形及此函数之福里叶级数之若干部分和的图形.

利用展开式,求莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

的和.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \cos nx dx = 0;$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn} x \sin nx dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = -\frac{2}{n\pi} \cos nx \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2}{n\pi} [1 - (-1)^n],
 \end{aligned}$$

又函数 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上只有一个第一类间断点, 故其福里叶级数收敛, 且有

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

$f(x)$ 及其福里叶级数之若干部分和的图形如图 5.3 所示, 其中画的是一项 S_1 、两项之和 S_2 及 $f(x)$ 的图形.

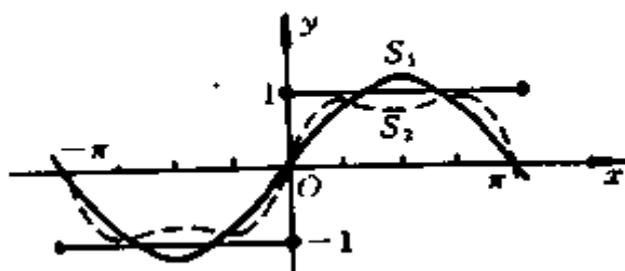


图 5.3

若令 $x = \frac{\pi}{2}$, 则得

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1,$$

即莱布尼兹级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}.$$

在所指定的区间内把下列函数展开为福里叶级数:

2939. 在区间 $(0, 2l)$ 内展开

$$f(x) = \begin{cases} A, & \text{若 } 0 < x < l; \\ 0, & \text{若 } l < x < 2l, \end{cases}$$

其中 A 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l A dx = A,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l A \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l A \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\ &= \frac{A}{n\pi} [1 - (-1)^n], \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1) \frac{\pi x}{l} = \begin{cases} A, & 0 < x < l, \\ \frac{A}{2}, & x = l, \\ 0, & l < x < 2l. \end{cases}$$

2940. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x$.

解 因为 $f(x) = x$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx \\ &= (-1)^{n-1} \frac{2}{n}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{若 } -\pi < x < 0; \\ bx, & \text{若 } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

其中 a 及 b 为常数.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bxdx = \frac{b-a}{2}\pi,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \cos nx dx \\ &= \frac{a-b}{n^2\pi} (1 - (-1)^n); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 ax \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} bx \sin nx dx \\ &= \frac{a+b}{n} (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\begin{aligned} &\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2(a-b)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} \\ &\quad + (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx \\ &= \begin{cases} ax, & -\pi < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ bx, & 0 < x < \pi. \end{cases} \end{aligned}$$

2944. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \pi^2 - x^2$.

解 因为 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) dx = \frac{2}{\pi} \left(\pi^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi^2 - x^2) \cos nx dx = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{n\pi}x^2\sin nx \Big|_0^\pi + \frac{4}{n\pi} \int_0^\pi x\sin nx dx \\
&= -\frac{4}{n^2\pi}x\cos nx \Big|_0^\pi + \frac{4}{n^2\pi} \int_0^\pi \cos nx dx \\
&= \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx = \pi^2 - x^2 \quad (-\pi < x < \pi).$$

2945. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \cos ax$.

解 因为 $f(x) = \cos ax$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax dx = \frac{2}{a\pi} \sin a\pi, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos ax \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n+a)x + \cos(n-a)x] dx \\
&= \frac{2\sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}a}{n^2 - a^2},
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{\pi} \left[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{a\cos nx}{n^2 - a^2} \right] = \cos ax \quad (-\pi < x < \pi).$$

2946. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \sin ax$.

解 因为 $f(x) = \sin ax$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin ax \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(n-a)x - \cos(n+a)x] dx
\end{aligned}$$

$$= \frac{2\sin a\pi}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2 - a^2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\sin a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n\sin nx}{n^2 - a^2} = \sin ax$$

$$(-\pi < x < \pi).$$

2947. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = \operatorname{sh} ax$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \operatorname{sh} ax \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{a}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \operatorname{ch} ax dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi + \frac{a}{n^2} \operatorname{ch} ax \sin nx \Big|_0^{\pi} \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} \int_0^{\pi} \operatorname{sh} ax \sin nx dx \right] \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi} \operatorname{sh} a\pi - \frac{a^2}{n^2} b_n, \end{aligned}$$

即

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n}{(n^2 + a^2)\pi} \operatorname{sh} a\pi,$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2\operatorname{sh} a\pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n\sin nx}{n^2 + a^2} = \operatorname{sh} ax \quad (-\pi < x < \pi).$$

2948⁺. 在区间 $(-h, h)$ 中展开 $f(x) = e^{ax}$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} dx = \frac{1}{ah} (e^{ah} - e^{-ah}) = \frac{2}{ah} \operatorname{sh} ah,$$

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \cos \frac{n\pi x}{h} dx$$

$$= \frac{1}{h} \frac{a \cos \frac{n\pi x}{h} + \frac{n\pi}{h} \sin \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h$$

$$= \frac{(-1)^n 2ah}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah;$$

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^h e^{ax} \sin \frac{n\pi x}{h} dx$$

$$= \frac{1}{h} \frac{a \sin \frac{n\pi x}{h} - \frac{n\pi}{h} \cos \frac{n\pi x}{h}}{a^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2} e^{ax} \Big|_{-h}^h$$

$$= \frac{(-1)^{n+1} 2n\pi}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \operatorname{sh} ah,$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$2\operatorname{sh} ah \left[\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos \frac{n\pi x}{h} - n\pi \sin \frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2 + (n\pi)^2} \right]$$

$$= e^{ax} (-h < x < h).$$

2949. 在区间 $(a, a+2l)$ 中展开 $f(x) = x$.

解 由于

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x dx = 2(a+l),$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} x \sin \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} - \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$= \frac{2l}{n\pi} \sin \frac{n\pi a}{l};$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{l} \int_a^{a+2l} x \sin \frac{n\pi x}{l} dx \\
 &= \frac{-1}{n\pi} x \cos \frac{n\pi x}{l} \Big|_a^{a+2l} + \frac{1}{n\pi} \int_a^{a+2l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\
 &= -\frac{2l}{n\pi} \cos \frac{n\pi a}{l},
 \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $(a, a+2l)$ 中可展开为

$$\begin{aligned}
 a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} \right. \\
 \left. - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} \right) = x \quad (a < x < a + 2l).
 \end{aligned}$$

2950. 在区间 $(-\pi, \pi)$ 中展开 $f(x) = x \sin x$.

解 因为 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(-x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \right) \\
 &= 2, \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos nx dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x [\sin(n+1)x - \sin(n-1)x] dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x \cos(n+1)x}{n+1} + \frac{\sin(n+1)x}{(n+1)^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{x \cos(n-1)x}{n-1} - \frac{\sin(n-1)x}{(n-1)^2} \right] \Big|_0^{\pi} \\
 &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n^2-1} \quad (n=2, 3, \dots), \\
 a_1 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin x \cos x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin 2x dx
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \right] \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$1 - \frac{1}{2} \cos x + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2 - 1} \cos nx = x \sin x \quad (-\pi < x < \pi).$$

2951. 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 中展开 $f(x) = x \cos x$.

解 因为 $f(x)$ 为奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \sin 2nx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x [\sin(2n+1)x + \sin(2n-1)x] dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{x \cos(2n+1)x}{2n+1} + \frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x \cos(2n-1)x}{2n-1} + \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{(-1)^{n-1} 16}{\pi} \cdot \frac{n}{(4n^2-1)^2}, \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2-1)^2} \sin 2nx = x \cos x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right).$$

将下列周期函数展开成福里叶级数:

2952. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

解 由于

$$f(x+2\pi) = \operatorname{sgn}[\cos(x+2\pi)] = \operatorname{sgn}(\cos x) = f(x),$$

故 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数,

从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-1) dx \right) \\
&= 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sgn}(\cos x) \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nx dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nx dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
&= \frac{4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{(2k+1)\pi}, & n=2k+1 \end{cases} \\
&\hspace{15em} (k=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[(-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \right] = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

注意, 此式在 $f(x)$ 的不连续点 $x = -\frac{\pi}{2}$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 也成立, 这是因为在这些点满足 $f(x) = \frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$. 于是, 上述展式对一切 $-\infty < x < +\infty$ 皆成立.

2953. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内为一奇函数, 从而 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\sin x) \sin nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin nx dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\pi - x) \sin nx dx \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\left(-\frac{x}{n} \cos nx + \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{n} \cos nx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{x}{n} \cos nx - \frac{1}{n^2} \sin nx \right) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right) \\
&= \frac{4}{n^2 \pi} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ (-1)^k \frac{4}{\pi(2k+1)^2}, & n=2k+1 \end{cases} \\
&\hspace{15em} (k=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin(2k+1)x = \arcsin(\sin x)$$

$(-\infty < x < +\infty).$

2954. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \arcsin(\cos x) \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{2n} \sin nx - \frac{x}{n} \sin nx - \frac{1}{n^2} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} [1 - (-1)^n]
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数,} \\ \frac{4}{(2k+1)^2\pi}, & n=2k+1 \quad (k=0,1,2,\dots), \end{cases}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2} = \arcsin(\cos x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

2955. $f(x) = x - [x]$.

解 因为

$$\begin{aligned} f(x+1) &= x+1 - [x+1] = x+1 - [x] - 1 \\ &= x - [x] = f(x), \end{aligned}$$

故 $f(x)$ 是以 1 为周期的周期函数. 而且, 除 $x=k$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 诸点外, $f(x)$ 都连续. 由于

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} dx = 2 \int_0^1 x dx = 1,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \cos 2n\pi x dx \\ &= 2 \int_0^1 x \cos 2n\pi x dx \\ &= 2 \left[\frac{x}{2n\pi} \sin 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \cos 2n\pi x \right] \Big|_0^1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 \{x - [x]\} \sin 2n\pi x dx \\ &= 2 \int_0^1 x \sin 2n\pi x dx \\ &= 2 \left[-\frac{x}{2n\pi} \cos 2n\pi x + \frac{1}{4(n\pi)^2} \sin 2n\pi x \right] \Big|_0^1 \end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos 2\pi(2k+1)x}{(2k+1)^2} = (x) \\ (-\infty < x < +\infty).$$

2957. $f(x) = |\sin x|$.

解 $f(x)$ 是以 π 为周期的连续周期函数, 又 $f(x)$ 为偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = \frac{4}{\pi}, \\ a_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \cos 2nx dx \\ = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(2n+1)x - \sin(2n-1)x] dx \\ = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{1}{2n+1} \cos(2n+1)x \right. \\ \left. + \frac{1}{2n-1} \cos(2n-1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ = -\frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{4n^2-1},$$

故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1} = |\sin x| \\ (-\infty < x < +\infty).$$

2958. $f(x) = |\cos x|$.

解 由于

$$f(x) = |\cos x| = \left| \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right|,$$

故有

$$\begin{aligned}
|\cos x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^{*})}{4n^2 - 1} \\
&= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos 2nx}{4n^2 - 1} \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \\
&\quad (-\infty < x < +\infty).
\end{aligned}$$

*) 利用 2957 题的结果.

$$2959. f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \quad (|\alpha| < 1).$$

解 显然 $p_n(x) = \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 注意, 当 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, 函数值理解为其极限值

$$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{n \cos nx}{\cos x} = n(-1)^{(n-1)k},$$

并且 $p_n(x)$ 是一个周期为 2π 的周期函数且为偶函数. 此外,

$$\begin{aligned}
p_n(x) &= \frac{\sin nx}{\sin x} \\
&= \frac{\sin(n-1)x \cos x + \cos(n-1)x \sin x}{\sin x} \\
&= p_{n-1}(x) \cos x + \cos(n-1)x,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
|p_n(x)| &\leq |p_{n-1}(x)| + 1 \quad (-\infty < x < +\infty) \\
&\quad (n = 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

注意到 $p_1(x) \equiv 1$, 由上式, 利用归纳法即知

$$|p_n(x)| \leq n \quad (-\infty < x < +\infty, n = 1, 2, \dots).$$

于是,

$$\left| \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \right| \leq n |\alpha|^n \quad (-\infty < x < +\infty, n=1, 2, \dots).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n |\alpha|^n$ 收敛 (因为 $|\alpha| < 1$), 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} \text{ 在 } -\infty < x < +\infty \text{ 上一致收敛. 由此}$$

可知, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 且在任何有限区间上均可逐项积分.

注意到 $f(x)$ 为以 2π 为周期的周期函数, 并且是偶函数, 故 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\sum_{n=2, 4, \dots}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx + \sum_{n=1, 3, \dots}^{\infty} \alpha^n \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx \right) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{2k+1} \alpha^{2k+1} = \frac{2\alpha}{1-\alpha}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin mx \cos nx}{\sin x} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx \\ &= I_1 + I_2, \end{aligned}$$

其中

$$I_1 = \frac{1}{\pi} \sum_{m \leq n} \alpha^m \int_0^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi} \sum_{m>n} a^n \int_0^\pi \frac{\sin(m+n)x + \sin(m-n)x}{\sin x} dx.$$

当 $m \leq n$ 时, 不论 $m+n$ 及 $m-n$ 是偶数, 还是 $m+n$ 及 $m-n$ 是奇数, I_1 中诸积分都为零, 故有 $I_1 = 0$. 当 $m > n$ 时, 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为偶数, 则 I_2 中对应的积分等于零; 若 $m+n$ 及 $m-n$ 为奇数, 则 I_2 中对应的积分等于 2π . 于是,

$$I_2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{(2k+1)+n} = 2 \cdot \frac{a^{n+1}}{1-a^2}.$$

由于 $a_n = I_2$, 故按展开定理, $f(x)$ 可展开为

$$f(x) = \frac{a}{1-a^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos nx \right) \\ (-\infty < x < +\infty).$$

*) 利用 2291 题的结果

2960⁺. 把函数

$$f(x) = \sec x \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right)$$

展开为福里叶级数.

解 显然 $f(x) = \sec x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right)$ 内连续, 而且是偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \\ a_0 = \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x dx \\ = \frac{8}{\pi} \left(\ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ = \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{\sin \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)} \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8}{\pi} \left[\ln \left| \frac{1 - \cos(x + \frac{\pi}{2})}{\sin(x + \frac{\pi}{2})} \right| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{8}{\pi} \left(\ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}), \\
a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \quad (n=1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\cos 4nx - \cos(4nx - 4x) \\
&= -2\sin(4nx - 2x)\sin 2x \\
&= -4\sin(4nx - 2x)\sin x \cos x \\
&= 2[\cos(4nx - x) - \cos(4nx - 3x)]\cos x,
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4nx}{\cos x} dx \\
&= \frac{16}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [\cos(4n-1)x - \cos(4n-3)x] dx \\
&\quad + \frac{8}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 4(n-1)x}{\cos x} dx \\
&= \frac{16}{\pi} \left[\frac{1}{4n-1} \sin(n\pi - \frac{\pi}{4}) - \frac{1}{4n-3} \right. \\
&\quad \left. \sin(n\pi - \frac{3}{4}\pi) \right] + a_{n-1} \\
&= \frac{16}{\pi} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{4n-1} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^{n-1}}{4n-3} \sin \frac{3\pi}{4} \right] + a_{n-1} \\
&= \frac{16}{\pi} (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n-1} \right) + a_{n-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{16}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}(-1)^n}{(4n-3)(4n-1)} + a_{n-1} (n=1, 2, \dots).$$

由此递推公式, 得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} + a_0 \\ &= \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{(4k-3)(4k-1)} \\ &\quad + \frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) (n=1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是, 下面的展式成立:

$$\begin{aligned} \sec x &= \frac{4}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{8}{\pi} \ln(1 + \sqrt{2}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{16\sqrt{2}}{\pi} \right] \sum_{k=1}^n \left[\frac{(-1)^{k-1}}{(4k-3)(4k-1)} \right] \cos 4nx \\ &\quad \left(-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

2961. 将函数 $f(x) = x^2$ 展开成福里叶级数: (a) 按余弦展开; (b) 按正弦展开; (c) 在区间 $(0, 2\pi)$ 内展开.

绘出函数的图形及情形 (a), (b) 与 (c) 的福里叶级数之和的图形.

利用这些展开式, 求级数的和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解 (a) 由于 $b_n = 0$, 且

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= (-1)^n \frac{4}{n^2},
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上按余弦展开为

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

(6) 由于 $a_0 = a_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{2\pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{4}{n^3 \pi} [(-1)^n - 1],
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上按正弦展开为

$$\begin{aligned}
2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3} \\
= x^2 \quad (0 \leq x < \pi).
\end{aligned}$$

(B) 由于

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{8\pi^2}{3}, \\
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{x^2}{n} \sin nx + \frac{2x}{n^2} \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{4}{n^2} \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left(-\frac{x^2}{n} \cos nx + \frac{2x}{n^2} \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx \right) \Big|_0^{2\pi}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-4\pi}{n},$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上可展开为

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \\ & = x^2 \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

函数的图形, (a)、(b) 及 (c) 的福里叶级数之和的图形, 如图 5.4、图 5.5、图 5.6 及图 5.7 所示.

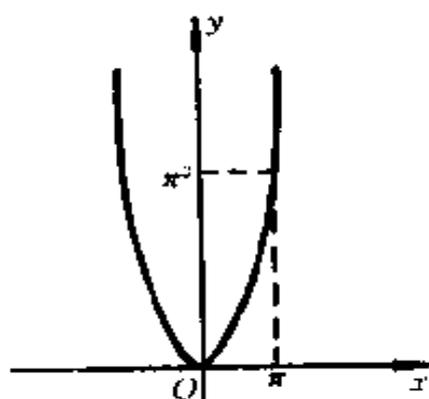


图 5.4

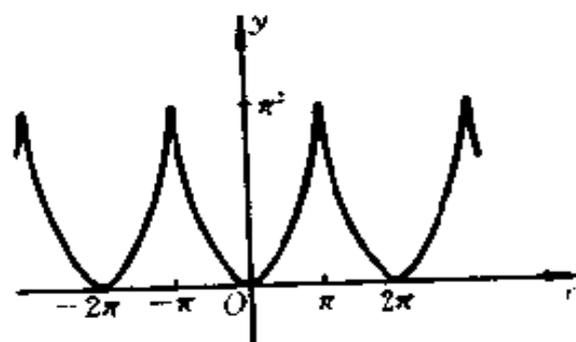


图 5.5

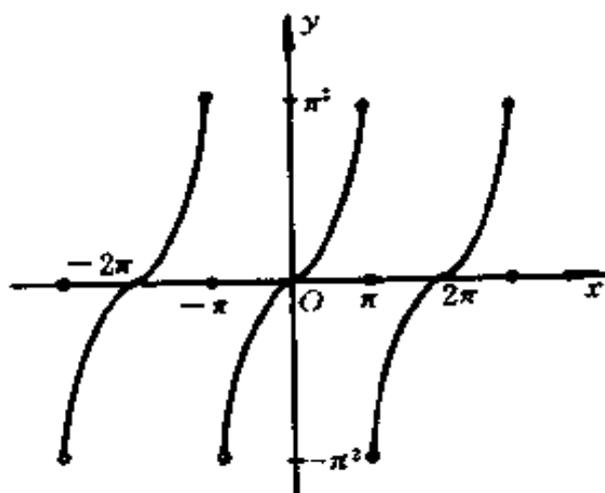


图 5.6

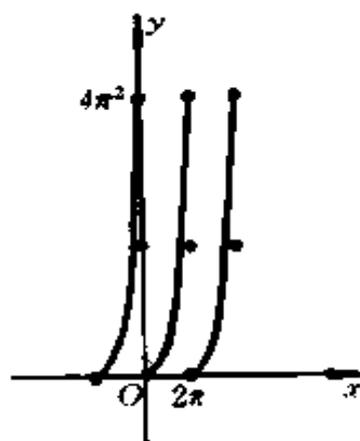


图 5.7

若在展开式(a)中令 $x = \pi$, 则得

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot (-1)^n = \pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (1)$$

若在展开式(B)中令 $x = \pi$, 则得

$$\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \pi^2,$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad (2)$$

将级数(1)和(2)相加, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right] = \frac{\pi^2}{4},$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (3)$$

2962. 由展开式

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-\pi < x < \pi),$$

用逐项积分的方法, 求函数 x^2, x^3 和 x^4 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数.

解 将原式在 $[0, x]$ 上逐项积分, 得

$$\frac{x^2}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^2}.$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

代入上式, 即得

$$= \pi^2 x + 12 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^3},$$

得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi^2 x - x^3}{12} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

将上式从 0 到 x 积分, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx - 1}{n^4} = \frac{2\pi^2 x^2 - x^4}{48} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

以 $x = \pi$ 代入, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 - (-1)^n}{n^4} = \frac{\pi^4}{48},$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \quad (1)$$

由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (2)$$

收敛, 故可设其和为 S . 于是, 由 (2) - (1) 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

即

$$\frac{S}{16} = S - \frac{\pi^4}{96},$$

从而

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

同时, 还可求出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} = \frac{\pi^4}{2^4 \cdot 90}$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^4} \\ &= \pi^4 \left(\frac{1}{96} - \frac{1}{2^4 \cdot 90} \right) = \frac{7}{720} \pi^4. \end{aligned}$$

也可利用此结果求得 x^4 的展开式,事实上,将 x^3 的展开式从 0 到 x 积分,再以

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}$$

代入即得.

2963. 写出函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } |x| < a, \\ 0, & \text{当 } a < |x| < \pi \end{cases}$$

的李雅甫诺夫等式.

由李雅甫诺夫等式,求下列级数之和:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 na}{n^2} \quad \text{及} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 na}{n^2}.$$

解 由于 $f(x)$ 为偶函数,从而 $b_n = 0$,且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^a dx = \frac{2a}{\pi}, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos nx dx = \frac{2 \sin na}{n\pi}, \end{aligned}$$

又

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^a dx = \frac{2a}{\pi},$$

故对应于 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上展开的李雅甫诺夫等式为

$$\begin{aligned} \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) &= \frac{2\alpha^2}{\pi^2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{2\alpha}{\pi}. \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} = \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2},$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \frac{\alpha(\pi - \alpha)}{2} = \frac{\pi^2 - 3\pi\alpha + 3\alpha^2}{6}. \end{aligned}$$

*) 利用 2961 题的结果.

2964. 将函数

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & \text{若 } 1 < x < 2, \\ 3-x, & \text{若 } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

展成福里叶级数.

解 将 $f(x)$ 在 $[0, 3]$ 上按周期为 3 作福里叶展开, 注意其图象, 易见 $f(x)$ 的延拓(周期为 3)是偶函数, 从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3} \int_0^3 f(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 x dx + \frac{2}{3} \int_1^2 dx + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) dx \\ &= \frac{4}{3}, \\ a_n &= \frac{2}{3} \int_0^1 x \cos \frac{2n\pi x}{3} dx + \frac{2}{3} \int_1^2 \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{3} \int_2^3 (3-x) \cos \frac{2n\pi x}{3} dx \\
& = \frac{2}{3} \left\{ \left(\frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} + \frac{9}{4n^2\pi^2} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \cos \frac{2n\pi x}{3} \right) \Big|_0^1 + \frac{3}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} \Big|_1^2 \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{9}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{3} - \frac{3}{2n\pi} x \sin \frac{2n\pi x}{3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{9}{4n^2\pi^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} \right) \Big|_2^3 \right\} \\
& = \frac{2}{3} \left\{ -\frac{9}{2(n\pi)^2} + \frac{9}{4(n\pi)^2} \left(\cos \frac{2n\pi}{3} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \cos \frac{4n\pi}{3} \right) \right\} \\
& = -\frac{3}{(n\pi)^2} + \frac{3}{(n\pi)^2} (-1)^n \cos \frac{n\pi}{3},
\end{aligned}$$

故按展开定理, $f(x)$ 在 $[0, 3)$ 可按余弦展开为

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} + \frac{3}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right) \cos \frac{2n\pi x}{3} \\
& = f(x).
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{3} \right) \cos \frac{2n\pi x}{3} \\
& = \left(-\frac{1}{1^2} - \frac{1}{1^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{2\pi x}{3} \\
& \quad + \left(-\frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{4\pi x}{3} \\
& \quad + \left(-\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} \right) \cos 2\pi x \\
& \quad + \left(-\frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cos \frac{8\pi x}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{2}\right) \cos \frac{10\pi x}{3} \\
& + \left(-\frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^2}\right) \cos 4\pi x + \dots \\
& = -\frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{3}{2} \\
& \quad \cdot \frac{1}{3^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x,
\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 的余弦展开式可写为

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{3} - \frac{9}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi x}{3} + \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi x \\
& = f(x) \quad (0 \leq x \leq 3).
\end{aligned}$$

利用公式

$$\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t}),$$

式中 $t = e^{ix}$ 及 $\bar{t} = e^{-ix}$, 将下列函数展开成福里叶级数:

2965⁺. $\cos^{2m} x$ (m 为正整数).

解 $\cos^{2m} x$

$$\begin{aligned}
& = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^{2m} \\
& = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{l=0}^{2m} C_{2m}^l e^{(2m-l)ix} e^{-lix} \\
& = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left(\sum_{l=0}^{m-1} + \sum_{l=m+1}^{2m} \right) C_{2m}^l e^{2(m-l)ix} \\
& = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \left[\sum_{l=0}^{m-1} C_{2m}^l e^{2(m-l)ix} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{l=0}^{m-1} C_{2m}^{2m-l} e^{-2(m-l)ix} \right] \\
& = \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m}} \sum_{l=0}^{m-1} C_{2m}^l [e^{2(m-l)ix} + e^{-2(m-l)ix}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{s=0}^{m-1} C_{2m}^s \cos 2(m-s)x \\
&= \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m + \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=1}^m C_{2m}^{m-k} \cos 2kx.
\end{aligned}$$

由于上述表达式为一三角多项式,故在 $(-\infty, +\infty)$ 中的福里叶展开式即为它本身.

2966. $\frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2} (|q| < 1).$

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2} &= \frac{\frac{q}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})}{1 - q(e^{ix} + e^{-ix}) + q^2} \\
&= \frac{1}{2i} \frac{q(e^{ix} - e^{-ix})}{(1 - qe^{ix})(1 - qe^{-ix})} \\
&= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{1 - qe^{ix}} - \frac{1}{1 - qe^{-ix}} \right) \\
&= \frac{1}{2i} [(1 + qe^{ix} + q^2 e^{2ix} + \dots) - (1 + qe^{-ix} + q^2 e^{-2ix} + \dots)] = q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots,
\end{aligned}$$

及级数

$$q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots + q^n \sin nx + \dots$$

满足 $|q^n \sin nx| \leq q^n$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n (|q| < 1)$ 收敛, 故级数

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛. 因此, 级数

$$q \sin x + q^2 \sin 2x + \dots + q^n \sin nx + \dots$$

即为其和 $\frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2}$ (它是周期为 2π 的奇函数)

的福里叶级数, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx = \frac{q \sin x}{1-2q \cos x + q^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

$$2967. \frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2} (|q|<1).$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2} &= \frac{1-q^2}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2} \\ &= (1-q^2) \frac{1}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} \\ &= -1 + \frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{1}{1-qe^{-ix}} \\ &= -1 + (1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\dots) \\ &\quad + (1+qe^{-ix}+q^2e^{-2ix}+\dots) \\ &= 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos nx, \end{aligned}$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因而它就是函数 $\frac{1-q^2}{1-2q\cos x+q^2}$ 的福里叶级数 (在 $-\infty < x < +\infty$ 上).

$$2968. \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} (|q|<1).$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} &= \frac{1-\frac{q}{2}(e^{ix}+e^{-ix})}{1-q(e^{ix}+e^{-ix})+q^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2-qe^{ix}-qe^{-ix}}{(1-qe^{ix})(1-qe^{-ix})} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-qe^{ix}} + \frac{1}{1-qe^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2} [(1+qe^{ix}+q^2e^{2ix}+\dots) + (1+qe^{-ix} \\ &\quad + q^2e^{-2ix}+\dots)] \\ &= 1+q\cos x+q^2\cos 2x+\dots \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos nx,$$

又上式右端的级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛,因而它就是函数 $\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2}$ 的福里叶级数(在 $-\infty < x < +\infty$ 上).

2969. $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ ($|q| < 1$).

解 由于 $1-2q\cos x+q^2 \geq 1-2q+q^2 = (1-q)^2 > 0$,故 $\ln(1-2q\cos x+q^2)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数,而且是周期为 2π 的偶函数,将函数对 x 求导数,得

$$\begin{aligned} [\ln(1-2q\cos x+q^2)]' &= \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx \quad (-\infty < x < +\infty). \end{aligned}$$

对上式从0到 x 积分(由于上式中级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛,故可在有限区间上逐项积分),则有

$$\begin{aligned} &\ln(1-2q\cos x+q^2) \\ &= \int_0^x \frac{2q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} dx + 2\ln(1-q) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x q^n \sin nx dx + 2\ln(1-q) \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} + 2\ln(1-q). \end{aligned}$$

而

$$\ln(1-q) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n},$$

于是

$$\ln(1 - 2q\cos x + q^2) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \cos nx$$

$$(-\infty < x < +\infty).$$

由于右端级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛,故它就是左端函数的福里叶级数.

*)利用 2966 题的结果.

将下列无界周期函数展开成福里叶级数:

2970. $f(x) = \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right|.$

解 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数,当 $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时函数有无穷不连续点. 由于 $f(x)$ 是偶函数,从而 $b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \\ &= \frac{4}{\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right) *) = -2 \ln 2, \\ a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin \frac{x}{2} \cos nx dx \\ &= \frac{2}{n\pi} \sin nx \ln \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx \cos \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{2n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) x + \sin \left(n - \frac{1}{2} \right) x}{\sin \frac{x}{2}} dx \\ &= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} dt \\ &\quad - \frac{1}{n\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n-1)t}{\sin t} dt \end{aligned}$$

*) 利用 2353 题的结果 .

**) 利用 2291 题的结果 .

$$2971. f(x) = \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right|.$$

解 利用 2970 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| &= \ln \left| \sin \frac{\pi - x}{2} \right| \\ &= -\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(\pi - x)}{n} \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n} \\ &\quad (x \neq (2m+1)\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

$$2972. f(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$$

解 利用 2970 题及 2971 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| &= \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| - \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| \\ &= \left(-\ln 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} \right) - \left[-\ln 2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nx}{n} \right] \\ &= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1} \\ &\quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned}$$

2973. 将函数

$$f(x) = \int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

展开成福里叶级数 .

解 将函数对 x 求导数, 则得

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } f'(x) &= -\frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \cos \frac{x}{2} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \sin \frac{x}{2} \right| \end{aligned}$$

在 $(-\pi, \pi)$ 内绝对可积, 故得

$$\int_0^x \ln \sqrt{\left| \operatorname{ctg} \frac{t}{2} \right|} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^2} \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

*) 利用 2972 题的结果.

2974. 函数

$$x=x(s), y=y(s) \quad (0 \leq s \leq 4a)$$

是正方形: $0 < x < a, 0 < y < a$ 的围线的参数方程式, 其中 s 为依逆时针方向从点 $O(0,0)$ 起计算的弧长. 试将这函数展开成福里叶级数.

解 根据定义, $x(s)$ 的表达式可写为

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \leq s \leq a, \\ a, & a \leq s \leq 2a, \\ 3a-s, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 0, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是, $x(s)$ 在 $[0, 4a]$ 上的福里叶级数展开为

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + b_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) ds \\
 &= \frac{1}{2a} \left(\int_0^a s ds + \int_a^{2a} a ds + \int_{2a}^{3a} (3a-s) ds \right) \\
 &= a,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\
 &= \frac{1}{2a} \left(\int_0^a s \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right) \\
 &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right] + \left[\left(\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} - \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \left(\cos \frac{3n\pi}{2} - \cos n\pi \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{2a}{(n\pi)^2} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 - \cos \frac{3n\pi}{2} + \cos n\pi \right) \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k; \\ & (k=0, 1, 2, \dots) \\ -\frac{4a}{\pi^2 (2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} x(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\
 &= \frac{1}{2a} \left(\int_0^a s \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_a^{2a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{2a}^{3a} (3a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right) \\
 &= \frac{1}{2a} \left\{ \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \left(\frac{2a}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi}{2} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left(-\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} + \frac{6a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) \right. \\
& + \left(\frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi \right) \\
& \left. + \left(-\frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right\} \\
& = \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \\
& = \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^k}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

因此,按展开定理,注意到 $x(0) = x(4a)$, $x(s)$ 的福里叶展开式为

$$\begin{aligned}
x(s) &= \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&+ \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&\qquad\qquad\qquad (0 \leq s \leq 4a).
\end{aligned}$$

同样,根据定义, $y(s)$ 的表达式为

$$y(s) = \begin{cases} 0, & 0 \leq s \leq a, \\ s-a, & a \leq s \leq 2a, \\ a, & 2a \leq s \leq 3a, \\ 4a-s, & 3a \leq s \leq 4a. \end{cases}$$

于是, $y(s)$ 在 $(0, 4a)$ 上的福里叶级数展开为

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi s}{2a} + B_n \sin \frac{n\pi s}{2a} \right),$$

其中

$$A_0 = \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) ds = \frac{1}{2a} \left[\int_0^{2a} (s-a) ds + \int_{2a}^{3a} a ds \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{3a}^{4a} (4a-s) ds \Big) = a, \\
A_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \\
&= \frac{1}{2a} \left(\int_a^{2a} (s-a) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{2a}^{3a} a \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \cos \frac{n\pi s}{2a} ds \right) \\
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \left[\frac{2a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) - \left(-\frac{6a^2}{n\pi} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{4a^2}{n^2\pi^2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \cos \frac{3n\pi}{2} \right] \right\} \\
&= \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} - 1 + \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{-4a}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_n &= \frac{1}{2a} \int_0^{4a} y(s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \\
&= \frac{1}{2a} \left(\int_a^{2a} (s-a) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right. \\
&\quad \left. + \int_{2a}^{3a} a \sin \frac{n\pi s}{2a} ds + \int_{3a}^{4a} (4a-s) \sin \frac{n\pi s}{2a} ds \right) \\
&= \frac{1}{2a} \left\{ \left[\left(-\frac{4a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(-\frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} \right) \right] + \left[-\frac{2a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{2a^2}{n\pi} \cos n\pi \right] + \left[\left(-\frac{8a^2}{n\pi} + \frac{8a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} \right) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(-\frac{8a^2}{n\pi} - \frac{6a^2}{n\pi} \cos \frac{3n\pi}{2} - \frac{4a^2}{n^2\pi^2} \sin \frac{3n\pi}{2} \right) \Bigg\} \\
& = \frac{2a}{n^2\pi^2} \left(\sin \frac{3n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2} \right) \\
& = \begin{cases} 0, & \text{当 } n=2k, k=1, 2, 3, \dots, \\ \frac{4a(-1)^{k+1}}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当 } n=2k+1, k=0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}
\end{aligned}$$

因此,按展开定理,注意到 $y(0) = y(4a)$, 得 $y(s)$ 的福里叶级数展开为

$$\begin{aligned}
y(s) &= \frac{a}{2} - \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&\quad + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \sin \frac{(2k+1)\pi s}{2a} \\
&\qquad\qquad\qquad (0 \leq s \leq 4a).
\end{aligned}$$

2975. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 而使得它展开成福里叶级数的形状如下:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

解 由于展开式中无正弦项, 故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x) = f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$, 则按题设应有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos 2nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nxdx &= 0 \\
(n &= 0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi - x = y$, 即得

$$-\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi - y) \cos 2nydy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \cos 2nxdx = 0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [f(\pi - x) + g(x)] \cos 2nxdx = 0$$
$$(n = 0, 1, 2, \dots).$$

为要上式成立, 显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值, 恒有

$$f(\pi - x) + g(x) = 0,$$

即

$$g(x) = -f(\pi - x).$$

总之, 首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $-f(\pi - x)$; 然后, 再按偶函数延拓到 $(-\pi, 0)$. 不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$, 则由上述讨论知, 必有

$$f(-x) = f(x), f(\pi - x) = -f(x) \quad (-\pi < x < \pi).$$

2976. 应当如何把给定在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的可积函数 $f(x)$ 延展到区间 $(-\pi, \pi)$ 内, 而使得它展开成福里叶级数的形状如下:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)x \quad (-\pi < x < \pi)$$

解 由于展开式中无余弦项, 故 $f(x)$ 延拓到 $(-\pi, \pi)$ 内应满足 $f(-x) = -f(x)$. 函数 $f(x)$ 延拓到 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 的部分记以 $g(x)$, 则按题设应有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin 2nxdx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x) \sin 2nxdx = 0$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

在上式左端第一个积分中作代换 $\pi-x=y$, 即得

$$\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-y)\sin 2ny dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g(x)\sin 2nx dx = 0,$$

也即

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x) + g(x)]\sin 2nx dx = 0$$

$$(n=1, 2, \dots).$$

为要上式成立, 显然只要求对于 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内任一 x 值,

恒有

$$-f(\pi-x) + g(x) = 0,$$

即

$$g(x) = f(\pi-x).$$

总之, 首先要在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 内定义一个函数, 使它等于 $f(\pi-x)$; 然后, 再按奇函数延拓到 $(-\pi, \pi)$. 不妨将延拓到 $(-\pi, \pi)$ 上的函数仍记为 $f(x)$, 则由上述讨论知, 必有

$$f(-x) = -f(x), f(\pi-x) = f(x).$$

2977. 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内把函数

$$f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

展开: (a) 依角的奇倍数的余弦展开; (b) 依角的奇倍数的正弦展开.

绘出情形 (a) 与 (b) 的福里叶级数之和的图形.

解 (a) 利用 2975 题的结果, 延拓函数, 使有

$$f(-x) = f(x), f(\pi-x) = -f(x).$$

于是,有

$$a_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} [-f(\pi-x)] \cos(2k+1)x dx \right\}.$$

若在上式右端第二个积分中令 $\pi-x=y$, 则得到与第一个积分同样的结果, 即

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cos(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{(2k+1)\pi} x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin(2k+1)x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad - \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x dx \\ &= \frac{4}{(2k+1)^2 \pi} \left[\frac{\pi}{2} \cos(2k+1)x \right. \\ &\quad \left. - 2x \cos(2k+1)x \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad + \frac{8}{(2k+1)^2 \pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2k+1)x dx \\ &= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3 \pi} \sin(2k+1) \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{2}{(2k+1)^2} + \frac{8 \cdot (-1)^k}{(2k+1)^3 \pi} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$-2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{(2k+1)^2} - \frac{4}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4}{(2k+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{2} - 2x) \\
& \cos(2k+1)x dx \\
& = \frac{4}{(2k+1)^2\pi} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) \sin(2k+1)x \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
& + \frac{8}{(2k+1)^2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2k+1)x dx \\
& = \frac{2(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{8}{(2k+1)^3\pi} \\
& \qquad \qquad \qquad (k=0, 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

于是, $f(x)$ 的展开式为

$$\begin{aligned}
& 2 \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left[\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} + \frac{4}{(2k+1)^3\pi} \right] \sin(2k+1)x \right\} \\
& = x \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right),
\end{aligned}$$

其和的图形如图 5.8 所示.

2978. 设 $f(x)$ 是以 π 为周期的反周期函数, 即

$$f(x+\pi) = -f(x).$$

问此函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 内的福里叶级数是有怎样的特性?

解 由于

$$\begin{aligned}
a_n & = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\
& = \frac{1}{\pi} \left\{ - \int_{-\pi}^0 f(\pi+x) \cos nx dx \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx \right\} \quad (n=0, 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

故在上式右端第一个积分中令 $x+\pi=y$, 则得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(-1)^{n+1} + 1] f(x) \cos nx dx.$$

于是,得 $a_{2n}=0(n=0,1,2,\dots)$. 同理,可得 $b_{2n}=0(n=1,2,\dots)$. 因此,函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n}=0(n=0,1,2,\dots),$$

$$b_{2n}=0(n=1,2,\dots).$$

2979. 设 $f(x+\pi)=f(x)$, 则函数 $f(x)$ 在区间 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数具有怎样的特性?

解 与 2978 题类似,我们可求得

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(-1)^n + 1] f(x) \cos nx dx$$

($n=0,1,2,\dots$).

因此,有

$$a_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\dots).$$

同理,可求得

$$b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\dots).$$

即函数 $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi)$ 内的福里叶级数的特性为

$$a_{2n-1}=b_{2n-1}=0 \quad (n=1,2,3,\dots).$$

2980. 一个具周期为 2π 的函数 $y=f(x)$, 如果函数的图形:

(a) 以点 $(0,0)$, $(\pm\frac{\pi}{2},0)$ 为对称中心; (b) 以坐标原点

为对称中心及 $x=\pm\frac{\pi}{2}$ 为对称轴; 问其福里叶系数 a_n ,

$b_n(n=1,2,3,\dots)$ 具有怎样的特性?

解 (a) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x)=-f(x), f(\pi-x)=-f(x).$$

因此, $a_n=0$ ($n=0,1,2,\dots$), 且

$$b_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx dx \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{-f(\pi-x)\} \sin nx dx \} \\
& = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \sin nx dx \right. \\
& \quad \left. + (-1)^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(y) \sin ny dy \right] \\
& = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^n] f(x) \sin nx dx,
\end{aligned}$$

从而 $b_{2n-1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). 即 $f(x)$ 的福里叶级数的特性为

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots), \\
b_{2n-1} &= 0 \quad (n = 1, 2, \dots).
\end{aligned}$$

(6) 由题设函数 $f(x)$ 满足

$$f(-x) = -f(x), f(\pi-x) = f(x).$$

同(a)一样, $a_n = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 而

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 + (-1)^{n+1}] f(x) \sin nx dx,$$

故 $b_{2n} = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). 因此, $f(x)$ 的福里叶系数的特性为

$$\begin{aligned}
a_n &= 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\
b_{2n} &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).
\end{aligned}$$

2981. 如果函数 $\varphi(-x) = \psi(x)$, 问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n, b_n 与 α_n, β_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) 之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx, \\
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx,
\end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \psi(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \psi(x) \sin nx dx,$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-x}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^x \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$, 并将 $\varphi(-x) = \psi(x)$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^x \psi(x) \cos nx dx + \int_{-x}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \psi(x) \cos nx dx = a_n. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-x}^0 \varphi(x) \sin nx dx + \int_0^x \varphi(x) \sin nx dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^x \psi(x) \sin nx dx - \int_{-x}^0 \psi(x) \sin nx dx \right] \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \psi(x) \sin nx dx = -\beta_n. \end{aligned}$$

因此, $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n 的关系为

$$a_n = \alpha_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = -\beta_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

2982. 如果函数

$$\varphi(-x) = -\psi(x),$$

问 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n ($n=0, 1, 2, \dots$) 之间有何关系?

解 函数 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数分别为

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x \varphi(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) \sin nx dx;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx,$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \sin nx dx.$$

由于

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 \varphi(x) \cos nx dx + \int_0^{\pi} \varphi(x) \cos nx dx \right],$$

故在上式右端两个积分中作代换 $-x=y$, 并将

$$\varphi(-x) = -\psi(x)$$

代入, 即得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[- \int_0^{\pi} \psi(x) \cos nx dx - \int_{-\pi}^0 \psi(x) \cos nx dx \right] \\ &= - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(x) \cos nx dx = -a_n. \end{aligned}$$

同理, 有

$$b_n = \beta_n.$$

因此, $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 的福里叶系数 a_n 、 b_n 与 α_n 、 β_n 的关系为

$$a_n = -\alpha_n \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

$$b_n = \beta_n \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

2983. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 a_n 、 b_n ($n=0, 1, 2, \dots$), 试计算“平移”了的函数 $f(x+h)$ (h = 常数) 的福里叶系数 \bar{a}_n 、 \bar{b}_n ($n=0, 1, 2, \dots$).

解 在福里叶系数 \bar{a}_n 的表达式中作代换 $x+h=y$, 并注意到 $f(x)$ 的周期性, 即有

$$\bar{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h) \cos nx dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_{-x+h}^{x+h} f(y) (\cos nh \cos ny + \sin nh \sin ny) dy \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-x}^x f(x) \cos nx \cos nh dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{-x}^x f(x) \sin nx \sin nh dx \right] \\
&= a_n \cos nh + b_n \sin nh.
\end{aligned}$$

同理,可求得

$$\bar{b}_n = b_n \cos nh - a_n \sin nh.$$

2984. 已知周期为 2π 的可积分函数 $f(x)$ 的福里叶系数为 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$, 试计算斯且克洛夫函数

$$f_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$.

解 由于

$$\begin{aligned}
f_h(x+2\pi) &= \frac{1}{2h} \int_{x+2\pi-h}^{x+2\pi+h} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi = f_h(x),
\end{aligned}$$

故 $f_h(x)$ 仍为以 2π 为周期的周期函数.

于是,有(作代换 $\xi = x + y$)

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f_h(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{2\pi h} \int_{-x}^x \cos nx dx \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi h} \int_{-x}^x \cos nx dx \int_{-h}^h f(x+y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi h} \int_{-h}^h dy \int_{-x}^x f(x+y) \cos nx dx.
\end{aligned}$$

根据 2983 题的结果可知

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+y) \cos nx dx = a_n \cos ny + b_n \sin ny,$$

故

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h (a_n \cos ny + b_n \sin ny) dy \\ &= \frac{a_n}{h} \int_0^h \cos ny dy = \begin{cases} a_n, & \text{当 } n=0 \text{ 时;} \\ \frac{a_n \sin nh}{nh}, & \text{当 } n=1, 2, \dots \text{ 时.} \end{cases} \end{aligned}$$

即

$$A_0 = a_0,$$

$$A_n = \frac{a_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, \dots).$$

同理可得

$$B_n = \frac{b_n \sin nh}{nh} \quad (n=1, 2, \dots).$$

2985. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数并且 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 为其福里叶系数. 求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt$$

的福里叶系数 $A_n, B_n (n=0, 1, 2, \dots)$

利用所得的结果, 推出李雅甫诺夫等式.

解 由于

$$\begin{aligned} F(x+2\pi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+2\pi+t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt = F(x), \end{aligned}$$

故 $F(x)$ 仍是以 2π 为周期的函数. 于是, 有

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi^2} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right]^2 = a_0^2, \\
A_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) (\cos n\xi \cos nt \\
&\quad + \sin n\xi \sin nt) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [a_n f(t) \cos nt + b_n f(t) \sin nt] dt \\
&= a_n^2 + b_n^2; \\
B_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x+t) dt \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(\xi) (\sin n\xi \cos nt \\
&\quad - \cos n\xi \sin nt) d\xi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [b_n f(t) \cos nt - a_n f(t) \sin nt] dt \\
&= b_n a_n - a_n b_n = 0.
\end{aligned}$$

由 $f(x)$ 的连续性知, $F(x)$ 不仅以 2π 为周期而且是连续函数, 故按展开定理, 注意到 $B_n = 0 (n = 1, 2, 3, \dots)$, 即得

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx.$$

因此,特别地,有

$$F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n.$$

但已知

$$A_0 = a_0^2, A_n = a_n^2 + b_n^2,$$

且

$$F(0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(0+t)dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt,$$

故得

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

这就是李雅甫诺夫等式.

§ 7. 级数求和法

1° 直接求和法 若

$$u_n = v_{n+1} - v_n (n = 1, 2, \dots) \text{ 及 } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v_{\infty},$$

则

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = v_{\infty} - v_1.$$

特别是,若

$$u_n = \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m}},$$

其中数 $a_i (i = 1, 2, \dots)$ 形成以 d 为公差的等差级数,则

$$v_n = -\frac{1}{md} \cdot \frac{1}{a_n a_{n+1} \cdots a_{n+m-1}}.$$

在某些情形未知级数能表为下列已知级数的线性组合:

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2N+1} \right) = \frac{1}{2}.$$

2987. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots$

解 由 $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$, 并注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1^*$),

即得

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}.$$

*) 利用 2549 题的结果.

2988. $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

解 $\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots \\
& = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right] \right. \\
& \quad \left. + (-1)^{n+2} \frac{1}{n+1} - 1 \right\} = 2 \ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

2989. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

解 由于

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \\
& = \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)(n+3)},
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
& = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+3} \right) \\
& \quad - \frac{5}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \\
& = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) - \frac{5}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \right)^{*)} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2987 题的结果.

2990. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)}$ (m 为自然数).

解 由 $\frac{1}{n(n+m)} = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m+n} \right)$, 考虑适当的正整数 N , 并令 $N \rightarrow \infty$, 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(n+m)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{N-1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \right) \\
&= \frac{1}{m} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} \right. \\
&\quad \left. - \cdots - \frac{1}{N+m} \right) = \frac{1}{m} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \right).
\end{aligned}$$

2991. $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots$

解 由 $\frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} \right), \text{得} \\
&\quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)2n(2n+1)} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(2n-1)2n} - \frac{1}{2n(2n+1)} + \cdots \right) \\
&= \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1) *) = \ln 2 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

*) 注意原级数的绝对收敛性, 并利用 2988 题的结果.

2992. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

解 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n^2-1}$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{N+1} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

$$2993. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

解 由 $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)^{*}) = 1. \end{aligned}$$

*) 所写级数均为绝对收敛级数, 并利用 2961 题的结果(或本节前言).

$$2994. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}.$$

解 由 $\frac{1}{n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{n_1=1}^{2N+1} \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} \sum_{n_2=1}^N \frac{1}{n_2} - 1 \right) \\ &= (C + \ln N + \varepsilon_1) - 2[(C + \ln(2N+1) \\ &\quad + \varepsilon_2) - \frac{1}{2}(C + \ln N + \varepsilon_3) - 1]^{*}) \\ &= 2 \ln \frac{N}{2N+1} + \alpha + 2, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1 \rightarrow 0, \varepsilon_2 \rightarrow 0, \varepsilon_3 \rightarrow 0, \alpha = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \rightarrow 0$
(当 $N \rightarrow \infty$).

于是

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n+1)} = 2 \ln \frac{1}{2} + 2 = 2(1 - \ln 2),$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} = 2(1 - \ln 2).$

*) 利用 146 题的结果 .

$$2995. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{n^2}{n!} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 1 + 2 + \sum_{n=3}^N \frac{n^2}{n!} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{n=3}^N \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-2)!} \right) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 3 + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{1}{k!} + \sum_{l=1}^{N-2} \frac{1}{l!} \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ 2 \left(1 + \sum_{s=1}^N \frac{1}{s!} \right) + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\} \\ &= 2e. \end{aligned}$$

$$2996. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}. \end{aligned}$$

利用级数运算的性质可知, 对于绝对收敛的级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$, 有下述等式:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n,$$

$$\text{其中 } d_n = \sum_{k+l=n} \frac{1}{k!l!} = \frac{1}{n!} \sum_{k+l=n} \frac{n!}{k!l!}$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{s=0}^n C_s^n = \frac{2^n}{n!},$$

故得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \right)^2 = e^2,$$

因此,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!} = 3e^2.$$

2997. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$.

解 由 $\frac{1}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2}{n(n+1)}$, 得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{\pi^2}{6} + \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) - 2(*) = \frac{\pi^2}{3} - 3. \end{aligned}$$

*) 利用 2549 题及 2961 题的结果.

2998. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}$.

解 首先, 注意到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n^2} + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} \\ &= -\frac{3}{(n+1)^2(n+2)^2} - \frac{12n+8}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & 2 \left[\frac{1}{n^2(n+1)^2} + \frac{1}{n^2(n+1)^2} - \frac{2}{(n+1)^2(n+2)^2} \right] \\ &= \frac{12n+10}{n^2(n+1)^2(n+2)^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{2}{n(n+2)} = \frac{4}{n^2(n+2)^2} \quad (3)$$

将(1)、(2)、(3)三式相加,合并整理可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+2)} \\ & + \frac{6}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ & + \frac{2}{n^2(n+1)^2} \\ & = \frac{2}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} \end{aligned}$$

其次,先后利用 2961 题、2990 题、2987 题和 2997 题的结果,即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)^2} = \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right. \\ & + \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} - \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \\ & + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2(n+2)^2} \\ & \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2} \right\} \\ & = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right) + \frac{3}{2} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 - \frac{1}{4} \right) - \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi^2}{6} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) + 6 \cdot \frac{1}{4} - \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 - \frac{1}{4} \right) \right. \\ & \left. + 2 \left(\frac{\pi^2}{3} - 3 \right) \right\} \\ & = \frac{\pi^2}{4} - \frac{39}{16} \end{aligned}$$

2999. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!}$

解 注意到

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right),$$

$$\frac{2}{5!} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right),$$

.....

$$\frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n}{2} \left(\frac{1}{(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} \right),$$

.....

相加即得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)!} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} - \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \right)^* \\ &= \frac{1}{2} (\cos 1 - \sin 1). \end{aligned}$$

*) 由于级数绝对收敛, 从而其和与项相加的顺序无关.

$$3000. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2}$$

解 考虑部分和

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} \\ &= \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^n}{3} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \frac{1}{3} \sum_{l=4}^{N+2} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{1}{3} \left(-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
&\quad + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{2}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\
&= \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} + O\left(\frac{1}{N}\right),
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + n - 2} &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{2}{3} \ln 2 - \frac{5}{18} \\
&= \frac{1}{18} (12 \ln 2 - 5).
\end{aligned}$$

3001. 设 $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$. 求级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n$$

的和.

解 令 $P(n) = a_0 + a_1n + \cdots + a_m n^m$

$$\equiv a_0 + a_1n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1),$$

其中 $a_i (i = 0, 1, \cdots, m)$ 可由上述恒等式求出, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0 + a_1n + \cdots + a_m n(n-1)\cdots(n-m+1)}{n!} x^n \\
&= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} + a_1 x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots \\
&\quad + a_m x^m \cdot \sum_{n=m}^{\infty} \frac{x^{n-m}}{(n-m)!} \\
&= a_0 e^x + a_1 x e^x + \cdots + a_m x^m e^x
\end{aligned}$$

$$3003. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n.$$

解 由 $\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{(n+1)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} (-x)^n \\ &= \frac{1}{2}(-x) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &\quad - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x}{2} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n-2}}{(n-2)!} \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= -\frac{x}{2} + x^2 e^{-x} (e^{-x} - 1 + x) \\ &\quad + \frac{1}{x} \left(e^{-x} - 1 + x - \frac{x^2}{2!} \right) \\ &= e^{-x} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

$$3004. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n}.$$

解 由 $\frac{2n^2+1}{(2n)!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-2)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2n-1)!} + \frac{1}{(2n)!}$, 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n^2 + 1)}{(2n)!} x^{2n} &= 1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-2)!} x^{2n} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)!} x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 - \frac{x^2}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2} - \frac{x}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - 1 \\
&= 1 - \frac{x^2}{2} \cos x - \frac{x}{2} \sin x + \cos x - 1 \\
&= \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \cos x - \frac{x}{2} \sin x.
\end{aligned}$$

3005. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!}$

解 1) 若 $x=0$, 则级数的和显然为零.

2) 若 $x>0$, 记 $t=\sqrt{x}$. 考虑部分和, 并注意: 当任意固定 x 时, 某些常见幂级数的收敛性, 下述记号 $o(1)$ 是指当 $N \rightarrow \infty$ 时的无穷小. 于是有

$$\begin{aligned}
S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 t^{2n}}{(2n+1)!} = \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n)^2 - 1}{(2n+1)!} t^{2n+1} \\
&\quad + \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \frac{1}{4t} \sum_{n=0}^N \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} t^{2n+1} + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4t} \left[t^2 \sum_{n=1}^N \frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!} - t \sum_{n=0}^N \frac{t^{2n}}{(2n)!} \right] + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4t} (t^2 \operatorname{sh} t - t \operatorname{ch} t + o(1)) + \frac{1}{4t} \operatorname{sh} t + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{t^2 + 1}{t} \operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t \right) + o(1) \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right) + o(1).
\end{aligned}$$

因此, 当 $x>0$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} - \operatorname{ch} \sqrt{x} \right).$$

3) 若 $x < 0$, 记 $y = \sqrt{|x|}$, 则 $x = -y^2$. 与上述讨论类似, 有

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 (-1)^n y^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n [(2n)^2 - 1] y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &\quad + \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{4y} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n (2n-1)(2n+1)}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\ &\quad + \frac{1}{4y} \operatorname{siny} + o(1) \\ &= \frac{1}{4y} \left(y^2 \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n y^{2n-1}}{(2n-1)!} - y \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4y} \operatorname{siny} + o(1) \\ &= \frac{1}{4y} [-y^2 \operatorname{siny} - y \operatorname{cosy} + o(1)] + \frac{1}{4y} \operatorname{siny} + o(1) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{-y^2 + 1}{y} \operatorname{siny} - \operatorname{cosy} \right) + o(1) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{|x|}} - \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right) + o(1). \end{aligned}$$

因此, 当 $x < 0$ 时,

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(2n+1)!} \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{x+1}{\sqrt{x}} \sin \sqrt{|x|} - \cos \sqrt{|x|} \right). \end{aligned}$$

利用逐项微分法求级数的和:

$$3006. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $x=1$ 时, 级数发散; 当 $x=-1$ 时, 级数收敛. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

当 $|x| < 1$ 时, 逐项微分之, 得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}.$$

由于 $f(0) = 0$, 故得

$$f(x) = \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1). \quad (1)$$

由上述幂级数在 $x=-1$ 的收敛性, 且其和为 $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$, 利用亚伯耳定理知, 上述结果(1)当 $-1 \leq x < 1$ 时成立.

$$3007. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

解 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{n(2n-1)} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 级数绝对收敛. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1]$.

当 $x \in (-1, 1]$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}.$$

当 $|x| < 1$ 时, 逐项微分之, 得

$$f'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} = 2 \operatorname{arctg} x^*).$$

由于 $f(0) = 0$, 故得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = 2 \int_0^x \operatorname{arctg} t dt \\ &= 2x \operatorname{arctg} x - 2 \int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= 2x \operatorname{arctg} x - \ln(1+x^2). \end{aligned} \quad (1)$$

当 $|x| = 1$ 时, 级数为

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{4}^{**}) - \ln 2 \\ &= \frac{\pi}{2} - \ln 2, \end{aligned}$$

利用亚伯耳定理知, 上述结果(1) 包括端点在内也成立, 即当 $-1 \leq x \leq 1$ 时, (1) 式成立.

*) 利用 2907 题的结果.

**) 利用 2938 题的结果.

3008.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+5}{4n+1} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x| = 1$ 时, 级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}.$$

逐项微分之,得

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$

由于 $f(0) = 0$, 故得

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt \\ &= \int_0^x \frac{dt}{1-t^4} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1-t^2} + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad (|x| < 1). \end{aligned}$$

3009.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n \quad (d > 0).$$

解 首先, 应设

$$a \neq -md \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

因为否则, 若 $a = -md$ (m ——某正整数或零), 则原级数从 $m+1$ 项开始恒为零, 此时原级数为一多项式

$$\sum_{n=1}^m \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n,$$

它对任何 x 均收敛.

令

$$a_n = \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)d}{a+nd} = 1,$$

故收敛半径为 1. 以下先设 $|x| < 1$ 求原级数的和, 最后再考虑端点 $x = \pm 1$ 时的情形.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n.$$

逐项微分之, 得,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot d \cdot 2d \cdots (n-1)d} x^{n-1}.$$

以 $(1-x)$ 乘上式两端, 得 $(1-x)f'(x)$

$$= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+d)\cdots[a+(n-1)d]}{d \cdot 2d \cdots nd} x^n$$

$$= \frac{a}{d} + \frac{a}{d} f(x).$$

上述方程系一阶线性方程:

$$f'(x) - \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x} f(x) = \frac{a}{d} \cdot \frac{1}{1-x}.$$

解之, 得

$$f(x) = C(1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1 \quad (-1 < x < 1),$$

其中 C 为常数. 由于 $f(0) = 0$, 故得 $0 = C - 1$, 即 $C = 1$. 于是, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = (1-x)^{-\frac{a}{d}} - 1. \quad (1)$$

最后, 考虑端点 $x = \pm 1$ 的情形, 先考虑 $x = 1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. 由于当 n 充分大时, $a + nd > 0$, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(d-a)n}{a+nd} = \frac{d-a}{d}.$$

于是, 根据拉阿伯判别法可知, 当 $a < 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 当 $a > 0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 发散; 但当 $a > 0$ 时, $a_n > 0$. 由此可知: 当 $a < 0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 当 $a > 0$

时 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

再考虑 $x = -1$. 此时原级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. 当 $a < 0$ 时, 前面已证 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

下设 $a > 0$, 若 $a \geq d$, 则

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} \leq 1,$$

故

$$a_{n+1} \geq a_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

于是, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 的通项不趋于零, 因此它发散.

下设 $0 < a < d$. 于是有

$$\begin{aligned} \ln a_n &= \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{a + (k-1)d}{kd} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

由于 $0 < a < d$, 故 $\ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) < 0$ ($k = 1, 2, 3, \dots$).

注意到

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) \Big/ \left(-\frac{d-a}{kd} \right) = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right)$ 发散,

从而(它的每一项都是负的)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{d-a}{kd} \right) = -\infty.$$

于是, 根据(2)式即知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (3)$$

另外,因 $0 < a < d$, 有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)d}{a+nd} > 1,$$

故

$$a_n > a_{n+1} > 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4)$$

于是,由(3)式及(4)式,根据莱布尼兹判别法知,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ 收敛.}$$

综上所述,并根据幂级数的亚伯耳定理,即知:当 $a < 0$ 时,原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x \leq 1$,且在其上,公式(1)成立;当 $0 < a < d$ 时,原幂级数的收敛域为 $-1 \leq x < 1$,且在其上,公式(1)成立;当 $a \geq d$ 时,原幂级数的收敛域为 $-1 < x < 1$,且在其上,公式(1)成立.

3010. $\frac{1}{3} \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} \left(\frac{x}{2} \right)^2 + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} \left(\frac{x}{2} \right)^3 + \dots$

解 记 $a_n = \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \cdot \frac{1}{2^n}$, 由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3n+3)}{3n+1} = 2,$$

故收敛半径为 2. 先对 $|x| < 2$ 求级数的和,然后再考虑端点 $x = \pm 2$ 的情况.

当 $x \in (-2, 2)$ 时,令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdots 3n} \left(\frac{x}{2} \right)^n.$$

逐项微分之,得

由于 $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{3n+3}{3n+1} > 1$,

故

$$b_n > b_{n+1} > 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (2)$$

另外,

$$\ln b_n = \sum_{k=1}^n \ln \frac{3k-2}{3k} = \sum_{k=1}^n \ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right).$$

由于 $\ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right) < 0$ ($k=1, 2, 3, \dots$), 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right)}{-\frac{2}{3k}} = 1,$$

而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 故级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right)$ 发散, 并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{3k} \right) = -\infty.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln b_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0. \quad (3)$$

由(2)式及(3)式, 根据莱布尼兹判别法知, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \text{ 收敛.}$$

综上所述, 并利用幂级数的亚伯耳定理, 即知: 原幂级数的收敛域为 $-2 \leq x < 2$, 且在其上, 公式(1)成立.

利用逐项积分法求级数的和:

$$3011. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 由于 $n^2 \rightarrow \infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}.$$

逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n^2 t^{n-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

于是, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = \left[\frac{x}{(1-x)^2} \right]' = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

*) 利用 2911 题的结果.

$$3012. \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+3)} = 1$, 故收敛半径为 1. 当 $|x|=1$ 时, 由于 $n(n+2) \rightarrow \infty$, 故级数发散. 因此, 级数的收敛域为 $(-1, 1)$.

当 $x \in (-1, 1)$ 时, 令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^n \\ &= x \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1} \end{aligned}$$

$$=xg(x),$$

其中 $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2)x^{n-1}$. 由于

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} n(n+2) \int_0^x t^{n-1} dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n + 2 \sum_{n=1}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \quad *) + \frac{2x}{1-x} = \frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

故 $g(x) = [G(x)]' = \left[\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2} \right]' = \frac{3-x}{(1-x)^3}$. 因此, 当 $|x| < 1$ 时,

$$f(x) = xg(x) = \frac{x(3-x)}{(1-x)^3}.$$

*) 利用 2911 题的结果.

3013.
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

解 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{2n+3} = +\infty$,

故级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时, 令

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!}.$$

逐项积分之, 得

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(2n+1)t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!} \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = xe^{x^2}. \end{aligned}$$

于是, 当 $|x| < +\infty$ 时,

$$f(x) = (xe^{x^2})' = e^{x^2}(1+2x^2).$$

注 本题也可直接求级数的和. 事实上,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \right) x^{2n} \\ &= 1 + 2x^2 e^{x^2} + (e^{x^2} - 1) \\ &= e^{x^2}(1+2x^2). \end{aligned}$$

对于本题, 还可用逐项微分法求级数的和. 事实上,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(2n+1)}{(n-1)!} x^{2n-1} \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[2(n-1)+1]+2}{(n-1)!} x^{2(n-1)+1} \\ &= 2x \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{m!} x^{2m} + 4x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} \\ &= 2xf(x) + 4xe^{x^2}, \end{aligned}$$

解一阶线性微分方程

$$f'(x) - 2xf(x) = 4xe^{x^2},$$

得

$$f(x) = e^{x^2}(2x^2 + C).$$

由于 $f(0) = 1$, 故得 $1 = 1(2 \cdot 0 + C)$, 即 $C = 1$, 于是, 当 $x \in (-\infty, +\infty)$ 时,

$$f(x) = e^{x^2}(2x^2 + 1).$$

利用亚伯耳方法, 求下列级数的和:

3014. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots$

解 级数

$$x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots$$

的收敛域为 $(-1, 1)$. 当 $|x| < 1$ 时, 令

$$f(x) = x - \frac{x^4}{4} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} + \dots.$$

逐项微分之, 得

$$f'(x) = 1 - x^3 + x^6 - x^9 + \dots = \frac{1}{1+x^3}.$$

由于 $f(0) = 0$, 故有

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x f'(t) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} \\ &= \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \\ &\quad + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

由亚伯耳定理, 即得

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots &= \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) \\ &= f(1) = \frac{1}{3} \ln 2 + \frac{\pi}{\sqrt[3]{3}}. \end{aligned}$$

*) 利用 1881 题的结果.

3015. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots.$

解 级数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

的收敛域为 $[-1, 1]$, 利用 2907 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots.$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{arctg} x$$

$$= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

3016. $1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots$

解 级数

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \dots$$

的收敛域为 $(-1, 1)$. 利用 2910 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3017. $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$

解 级数

$$x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

的收敛域为 $(-1, 1)$. 利用 2870 题的结果知, 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 有

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \dots$$

由亚伯耳定理, 即得

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

求下列三角级数的和:

3018. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$.

解 注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \ln \frac{1}{1-z},$$

其中 $z=e^{ix}$, 以及

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{1-z} &= -\ln(1-\cos x - i\sin x) \\ &= -\frac{1}{2} \ln(2-2\cos x) + i \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1-\cos x} \quad *) \\ &= -\ln \left| 2\sin \frac{x}{2} \right| + i \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1-\cos x} \end{aligned} \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \quad (2)$$

比较(1), (2)两式实数部分及虚数部分, 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n} = -\ln \left| 2\sin \frac{x}{2} \right| \quad (0 < x < 2\pi) \quad (3)$$

及

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} &= \operatorname{arctg} \frac{\sin x}{1-\cos x} \\ &= \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi-x}{2} \right) \\ &= \frac{\pi-x}{2} \quad (0 < x < 2\pi). \end{aligned}$$

*) 其中用到 $\ln z = \ln(|z|e^{i\arg z}) = \ln|z| + i\arg z$.

若 $z=x+iy$, 则 $\ln|z| = \frac{1}{2} \ln(x^2+y^2)$, 而 $\arg z =$

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

$$3019. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}.$$

解 参看 3018 题中的结果(3).

$$3020. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n}.$$

解 利用积化和差公式及 3019 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-\alpha)}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x+\alpha)}{n} \\ &= -\frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x-\alpha}{2} \right| + \frac{1}{2} \ln \left| 2 \sin \frac{x+\alpha}{2} \right| \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sin \frac{x+\alpha}{2}}{\sin \frac{x-\alpha}{2}} \right|, \end{aligned}$$

上式的存在域为 $0 < x - \alpha < 2\pi$ 及 $0 < x + \alpha < 2\pi$ 的公共部分, 可视 α 之正负号而定: 当 $\alpha > 0$ 时为 $\alpha < x < 2\pi - \alpha$; 当 $\alpha < 0$ 时为 $-\alpha < x < 2\pi + \alpha$.

$$3021. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

解 利用半角公式、积化和差公式以及 3018 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha \sin nx}{n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\alpha \sin nx}{n} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x+2\alpha)}{n} \\ - \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(x-2\alpha)}{n}.$$

下面分三种情况求此级数的和 S ：

(1) 取 $0 < x < 2\pi$, $0 < x - 2\alpha < 2\pi$ 与 $0 < x + 2\alpha < 2\pi$ 的公共部分, 即 $2\alpha < x < 2\pi - 2\alpha$. 此时, 级数的和为

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} - \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8} \\ = 0$$

(2) 当 $0 < x < 2\alpha$ 时,

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha)}{8} + \frac{\pi-(2\alpha-x)}{8} \\ = \frac{\pi}{4}.$$

(3) 当 $2\pi - 2\alpha < x < 2\pi$ 时,

$$S = \frac{\pi-x}{4} - \frac{\pi-(x+2\alpha-2\pi)^{*}}{8} \\ - \frac{\pi-(x-2\alpha)}{8} = -\frac{\pi}{4}.$$

*) 由于 $2\pi < x + 2\alpha < 3\pi$, 故可令

$$x + 2\alpha = 2\pi + \theta \quad (0 < \theta < \pi),$$

则有

$$\sin n(x+2\alpha) = \sin n(2\pi + \theta) = \sin n\theta,$$

从而以 $\theta = x + 2\alpha - 2\pi$ 代替 3018 题的结果中的 x 即可.

3022.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

解 记

中令 $z = -e^{ix}$, 并注意幅角主值的取法, 就有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} \quad (|x| < \pi) \quad (1)$$

及

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n} = -\ln\left(2\cos\frac{x}{2}\right). \quad (2)$$

由于

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right),$$

故有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n+1} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(m+1)x}{m} \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(m-1)x}{m} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m} [\cos(m-1)x \\ & \quad - \cos(m+1)x] - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cos x\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{m} \sin mx \sin x \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\cos x}{2}\right) - \frac{x}{2} \sin x \quad (|x| < \pi). \end{aligned}$$

3024. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

解 记

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},$$

显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ 在 $-\infty < x < +\infty$ 上一致收敛, 故 $F(x)$ 是 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数, 而且是以 2π 为周期的周期函数. 因此, 只要求 $F(x)$ 在 $|x| \leq \pi$ 上的值. 易知

$$2\sin x \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x = 1 - \cos 2nx.$$

故当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ ($0 < \tau < \frac{\pi}{2}$ 是任意的) 时, 有

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \sin(2k-1)x \right| \leq \frac{1}{\sin \tau}.$$

于是, 根据迪里黑里判别法知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$ 在 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ 上一致收敛. 从而, 由逐项求导数法则知: 当 $\tau \leq x \leq \pi - \tau$ 时, 有

$$F'(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = -\frac{\pi}{4} \quad (1)$$

由 τ 的任意性知(1)式当 $0 < x < \pi$ 时成立. 于是,

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + C \quad (0 < x < \pi) \quad (2)$$

其中 C 是某常数. 由 $F(x)$ 在 $x=0$ 的连续性以及

$$F(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (**),$$

在(2)式中令 $x \rightarrow +0$ 取极限, 即得 $C = \frac{\pi^2}{8}$, 于是

$$F(x) = -\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi^2}{8} \quad (0 \leq x < \pi).$$

由此,再注意到 $F(x)$ 是偶函数及连续函数,得

$$F(x) = \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi}{4} |x| \quad (|x| \leq \pi).$$

*) 利用 3022 题的结果.

**) 利用 2961 题的结果.

$$3025. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)}.$$

解 由于

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

故得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin nx}{n(n+1)} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n+1} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin(m-1)x}{m} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} - \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\sin mx}{m} \cos x \\ & \quad + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{\cos mx}{m} \sin x \\ &= -(1+\cos x) \left(-\frac{x}{2} \right) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right)^{**)} \\ &= \frac{x}{2} (1+\cos x) - \sin x \cdot \ln \left(2 \cos \frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

($|x| < \pi$)

*) 利用解 3023 题时的(1)、(2)两式.

$$3026. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$$

解 令 $z = e^{ix}$, 考虑级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z.$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}, \\ e^z &= e^{\cos x + i \sin x} \\ &= e^{\cos x} [\cos(\sin x) + i \sin(\sin x)], \end{aligned}$$

故按实部和虚部分别各自相等的关系, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin x) \quad (|x| < +\infty).$$

3027. 作曲线

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2} = 0$$

的图形

解 记

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx \cdot \sin ny}{n^2},$$

注意到 $f(x, y)$ 对 x, y 分别均为以 2π 为周期的周期函数, 故可考虑下列定义域:

$$R = \{0 \leq x < 2\pi, 0 \leq y < 2\pi\},$$

为研究 $f(x, y) = 0$ 的图形, 要用到下列函数:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} \quad (|t| < +\infty).$$

为求 $g(t)$, 考虑 $g'(t)$, 仿 3024 题的办法可知可逐项求导数, 再注意到 3022 题求解过程中的关系, 有

$$g'(t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

$$= -(\operatorname{sgn} t) \frac{\pi - |t|}{2} \quad (0 < |t| < 2\pi).$$

注意常数 $g(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 于是得

$$\begin{aligned} g(t) &= g(0) + \int_0^t g'(t) dt \\ &= g(0) - \frac{\pi}{2} |t| + \frac{1}{4} t^2. \end{aligned}$$

由于

$$\sin nx \cdot \sin ny = \frac{1}{2} [\cos n(x-y) - \cos n(x+y)],$$

故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n(x-y) - \cos n(x+y)}{n^2} \\ &= \frac{1}{2} [g(x-y) - g(x+y)] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[g(0) - \frac{\pi}{2} |x-y| + \frac{1}{4} (x-y)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[g(0) - \frac{\pi}{2} |x+y| + \frac{1}{4} (x+y)^2 \right] \right\} \\ &= \frac{\pi}{4} (|x+y| - |x-y|) \\ &\quad + \frac{1}{8} [(x-y)^2 - (x+y)^2] \\ &= \frac{\pi}{4} \cdot 2 \min\{x, y\} + \frac{1}{8} (-4xy) \\ &= \frac{1}{2} [\pi - \max\{x, y\}] \cdot \min\{x, y\}. \end{aligned}$$

若 $x \leq y$, 则令 $f(x, y) = 0, (x, y) \in R$, 有

$$x(\pi - y) = 0,$$

得 $x = 0$ 或 $y = \pi$. 若 $x \geq y$, 则令 $f(x, y) = 0$,

$(x, y) \in R$, 有

$$y(\pi - x) = 0,$$

得 $y=0$ 或 $x=\pi$. 因此, 在 R 内, $x=0, x=\pi; y=0, y=\pi$ 诸直线是满足 $f(x, y)=0$ 的图形.

又根据 $f(x, y)$ 的表达式知, 图形必然是按 x 及按 y 以 2π 为周期的周期曲线, 故得

$$x = l\pi, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$y = m\pi, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

诸直线均为 $f(x, y)=0$ 的图形, 且除此而外, 均有 $f(x, y) \neq 0$, 即不是 $f(x, y)=0$ 的图象. 因此, $f(x, y)=0$ 的图形即为上述所指的两族直线组. 由于这是两族分别与坐标轴平行且相距为 π 的直线族, 它们的图形已为大家所熟知, 故省略.

求下列级数的和:

3028.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} (2x)^{2n+2} & \bigg/ \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 x^2}{(2n+2)(2n+1)} = x^2, \end{aligned}$$

故原幂级数当 $|x| < 1$ 时收敛, 当 $|x| > 1$ 时发散, 即其收敛区间为 $(-1, 1)$. 当 $|x|=1$, 原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2 4^n}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

由于

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \frac{3n+1}{2n} \rightarrow \frac{3}{2} > 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

故由拉阿伯判别法知,当 $|x|=1$ 时原幂级数也收敛. 因此,原幂级数当 $-1 \leq x \leq 1$ 时一致收敛. 从而其和函数 $f(x)$ 是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数,且在 $-1 < x < 1$ 上可逐项微分,得

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2x)^{2n-1} \quad (-1 < x < 1),$$

$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \quad (-1 < x < 1).$$

于是

$$\begin{aligned} & -xf(x) + (1-x^2)f''(x) \\ = & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2x)^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} \\ & \cdot 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 2n(2n-1)(2x)^{2n} \\ = & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2(2x)^{2n} + 4 \\ & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 8n(2n-1)(2x)^{2n-2} \\ = & -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n^2(2x)^{2n} + 4 \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 8(n+1)(2n+1)(2x)^{2n} = 4 \end{aligned} \quad (-1 < x < 1).$$

因此

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}f(x) + \sqrt{1-x^2}f''(x)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1),$$

两端积分,得

$$\sqrt{1-x^2} f'(x) = 4 \arcsin x + C \quad (-1 < x < 1).$$

由 $f(0) = 0$, 得 $C = 0$, 从而

$$f'(x) = \frac{4 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1).$$

两端再积分,得

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2 + C_1 \quad (-1 < x < 1).$$

再由 $f(0) = 0$, 得 $C_1 = 0$. 于是, 有

$$f(x) = 2(\arcsin x)^2 \quad (-1 < x < 1).$$

再注意到上式两端都是 $-1 \leq x \leq 1$ 上的连续函数, 通过取极限, 即知上式当 $x = 1$ 和 $x = -1$ 时也成立, 故最后得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n} = 2(\arcsin x)^2 \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

3029. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$

解 由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \bigg/ \frac{(n!)^2}{(2n)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

故原幂级数的收敛半径等于 4, 即它当 $|x| < 4$ 时收敛, 当 $|x| > 4$ 时发散. 当 $x = \pm 4$ 时, 原幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (\pm 4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

由于

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{2n+2}{2n+1} > 1,$$

故 $|a_{n+1}| > |a_n|$ ($n=0, 1, \dots$), 因此 a_n 不趋于零, 从而级数(1)发散. 于是, 原幂级数仅当 $|x| < 4$ 时收敛, 下面分两种情形讨论:

当 $0 \leq x < 4$ 时, 令 $x = (2t)^2$, $0 \leq t < 1$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} (2t)^{2n} \\ &= F(t). \quad (0 \leq t < 1). \end{aligned}$$

由直接计算, 易知

$$(1-t^2)F(t) - 1 = \frac{t}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} 4n(2t)^{2n-1} \quad (0 \leq t < 1).$$

利用 3028 题的结果, 得

$$\begin{aligned} (1-t^2)F(t) - 1 &= \frac{t}{4} [2(\arcsin t)^2]' \\ &= \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \quad (0 \leq t < 1), \end{aligned}$$

从而

$$F(t) = \frac{1}{1-t^2} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \arcsin t \right) \quad (0 \leq t < 1).$$

将 $t = \frac{\sqrt{x}}{2}$ 代入, 即得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{4}{4-x} + \frac{4\sqrt{x}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\sqrt{x}}{2} \quad (0 \leq x < 4).$$

现设 $-4 < x < 0$. 令

$$x = -(2t)^2, \quad 0 < t < 1.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\
& = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n+2)!} 2(n+1)(2n+1)(2t)^{2n} \\
& \quad + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} n^2 (2t)^{2n} \\
& = 1 \quad (-1 < t < 1),
\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{1+t^2} g'(t) + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad (-1 < t < 1).$$

两端积分,得

$$\sqrt{1+t^2} g(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}) + C \quad (-1 < t < 1).$$

由 $g(0) = 0$, 知 $C = 0$, 故

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) \quad (-1 < t < 1).$$

于是, 根据关系式

$$G(t) = \frac{1}{1+t^2} [1 - t \cdot g(t)] \quad (0 < t < 1),$$

再将 $t = \frac{\sqrt{-x}}{2} = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$ 代入, 得

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n & = \frac{4}{4-x} - \frac{4\sqrt{|x|}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} \\
& \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{4-x}}{2}\right) \quad (-4 < x < 0).
\end{aligned}$$

3030. $\frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$

解 显然, 要使本题有意义, 首先要假定 x 不是负整数. 记

$$s_n = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

为研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ 的收敛性及其和, 注意当 $x \neq 1$ 时, 有关系式

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= \frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+1} \left(1 + \frac{2}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x-1} \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \left(\frac{x+2}{x-1}\right) \\ &= \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+1} \cdot \frac{2}{x+2} \cdot \frac{3}{x-1} \\ &= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \\ &\quad + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} \cdot \frac{4}{x-1} \\ &= \dots \\ &= \frac{1!}{x+1} + \frac{2!}{(x+1)(x+2)} + \frac{3!}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots \\ &\quad + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} + \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} \\ &\quad \cdot \frac{n+1}{x-1} = s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} R_n &= s_n \cdot \frac{n+1}{x-1} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{x+k} \\ &= \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n \frac{1 + \frac{1}{k}}{1 + \frac{x}{k}} = \frac{1}{x-1} \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k), \end{aligned}$$

这里(当 k 充分大时)

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1 + \frac{1}{k}}{1 + \frac{x}{k}} - 1 = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left(1 + \frac{x}{k}\right)^{-1} - 1 \\ &= \frac{1-x}{k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

由(1)式知,为研究 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 就是要研究 R_n 有无极限. 若 R_n 有极限为 τ , 则由(1)得

$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x-1} - R_n\right) = \frac{1}{x-1} - \tau.$$

令 $u_n = \prod_{k=1}^n (1 + \alpha_k)$. 分两种情形讨论:

若 $x > 1$, 这时

$$0 < 1 + \alpha_k = \frac{k+1}{x+k} < 1 \quad (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \ln u_n &= \sum_{k=1}^n \ln(1 + \alpha_k), \quad \ln(1 + \alpha_k) < 0, \\ \alpha_k < 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots), \quad \alpha_k \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3)$$

由(2)式与(3)式并注意到 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ 收敛, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散知:

$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k = -\infty$. 于是, 根据

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \alpha_k)}{\alpha_k} = 1$$

即知级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k)$ 发散且 $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_k) = -\infty$.

由此知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = -\infty,$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

故
$$\sum_{k=1}^{\infty} s_k = \frac{1}{x-1}.$$

若 $x < 1$. 注意, 已设 x 不是负整数. 另外, 当 $x = 0$ 时原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} 1$, 显然发散, 故可设 $-m < x < -m+1$,

其中 m 是某非负整数. 于是

$$1 + a_k = \frac{k+1}{x+k} < 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m-1),$$

$$1 + a_k = \frac{k+1}{x+k} > 0 \quad (k = m, m+1, \dots).$$

令 $v_n = \prod_{k=m}^n (1 + a_k)$ ($n = m, m+1, \dots$), 则

$$\ln v_n = \sum_{k=m}^n \ln(1 + a_k) \quad (n = m, m+1, \dots).$$

根据(2)式知, 当 k 充分大时 $a_k > 0$ 并且级数 $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ 发

散. 仿照前面的论述可知级数 $\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1 + a_k)$ 发散, 且

$\sum_{k=m}^{\infty} \ln(1 + a_k) = +\infty$. 从而当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\ln v_n \rightarrow +\infty$,

$v_n \rightarrow +\infty$; 由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \pm \infty,$$

其中的正、负号随 m 是 $2, 4, 6, \dots$ 之一或 $0, 1, 3, 5, \dots$ 之一而定. 由此可知, 此时 $\sum_{k=1}^{\infty} s_n$ 发散.

另外, 若 $x = 1$, 原级数为 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1}$, 显然发散.

综上所述, 可知原级数仅当 $x > 1$ 时收敛, 且此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = \frac{1}{x-1}.$$

3031. $\frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots$ 在 $x > 0, a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$

同级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散的条件下.

解 记

$$s_n = \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

注意条件 $x > 0, a_n > 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{x} &= \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2+x}{x} = \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{x} \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdot \frac{a_3}{x} \\ &= \dots \\ &= \frac{a_1}{a_2+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} + \dots + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \\ &\quad \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} + \frac{a_1}{a_2+x} \cdot \frac{a_2}{a_3+x} \cdots \frac{a_{n-1}}{a_n+x} \\ &\quad \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{x} = s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned}
 R_n &= \frac{a_{n+1}}{x} s_n = \frac{a_1}{x} \cdot \frac{a_2}{a_2+x} \cdot \frac{a_3}{a_3+x} \cdots \frac{a_n}{a_n+x} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+x} \\
 &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{a_k+x} = \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{x}{a_k+x} \right) \\
 &= \frac{a_1}{x} \prod_{k=2}^{n+1} (1 + a_k), \tag{2}
 \end{aligned}$$

这里

$$a_k = -\frac{x}{a_k+x} \quad (k=2, 3, \dots, n+1). \tag{3}$$

由(1)知,为研究原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$,就是要研究 R_n 有无极限.若 R_n 有极限 τ ,则由(1)得

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{\infty} s_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n s_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{x} - R_n \right) \\
 &= \frac{a_1}{x} - \tau. \tag{4}
 \end{aligned}$$

下面我们证明 R_n 有极限 $\tau = 0$. 显然

$$-1 < a_k < 0, 0 < 1 + a_k < 1 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

令 $u_n = \prod_{k=2}^{n+1} (1 + a_k)$, 则

$$\ln u_n = \sum_{k=2}^{n+1} \ln(1 + a_k).$$

易知正项级数

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k+x}$$

是发散的.事实上,由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 的发散性,可将 a_k 分为以下情况来讨论:1)若 $a_k \geq x (k = 2, 3, \dots)$, 则

$$a_k + x \leq 2a_k \text{ 即 } \frac{1}{a_k + x} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a_k}.$$

由 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ 发散(无界)便知 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散. 2) 若除有限个 a_k 之外均有 $a_k \geq x$ (k 取除了某些有限个正整数以外的所有自然数), 则仍有上述结论. 3) 若存在一个数列 a_{k_i} 使得 $a_{k_i} < x$ ($i = 1, 2, 3, \dots$), 则我们有

$$a_{k_i} + x < 2x \text{ 即 } \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{1}{2x} (i = 1, 2, \dots).$$

显然, 有

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{a_{k_i} + x} > \frac{N}{2x} \rightarrow +\infty \quad (\text{当 } N \rightarrow \infty),$$

于是, 级数 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x}$ 发散.

从而

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{a_k + x} = +\infty, \quad \sum_{k=2}^{\infty} a_k = -\infty.$$

注意到 $-1 < a_k < 0$,

$$\ln(1 + a_k) < a_k < 0 \quad (k = 2, 3, \dots),$$

可知

$$\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 + a_k) = -\infty.$$

由此可知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\ln u_n \rightarrow -\infty, u_n \rightarrow 0, R_n \rightarrow 0.$$

于是原级数收敛, 且

$$\frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1}{a_2 + x} \cdot \frac{a_2}{a_3 + x} + \dots = \frac{a_1}{x}.$$

3032*). $\frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^8} + \dots$, 若 (a) $|x| < 1$;

(6) $|x| > 1$.

解 记

$$s_n = \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} \quad (n=0, 1, 2, \dots; |x| \neq 1).$$

注意, 当 $|x| \neq 1$ 时, 有公式

$$\begin{aligned} \frac{x}{1-x} &= \frac{x}{1-x^2}(1+x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^2} \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4}(1+x^2) \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \frac{x^4}{1-x^4} = \dots \\ &= \frac{x}{1-x^2} + \frac{x^2}{1-x^4} + \dots + \frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}} + \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}} \\ &= s_1 + s_2 + \dots + s_n + R_n, \end{aligned}$$

其中

$$R_n = \frac{x^{2^{n+1}}}{1-x^{2^{n+1}}}.$$

上述恒等式对任何 n 均成立. 为求 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$, 我们分两种情况予以处理:

(a) 当 $|x| < 1$ 时, 显然

$$R_n = \frac{|x|^{2^{n+1}}}{1-|x|^{2^{n+1}}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

于是得

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) = \frac{x}{1-x}.$$

(b) 当 $|x| > 1$ 时, 由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} = 0$$

得

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} R_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|^{2^{n+1}}}{1 - |x|^{2^{n+1}}} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{|x|} \right)^{2^{n+1}} - 1} \right\} \\ &= -1. \end{aligned}$$

从而得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N s_k = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1-x} - R_N \right) \\ &= \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{1}{1-x}. \end{aligned}$$

*) 本题第三项前原题为减号, 应为加号.

3033. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$, 若 (a) $|x| < 1$; (b) $|x| > 1$.

解 记

$$s_n = \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} \quad (n = 1, 2, \dots; |x| \neq 1).$$

考虑

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^n} - \frac{1}{1-x^{n+1}} &= \frac{x^n(1-x)}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} \\ &\cdot \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \frac{1-x}{x} s_n \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \frac{1-x}{x} s_k &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} - \sum_{k=1}^N \frac{1}{1-x^{k+1}} \\ &= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1-x^{N+1}}, \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = 1. \quad **)$$

*) 由于幂级数(收敛半径为 1)

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots$$

当 $x=1$ 时发散, 故在 $0 \leq x \leq 1$ 上逐项积分的合理性要单独证明, 今证如下:

对任何 $0 < r < 1$, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^r \ln(1-x) dx \\ &= \int_0^r \left(-x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} \right) dx + R_n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中

$$R_n = \int_0^r \left(-\frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{x^{n+2}}{n+2} - \dots \right) dx.$$

由于 $0 < r < 1$, 故可在 $0 \leq x \leq r$ 上逐项积分, 得

$$\begin{aligned} 0 > R_n &= - \left[\frac{r^{n+2}}{(n+1)(n+2)} + \frac{r^{n+3}}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] \\ &> - \left[\frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots \right] \\ &= - \left[\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) + \dots \right] \\ &= - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是, 由(1)式知

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^r \ln(1-x) dx - \left(-\frac{r^2}{1 \cdot 2} - \frac{r^3}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{r^{n+1}}{n(n+1)} \right) \right| \\ & < \frac{1}{n+1}. \end{aligned} \quad (2)$$

在(2)式中让 n 固定而令 $r \rightarrow 1-0$ 取极限(注意, 瑕积分 $\int_0^1 \ln(1-x) dx$ 显然收敛), 得

$$\left| \int_0^1 \ln(1-x) dx - \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

由此式即知

$$\int_0^1 \ln(1-x) dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \dots - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$= -\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \dots,$$

也即

$$\int_0^1 \left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \right) dx$$

$$= \int_0^1 (-x) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{x^3}{3} \right) dx$$

$$+ \dots,$$

换句话说, 逐项积分公式成立.

本节以下诸题中, 凡有在端点发散的级数的逐项积分合理性问题, 都可仿照上面类似地去证明, 不再一一写出.

* *) 利用 2549 题的结果.

3035. $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx$

解 $\int_0^1 \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{x} dx$

$$= \int_0^1 \frac{x + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right\}^{*})}{x} dx$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

*) 利用 2871 题的结果.

3036. $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx.$

解
$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \int_0^1 \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots}{x} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \dots) dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots$$

$$= \frac{\pi^2}{12}.$$

*) 利用 2961 题的结果.

3037. $\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx (p > 0, q > 0).$

解
$$\int_0^1 x^{p-1} \ln(1-x^q) dx$$

$$= \int_0^1 x^{p-1} (-x^q - \frac{x^{2q}}{2} - \frac{x^{3q}}{3} - \dots) dx$$

$$= - \int_0^1 (x^{p-1+q} + \frac{1}{2} x^{p+2q-1} + \frac{1}{3} x^{p+3q-1} + \dots) dx$$

$$= - (\frac{1}{p+q} + \frac{1}{p+2q} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{p+3q} \cdot \frac{1}{3} + \dots)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(p+nq)}.$$

3038. $\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx.$

解
$$\int_0^1 \ln x \cdot \ln(1-x) dx$$

$$= - \int_0^1 \left(\ln x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} \ln x \Big|_0^1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)^2} \Big|_0^1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 1 - \left(\frac{\pi^2}{6} - 1 \right)^{*)} = 2 - \frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2549 题及 2961 题的结果.

3039. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1}.$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{2\pi x} - 1} = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-2\pi x}}{1 - e^{-2\pi x}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} x e^{-2\pi x} (1 + e^{-2\pi x} + e^{-4\pi x} + \dots) dx \\
&= \left[-\frac{x}{2\pi} e^{-2\pi x} - \frac{1}{(2\pi)^2} e^{-2\pi x} \right]_0^{+\infty} \\
&\quad + \left[-\frac{x}{4\pi} e^{-4\pi x} - \frac{1}{(4\pi)^2} e^{-4\pi x} \right]_0^{+\infty} \\
&\quad + \left[-\frac{x}{6\pi} e^{-6\pi x} - \frac{1}{(6\pi)^2} e^{-6\pi x} \right]_0^{+\infty} + \dots \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi^2} \cdot \frac{\pi^2}{6}^{*)} = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2961 题的结果.

3040. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1}$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^x + 1} = \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{+\infty} x e^{-x} (1 - e^{-x} + e^{-2x} - \dots) dx \\
&= \left[-x e^{-x} - e^{-x} \right]_0^{+\infty} - \left[-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{2^2} e^{-2x} \right]_0^{+\infty}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3^2}e^{-3x} \right)_0^{+\infty} - \dots \\
& = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12} \quad *)
\end{aligned}$$

*) 利用 2961 题的结果.

3041. 按模 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数幂展开第一型完全椭圆积分

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } F(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}k^2\sin^2\varphi + \frac{3}{8}k^4\sin^4\varphi + \frac{5}{16}k^6\sin^6\varphi \right. \\
&\quad \left. + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} k^{2n}\sin^{2n}\varphi + \dots \right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 k^{2n} \right\} \quad *)
\end{aligned}$$

*) 利用 2281 题的结果.

3042. 按模 k ($0 \leq k < 1$) 的正整数幂展开第二型完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned}
\text{解 } E(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} k^{2n}\sin^{2n}\varphi \right) d\varphi \\
&= \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{k^{2n}}{2n-1} \right\} \quad *)
\end{aligned}$$

*) 利用 2281 题的结果.

3043. 利用按椭圆离心率的正整数幂展开的级数以表椭圆

$$x = a \cos t, y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的弧长.

解 设 $a > b$, 则 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$, $(\frac{b}{a})^2 = 1 - \epsilon^2$. 弧长为

$$\begin{aligned} s &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} \epsilon^{2n} \cos^{2n} t \right) dt \\ &= 4a \cdot \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \cdot \frac{\epsilon^{2n}}{2n-1} \right\} \\ &= 2\pi a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \epsilon^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \right)^2 \cdot \frac{\epsilon^4}{3} - \dots \right\}. \end{aligned}$$

证明下列等式:

$$3044. \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2} &= \int_0^1 e^{-x \ln x} dx \\ &= \int_0^1 \left(1 - x \ln x + \frac{1}{2!} x^2 \ln^2 x - \frac{1}{3!} x^3 \ln^3 x + \dots \right) dx \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{2! \cdot 3} \ln^2 x - \frac{x^3}{3^2} \ln x + \frac{x^3}{3^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{x^4}{3! \cdot 4} \ln^3 x + \frac{x^4}{2 \cdot 4^2} \ln^2 x - \frac{x^4}{4^3} \ln x + \frac{x^4}{4^4} \right. \\ &\quad \left. + \dots \right]_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}, \end{aligned}$$

本题得证.

$$3045. \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

解
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin ax dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{2n+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-t} [t^n + nt^{n-1} + n(n-1)t^{n-2} + \dots + n! t + n!] \Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

本题得证.

$$3046^+. \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx = \frac{\pi}{n!} (n=0, 1, 2, \dots).$$

解 若复数 $w = u + iv$, 记 $R\{w\} = u$ 为实部, 则有

$$R\{e^{ix}\} = e^{\cos x} \cos(\sin x).$$

因此, 原定积分为

$$I_n = \int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos nx dx$$

$$= R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ix} \cos nx dx \right\}$$

$$= R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{ix} \cdot \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2} R \left\{ \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(e^{ix})^m}{m!} (e^{inx} + e^{-inx}) dx \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{m_1=0}^{\infty} \frac{1}{m_1!} R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_1+n)x} dx \right\} + \sum_{m_2=0}^{\infty} \frac{1}{m_2!} R \left\{ \int_0^{2\pi} e^{i(m_2-n)x} dx \right\} \right]$$

注意,对任意整数 k ,有积分关系:

$$\int_0^{2\pi} e^{ikx} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } k=0; \\ 0, & \text{当 } k \neq 0. \end{cases}$$

从而,当 $n \geq 0, m \geq 0$ 时,有:

i) 当 $n=0$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=0, \\ 0, & \text{当 } m \neq 0; \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=0, \\ 0, & \text{当 } m \neq 0. \end{cases}$$

此时相应地得

$$I_0 = \frac{1}{2} (2\pi + 2\pi) = 2\pi.$$

ii) 当 $n=1, 2, 3, \dots$ 时,

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m+n)x} dx = 0;$$

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 2\pi, & \text{当 } m=n, \\ 0, & \text{当 } m \neq n. \end{cases}$$

此时相应地得

$$I_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{n!} 2\pi \right) = \frac{\pi}{n!}.$$

求:

3047. $\int_0^{2\pi} e^{a \cos x} \cos(asinx - nx) dx$ (n 是自然数).

解 被积函数正是 $e^{ae^{ix} - inx}$ 的实部,故积分为

$$I = \int_0^{2\pi} e^{ae^{ix} - inx} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} R\{e^{ae^{ix}-inx}\} dx \\
&= R\left\{\int_0^{2\pi} e^{ae^{ix}} e^{-inx} dx\right\} \\
&= R\left\{\int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{ix})^m}{m!} e^{-inx} dx\right\} \\
&= R\left\{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx\right\} \\
&= R\left\{\frac{a^n}{n!} \cdot 2\pi + \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^{\infty} \frac{a^m}{m!} \int_0^{2\pi} e^{i(m-n)x} dx\right\} \\
&= \frac{2\pi a^n}{n!}.
\end{aligned}$$

3048⁺. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} dx.$

解 利用 2864 题的结果, 即得

$$\frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} x \sin nx \quad (|a| < 1).$$

由于

$$\int_0^{\pi} x \sin nx dx = (-1)^{n-1} \frac{\pi}{n},$$

所以, 当 $|a| < 1$ 时, 就有

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \frac{x \sin x dx}{1-2a \cos x + a^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a^{n-1} \frac{\pi}{n} \\
&= \frac{\pi}{a} \ln(1+a).
\end{aligned}$$

当 $|a| > 1$ 时, $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$,

$$\frac{x \sin x}{1-2a \cos x + a^2} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{x \sin x}{1-2\left(\frac{1}{a}\right) \cos x + \left(\frac{1}{a}\right)^2}.$$

利用以上结果, 即得: 当 $|a| > 1$ 时,

阶台劳展式,有

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{x+a} \\
 &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots \\
 &\quad + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{f^n(\theta x)}{n!}x^n \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \frac{1}{(a+\theta x)^{n+1}} x^n \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \frac{x^n}{a^{n+1}} \cdot \frac{1}{(1+\theta \cdot \frac{x}{a})^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{a} - \frac{x}{a^2} + \frac{x^2}{a^3} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{n-1}}{a^n} \\
 &\quad + (-1)^n \bar{\theta}_n(x) \frac{x^n}{a^{n+1}},
 \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$, 而对于函数

$$\bar{\theta}_n(x) = \frac{1}{(1+\theta \frac{x}{a})^{n+1}},$$

也有 $0 < \bar{\theta}_n(x) < 1$ ($0 < x < +\infty$).

由 $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

以及 $0 < \int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx < \int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$,

即知

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} \bar{\theta}_n(x) x^n dx = \theta_n n!,$$

其中 $0 < \theta_n < 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{a+x} dx &= \int_0^{+\infty} f(x) e^{-x} dx \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{a^k} \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx \\ &\quad + (-1)^n \frac{1}{a^{n+1}} \int_0^{+\infty} \theta_n(x) x^n e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{a} - \frac{1!}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{a^n} \\ &\quad + (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}} \theta_n. \end{aligned}$$

公式证毕.

在上述公式中, 令 $a=100=10^2$, 则有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx &= 10^{-2} - 1! 10^{-4} + 2! 10^{-6} - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} (n-1)! 10^{-2n} + (-1)^n \theta_n n! 10^{-2n-2} \\ &\quad (0 < \theta_n < 1). \end{aligned}$$

如果取前两项来表示积分, 即在上式中取 $n=2$, 则误差为 $(-1)^2 \theta_2 2! 10^{-6}$, 其绝对值小于 $2 \cdot 10^{-6}$, 于是,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{100+x} dx - 0.01 + 0.0001 \right| &\leq 0.000002 \\ &= 2 \cdot 10^{-6}. \end{aligned}$$

§ 9. 无穷乘积

1° 无穷乘积的收敛性. 如果存在有穷而且异于零的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n P_i = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P,$$

则称无穷乘积

$$p_1 p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n \quad (1)$$

是收敛的.

若 $P = 0$ 而乘数 p_n 中无一个等于零, 则称乘积(1) 发散于零; 在相反的情形下, 则称无穷乘积 收敛于零.

乘积(1)的收敛性与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n \quad (2)$$

的收敛性是一样的.

收敛性的必要条件为:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 1.$$

若 $p_n = 1 + a_n$ ($n = 1, 2, \dots$) 及 a_n 不变号, 则乘积(1)收敛的必要而且充分的条件为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1) \quad (3)$$

收敛.

在一般的情形下, 当 a_n 不保持固定的符号而级数(3)收敛, 则乘积(1)将与级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - 1)^2$$

同时收敛或同时发散, 在发散的情形下, 乘积发散于零.

2° 绝对收敛性 乘积(1)称为绝对或条件(非绝对)收敛是随级数(2)为绝对或条件收敛而定. 级数(3)绝对收敛就是乘积(1)绝对收敛的充分而且必要的条件.

3° 函数的成无穷乘积展开 当 $-\infty < x < +\infty$ 时有展开式

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right), \cos x = \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \frac{4x^2}{(2n-1)^2 \pi^2}\right].$$

特别是, 由第一式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时得瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

证明下列等式:

$$3051. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

证 记 $p_n = 1 - \frac{1}{n^2}$. 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow \frac{1}{2} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$3052. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

证 记 $p_n = \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$. 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdots \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)} \rightarrow \frac{2}{3} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1} = \frac{2}{3}.$$

$$3053. \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

证 记 $p_n = 1 - \frac{2}{n(n+1)}$, 由于部分乘积

$$\begin{aligned}
 P_n &= \prod_{i=2}^n p_i = \frac{4 \cdot 1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 2}{3 \cdot 4} \cdots \frac{(n+2)(n-1)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \rightarrow \frac{1}{3} \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},
 \end{aligned}$$

故

$$\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

3054. $\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2.$

证 由于部分乘积满足下述等式:

$$\begin{aligned}
 \left(1 - \frac{1}{2}\right)P_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdots \\
 &\quad \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{2^n}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}},
 \end{aligned}$$

从而

$$P_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) = 2.$$

3055. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned}
 P_n &= \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3} \cdots \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \\
 &= \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cos \frac{\pi}{2^2} \cos \frac{\pi}{2^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdots (\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}) \\ & = \cdots \\ & = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^n \sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2}{\pi} \rightarrow \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

3056. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$

证 当 $x \neq 0$ 时, 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n} \\ &= \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \cdot \frac{\sin x}{x} \rightarrow \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

(当 $n \rightarrow \infty$ 时),

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.$$

3057. $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$

证 由于部分乘积

$$P_n = \operatorname{ch} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2^2} \cdots \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh} \frac{x}{2^n}}$$

$$= \frac{\operatorname{sh} x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\operatorname{sh} \frac{x}{2^n}} \quad (x \neq 0)$$

及

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\operatorname{sh} y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{ch} y} = 1,$$

故

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} \frac{x}{2^n} = \frac{\operatorname{sh} x}{x}.$$

3058. $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x} \quad (|x| < 1).$

证 由于

$$(1-x)P_n = (1-x)(1+x)\cdots(1+x^{2^n}) = 1-x^{2^{n+1}},$$

从而(注意 $|x| < 1$)

$$P_n = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x} \rightarrow \frac{1}{1-x} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

故

$$\prod_{n=0}^{\infty} (1 + x^{2^n}) = \frac{1}{1-x}.$$

利用此题的结果, 易得

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \right)^{2^n} \right] = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2,$$

此即 3054 题的结果.

3059. $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$

证 在 3056 题中, 令 $x = \frac{\pi}{2}$, 利用半角公式, 有

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{2}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2},$$

.....

则得

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}{2} \cdots,$$

也即

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \cdots$$

3060. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$

证 利用函数 $\sin x$ 的无穷乘积展开

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right),$$

令 $x = \frac{\pi}{3}$, 有

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(3n)^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{3} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(3n+1)}{(3n)^2}. \end{aligned}$$

于是得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{3n-1} \cdot \frac{3n}{3n+1} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

试证下列无穷乘积的收敛性并求出其值:

$$3061. \prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}.$$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{1 \cdot 5}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 6} \cdots \frac{(n-4)n}{(n-3)(n-1)} \\ &\quad \cdot \frac{(n-3)(n+1)}{(n-2)n} \cdot \frac{(n-2)(n+2)}{(n-1)(n+1)} \\ &= \frac{n+2}{4(n-1)} \rightarrow \frac{1}{4} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=3}^{\infty} \frac{n^2 - 4}{n^2 - 1}$ 收敛, 且其值为 $\frac{1}{4}$.

$$3062. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right).$$

证 $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(n-1)^2}{(n-2)n} \\ &\quad \cdot \frac{n^2}{(n-1)(n+1)} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2} \rightarrow 2 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}), \end{aligned}$$

故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n(n+2)} \right)$ 收敛, 且其值为 2.

$$3063. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}.$$

证 由于部分乘积

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{3 \cdot 9}{5 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 11}{7 \cdot 9} \cdot \frac{7 \cdot 13}{9 \cdot 11} \cdots \frac{(2n-3)(2n+3)}{(2n-1)(2n+1)} \\ &\quad \cdot \frac{(2n-1)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 P^2 , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n^2$ 收敛, 且其值

为 P^2 , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$.

(B) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = (p_1 p_2 \cdots p_n)(q_1 q_2 \cdots q_n)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 PQ , 故 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n q_n$ 收敛, 且其

值为 PQ , 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

(r) 可以. 事实上, 部分乘积

$$Q_n = \frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} \quad (q_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots),$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限存在且为 $\frac{P}{Q}$, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_n}$ 收敛, 且其值

为 $\frac{P}{Q}$, 其中 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P \neq 0$, $\prod_{n=1}^{\infty} q_n = Q \neq 0$.

研究下列无穷乘积的收敛性:

$$3066. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

解 由于通项 $p_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 不满足收敛的必要条件 ($p_n \rightarrow 1$); 或者说: 由于部分乘积

$$p_n = \frac{1}{n!} \rightarrow 0 \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时),}$$

且每项不为零, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散于零.

$$3067. \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}.$$

解 通项 $p_n = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = 1 + \frac{1}{n(n+2)}$, 而

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ 收敛, 且 $\frac{1}{n(n+2)}$ 不变号, 故无穷乘积

$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$ 收敛. 事实上, 已由 3062 题知, 该无穷乘积是收敛的, 且其值为 2.

3068. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$.

解 $p_n = 1 + \frac{1}{n^p}$, 其中 $\frac{1}{n^p}$ 不变号. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 当 p

> 1 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散, 故无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ 当 $p > 1$ 时收敛, 而当 $p \leq 1$ 时发散.

3069. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$.

解 由于 $p_n - 1 = -\frac{1}{n}$ 不变号, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散, 故

原乘积发散. 或由于部分乘积

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时的极限为零, 且乘积中无一项为零, 故原乘积发散于零.

3070*. $\prod_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$.

解 通项 $p_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p = \left(1 - \frac{2}{n^2+1}\right)^p$. 由于级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2+1} \right)^p = p \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 - \frac{2}{n^2+1} \right)$$

对任何 p 均收敛(因为级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2+1}$ 收敛),故原无穷乘积对任何 p 均收敛.

*) 原题误为 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1} \right)^p$, 这时,若 $p \geq 0$, 第一个因子为零,按定义无穷乘积收敛于零;若 $p < 0$, 第一个因子无意义,因此整个无穷乘积无意义.

3071. $\prod_{n=n_0}^{\infty} \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$, 其中当 $n \geq n_0$ 时 $n^2+an+b > 0$.

解 通项 $p_n = \frac{n^2+a_1n+b_1}{n^2+an+b}$
 $= 1 + \frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}$,

令

$$a_n = \frac{(a_1-a)n+(b_1-b)}{n^2+an+b}$$

当 $a_1 = a$ 时, $a_n \sim \frac{1}{n^2}$. 由于 $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,故原乘积收敛.

当 $a_1 \neq a$ 时,由于 $n^2+an+b > 0$,且 $a_n \sim \frac{a_1-a}{n}$,故

$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 发散,从而原乘积也发散.

3072. $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)}$, 其中 $n_0 > b_i (i=1,2,\dots,p)$.

解 $p_n = \frac{(n-a_1)(n-a_2)\cdots(n-a_p)}{(n-b_1)(n-b_2)\cdots(n-b_p)} = 1 +$

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right) n^{p-1} + \dots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i\right)}{\prod_{i=1}^p (n - b_i)}$$

令

$$a_n = \frac{\left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right) n^{p-1} + \dots + (-1)^p \left(\prod_{i=1}^p a_i - \prod_{i=1}^p b_i\right)}{\prod_{i=1}^p (n - b_i)},$$

当 $\sum_{i=1}^p a_i = \sum_{i=1}^p b_i$ 时, $a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 收敛, 从而原乘积收敛. 当 $\sum_{i=1}^p a_i \neq \sum_{i=1}^p b_i$ 时, 由于当 $n > n_0$ 时, $\prod_{i=1}^p (n - b_i) > 0$, 且 $a_n \sim \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^p b_i - \sum_{i=1}^p a_i\right)$, 故级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ 发散, 从而原乘积也发散.

3073. $\prod_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}$.

解 $p_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}, \ln p_n = \frac{1}{2} \ln \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$. 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)$ 发散(于 $-\infty$), 故原乘积也发散(于零).

3074. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

解 $p_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$,

$$\ln p_n = -\frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ 收敛, 从而

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此, 无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ 收敛.

$$3075. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}.$$

解 $p_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n}}, \ln p_n = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$. 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 有

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n^2},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原乘积也收敛.

$$3076. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[2]{n}.$$

解 $p_n = \sqrt[2]{n}, \ln p_n = \frac{1}{n^2} \ln n$. 考虑级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln n.$$

由于 $\frac{1}{n^2} \ln n = O\left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)$, 此处 ε 为满足 $0 < \varepsilon < 1$ 的任一

常数, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ 收敛, 故原乘积收敛.

$$3077. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}}.$$

解 通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) e^{-\frac{x}{n}} = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{x}{n} + \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故若记

$$p_n = 1 + \alpha_n,$$

则当 n 充分大时, 有

$$\alpha_n = -\frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) < 0,$$

保持不变号. 注意到对任何 x , 级数

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left[-\frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

收敛, 这里 n_0 为适当大的某一正整数. 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛.

因此, 原无穷乘积收敛.

$$3078. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}}, \text{ 其中 } c > 0.$$

解 对任意 x , 考虑通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) e^{\frac{x}{n}} \\ &= \left(1 - \frac{x}{c+n}\right) \left[1 + \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{x}{c+n} + \frac{x}{n} - \frac{x^2}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{x^2 - cx}{n(c+n)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

易知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 故原无穷乘积收敛.

$$3079. \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n).$$

解 当 $|x| \geq 1$ 时, 由于通项 $p_n = 1 - x^n \not\rightarrow 1$, 即不满足收敛的必要条件, 故原无穷乘积发散. 当 $|x| < 1$ 时, 若 $x = 0$ 显然收敛; 若 $x \neq 0$ 则有

$$\ln p_n = \ln(1 - x^n) = -x^n \ln \left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}} \right].$$

由于

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[(1 - x^n)^{-\frac{1}{x^n}} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \ln \left[\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right] = 1,$$

从而

$$\ln p_n = O(|x|^n).$$

但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |x|^n$ 当 $|x| < 1$ 时收敛, 故此时原无穷乘积收敛.

$$3080. \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right).$$

解 当 $|x| \geq 2$ 时, 通项 $p_n = 1 + \left(\frac{x}{2}\right)^n \not\rightarrow 1$, 故原无穷乘积发散. 当 $|x| < 2$ 时, 若 $x = 0$ 显然收敛; 若 $x \neq 0$, 利用

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}} = \lim_{y_n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_n}\right)^{y_n} = e,$$

就有

$$\begin{aligned} \ln p_n &= \ln \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right) \\ &= \frac{x^n}{2^n} \ln \left(1 + \frac{x^n}{2^n}\right)^{\frac{2^n}{x^n}} = O\left(\left|\frac{x}{2}\right|^n\right). \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{2} \right|^n$ 当 $|x| < 2$ 时收敛, 从而 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛. 因此, 原无穷乘积收敛.

$$3081. \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right].$$

解 1) 当 $|x| < e$ 时, 利用

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e + o(1) \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

存在适当的整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > |x|,$$

于是相应地, 得

$$\left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|} \right]^n > 1.$$

这表明, 此时

$$p_n = 1 + \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \not\rightarrow 1 \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时}),$$

即不满足无穷乘积收敛的必要条件, 故原无穷乘积发散.

2) 当 $|x| = e$ 时, 利用 70 题的结果, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > e - \frac{3}{n}.$$

此时, 得

$$\begin{aligned} p_n &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} \\ &= 1 + (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n \end{aligned}$$

$$= 1 + \alpha_n.$$

但

$$\begin{aligned} |\alpha_n| &= \left| (\operatorname{sgn} x)^n \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n \right| \\ &= \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right]^n > \left[\frac{e - \frac{3}{n}}{e} \right]^n \\ &= \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^n, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{e} \cdot \frac{1}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{3}{ne} \right)^{\frac{ne}{3}} \right]^{\frac{3}{e}} \\ &= e^{-\frac{3}{e}} > 0, \end{aligned}$$

故此时有 $\alpha_n \rightarrow 0$, 也即 $p_n \rightarrow 1$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 从而原无穷乘积发散.

3) 当 $|x| > e$ 时, 记 $p_n = 1 + \alpha_n$, 为考察 α_n 的变化, 仍利用

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e + o(1) \quad (n \rightarrow \infty),$$

存在适当大正整数 n_0 , 当 $n \geq n_0$ 时, 有

$$\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{1}{2}(e + |x|).$$

记

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{|x| + e}{|x|},$$

则 $0 < q < 1$, 有

$$|\alpha_n| = \left| \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{x^n} \right| = \left[\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{|x|} \right]^n$$

绝对收敛,从而知原无穷乘积收敛.

$$3083. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q}.$$

解 1) 当 $|x| < 1$ 时, 通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \cos \frac{x^n}{n^q} \\ &= \left(1 + \frac{x^n}{n^p}\right) \left[1 + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right)\right] \\ &= 1 + \frac{x^n}{n^p} + O\left(\frac{x^{2n}}{n^{2q}}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{x^n}{n^p}\right) + O\left(\frac{x^{3n}}{n^{p+2q}}\right). \end{aligned}$$

当 n 充分大时, 不论 p, q 为何值, 均有

$$\frac{x^n}{n^p} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right), \frac{x^{3n}}{n^{p+2q}} = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

于是可写

$$p_n = 1 + \alpha_n, \alpha_n = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

因此有

$$|\ln p_n| = |\ln(1 + \alpha_n)| = O(|\alpha_n|) = O\left(|x|^{\frac{n}{2}}\right).$$

由于当 $|x| < 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{|x|})^n < +\infty,$$

从而 $\sum \ln p_n$ 绝对收敛, 故原乘积 $\prod p_n$ 收敛.

2) 当 $x=1$ 时, 在 $p > 1, q > \frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned} p_n &= \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \cos \frac{1}{n^q} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^p}\right) \left[1 - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 1 + \frac{1}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),
\end{aligned}$$

若记

$$p_n = 1 + \alpha_n, \alpha_n = \frac{1}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则 $\sum \alpha_n$ 绝对收敛, 且由

$$\begin{aligned}
\alpha_n^2 &= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right) \\
&= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right),
\end{aligned}$$

易知 $\sum \alpha_n^2$ 也收敛, 故此时乘积 $\prod p_n$ 收敛.

3) 当 $x = -1$ 时, 在 $p > \frac{1}{2}, q > \frac{1}{2}$ 的情况下, 由于通项

$$\begin{aligned}
p_n &= \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \cos \frac{(-1)^n}{n^q} = \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right) \\
&\quad \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right)\right) \\
&= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2n^{2q}} + O\left(\frac{1}{n^{p+2q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{p+4q}}\right) \\
&= 1 + \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),
\end{aligned}$$

可记

$$p_n = 1 + \beta_n, \beta_n = \frac{(-1)^n}{n^p} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

则有

$$\ln p_n = \ln(1 + \beta_n) = \beta_n + O(\beta_n^2),$$

易见 $\sum \beta_n$ 收敛, 而

$$\beta_n^2 = \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{4q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{2q+p}}\right)$$

$$= \frac{1}{n^{2p}} + O\left(\frac{1}{n^{2q}}\right),$$

故 $\sum \beta_n^2$ 绝对收敛, 从而知 $\sum \ln p_n$ 收敛. 于是, 此时乘积 $\prod p_n$ 收敛.

$$3084. \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} \right]^p.$$

解 显然应当要求 $x \neq 0$. 记通项为 $p_n = (1 + \alpha_n)^p$, 其中

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} - 1 = \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] - 1 \\ &= -\frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

而

$$\ln p_n = p \ln(1 + \alpha_n) = p \ln \left[1 - \frac{x^2}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right].$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 收敛^{*}, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛, 从而原无穷乘积收敛.

*) 参看 2677 题的结果.

$$3085. \prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n}.$$

解 记

$$p_n = \sqrt[n]{\ln(n+x) - \ln n},$$

由要求 $\ln(n+x) - \ln n \geq 0$, 知 $x \geq 0$. 1) 当 $x=0$ 时, 显然各项均为零, 无穷乘积收敛于零. 2) 当 $x > 0$ 时, 由

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$$

可知, 当 $n \geq \frac{x}{e-1}$ 时, 有 $\ln(1 + \frac{x}{n}) \leq 1$, 故此时

$$\ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \leq 0. \text{ 再由}$$

$$\frac{-\frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \ln \frac{1}{\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)} \rightarrow +\infty$$

及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散知 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right)$ 发散, 从而得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

3086. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

证 当 $x \rightarrow 0$ 时, $p_n = \cos x_n = 1 + \alpha_n$, 其中 $\alpha_n = -\frac{1}{2}x_n^2 + o(x_n^2)$, $\alpha_n \leq 0$, 且由于级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{x_n^2}{2} + o(x_n^2) \right]$$

收敛, 故乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \cos x_n$ 收敛.

3087. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + a_n \right)$

$\left(|a_n| < \frac{\pi}{4} \right)$ 收敛.

证 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. 此时有

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + a_n \right) = \frac{1 + \operatorname{tg} a_n}{1 - \operatorname{tg} a_n}$$

$$= (1 + \operatorname{tg} a_n)(1 + \operatorname{tg} a_n + \operatorname{tg}^2 a_n + \dots)$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + 2\operatorname{tg}a_n + 2\operatorname{tg}^2a_n + \cdots \\
 &= 1 + 2a_n + o(a_n).
 \end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} [2a_n + o(a_n)]$ 收敛, 而且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + o(a_n))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 4a_n^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot o(a_n) + \sum_{n=1}^{\infty} o^2(a_n)$$

也收敛*), 故无穷乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + a_n\right) \left(|a_n| < \frac{\pi}{4}\right)$$

收敛.

*) 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |a_n|,$$

因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛. 又当 n 充分大时, 有

$$|a_n \cdot o(a_n)| \leq |a_n|, \quad |o^2(a_n)| \leq |a_n|,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot o(a_n)$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} o^2(a_n)$ 均收敛.

研究下列无穷乘积的绝对收敛性和条件收敛性:

$$3088. \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right].$$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 条件收敛, 且级数

$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]^2$ 收敛, 故原无穷乘积条件收敛.

$$3089. \quad \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right].$$

解 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ 条件收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 故原无穷乘积发散.

3090. $\prod_{n=1}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]$.

解 当 $p > 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 绝对收敛, 故原无穷乘积绝对收敛.

当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时, 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 条件收敛及 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n+1}}{n^p} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 收敛, 故原无穷乘积条件收敛.

当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ 发散, 故原无穷乘积发散.

当 $p \leq 0$ 时, 由于 $\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ 不趋于零, 故原无穷乘积也发散.

3091. $\prod_{n=2}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{\ln n} \right]$.

解 由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 条件收敛及 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散*), 故原无穷乘积发散.

*) 当 n 充分大时, 显然有 $n > \ln^2 n$, 故 $\frac{1}{\ln^2 n} > \frac{1}{n}$. 由

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散即知 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 n}$ 发散.

$$3092. \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n}.$$

解 记

$$p_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + (-1)^n},$$

则有

$$\ln p_n = \ln \left[1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \right].$$

令

$$u_k = \ln p_{2k} + \ln p_{2k+1} \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

即得

$$\begin{aligned} u_k &= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \right) + \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2k+1}-1} \right) \\ &= \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] > 0. \end{aligned}$$

由于

$\lim_{k \rightarrow \infty}$

\ln

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right]^{-\frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}} \\ &= 1, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} u_k &= -\frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \cdot \ln \left[1 - \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right]^{-\frac{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)}{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}} \\ &\sim -\left[\frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k+1}-1)} \right] \sim \frac{1}{2k} \end{aligned}$$

($k \rightarrow \infty$).

由此可知 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散, 从而 $\sum_{n=2}^{\infty} \ln p_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散.

3093. $\prod_{n=1}^{\infty} n^{(-1)^n}$.

解 记 $p_n = n^{(-1)^n}$, 则有子序列

$$p_{2k} = (2k)^{(-1)^{2k}} = 2k \rightarrow \infty \quad (k \rightarrow \infty).$$

于是 $p_n \nrightarrow 1$ ($n \rightarrow \infty$). 从而原无穷乘积发散.

3094. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$.

解 记 $p_n = \sqrt[n]{n^{(-1)^n}}$, 则有

$$\ln p_n = \frac{1}{n} \ln n^{(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n} \ln n.$$

注意到级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 是莱布尼兹型级数, 它条件收敛, 因而原无穷乘积条件收敛.

3095. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right)$.

解 记

$$p_n = 1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n},$$

则有

$$|\ln p_n| = \frac{1}{n} \left| \ln \left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{n} \right)^{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} \right| \sim \frac{1}{n} \quad (\text{当 } n \rightarrow \infty).$$

因此, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln p_n|$ 发散. 若令 $u_n = \ln p_n$, 则有

$$u_{2k-1} = \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right),$$

$$u_{2k} = \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{2k}\right) \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

记 $a_k = u_{2k-1} + u_{2k}$, 可得

$$\begin{aligned} a_k &= \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{2k-1}}{2k(2k-1)}\right) \\ &= \ln\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}-1}{2k(2k-1)}\right) \quad (k=1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

故

$$a_{2m-1} = 0,$$

$$a_{2m} = \ln\left(1 - \frac{2}{4m(4m-1)}\right) \quad (m=1, 2, 3, \dots).$$

于是, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛. 注意到 $u_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$, 可得

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛. 因此, 原无穷乘积条件收敛.

$$\begin{aligned} 3096. & \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ & \left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \end{aligned}$$

解 研究无穷级数

$$\begin{aligned} & \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ & + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{7}}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) \\ & + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \end{aligned}$$

的收敛性问题. 今将级数(1)每三项依次加括号, 考虑如此形成的新级数:

$$\begin{aligned}
&= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(\sqrt{1-\frac{1}{4n}} + \sqrt{1+\frac{1}{4n}} \right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1}} \right] \\
&= \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(1 - \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + 1 + \frac{1}{8n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
&\quad \left. + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right) \\
&= \ln \left[1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{2(\sqrt{n}+1) \left(2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - 1}{\sqrt{16n^2-1}} \right. \\
&\quad \left. + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right] \\
&= \ln \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{16n^2-1}} - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \right) \\
&= \ln \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n} \sqrt{16n^2-1} (\sqrt{16n^2-1} + 4n)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right) \\
&= \ln \left(1 - \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \right) \\
&= \ln(1 + a_n),
\end{aligned}$$

其中 $a_n = -\frac{3}{\sqrt{16n^2-1}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, 故 $a_n \rightarrow 0$ 且当 n 充分大时 $a_n < 0$.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{16n^2-1}}$ 发散, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$

发散; 因此 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n)$ 发散. 于是, 原无穷乘积发散.

$$3097. \left(1 + \frac{1}{1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{4^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right)^2 \\ \cdot \left(1 + \frac{1}{6^\alpha}\right) \cdots$$

解 记

$$q_1 = 1 + \frac{1}{1^\alpha}, q_2 = \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right)^2, q_3 = 1 + \frac{1}{3^\alpha}, \\ q_4 = 1 + \frac{1}{4^\alpha}, q_5 = \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right)^2, q_6 = 1 + \frac{1}{6^\alpha}, \cdots$$

若记 $q_n = 1 + \alpha_n$, 则

$$\alpha_1 = \frac{1}{1^\alpha}, \alpha_2 = -\frac{2}{2^\alpha} + \frac{1}{2^{2\alpha}}, \alpha_3 = \frac{1}{3^\alpha}, \alpha_4 = \frac{1}{4^\alpha}, \\ \alpha_5 = -\frac{2}{5^\alpha} + \frac{1}{5^{2\alpha}}, \alpha_6 = \frac{1}{6^\alpha}, \cdots$$

1) 当 $\alpha > 1$ 时, 显然

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \frac{1}{1^\alpha} + \left(\frac{2}{2^\alpha} - \frac{1}{2^{2\alpha}}\right) + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} \\ + \left(\frac{2}{5^\alpha} - \frac{1}{5^{2\alpha}}\right) + \frac{1}{6^\alpha} + \cdots \quad (1)$$

是收敛的, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 绝对收敛.

2) 注意当 $\alpha \leq 0$ 时, 不可能有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 发散.

3) 今讨论 $0 < \alpha \leq 1$ 时的情形. 将原无穷乘积写为

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{1}{1^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{2^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{3^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{4^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right) \\ & \cdot \left(1 - \frac{1}{5^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{6^\alpha}\right) \left(1 + \frac{1}{7^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{8^\alpha}\right) \left(1 - \frac{1}{8^\alpha}\right) \\ & \cdot \left(1 + \frac{1}{9^\alpha}\right) \cdots, \end{aligned}$$

记

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 + \frac{1}{1^\alpha}, p_2 = 1 - \frac{1}{2^\alpha}, p_3 = 1 - \frac{1}{2^\alpha}, \\ p_4 &= 1 + \frac{1}{3^\alpha}, p_5 = 1 + \frac{1}{4^\alpha}, p_6 = 1 - \frac{1}{5^\alpha}, p_7 = 1 - \frac{1}{5^\alpha}, \\ p_8 &= 1 + \frac{1}{6^\alpha}, p_9 = 1 + \frac{1}{7^\alpha}, \cdots, \end{aligned}$$

又记

$$p_n = 1 + \alpha_n^* \quad (n=1, 2, 3, \cdots).$$

为研究乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的收敛性, 考虑通项的表达式, 有

$$\alpha_n^* = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^\alpha}, & \text{当 } n=4k+1, \\ -\frac{1}{(2+3k)^\alpha}, & \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^\alpha}, & \text{当 } n=4k+4 \quad (k=0, 1, 2, \cdots). \end{cases}$$

为考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^*$ 的收敛性, 可看级数

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha} - 2 \cdot \frac{1}{(2+3k)^\alpha} + \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \right] \\ & = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \end{aligned}$$

的收敛性,为此,估算通项 α_k ,有

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{2}{(2+3k)^\alpha} + \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \\ &= \left[\frac{1}{(1+3k)^\alpha} - \frac{1}{(2+3k)^\alpha} \right] \\ &\quad - \left[\frac{1}{(2+3k)^\alpha} - \frac{1}{(3+3k)^\alpha} \right] \\ &= \frac{\alpha}{(3k+1+\theta_1)^{\alpha+1}} - \frac{\alpha}{(3k+2+\theta_2)^{\alpha+1}} \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{[3k+1+\theta(1+\theta_2-\theta_1)]^{\alpha+2}} \cdot (1+\theta_2-\theta_1),\end{aligned}$$

其中 $0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta < 1$. 显然,令 $\delta = 1 + \theta_2 - \theta_1$, 则有 $0 < \delta < 2$, 且 $\theta(1 + \theta_2 - \theta_1) = \theta\delta \in (0, 2)$. 因而

$$0 < \alpha_k = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(3k+1+\theta\delta)^{\alpha+2}} \cdot \delta \leq \frac{2\alpha(\alpha+1)}{(3k+1)^{\alpha+2}}.$$

由 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)^{\alpha+2}}$ 的收敛性知 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ 收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^*$ 收敛. 但 α_n^* 变号,还需看级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$. 易见

$$\alpha_n^{*2} = \begin{cases} \frac{1}{(1+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+1, \\ \frac{1}{(2+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+2 \text{ 或 } n=4k+3, \\ \frac{1}{(3+3k)^{2\alpha}}, & \text{当 } n=4k+4 (k=0,1,2,\dots). \end{cases}$$

无论哪种情形,均有

$$\frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2\alpha}} < \alpha_n^{*2} < \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2\alpha}} \quad (n=1,2,3,\dots).$$

因而当 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时,由上述左侧不等式,从级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{9}{4}\right)^{2\alpha}}$$

的发散性, 便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$ 发散, 从而 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 此时发散.

因此 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也发散. 当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时, 由上述不等式右侧部分, 从

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}\right)^{2\alpha}} < +\infty$$

便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{*2}$ 此时收敛. 从而相应地 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 也收敛. 因此,

$\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 也收敛. 但由(1)式知(当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时) $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|$

发散, 故当 $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ 时 $\prod_{n=1}^{\infty} q_n$ 条件收敛.

3098. 证明: 纵使级数

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \dots \quad (1)$$

发散, 而乘积

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \dots \quad (2)$$

收敛.

证 设原级数(1)的通项为 u_n , 则

$$u_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1},$$

$$u_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

令

$$a_k = u_{2k-1} + u_{2k} = \frac{1}{k+1}.$$

显然, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 故原级数(1) 即 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必然发散.

考虑原无穷乘积(2) 所对应的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + u_n),$$

则其通项 $v_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 且

$$v_{2k-1} = \ln(1 + u_{2k-1}) = \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right),$$

$$v_{2k} = \ln(1 + u_{2k}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \quad (k=1, 2, \dots),$$

从而

$$\begin{aligned} b_k &= v_{2k-1} + v_{2k} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \frac{1}{k+1}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) \\ &= \ln\left(1 - \frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}}\right). \end{aligned}$$

因此, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 收敛, 从而可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 故原无穷乘积(2) 必收敛.

3099. 证明: 纵使级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 二者发散, 而乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛, 其中

$$a_n = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k-1, \\ \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}, & \text{若 } n=2k. \end{cases}$$

证 考虑 $a_k = a_{2k-1} + a_{2k}$, 则有

$$a_k = \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}} \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ 收敛, 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ 发散, 便知正项级数

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 发散, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

再记 $b_k = a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2$, 则有

$$\begin{aligned} b_k &= \left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3}\right)^2 \\ &= \frac{2}{k} + \frac{2}{k\sqrt{k}} + \frac{3}{k^2} + \frac{2}{k^2\sqrt{k}} + \frac{1}{k^3} \\ &= \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k^3}}\right). \end{aligned}$$

由级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ 收敛, 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k}$ 发散, 便知正项级数

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 发散, 从而原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散.

再考虑原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n)$ 所对应的级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 其中通项

$$v_n = \ln(1 + a_n) \quad (n=1, 2, 3, \dots).$$

考虑

$$\begin{aligned}
c_k &= v_{2k-1} + v_{2k} = \ln(1 + \alpha_{2k-1}) + \ln(1 + \alpha_{2k}) \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k} + \frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) \\
&= \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right).
\end{aligned}$$

于是,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛. 注意到 $v_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 从而级数

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 因此,原无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n)$ 收敛.

3100. 设

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

(黎曼 ζ 函数) 而 $p_n (n = 1, 2, \dots)$ 是素数的叙列.

证明 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x)$.

证 设 $x > 1$. 首先,有

$$\left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \frac{1}{p_n^x} + \frac{1}{(p_n^x)^2} + \dots + \frac{1}{(p_n^x)^m} + \dots$$

如果把对应于不超过自然数 N 的所有素数的有限个这种级数相乘起来,则部分乘积就等于

$$\prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = 1 + \frac{1}{n_1^x} + \frac{1}{n_2^x} + \dots,$$

其中 n_1, n_2, \dots 是整数,它不包含超过 N 的素因子,显然 $1, 2, \dots, N$ 这种整数全被包含在 n_1, n_2, \dots 之中. 因此

$$\left| \zeta(x) - \prod_{p_n \leq N} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} \right|$$

$$= \left| \zeta(x) - 1 - \frac{1}{n_1^x} - \frac{1}{n_2^x} - \dots \right|$$

$$\leq \frac{1}{(N+1)^x} + \frac{1}{(N+2)^x} + \dots \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty),$$

取极限即得

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^x}\right)^{-1} = \zeta(x) (x > 1).$$

3101. 证明: 乘积

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$$

和级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

[其中 $p_n (n=1, 2, \dots)$ 是素数的叙列] 发散 (尤拉).

证 与 3100 题的处理方法类似, 考虑部分乘积, 易见也有

$$\prod_{p_n \leq N} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}} > \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}.$$

由于当 $N \rightarrow +\infty$ 时, $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ 发散, 故 $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)^{-1}$ 发散, 且具有值 $+\infty$.

由上述可知, $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$ 发散于零. 又由于 $\frac{1}{p_n} > 0$, 它始终不变号, 故级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$$

发散.

3102. 设 $a_n > 0 (n=1, 2, \dots)$, 且

则 $k_0 \neq 0$, 且 k_0 为一有限正数, 再研究部分乘积

$$P_N = a_1 \prod_{n=1}^N p_n.$$

一方面, $P_N \rightarrow a_1 k_0 > 0$ (当 $N \rightarrow \infty$ 时); 另一方面, 由于

$$\begin{aligned} P_N &= a_1 \prod_{n=1}^N \frac{a_{n+1}}{a_n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \\ &= a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p, \end{aligned}$$

注意 $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \beta_n$, 其中 $\beta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, 故当 N 充分大时, 有

$$\begin{aligned} \ln \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &= p \sum_{n \leq N} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= p \sum_{n \leq N} \left(\frac{1}{n} + \beta_n\right) \\ &= p \left(\ln N + C + O\left(\frac{1}{N}\right) + \sum_{n=1}^N \beta_n\right) \\ &= p \left(\ln N + C + B + O\left(\frac{1}{N}\right)\right) \\ &= p \left(\ln N + C_0 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right), \end{aligned}$$

其中 C 为 Euler 常数, $C > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = B$ 是一常数, 而

$\sum_{n=1}^N \beta_n = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n + O\left(\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = B + O\left(\frac{1}{N}\right)$, $C_0 = C + B$ 是一常数. 于是

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p &= e^{p(\ln N + C_0 + O(\frac{1}{N}))} \\ &= N^p \cdot G_N, \end{aligned}$$

其中

$$G_N = e^{c_0 p + o(\frac{1}{N})} \rightarrow e^{c_0 p} > 0 (N \rightarrow +\infty).$$

这样一来,就有

$$\begin{aligned} 0 < a_1 k_0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} P_N = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[a_{N+1} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} [a_{N+1} N^p G_N] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} G_N \\ &= e^{c_0 p} \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p). \end{aligned}$$

上述式子中的各个极限运算是允许的,因为 P_N 及 G_N 的极限存在,且 G_N 的极限不为零,故 $a_{N+1} N^p = \frac{P_N}{G_N}$ 的极限存在. 因此,就有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (a_{N+1} N^p) = \frac{a_1 k_0}{e^{c_0 p}} \text{ (非零常数).}$$

这表明 a_{N+1} 与 $\frac{1}{N^p}$ 为同级无穷小量,或者说, a_N 与 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 为同级无穷小量,但 $\frac{1}{(N-1)^p}$ 与 $\frac{1}{N^p}$ 同级,故最后得: a_N 与 $\frac{1}{N^p}$ 是同级无穷小量,也即当 N 充分大时,有

$$a_N = O\left(\frac{1}{N^p}\right).$$

3103. 利用瓦里斯公式证明

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

证 瓦里斯公式为

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{即 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{或 } \left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right]^2 \sim \frac{2}{\pi(2n+1)}.$$

上式两端开方,即得

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}.$$

3104. 证明:表示式

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时有异于零的极限 A .

由此推出斯特林格公式

$$n! = An^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ 和 $A = \sqrt{2\pi}$,

证 按题设我们可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}{e}.$$

下证不等式:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{2n(n+1)}}, \quad (1)$$

证明了这一点,即可知 $a_{n+1} < a_n$,从而 $\{a_n\}$ 为递减数列.

事实上,在等式

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \cdots\right)$$

中令 $x = \frac{1}{2n+1}$, 即得

$$\ln \frac{n+1}{n} = \frac{2}{2n+1} \left[1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \cdots\right],$$

也即

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots$$

上式右端显然大于 1, 但小于

$$1 + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right] = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

因此, 我们有

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

由此, 取指数(底为 e), 即得(1)式:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+\frac{1}{12n(n+1)}}.$$

由上述不等式, 即可推知:

$$0 < a_{n+1} < a_n \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{及 } a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}}.$$

由此可见, 数列 $\{a_n\}$ 为单调递减且有下界的数列, 因此

它有有限极限 A ; 而数列 $\{a_n e^{-\frac{1}{12n}}\}$ 单调递增且有上界:

$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_n < a_1$, 故也有极限. 由于 $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty)$,

故这两个数列有同一极限 A . 由于对任何的 n , 不等式

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < A < a_n$$

成立, 故在 0 与 1 之间存在这样的 θ , 使得

$$A = a_n e^{-\frac{\theta}{12n}} \text{ 或 } a_n = A e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

因此,

$$\frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = A e^{\frac{\theta}{12n}},$$

即 $n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}$ ($\theta = \theta(n), 0 < \theta < 1$),

或

$$n! = A n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (1 + \epsilon_n),$$

其中 $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$.

现在我们来确定常数 A . 将瓦里斯公式

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2$$

稍加变形, 并将 $n!$ 的表达式代入, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{[(2n)!!]^2}{(2n)!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{2^{2n} A^2 n^{2n+1} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{2n}}}{A \cdot 2^{2n+\frac{1}{2}} n^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} e^{\frac{\theta}{2n}}} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} A^2 \cdot \frac{n}{2} e^{\frac{\theta}{2n}} = \frac{A^2}{4}. \end{aligned}$$

由此得 $A^2 = 2\pi$ 或 $A = \sqrt{2\pi} (A > 0)$.

于是, 最后证得斯特林格公式为

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (0 < \theta < 1).$$

用上式可估计很大的 n 时阶乘 $n!$ 的值.

3105. 根据尤拉的定义里玛函数 $\Gamma(x)$ 由下面的公式来确定:

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

由这个公式出发: (a) 表函数 $\Gamma(x)$ 为无穷乘积的形状; (b) 证明 $\Gamma(x)$ 对于不为负整数的一切实数 x 皆有意义; (c) 推出下面这个性质

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x);$$

(d) 对于正整数 n 求 $\Gamma(n)$ 之值.

解 (a) 由于

$$\begin{aligned} \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} &= \frac{n^x}{x} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{x} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^x \left(1+\frac{1}{2}\right)^x \cdots \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^x \left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)} \\ &\quad \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}, \end{aligned}$$

故得

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}.$$

(6)由上面 $\Gamma(x)$ 写成无穷乘积的过程,得知 $x \neq -n$ ($n=0,1,2,\dots$),即当 x 为非负整数时 $\Gamma(x)$ 才允许写成上述形式. 另一方面,由于

$$p_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} = 1 + \alpha_n \quad (n=1,2,\dots),$$

而 $\alpha_n = \frac{x(x-1)}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 绝对收敛,从而无穷乘积

$$\frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} p_n = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}}$$

绝对收敛,也即 $\Gamma(x)$ 对于 $x \neq -n$ ($n=0,1,2,\dots$) 的一切实数 x 皆有意义.

(B)由于

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n! n^{x+1}}{(x+1) \cdots (x+n+1)}}{\frac{n! n^x}{x(x+1) \cdots (x+n)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{x+n+1} = x, \end{aligned}$$

故 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

(r) 令 $x = n-1$, 即得

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) \\ &= \cdots = (n-1)! . \end{aligned}$$

3106. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可以积分及

$$\delta_n = \frac{b-a}{n}, f_{in} = f(a+i\delta_n) (i=1, 2, \cdots, n),$$

证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in}) = e^{\int_a^b f(x) dx}$.

证 令 $y_n = \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{in})$, 则

$$\begin{aligned} \ln y_n &= \sum_{i=1}^n \ln(1 + \delta_n f_{in}) \\ &= \sum_{i=1}^n [f_{in} \delta_n + O(\delta_n^2)] \\ &= \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned}$$

于是,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{i=1}^n f_{in} \delta_n + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}$$

$$= \int_a^b f(x) dx,$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n (1 + \delta_n f_{i_n}) = e^{\int_a^b f(x) dx}.$$

证毕.

3107*). 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a + ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a + ib)} = \frac{2}{e},$$

其中 $a > 0$ 和 $b > 0$.

证 记 $t = \frac{b}{a}$, 则 $t > 0$, 有

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (a + ib)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a + ib)} = \frac{\sqrt[n]{a^n \prod_{i=0}^{n-1} (1 + it)}}{\frac{a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + it)} \\ &= \frac{\sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1 + it)}}{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + it)}. \end{aligned}$$

注意, 当 n 充分大时, 可算得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} (1 + it) &= n + t \sum_{i=0}^{n-1} i \\ &= n + \frac{t}{2} (n-1)n = \frac{t}{2} n^2 + O(n). \end{aligned}$$

记 $Q_n = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} (1+it)}$, 考虑

$$\begin{aligned} \ln Q_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+it) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln\left(\frac{1+it}{1+nt}(1+nt)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{1+it}{1+nt} \\ &= \ln(1+nt) + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln(1-\Delta_i), \end{aligned}$$

其中

$$\Delta_i = 1 - \frac{1+it}{1+nt} = \frac{(n-i)t}{1+nt} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1),$$

故得

$$\begin{aligned} \ln Q_n &= \ln(nt) + \ln\left(1 + \frac{1}{nt}\right) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln\left(1 - \frac{t}{1+nt} j\right) \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{tj}{1+nt}\right)^k \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt}\right)^k \sum_{j=1}^n j^k \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{t}{1+nt}\right)^k \\ &\quad \cdot \left[\frac{1}{k+1} n^{k+1} + O(n^k)\right] \\ &= \ln(nt) + O\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \left(\frac{nt}{1+nt}\right)^k \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{Q_n}{\frac{t}{2}n + O(1)} = \frac{\frac{nt}{e} \cdot e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{\frac{t}{2}n + O(1)}$$

$$= \frac{2}{e} \cdot \frac{e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)},$$

最后得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{2}{e} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{O(\frac{1}{n} \ln n)}}{1 + O\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{e}.$$

证毕.

*) 原题有误. 应改为由数列 $\{a + ib\}$ 的几何平均与算术平均之比的极限, 分母应为

$$\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (a + ib),$$

而不是 $\sum_{i=0}^{n-1} (a + ib)$.

3108. 设 $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) 在区间 (a, b) 内为连续函数且

$|f_n(x)| \leq c_n$ ($n=1, 2, \dots$), 其中级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛.

证明: 函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

在区间 (a, b) 上是连续的.

证 1) 首先证明上述乘积对任何 $x \in (a, b)$ 是收敛的. 注意级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛, 故 $c_n \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 因而 $f_n(x) \rightarrow 0$ (当 $n \rightarrow \infty$ 时), 故存在正整数 N_0 , 当 $n \geq N_0$

时,有 $|f_n(x)| < \delta$, 此处 δ 可事先取 $(0, 1)$ 内的任一实数. 现在只要研究乘积 $\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 的收敛性即可, 或改写

$$\prod_{n=N_0+1}^{\infty} [1 + f_n(x)] = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)], \quad (1)$$

其中

$$g_k(x) = f_{N_0+k}(x) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

如能证明

$$G(x) = \prod_{k=1}^{\infty} [1 + g_k(x)] \quad (2)$$

是收敛的, 以及下面再证 $G(x)$ 是连续的, 那么

$$F(x) = G(x) \prod_{n=1}^{N_0} [1 + f_n(x)] \quad (3)$$

当然是收敛的而且是连续的. 今研究 (2) 式, 其中 $|g_n(x)| < \delta$, 因而 $1 + g_n(x) > 0 (n = 1, 2, \dots)$. 现在考察乘积对应的另一级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$: 显然, 由 $|g_n(x)|$

$\leq C_{N_0+n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{N_0+n}$ 收敛, 便知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ 绝对收敛.

因而原乘积 (2) (绝对) 收敛.

2) 再证 $G(x)$ 的连续性. 注意当 $x \in (a, b)$ 时 $G(x) > 0$, 故可考虑它的对数函数 $L(x) = \ln G(x)$. 若能证得 $L(x)$ 为 (a, b) 上的连续函数, 则就可得知 $G(x)$ 也在 (a, b) 上连续. 由于

$$\begin{aligned} L(x) = \ln G(x) &= \ln \prod_{n=1}^{\infty} [1 + g_n(x)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \ln [1 + g_n(x)] \end{aligned}$$

以及 $|g_n(x)| \leq C_{N_0+n}, C_{N_0+n} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$, 再注意到 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, 即知: 当 n 充分大时 ($n > N^*$), 对一切 $x \in (a, b)$ 皆有

$$|\ln [1 + g_n(x)]| \leq 2|g_n(x)| \leq 2C_{n+N_0}.$$

根据 $\sum_{n=1}^{\infty} C_{n+N_0}$ 的收敛性知, $L(x)$ 为一在区间 (a, b) 上一致收敛的连续函数项级数之和. 因而 $L(x)$ 在 (a, b) 上为一连续函数. 从而 $G(x)$ 在 (a, b) 上连续. 因此, 最后得知 $F(x)$ 在 (a, b) 内是一连续函数. 证毕.

3109. 求函数

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$$

的导函数之表达式. $F'(x)$ 存在的充分条件为何?

解 首先假定 $1 + f_n(x) \neq 0$ ($a < x < b, n = 1, 2, \dots$).

如果在区间 (a, b) 内的任意一点 x 上, 均有 $\{f_n(x)\}$ 绝对收敛, 也即

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty (x \in (a, b)), \quad (1)$$

那么, 显然无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)]$ 在 (a, b) 内(绝对)收敛且 $F(x) \neq 0$. 考虑函数

$$G(x) = \ln |F(x)|. \quad (2)$$

为研究取 $F(x)$ 的导函数的计算式, 先对(2)作形式求导, 有

$$G'(x) = \frac{F'(x)}{F(x)} \text{ 或 } F'(x) = F(x)G'(x). \quad (3)$$

今再研究 $G'(x)$, 即研究形式导数

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\ln \left| \prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(x)] \right| \right)' \\ &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \ln |1 + f_n(x)| \right)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\ln |1 + f_n(x)|)' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}. \end{aligned} \quad (4)$$

为使(4)式的一切运算有意义, 我们可给出如下充分条件: $f_n(x)$ 可导, 且

$$|f_n'(x)| \leq c_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n < +\infty \quad (x \in (a, b)). \quad (5)$$

下面我们证明: 在条件(1)、(5)之下, $F(x)$ 在 (a, b) 内可导, 且

$$F'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}. \quad (6)$$

只要证明(6)式对 (a, b) 中任一点 x_0 成立. 设 $x_0 \in (a, b)$ 已取定. 取 a_1, b_1 使 $a < a_1 < x_0 < b_1 < b$. 首先证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| \quad (7)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛, 注意到 $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x_0)|$ 的收敛性, 为此又只要证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x) - f_n(x_0)| \quad (8)$$

在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 但根据(5)式, 有: 当 $x \in (a_1, b_1)$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(x_0)| &= |f_n'(\xi_n)(x - x_0)| \\ &\leq (b_1 - a_1)c_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $x_0 \leq \xi_n \leq x$. 由 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 的收敛性, 根据外氏判别法知级数(8), 从而级数(7), 在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 于是, 必有正整数 N 存在, 使当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 恒同时满足下面两个不等式:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{2}, \quad (10)$$

$$|\ln[1 + f_n(x)]| \leq 2|f_n(x)|, \quad (11)$$

由(10)式与(5)式又知: 当 $n > N$ 时, 对一切 $x \in (a_1, b_1)$, 有

$$\left| \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)} \right| \leq 2c_n. \quad (12)$$

根据(11)式与(12)式, 注意到级数(7)在 (a_1, b_1) 的一致收敛性知, $\sum_{n=1}^{\infty} \ln|1 + f_n(x)|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}$ 都在 (a_1, b_1) 上一致收敛. 从而知(4)式中的逐项求导数是允许的, 即 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导, 且(4)式成立. 由(2)式知

$$|F(x)| = e^{G(x)}. \quad (13)$$

由(9)式得:当 $a_1 < x < b_1$ 时,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &\leq (b_1 - a_1)c_n + |f_n(x_0)| \\ &= d_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛,故根据 3108 题的结果知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上连续. 但前面已述 $F(x) \neq 0$, 故在 (a_1, b_1) 上或是 $F(x)$ 恒大于零,这时(13)式为

$$F(x) = e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1); \quad (14)$$

或是 $F(x)$ 恒小于零,这时(13)式为

$$F(x) = -e^{G(x)} \quad (a_1 < x < b_1). \quad (15)$$

在(14)式成立的情形,由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导可知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导,且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)};$$

在(15)式成立的情形下,由 $G(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导可知 $F(x)$ 在 (a_1, b_1) 上可导,且〔注意到(4)式〕

$$F'(x) = -e^{G(x)} G'(x) = F(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n'(x)}{1 + f_n(x)}.$$

在 (a_1, b_1) 上(6)式必成立. 特别在点 x_0 成立.

总之,在条件(1)和条件(5)之下,再假定 $1 + f_n(x) \neq 0$ ($a < x < b, n = 1, 2, 3, \dots$) 即可推出在 (a, b) 上 $F'(x)$ 存在且公式(6)成立.

3110. 证明:若 $0 < x < y$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} = 0.$$

证 记

$$p_n = \frac{x+n}{y+n} (n = 1, 2, 3, \dots).$$

显然, $0 < p_n < 1$. 由题意, 现在要证无穷乘积

$$\frac{x}{y} \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

发散到零. 因为部分乘积 $\prod_{k=1}^n p_k$ 是正的递减的, 故只要证明它是发散的就行了. 为此先估计一下 $p_n = 1 + \alpha_n$, 则有

$$\begin{aligned} \alpha_n = p_n - 1 &= \frac{1 + \frac{x}{n}}{1 + \frac{y}{n}} - 1 = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{y}{n}\right)^{-1} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left[1 - \frac{y}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 \\ &= \left[1 - \frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - 1 \\ &= -\frac{y-x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \end{aligned}$$

故当 n 适当大时, α_n 保持定号. 但由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y-x}{n}$

发散, 便知 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 发散. 因此, 原无穷乘积发散,

即它发散到零. 于是, 有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{y(y+1)\cdots(y+n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{y} \prod_{k=1}^n \frac{x+k}{y+k} \\ &= \frac{x}{y} \prod_{k=1}^{\infty} p_k = 0. \end{aligned}$$

证毕.

§ 10. 斯特林格公式

斯特林格公式

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (0 < \theta_n < 1),$$

可用来计算当值 n 甚大时的 $n!$.

利用斯特林格公式, 近似地计算:

3111. $\lg 100!$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \lg 100! &= \lg \left\{ \sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta}{12 \cdot 100}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} (\lg 2 + \lg \pi + \lg 100) + 100 \lg 100 - 100 \lg e + \frac{\theta}{1200} \lg e \\ &= \frac{1}{2} (0.3010 + 0.4971 + 2) + 200 - 100 \cdot 0.4343 \\ &\quad + 0.0004\theta \\ &= 157.9691 + 0.0004\theta, \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta < 1$.

3112⁺. $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999$.

$$\begin{aligned} \text{解 } 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 1999 &= \frac{2000!}{2^{1000} \cdot 1000!} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2000} \cdot 2000^{2000} \cdot e^{-2000} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24000}}}{2^{1000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 1000} \cdot 1000^{1000} \cdot e^{-1000} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12000}}} \\ &= 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot e^{\frac{\theta}{12000}} \\ &= 7.09 \cdot 10^{2866} \cdot \left(1 + \frac{\theta}{12000} \right), \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

3113. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100}$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 100} &= \frac{100!}{2^{100} (50!)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{2^{100} \cdot 100\pi \cdot 50^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{300}}} \\
 &= 0.0798 e^{\frac{\theta}{300}} \doteq 0.0798 \left(1 + \frac{\theta}{300} \right), \\
 \text{其中 } |\theta| < 1 \quad (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1).
 \end{aligned}$$

3114. C_{100}^{40} .

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad C_{100}^{40} &= \frac{100!}{40! \cdot 60!} \\
 &= \frac{\sqrt{200\pi} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2\pi \cdot 40} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 60} \cdot 60^{60} \cdot 40^{40} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{480} + \frac{\theta_3}{720}}} \\
 &= 10^{28} \cdot 1.378 e^{\frac{\theta}{288}} \\
 &\doteq 10^{28} \cdot 1.378 \left(1 + \frac{\theta}{288} \right), \\
 \text{其中 } |\theta| < 1 \quad (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1).
 \end{aligned}$$

3115. $\frac{100!}{20! \cdot 30! \cdot 50!}$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad \frac{100!}{20! \cdot 30! \cdot 50!} &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 100} \cdot 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_1}{1200}}}{\sqrt{2^3 \pi^3 20 \cdot 30 \cdot 50} \cdot 20^{20} \cdot 30^{30} \cdot 50^{50} \cdot e^{-100} \cdot e^{\frac{\theta_2}{240} + \frac{\theta_3}{360} + \frac{\theta_4}{600}}} \\
 &= 10^{42} \cdot 4.792 e^{\frac{\theta}{120}} \\
 &\doteq 10^{42} \cdot 4.792 \left(1 + \frac{\theta}{120} \right), \\
 \text{其中 } |\theta| < 1 \quad (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_3 < 1, 0 < \theta_4 < 1).
 \end{aligned}$$

3116. $\int_{-\frac{1}{2}}^1 (1-x^2)^{50} dx$.

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

3118. 对于乘积

$$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)$$

推出渐近公式.

$$\begin{aligned} \text{解 } (2n-1)!! &= \frac{2n!}{2^n n!} = \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2^n \cdot \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{1\frac{\theta_2}{12n}}} \\ &= \sqrt{2} (2n)^n e^{-n + \frac{\theta}{12n}}, \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

3119. 若 n 甚大, 近似地计算 C_2^n .

$$\begin{aligned} \text{解 } C_2^n &= \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi \cdot 2n} \cdot (2n)^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_1}{24n}}}{2\pi n \cdot n^{2n} \cdot e^{-2n} \cdot e^{\frac{\theta_2}{12n}}} \\ &= \frac{2^{2n}}{\sqrt{n\pi}} e^{\frac{\theta}{6n}}, \end{aligned}$$

其中 $|\theta| < 1$ ($0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1$).

3120. 利用斯特林格公式求下列极限:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}; \quad (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{(2n-1)!!}}; \quad (\Gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } (a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{2\pi n} \cdot \sqrt[n]{n} \cdot e^{-\frac{1}{n}} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}} \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{2\pi n} \cdot n \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{\sqrt[n]{2\pi n} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}} = e. \end{aligned}$$

(B) 利用 3118 题的结果即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{(2n-1)!!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[2n]{2 \cdot 2n \cdot e^{-1} \cdot e^{\frac{\theta}{12n^2}}}}$$

$$= \frac{e}{2}.$$

$$(\Gamma) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln \pi + \ln n) + n \ln n - n + \frac{\theta}{12n}}{n \ln n}$$

$$= 1.$$

§ 11. 用多项式逼近连续函数

1° 拉格朗日插值公式 拉格朗日多项式

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} y_i$$

具有性质 $P_n(x_i) = y_i (i=0, 1, \dots, n)$.

2° 伯恩斯坦多项式 若 $f(x)$ 是闭区间 $[0, 1]$ 上的连续函数, 则伯恩斯坦多项式

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n f\left(\frac{i}{n}\right) C_n^i x^i (1-x)^{n-i}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时在闭区间 $[0, 1]$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

3121. 作出经过下列数组

x	-2	0	4	5
y	5	1	-3	1

的最低的 n 阶多项式 $P_n(x)$.

$$P_n(-1), P_n(1), P_n(6)$$

近似地等于什么?

解 $x_0 = -2, x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 5;$

$y_0 = 5, y_1 = 1, y_2 = -3, y_3 = 1.$

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 \\ + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3.$$

以 $(x_i, y_i) (i=0, 1, 2, 3)$ 代入上式, 化简即得

$$P_3(x) = 1 - \frac{55}{21}x - \frac{1}{14}x^2 + \frac{5}{42}x^3.$$

$$P_3(-1) = 1 + \frac{55}{21} - \frac{1}{14} - \frac{5}{42} \doteq 3.43,$$

$$P_3(1) = 1 - \frac{55}{21} - \frac{1}{14} + \frac{5}{42} \doteq -1.57,$$

$$P_3(6) = 1 - \frac{110}{7} - \frac{18}{7} + \frac{180}{7} \doteq 8.43.$$

3122. 写出经过三点: $A(x_0-h, y_{-1}), B(x_0, y_0), C(x_0+h, y_1)$ 的抛物线方程

$$y = ax^2 + bx + c$$

解 将三点的坐标代入拉格朗日插入公式, 即得

$$y = \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{[(x_0-h)-x_0][(x_0-h)-(x_0+h)]}y_{-1} \\ + \frac{(x-x_0+h)(x-x_0-h)}{[x_0-(x_0-h)][x_0-(x_0+h)]}y_0 \\ + \frac{(x-x_0+h)(x-x_0)}{[(x_0+h)-(x_0-h)][(x_0+h)-x_0]}y_1 \\ = y_0 + \frac{y_1 - y_{-1}}{2h}(x-x_0) + \frac{y_1 - 2y_0 + y_{-1}}{2h^2}(x-x_0)^2$$

$$\cdot (x-x_0)^2.$$

3123. 利用数值 $x_0=1, y_0=1, ; x_1=25, y_1=5; x_2=100, y_2=10$, 推出开平方根: $y=\sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 100$) 的近似公式.

解 $y=\sqrt{x}$ 的近似公式可由拉格朗日插入公式求出:

$$\begin{aligned} y &\doteq \frac{(x-25)(x-100)}{(-24) \cdot (-99)} \cdot 1 + \frac{(x-1)(x-100)}{24 \cdot (-75)} \cdot 5 \\ &\quad + \frac{(x-1)(x-25)}{99 \cdot 75} \cdot 10 \\ &= 0.808 + 0.193x - 0.00101x^2. \end{aligned}$$

例如,

$$x=4, y \doteq 1.564 (\text{应为 } 2);$$

$$x=9, y \doteq 2.463 (\text{应为 } 3);$$

$$x=16, y \doteq 3.637 (\text{应为 } 4);$$

$$x=36, y \doteq 6.447 (\text{应为 } 6);$$

由此看来, 误差还较大.

3124. 利用数值

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 90^\circ = 1,$$

推出如下的近似公式

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3 \quad (0 \leq x \leq 90).$$

利用这个公式, 近似地求:

$$\sin 20^\circ, \quad \sin 40^\circ, \quad \sin 80^\circ.$$

解 将 $x=30, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}; x=90, \sin 90^\circ = 1$ 代入近似公式

$$\sin x^\circ \approx ax + bx^3,$$

即得联立方程组

$$\begin{cases} 30a + 27000b = \frac{1}{2} \\ 90a + 729000b = 1. \end{cases}$$

解之,得

$$a = \frac{5}{288}, b = -\frac{5}{288} \left(\frac{1}{150} \right)^2.$$

因此,

$$\sin x^\circ \approx \frac{5x}{288} \left[1 - \left(\frac{x}{150} \right)^2 \right].$$

由此近似公式,可得

$$\sin 20^\circ \approx 0.341, \sin 40^\circ \approx 0.645, \sin 80^\circ \approx 0.994,$$

这与查表所得的

$$\sin 20^\circ = 0.3420, \sin 40^\circ = 0.6428, \sin 80^\circ = 0.9848 \text{ 近似.}$$

3125. 取数值 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ 作拉格朗日多项式的插值点, 对函数 $f(x) = |x|$ 作出在闭区间 $[-1, 1]$ 上的拉格朗日插值多项式.

解 以 $x_i = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, y_i = 0, \frac{1}{2}, 1$ 代入拉格朗日插值式, 即得

$$\begin{aligned} P(x) = & \frac{x \left(x - \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\left(-\frac{1}{2} \right) (-1) \cdot \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \\ & + \frac{x \left(x + \frac{1}{2} \right) (x^2 - 1)}{\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \right)} \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x(x-1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{(-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-2)} \cdot 1 \\
& + \frac{x(x+1)\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)}{1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2} \cdot 1 \\
& = \frac{x^2}{3}(7-4x^2) \quad (|x| \leq 1),
\end{aligned}$$

此即所求的多项式.

3126. 以拉格朗日多项式代换函数 $y(x)$, 近似地计算

$$\int_0^2 y(x) dx,$$

其中

x	0	0.5	1	1.5	2
$y(x)$	5	4.5	3	2.5	5

$$\begin{aligned}
\text{解 } y(x) &= \frac{(x-0.5)(x-1)(x-1.5)(x-2)}{(-0.5)(-1)(-1.5)(-2)} \cdot 5 \\
& + \frac{x(x-1)(x-1.5)(x-2)}{0.5 \cdot (-0.5) \cdot (-1) \cdot (-1.5)} \cdot 4.5 \\
& + \frac{x(x-0.5)(x-1.5)(x-2)}{1 \cdot 0.5(-0.5) \cdot (-1)} \cdot 3 \\
& + \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-2)}{1.5 \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot (-0.5)} \cdot 2.5 \\
& + \frac{x(x-0.5)(x-1)(x-1.5)}{2 \cdot 1.5 \cdot 1 \cdot 0.5} \cdot 5 \\
& = \left(\frac{10}{3}x^4 - \frac{50}{3}x^3 + \frac{87.5}{3}x^2 - \frac{62.5}{3}x + 5\right) \\
& + (-12x^4 + 54x^3 - 78x^2 + 36x) + (12x^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -48x^3 + 57x^2 - 18x) + (-\frac{20}{3}x^4 + \frac{70}{3}x^3 \\
& -\frac{70}{3}x^2 + \frac{20}{3}x) + (\frac{10}{3}x^4 - 10x^3 + \frac{27.5}{3}x^2 \\
& - 2.5x) \\
& = \frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 y(x) dx & \doteq \int_0^2 (\frac{8}{3}x^3 - 6x^2 + \frac{4}{3}x + 5) dx \\
& = (\frac{2}{3}x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x^2 + 5x) \Big|_0^2 = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

3127. 对于函数 x, x^2, x^3 , 试在闭区间 $[0, 1]$ 上作出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

解 对于函数 $f(x) = x$, 其白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为

$$\begin{aligned}
B_n(x) & = \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
& = x \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
& = x[x + (1-x)]^{n-1} = x;
\end{aligned}$$

对于函数 $f(x) = x^2$, 其白恩什坦多项式为

$$\begin{aligned}
B_n(x) & = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \\
& = \frac{1^2}{n^2} C_n^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_n^2 x^2 (1-x)^{n-2} \\
& \quad + \frac{3^2}{n^2} C_n^3 x^3 (1-x)^{n-3} \\
& \quad + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_n^{n-1} x^{n-1} (1-x) + \frac{n^2}{n^2} C_n^n x^n \\
& = \frac{1}{n} x (1-x)^{n-1} + \frac{2(n-1)}{n} x^2 (1-x)^{n-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3}{n} \cdot \frac{(n-1)(n-2)}{2!} x^3 (1-x)^{n-3} \\
& + \cdots + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-2)!} x^{n-1} (1-x) + x^n \\
= & \frac{1}{n} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) \\
& x^2 \cdot (1-x)^{n-2} + \frac{3}{n} (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^3) x^3 (1-x)^{n-3} \\
& + \cdots + \frac{n-1}{n} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1} (1-x) \\
& + x^n - \left[\frac{1}{n} C_{n-1}^1 x (1-x)^{n-1} + \frac{2}{n} C_{n-1}^2 x^2 \right. \\
& \left. (1-x)^{n-2} + \cdots + \frac{n-1}{n} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} (1-x) \right] \\
= & \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{k}{n} \cdot x^k (1-x)^{n-k} - \frac{n-1}{n} x (1-x) \\
& \cdot \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2} \\
= & x - \frac{n-1}{n} x (1-x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}$$

对于函数 $f(x) = x^3$, 其白恩什坦多项式为

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{k^3}{n^3} C_n^k x^k (1-x)^k \\
&= \frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^0 x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^1 x^2 (1-x)^{n-2} \\
&+ \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-2} x^{n-1} (1-x) + x^n \\
&= \frac{1^2}{n^2} (C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1) x (1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} \\
& (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2) x^2 \cdot (1-x)^{n-2} + \cdots \\
&+ \frac{(n-1)^2}{n^2} (C_{n-1}^{n-2} + C_{n-1}^{n-1}) x^{n-1} (1-x) + x^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{1^2}{n^2} C_{n-1}^1 x(1-x)^{n-1} + \frac{2^2}{n^2} C_{n-1}^2 x^2(1-x)^{n-2} \right. \\
& \quad \left. + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^2} C_{n-1}^{n-1} x^{n-1} \cdot (1-x) \right] \\
& = \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\
& \quad \cdot \left[\frac{1}{n-2} C_{n-2}^0 (1-x)^{n-2} + \frac{2}{n-2} C_{n-2}^1 x(1-x)^{n-3} \right. \\
& \quad \left. + \dots + \frac{n-1}{n-2} C_{n-2}^{n-2} x^{n-2} \right] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} x(1-x) \\
& \quad \cdot \left[\frac{1}{n-2} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k}{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} \right] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \\
& \quad \cdot \left[\frac{x}{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} C_{n-3}^k (x^k + 1-x)^{n-3-k} + 1 \right] \\
& = x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - \frac{(n-1)(n-2)x(1-x)}{n^2} \\
& \quad \cdot \left(\frac{x}{n-2} + 1 \right) \\
& = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) x^3 + \frac{3}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n^2} x.
\end{aligned}$$

3128. 对于在闭区间 $[a, b]$ 上的已知函数 $f(x)$, 写出白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 的公式.

解 令 $a + (b-a)y = x$, 则当 $0 \leq y \leq 1$ 时 $a \leq x \leq b$, 此

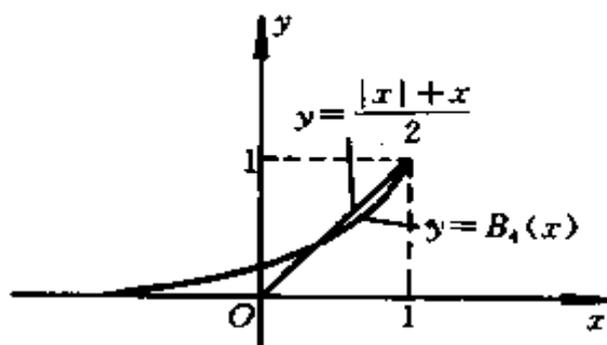


图 5.9

3130⁺. 在 $-1 \leq x \leq 1$ 内用偶次的白恩什坦多项式逼近函数

$$f(x) = |x|$$

解 利用 3128 题的结果, 即得

$$\begin{aligned}
 B_{2^n}(x) &= \sum_{k=0}^{2^n} \left| -1 + \frac{k}{n} \right| C_{2^n}^k \frac{(x+1)^k (1-x)^{2^n-k}}{2^{2^n}} \\
 &= \frac{1}{2^{2^n}} \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2^n}^k (x+1)^k (1-x)^{2^n-k} + \sum_{k=n+1}^{2^n} \frac{k-n}{n} C_{2^n}^k \right. \\
 &\quad \left. \cdot (x+1)^k (1-x)^{2^n-k} \right\} \\
 &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{n} C_{2^n}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} + \sum_{k=n+1}^{2^n} \frac{k-n}{n} C_{2^n}^k \right. \\
 &\quad \left. \cdot \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{n-k} \right\} \\
 &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{k}{n} C_{2^n-k}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n+k}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^{-k} \right\} \\
 &= \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^n-k}^k \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} C_{2^{n-k}}^k \left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k \}.$$

由于

$$\begin{aligned} C_{2^{n-k}}^{n-k} + C_{2^{n-k}}^k &= C_{2^{n-k}}^{n-k} \left[1 + \frac{(n+k)(n+k-1)\cdots(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n+k)} \right] \\ &= 2C_{2^{n-k}}^{n-k}, \end{aligned}$$

故 $C_{2^{n-k}}^{n-k} = C_{2^{n-k}}^k$. 因此, 可得

$$B_{2^n}(x) = \frac{1}{n} \left(\frac{1-x^2}{4} \right)^n \sum_{k=1}^n \left\{ k C_{2^{n-k}}^{n-k} \left[\left(\frac{1+x}{1-x} \right)^k + \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^k \right] \right\}.$$

3131. 对于函数

$$f(x) = e^{kx} \quad (a \leq x \leq b)$$

写出白恩什坦多项式 $B_n(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } B_n(x) &= \sum_{j=0}^n e^{k(a+(b-a)\frac{j}{n})} C_n^j \frac{(x-a)^j (b-x)^{n-j}}{(b-a)^n} \\ &= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \sum_{j=0}^n e^{k\frac{(b-a)j}{n}} C_n^j (x-a)^j (b-x)^{n-j} \\ &= \frac{e^{ka}}{(b-a)^n} \left[e^{\frac{b-a}{n}k} (x-a) + (b-x) \right]^n \\ &= e^{ka} \left[e^{\frac{b-a}{n}k} \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x}{b-a} \right]^n \\ &= e^{ka} \left[\left(e^{\frac{b-a}{n}k} - 1 \right) \frac{x-a}{b-a} + \frac{b-x+x-a}{b-a} \right]^n \\ &= e^{ka} \left[1 + \left(e^{\frac{b-a}{n}k} - 1 \right) \frac{x-a}{b-a} \right]^n. \end{aligned}$$

3132. 在闭区间 $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 上, 对于函数 $f(x) = \cos x$ 计算多项式 $B_n(x)$.

解 我们有

$$\cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}). \quad (1)$$

利用 3131 题的结果(在其中令 $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$ 并分别令 $k=i$ 和 $k=-i$), 得 e^{ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(1)}(x)$ 与 e^{-ix} 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的白恩什坦多项式 $B_n^{(2)}(x)$ 分别为:

$$B_n^{(1)}(x) = e^{-\frac{\pi}{2}i} \left[1 + (e^{\frac{i\pi}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n,$$

$$B_n^{(2)}(x) = e^{\frac{\pi}{2}i} \left[1 + (e^{-\frac{i\pi}{n}} - 1) \left(\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi} \right) \right]^n.$$

于是,

$$\begin{aligned} B_n^{(1)}(x) &= e^{-\frac{\pi}{2}i} \left\{ e^{\frac{\pi i}{2n}} \left[e^{-\frac{\pi i}{2n}} + (e^{\frac{\pi i}{2n}} - e^{-\frac{\pi i}{2n}}) \cdot \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right] \right\}^n \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}i} e^{\frac{\pi}{2}i} \left[\cos \frac{\pi}{2n} - i \sin \frac{\pi}{2n} + 2i \sin \frac{\pi}{2n} \left(\frac{x}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \right]^n \\ &= \left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n. \end{aligned}$$

同理可得

$$B_n^{(2)}(x) = \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n.$$

于是, 根据(1)式, 即知 $\cos x \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$ 为:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \frac{1}{2} [B_n^{(1)}(x) + B_n^{(2)}(x)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\cos \frac{\pi}{2n} + i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right. \\ &\quad \left. + \left(\cos \frac{\pi}{2n} - i \frac{2x}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

应当指出,我们也可不利用(1)式以及 3131 题的结果,而利用 3128 题的结果直接写出 $\cos x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的白恩什坦多项式 $B_n(x)$:

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) C_n^k \frac{\left(x + \frac{\pi}{2}\right)^k \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{n-k}}{\pi^n} \\ &= \sum_{k=0}^n \sin \frac{k\pi}{n} C_n^k \frac{(\pi + 2x)^k (\pi - 2x)^{n-k}}{(2\pi)^n}, \end{aligned}$$

这是 $B_n(x)$ 的另一表示式.

3133. 证明: 在闭区间 $(-1, 1)$ 上, $|x| = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x)$, 其中

$$P_n(x) = 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{i=2}^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2i-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2i)} (1-x^2)^i.$$

证 $|x| = \sqrt{x^2} = \sqrt{1-t}$, 其中 $t = 1-x^2$.

我们知道, 函数 $\sqrt{1-t}$ 按幂级数展开有

$$\begin{aligned} \sqrt{1-t} &= 1 + \frac{1}{2}(-t) \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} \cdot (-t)^n \\ &= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)(-3)\cdots(-2n+3)}{n! 2^n} (-1)^n t^n \\ &= 1 - \frac{t}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} (-1)^{2n-1} t^n \\ &= 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \quad (-1 < t < 1). \end{aligned} \tag{1}$$

当 $t = \pm 1$ 时, 上式右端级数为

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (\pm 1)^n = \sum_{n=2}^{\infty} a_n.$$

由于

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} - 1 \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1 \right) = \frac{3}{2} > 1, \end{aligned}$$

故由拉阿伯判别法可知级数 $\sum_{n=2}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 从而级数

$\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ 收敛. 因此, 由幂级数的亚伯耳定理知, (1) 式当 $t = \pm 1$ 时也成立, 即有

$$\sqrt{1-t} = 1 - \frac{t}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} t^n \quad (-1 \leq t \leq 1). \quad (2)$$

于是, 将 $t = 1 - x^2$ 代入, 即得

$$\begin{aligned} |x| &= 1 - \frac{1-x^2}{2} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} (1-x^2)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \quad (-1 \leq x \leq 1). \end{aligned} \quad (3)$$

证毕.

注 由幂级数的性质知(2)式右端的级数在 $0 \leq t \leq 1$ 上一致收敛(实际在 $-1 \leq t \leq 1$ 上也一致收敛), 故(3)式中的级数在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致收敛. 因此, 我们实际证明了更强的结论: 当 $n \rightarrow \infty$ 时 $P_n(x)$ 在 $-1 \leq x \leq 1$ 上一致趋于 $|x|$.

3134. 设 $f(x)$ 是对于 $-\pi \leq x \leq \pi$ 的连续函数而 $a_n, b_n (n=0, 1, 2, \dots)$ 是它的福里叶系数, 证明菲叶耳三角多项式

$$\sigma_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right) (a_i \cos ix + b_i \sin ix)$$

在区间 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于函数 $f(x)$.

证 首先指出, 本题结论有误, 有所设条件下, 只能断定: 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi + \eta, \pi - \eta)$ 上一致收敛于 $f(x)$, 而一般推不出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 但若再假定 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则能推出 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

今证于下. 首先, 以 $f(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上的函数值为基础按 2π 为周期将函数 $f(x)$ 延拓到整个 $(-\infty, +\infty)$ 上, 延拓后的函数仍记为 $f(x)$ (注意, 若原来 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则延拓后的函数在 $x = \pi$ 的函数值不等于原来的函数值 $f(\pi)$, 但一个点的函数值对于下面各积分之值毫无影响). 用 $S_n(x)$ 表 $f(x)$ 的福里叶级数的部分和, 则

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos mx + b_m \sin mx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos m(u-x) \right] du. \end{aligned}$$

将 n 个等式

$$2 \sin \frac{v}{2} \cos mv = \sin \left(m + \frac{1}{2} \right) v - \sin \left(m - \frac{1}{2} \right) v \quad (m=1, 2, \dots, n)$$

相加得

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mv = \frac{\sin(2n+1) \frac{v}{2}}{2 \sin \frac{v}{2}},$$

从而(作代换 $u-x=t$)

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-x}^x f(u) \frac{\sin(2n+1)\frac{u-x}{2}}{2\sin\frac{u-x}{2}} du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-x-x}^{x-x} f(x+t) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

由于周期为 2π 的函数 $F(u)$ 在长为 2π 的闭区间 $[\lambda, \lambda+2\pi]$ 上的积分 $\int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} F(u)du$ 与 λ 无关, 故上式右端的积分 \int_{-x-x}^{x-x} 可换为 \int_{-x}^x . 由此, 再将 \int_{-x}^x 表为 $\int_{-x}^0 + \int_0^x$, 并在 \int_{-x}^0 中作代换 $t=-s$, 即得表达式

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x [f(x+t) + f(x-t)] \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

显然 $\sigma_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x)$, 故

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n\pi} \int_{-x}^x [f(x+t) + f(x-t)] \\ &\quad \cdot \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

由于

$$2\sin\frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+\frac{1}{2})t$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} [\cos kt - \cos(k+1)t] \\
&= 1 - \cos nt = 2\sin^2 \frac{nt}{2}.
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) + f(x-t)] \\
&\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \tag{1}
\end{aligned}$$

特别在(1)式中,令 $f(x) \equiv 1$, 则显然这时 $S_n(x) \equiv 1$, 从而 $\sigma_n(x) \equiv 1$, 因此得下面的等式:

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \tag{2}$$

(1)式减去(2)式乘 $f(x)$, 得

$$\begin{aligned}
&\sigma_n(x) - f(x) \\
&= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x) + f(x-t) - f(x)] \\
&\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt. \tag{3}
\end{aligned}$$

由(3)式证明下述两结论:

i) 对任何 $\eta > 0$, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 上一致收敛于 $f(x)$.

ii) 若更设 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

先证 i). 设已给 $\eta > 0$. 显然, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$

上有界,故存在常数 $M > 0$, 使

$$|f(x)| \leq M (-\infty < x < +\infty).$$

注意,延拓后的函数在点 $x = \pi, x = -\pi$ 可能不连续, (可能有第一类间断点),但在 $-\pi < x < \pi$ 上肯定是连续的,因此,在 $\left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$ 上必一致连续. 于是,对任给的 $\varepsilon > 0$, 必有 $\delta > 0$ 存在,使对于闭区间 $\left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$ 上任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| \leq \delta$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. 令

$$\tau = \min \left\{ \delta, \frac{\eta}{2} \right\}.$$

根据(3)式,有

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^\tau [f(x+t) - f(x) + f(x-t) \\ &\quad - f(x)] \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt \\ &\quad + \frac{1}{2n\pi} \int_\tau^x [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] \\ &\quad \cdot \left[\frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \right]^2 dt = I_1 + I_2; \end{aligned} \quad (4)$$

显然,当 $0 \leq t \leq \tau, -\pi + \eta \leq x \leq \pi - \eta$ 时,有 $x+t \in \left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right], x-t \in \left[-\pi + \frac{\eta}{2}, \pi - \frac{\eta}{2}\right]$,

从而

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

由此可知, $\sigma_n(x)$ 在 $[-\pi + \eta, \pi - \eta]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

再证 ii), 若原来给定的 $(-\pi, \pi)$ 上的连续函数 $f(x)$ 满足 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则前述延拓出去后的函数 $f(x)$ 是整个 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数. 因此, 在 $[-2\pi, 2\pi]$ 上必一致连续. 于是, 对于任给的 $\epsilon > 0$, 必有 $\tau > 0$ 存在, (可取 $\tau < \pi$), 使对于 $[-2\pi, 2\pi]$ 中任何两点 x', x'' , 只要 $|x' - x''| \leq \tau$, 就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{2}.$$

以下的证明和 i) 对应部分类似. 首先, 对刚才确定的 τ , 写出(4)式. 显然, 当 $0 \leq t \leq \tau$, $-\pi \leq x \leq \pi$ 时, 有 $x+t \in [-2\pi, 2\pi]$, $x-t \in [-2\pi, 2\pi]$, 故

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |f(x-t) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

从而, 当 $-\pi \leq x \leq \pi$ 时(5)式成立. 同样(6)式成立. 于是, 当 $n > N = \left\lceil \frac{4M}{\epsilon \sin^2 \frac{\tau}{2}} \right\rceil$ 时, 对一切 $x \in [-\pi, \pi]$,

恒有

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

故 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $f(x)$.

最后, 我们举例说明, 若 $f(-\pi) \neq f(\pi)$, 则一般不能断定 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上一致收敛于 $f(x)$. 例如, 设

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

我们证明这时的 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上不一致收敛于 $f(x)$. 用反证法, 假定 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上一致收敛

于 $f(x)=x$. 由福里叶级数的收敛性定理(即迪里黑里定理)知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi), \quad (7)$$

这里

$$S(x) = \begin{cases} f(x) = x, & \text{当 } -\pi < x < \pi \text{ 时,} \\ \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0, & \text{当 } x = \pm\pi \text{ 时,} \end{cases}$$

由此可知, $S(x)$ 在点 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续, 但另一方面, 根据(7)式, 利用 138 题的结果知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(x) = S(x) \quad (-\pi \leq x \leq \pi). \quad (8)$$

由反证法的假定, $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi < x < \pi$ 上一致收敛于 $S(x)$ (在 $-\pi < x < \pi$ 上, $f(x)=x=S(x)$). 而由(8)式, 当 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 时, $\sigma_n(x)$ 也收敛于 $S(x)$, 故知 $\sigma_n(x)$ 在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上一致收敛于 $S(x)$. 显然, $\sigma_n(x)$ 都是 x 的连续函数 ($-\pi \leq x \leq \pi$), 由此可知, 极限函数 $S(x)$ 也必在 $-\pi \leq x \leq \pi$ 上连续; 此与 $S(x)$ 在 $x=\pi$ 和 $x=-\pi$ 不连续的事实矛盾, 此矛盾证明了 $\sigma_n(x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 上收敛于 $f(x)=x$ 不是一致的.

本题全部证毕.

3135. 对于函数

$$f(x) = |x| \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

作出非叶耳多项式 $\sigma_{2n-1}(x)$.

解 由于 $f(x)$ 是偶函数, 故

$$b_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots),$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos i x \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1] \\ (n=1, 2, \dots),$$

故

$$a_{2k} = 0, a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi} (k=1, 2, \dots).$$

于是

$$\begin{aligned} \sigma_{2n-1} &= \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{2n-2} \left(1 - \frac{i}{2n-1}\right) a_i \cos ix \\ &= \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{2k-1}{2n-1}\right) \cdot \left[-\frac{4}{(2k-1)^2 \pi}\right] \\ &\quad \cdot \cos(2k-1)x \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n-k}{2n-1} \cdot \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}. \end{aligned}$$

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

Б.П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(五)

费定晖 周学圣 编演

郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

一九八一年·济南

Б.П.吉米多维奇
数学分析习题集题解

(五)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
山东省新华书店发行
山东人民印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本 24.375印张 620千字
1980年7月第1版 1981年11月第2次印刷
印数:82,001—110,000

书号 13195·21 定价 2.60元

出版说明

吉米多维奇(В.П.ДЕМИДОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自五十年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书4462题的所有解答汇辑成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以逼使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易

查抄本书的解答，因为任何削弱独立思考的作法，都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准，仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免，一经发觉，恳请指正，不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮副教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题，都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加本册审校工作的还有张效先、徐沅同志。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中，还得到山东大学、山东工学院、山东师范学院和曲阜师范学院的领导和同志们的大力支持，特在此一并致谢。

1979年4月

目 录

第六章 多变量函数的微分法	1
§1. 多变量函数的极限, 连续性	1
§2. 偏导函数, 多变量函数的微分	39
§3. 隐函数的微分法	152
§4. 变量代换	230
§5. 几何上的应用	337
§6. 台劳公式	387
§7. 多变量函数的极值	415
第七章 带参数的积分	525
§1. 带参数的常义积分	525
§2. 带参数的广义积分, 积分的一致收敛性	567
§3. 广义积分中的变量代换, 广义积分号下 微分法及积分法	618
§4. 尤拉积分	709
§5. 福里叶积分公式	752

第六章 多变量函数的微分法

§1. 多变量函数的极限. 连续性

1° 多变量函数的极限 设函数 $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义. 若对于任何的 $\varepsilon > 0$ 存在有 $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$, 使得只要 $P \in E$ 及 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ (其中 $\rho(P, P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离), 则

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

2° 连续性 若

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 于已知域内的每一点连续, 则称函数 $f(P)$ 于此域内是连续的.

3° 一致连续性 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta > 0$, 使得对于域 G 中的任何点 P', P'' , 只要是

$$\rho(P', P'') < \delta,$$

便有不等式

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f(P)$ 于域 G 内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域：

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$$y \geq 0,$$

如图 6.1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内。

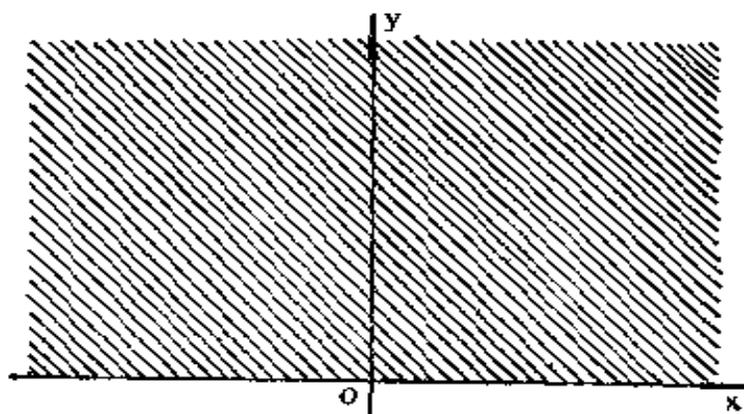


图 6.1

3137. $u = \sqrt{1-x^2}$
 $+ \sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不
等式

$$|x| \leq 1, |y| \geq 1$$

的点集，如图 6.2 阴
影部分所示，包括边
界（粗实线）在内。

3138. $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

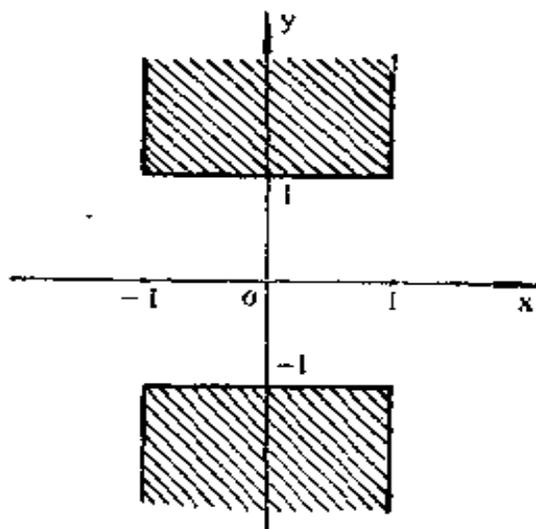


图 6.2

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

如图 6.3 阴影部分所示, 包括圆周在内.

$$3139. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$x^2 + y^2 > 1$$

的点集, 即圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的外面, 如图 6.4 所示, 不包括圆周 (虚线) 在内.

$$3140. \quad u = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

的点集, 如图 6.5 所示的环, 包括边界在内.

$$3141. \quad u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$x \leq x^2 + y^2 < 2x$$

的点集. 由 $x^2 + y^2$

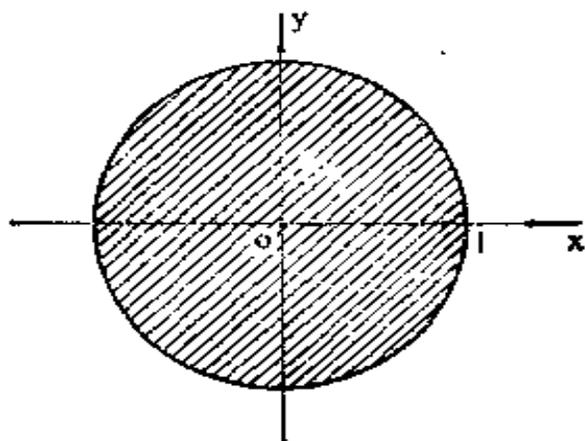


图 6.3

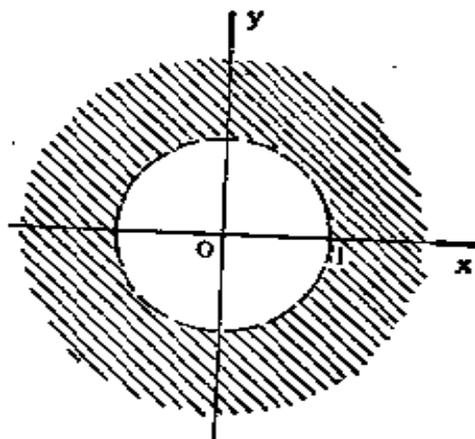


图 6.4

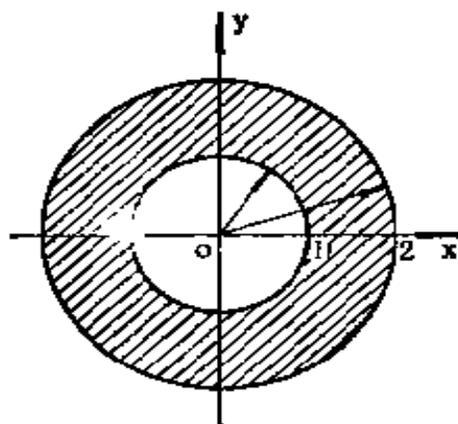


图 6.5

$\geq x$ 得出

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2 + y^2 < 2x$ 得出

$$(x-1)^2 + y^2 < 1,$$

两者组成一月形，如图 6.6 阴影部分所示。

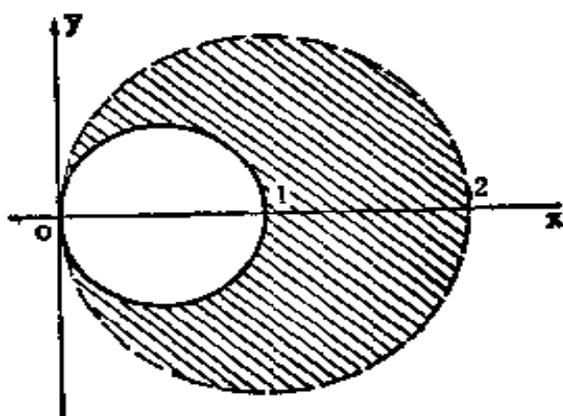


图 6.6

3142. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1 \leq x^2 + y \leq 1$$

的点集，如图 6.7 阴影部分所示，包括边界在内。

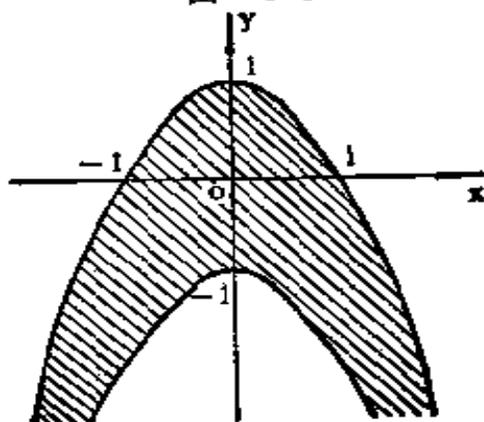


图 6.7

3143. $u = \ln(-x - y)$.

解 存在域为半平面

$$x + y < 0,$$

如图 6.8 阴影部分所示，不包括直线 $x + y = 0$ 在内。

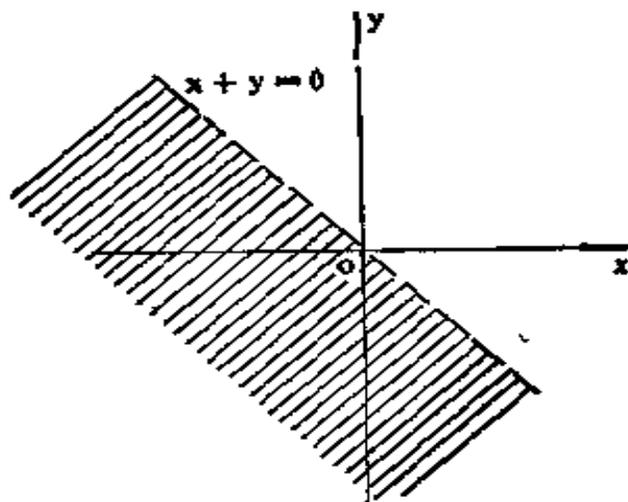


图 6.8

3144. $u = \arcsin \frac{y}{x}$.

解 存在域为满足

不等式

$$\left| \frac{y}{x} \right| \leq 1$$

或 $|y| \leq |x|$ ($x \neq 0$)
 的点集, 这是一对对顶的直角, 如图 6·9 阴影部分所示, 不包括原点在内。

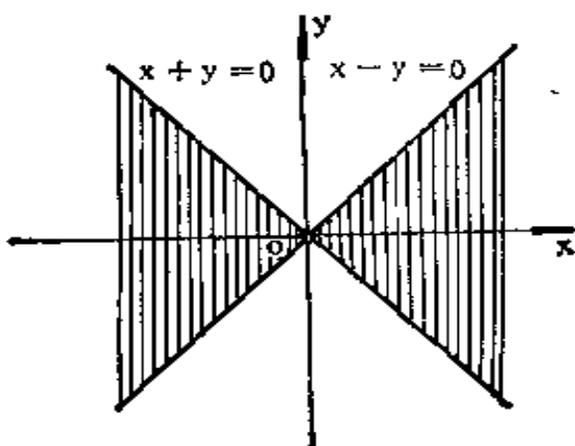


图 6·9

3145. $u = \arccos \frac{x}{x+y}$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$$

的点集. 由 $\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$ 得 $|x| \leq |x+y|$ ($x \neq -y$),
 即 $x^2 \leq x^2 + 2xy + y^2$ 或 $y(y+2x) \geq 0$, 也即

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ y \geq -2x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y \leq 0, \\ y \leq -2x. \end{cases}$$

但 x, y 不能同时为零. 这是由直线: $y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角, 如图 6·10 阴影部分所示, 包括边界在内, 但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内。

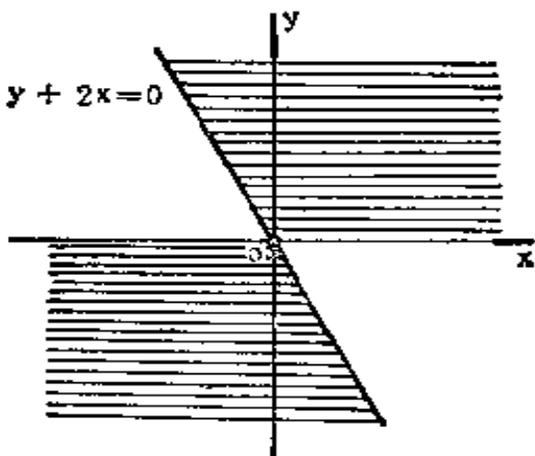


图 6·10

3146. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y).$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{x}{y^2} \right| \leq 1 \text{ 及 } |1 - y| \leq 1 \quad (y \neq 0)$$

的点集, 即

$$\begin{cases} y^2 \geq x, \\ 0 < y \leq 2 \end{cases} \text{ 和}$$

$$\begin{cases} y^2 \geq -x, \\ 0 < y \leq 2. \end{cases}$$

这是由抛物线:

$$y^2 = x, \quad y^2 = -x$$

和直线 $y = 2$ 所围成的曲边三角形, 如图 6·11 阴影部分所示, 不包括原点在內.

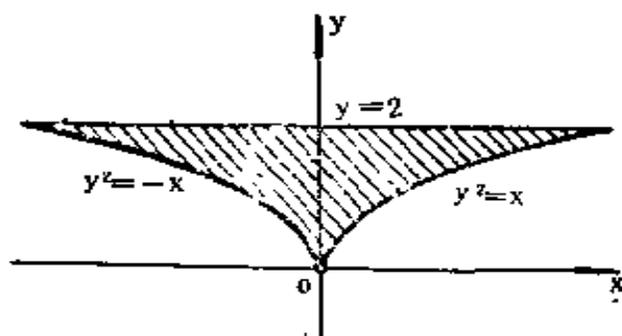


图 6·11

3147. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$

解 存在域为满足不等式

$$\sin(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\text{或 } 2k\pi \leq x^2 + y^2$$

$$\leq (2k + 1)\pi \quad (k$$

$= 0, 1, 2, \dots)$ 的点集, 如图 6·12 所示的同心环族.

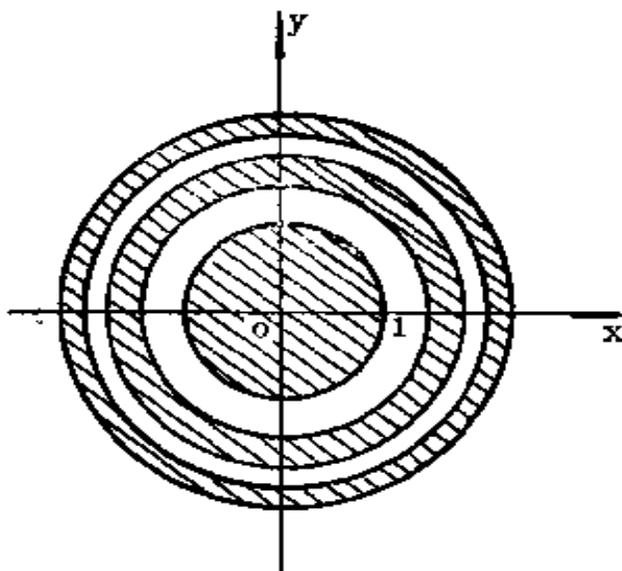


图 6·12

$$3148. u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$$

(x, y 不同时为零)

或

$$x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$$

(x, y 不同时为零)

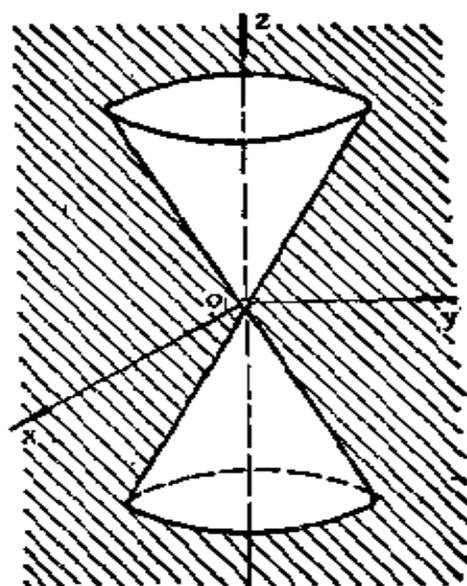


图 6-13

的点集，这是圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的外面，如图 6-13 阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点。

$$3149. u = \ln(xyz).$$

解 存在域为满足不等式

$$xyz > 0$$

的点集，即

$$x > 0, y > 0, z > 0; \text{ 或 } x > 0, y < 0, z < 0;$$

$$x < 0, y < 0, z > 0; \text{ 或 } x < 0, y > 0, z < 0.$$

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面。由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明。

$$3150. u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

解 存在域为满足不等式

$$-x^2 - y^2 + z^2 > 1$$

的点集。这是双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的内部，如图 6·14 阴影部分所示，不包括界面在内。作出下列函数的等位线：

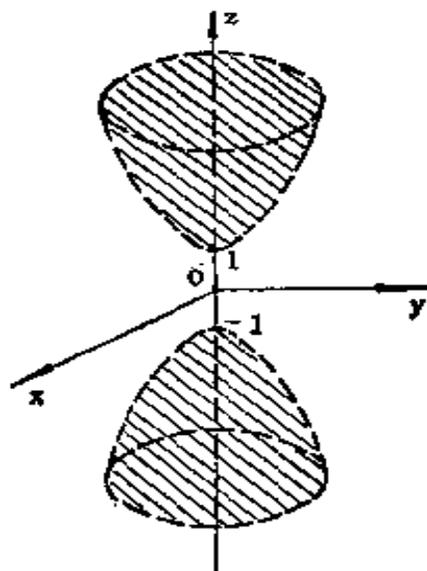


图 6·14

3151. $z = x + y$.

解 等位线为平行直线族

$$x + y = k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示。

3152. $z = x^2 + y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$(a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 时为原点；当 $a > 0$ 时，等位线为以原点为圆心的同心圆族。

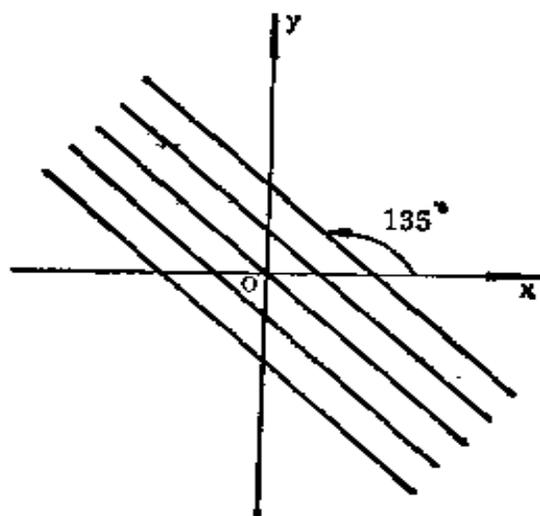


图 6·15

3153. $z = x^2 - y^2$.

解 等位线为曲线族

$$x^2 - y^2 = k.$$

当 $k = 0$ 时为两条互相垂直的直线： $y = x, y = -x$ 。

当 $k \neq 0$ 时为以 $y = \pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中当 $k > 0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k}, 0), (\sqrt{k}, 0)$ ，当 $k < 0$ 时顶点为 $(0, -\sqrt{-k}), (0, \sqrt{-k})$ 。

3154. $z = (x + y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x + y)^2 = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 为直线 $x + y = 0$ 。当 $a \neq 0$ 时为与直线 $x + y = 0$ 平行的且等距的直线 $x + y = \pm a$ 。

3155. $z = \frac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y = kx \quad (x \neq 0),$$

不包括 Oy 轴在内。

3156. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2 + 2y^2 = a^2 \quad (a > 0).$$

长半轴为 a ，短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ，焦点为 $(-a\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$

及 $(a\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ 。

3157. $z = \sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 时为坐标轴 $x = 0$ 及 $y = 0$ 。当 $a > 0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为 $(-a, -a)$ 及 (a, a) 。

3158. $z = |x| + y$.

解 等位线为曲线族

$$|x| + y = k,$$

其中 k 为一切实数. 当

$x \geq 0$ 时为 $x + y = k$;

当 $x < 0$ 时为 $-x + y$

$= k$. 这是顶点在 Oy

轴上两支互相垂直的

射线所构成的折线

族, 如图 6.16 所示.

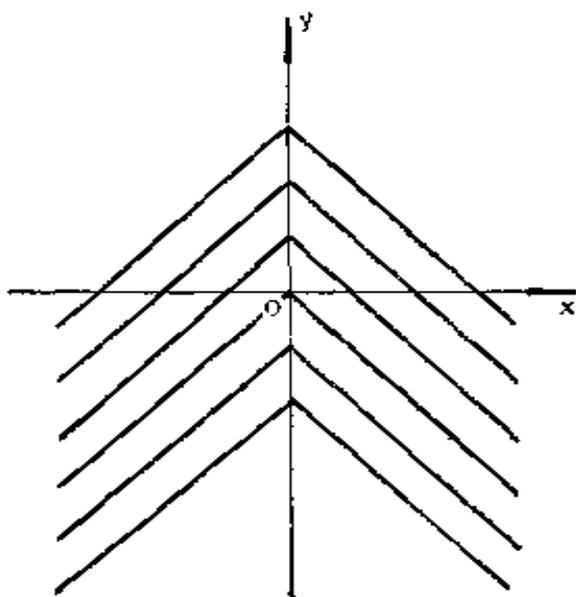


图 6.16

3159. $z = |x| + |y| - |x + y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x| + |y| - |x + y| = a.$$

因为恒有 $|x| + |y| \geq |x + y|$, 所以 $a \geq 0$.

当 $a = 0$ 时, 由 $|x| + |y| = |x + y|$ 两边平方即得

$$xy \geq 0,$$

即为整个第一、第三象限, 包括两坐标轴在内.

当 $a > 0$ 时, $xy < 0$, 分下面四组求解:

(1) $x > 0, y < 0, x + y \geq 0, |x| + |y| - |x + y|$
 $= a$, 解之得 $y = -\frac{a}{2}$;

(2) $x > 0, y < 0, x + y \leq 0, |x| + |y| - |x + y|$
 $= a$, 解之得 $x = \frac{a}{2}$;

(3) $x < 0, y > 0, x + y \geq 0, |x| + |y| - |x + y| = a$, 解之得 $x = -\frac{a}{2}$;

(4) $x < 0, y > 0, x + y \leq 0, |x| + |y| - |x + y| = a$, 解之得 $y = \frac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x + y = 0$ 上的两支互相垂直的折线族, 它的各射线平行于坐标轴, 如图 6.17 所示.

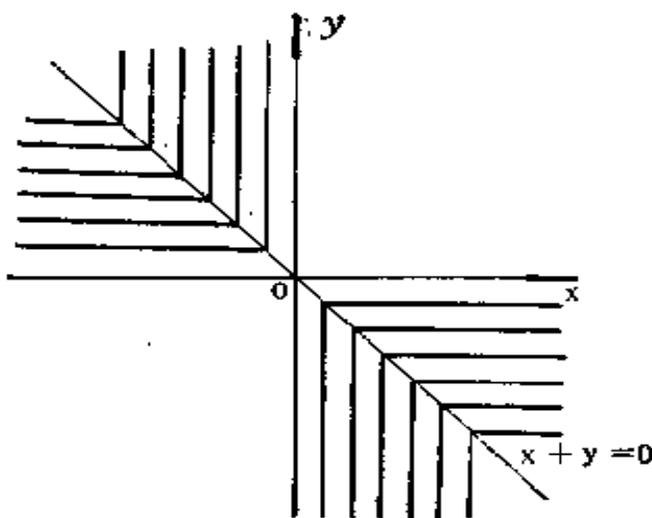


图 6.17

3160. $z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = k \quad (x, y \text{ 不同时为零}),$$

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (k \neq 0).$$

当 $k = 0$ 时, 即得 $e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}} = 1$, 从而等位线为 $x = 0$ 即 Oy 轴, 但不包括原点.

当 $k \neq 0$ 时为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点 (但不包括原点在內) 的圆束, 圆心在 $(\frac{1}{k}, 0)$, 半径为 $|\frac{1}{k}|$,

如图 6·18 所示.

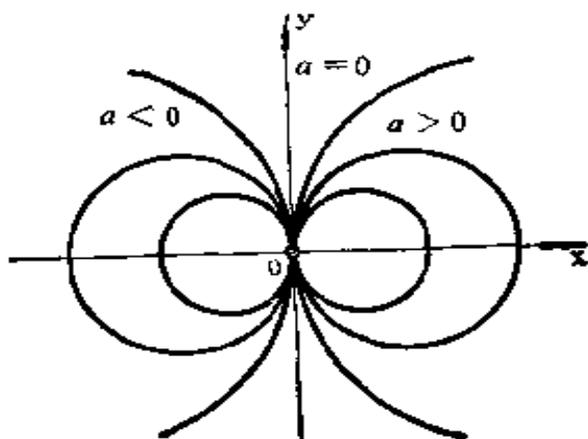


图 6·18

3161. $z = x^a \ (x > 0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^a = a \ (a > 0).$$

当 $a = 1$ 时为直线 $x = 1$ 及 Ox 轴的正向半射线, 但不包括原点在內.

当 $0 < a < 1$ 与 $a > 1$ 时的图象如图 6·19 所示.

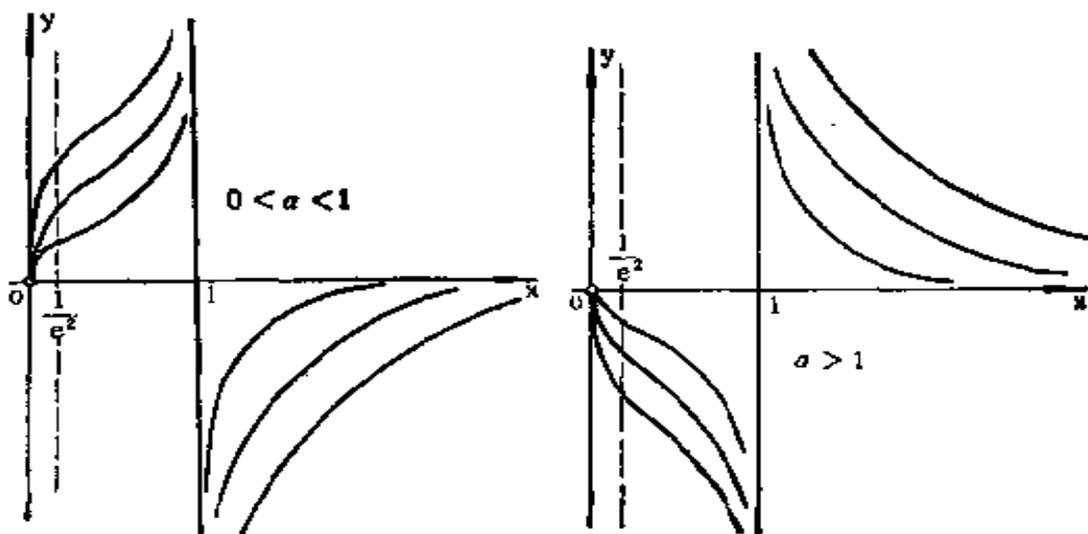


图 6·19

3162. $z = x^a e^{-x} \ (x > 0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^y e^{-x} = a \quad (a > 0),$$

即

$$y \ln x - x = \ln a.$$

当 $a = e^{-1}$ 时为直线 $x = 1$

和曲线 $y = \frac{x-1}{\ln x}$; 当 $0 < a$

$< \frac{1}{e}$, $\frac{1}{e} < a < 1$ 或 $a \geq 1$ 时

图象布满整个右半平面, 如图 6·20 所示, 不包括 Oy 轴.

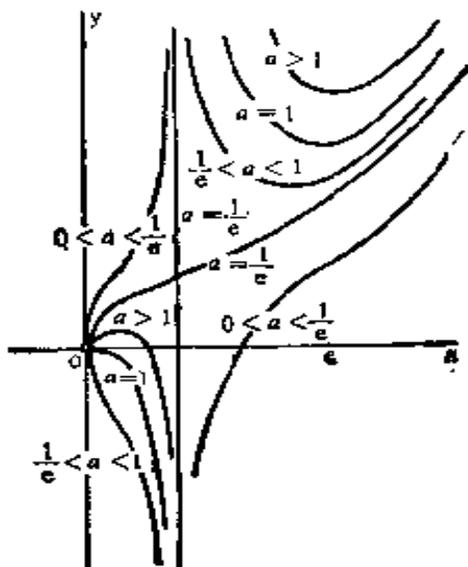


图 6·20

3163. $z = \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} \quad (a > 0).$

解 等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = k^2 \quad (k > 0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2 - 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0.$$

当 $k = 1$ 时得 $x = 0$, 即 Oy 轴. 当 $k \neq 1$ 时, 上述方程可变形为

$$\left[x - \frac{a(1+k^2)}{1-k^2} \right]^2 + y^2 = \left(\frac{2ak}{1-k^2} \right)^2,$$

这是以点 $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0 \right)$ 为圆心, 半径为 $\left| \frac{2ak}{1-k^2} \right|$

的圆族。当 $0 < k < 1$ 时，圆分布在右半平面；当 $k > 1$ 时，圆分布在左半平面。

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2} \right]^2 = \frac{a^2[(1-k^2)^2 + 4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$= a^2 + \left(\frac{2ak}{1-k^2} \right)^2,$$

即等位线圆族与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 在交点处的半径互相垂直（或圆心距与两圆的半径构成直角三角形），便知等位线圆族与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 成正交。如图 6·21 所示。

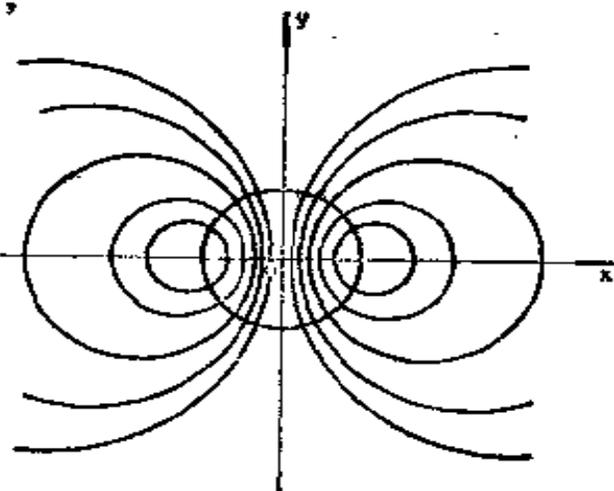


图 6·21

3164. $z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (a > 0).$

解 等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = k,$$

其中 k 为一切实数，但要除去点 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 。
 当 $k=0$ 时， $y=0$ ，即为 Ox 轴，但不包含上述两点；
 当 $k \neq 0$ 时，方程可变形为

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{k}\right)^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在 Oy 轴上且经过点 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 但不包括这两点在内的圆族, 如图 6.22 所示.

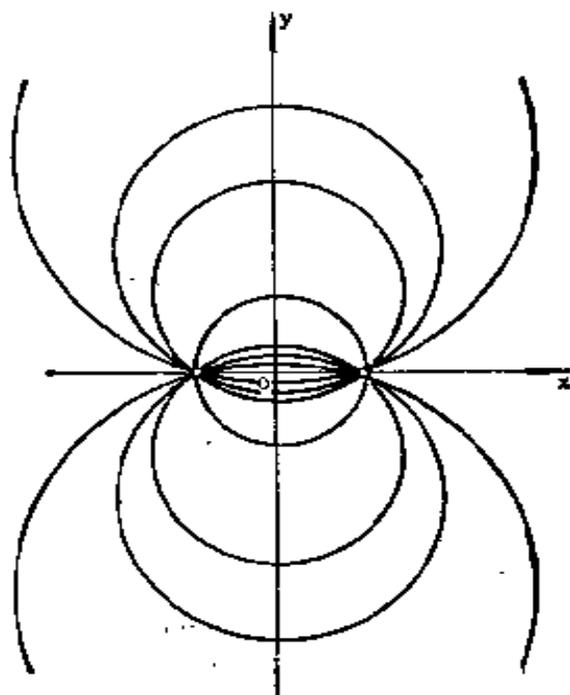


图 6.22

3165. $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

解 若 $z = 0$, 则 $\sin x \cdot \sin y = 0$, 此即直线族

$$x = m\pi \text{ 和 } y = n\pi \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

若 $z = -1$ 或 $z = 1$, 则 $\sin x \sin y < 0$ 或 $\sin x \sin y > 0$, 此即正方形系

$$m\pi < x < (m+1)\pi, \quad n\pi < y < (n+1)\pi,$$

其中 $z = (-1)^{m+n}$.

如图 6.23 所示, $z = 0$ 时为图中网格直线; $z = 1$ 为图中带斜线的正方形; $z = -1$ 为图中空白正方形, 但后两者都不包括边界.

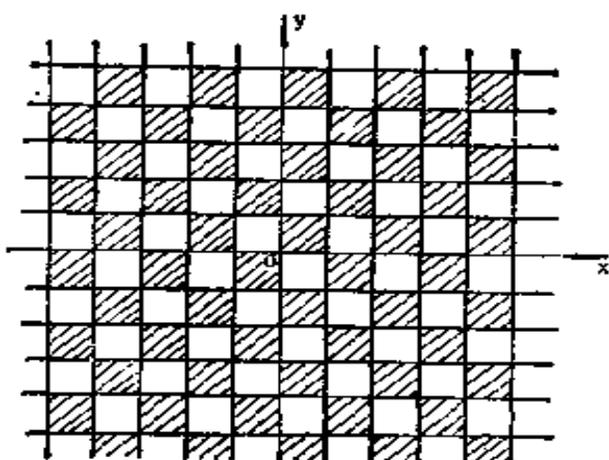


图 6.23

求下列函数的等位

面:

3166. $u = x + y + z$.

解 等位面为平行平面族

$$x + y + z = k,$$

其中 k 为一切实数.

3167. $u = x^2 + y^2 + z^2$.

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a \geq 0),$$

其中当 $a = 0$ 时即为原点.

3168. $u = x^2 + y^2 - z^2$.

解 当 $u = 0$ 时等位面为圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; 当 $u > 0$ 时等位面为单叶双曲面族 $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ ($a > 0$); 当 $u < 0$ 时等位面为双叶双曲面族 $-x^2 - y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$).

3169. $u = (x + y)^2 + z^2$.

解 等位面为曲面族

$$(x + y)^2 + z^2 = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 时为 $x + y = 0$ 和 $z = 0$. 当 $a > 0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{4} + y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \\ y' = -x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y), \\ z' = z, \end{cases}$$

这是旋转变换. 在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2 + z'^2 = a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面, 母线的方向平行于 y' 轴, 准线为 $y' = 0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

长半轴为 a (z' 轴方向), 短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (x' 轴方向)。

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases} x' = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

面在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴。

3170. $u = \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 当 $u = 0$ 时等位面为球心在原点的同心球族

$$x^2 + y^2 + z^2 = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

当 $u = -1$ 或 $u = 1$ 时等位面为球层族

$$n\pi < x^2 + y^2 + z^2 < (n+1)\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

其中 $u = (-1)^n$.

根据曲面的已知方程研究其性质:

3171. $z = f(y - ax)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = f(y - ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = at + s, \\ z = f(s). \end{cases}$$

今固定 s , 得到以 t 为参数的直线方程, 其方向数为 $1, a, 0$. 因此, 曲面为以 $1, a, 0$ 为母线方向的一个柱面. 令 $t = 0$, 可得

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = s, \\ z = f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = f(y), \end{cases}$$

这是 $x = 0$ 平面上的一条曲线, 也是柱面

$$z = f(y - ax)$$

的一条准线.

3172. $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y = 0$, 得曲线

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = f(x) \quad (x \geq 0), \end{cases}$$

它是旋转曲面的一条母线.

3173. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = st (t \neq 0), \\ z = tf(s). \end{cases}$$

今固定 s , 这是以 t 为参数的一条过原点的直线. 因此, 所给曲面为顶点在原点的一锥面, 但不包括原点在内. 令 $t=1$, 得曲线

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = s, \\ z = f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1, \\ z = f(y), \end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线, 也是锥面 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线.

3174⁺. $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = st, \\ z = f(s). \end{cases}$$

* 题号右上角“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

今固定 s , 这是一条过点 $(0, 0, f(s))$ 的直线, 方向数为 $1, s, 0$. 因此, 它与 Oz 轴垂直, 与 Oxy 平面平行, 且其方向与 s 有关. 从而得知, 曲面 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来, 它既不是柱面, 又不是锥面. 令 $t = 1$, 得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直且相交的直线. 这样的直线的全体, 便构成由 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直纹面.

3175. 作出函数

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

的图形, 式中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } y \geq x, \\ 0, & \text{若 } y < x. \end{cases}$$

解 按题设, 当 $\sin t \geq \cos t$, 即 $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $F(t) = 1$; 而当

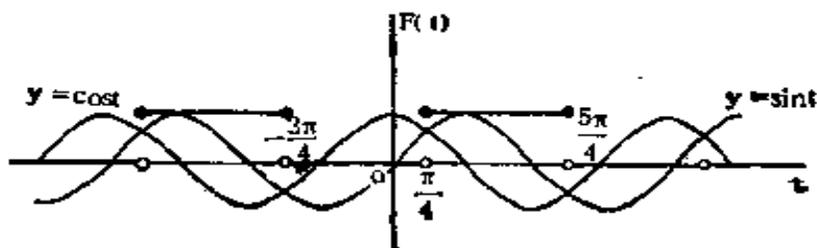


图 6.24

$\sin t < \cos t$, 即 $-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < t < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时, $F(t) = 0$. 如图 6.24 所示.

3176. 若

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

求 $f(1, \frac{y}{x})$.

解 $f(1, \frac{y}{x}) = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$

3177. 若

$$f(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

解 由 $f(\frac{y}{x}) = \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$ 知 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

3178. 设

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$, 求函数 f 和 z .

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$, 所以

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x} - 1) &= x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} - 1)[(\sqrt{x} - 1) + 2], \end{aligned}$$

从而得

$$f(t) = t(t+2) = t^2 + 2t,$$

且

$$z = \sqrt{y} + x - 1 \quad (x > 0),$$

3179. 设

$$z = x + y + f(x - y).$$

若当 $y=0$ 时, $z=x^2$, 求函数 f 及 z .

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$, 所以

$$x^2 = x + f(x),$$

即

$$f(x) = x^2 - x,$$

且

$$z = x + y + (x - y)^2 - (x - y) = 2y + (x - y)^2.$$

3180. 若 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 因为

$$\begin{aligned} f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) &= x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \\ &= (x + y)^2 \frac{x - y}{x + y} = (x + y)^2 \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}, \end{aligned}$$

所以

$$f(x, y) = x^2 \frac{1 - y}{1 + y}.$$

3181. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 1; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = -1,$$

从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

$$\text{证} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right\} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1. \end{aligned}$$

由于两个单极限都存在，而累次极限不等，故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3182. 证明：对于函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 0,$$

然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right\} \\ = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

如果按 $y = kx \rightarrow 0$ 的方向取极限, 则有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 k^2}{x^4 k^2 + x^2 (1-k)^2}.$$

特别地, 分别取 $k = 0$ 及 $k = 1$, 便得到不同的极限 0 及 1. 因此, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3183. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 不存在, 然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

证 由不等式

$$0 \leq |(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

但当 $x \neq \frac{1}{k\pi}$, $y \rightarrow 0$ 时, $(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ 的极限不存在, 因此累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 不存在. 同法可证累次极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 也不存在.

3184. 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$ 及 $\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\}$, 设:

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, \quad a = +\infty, \quad b = +0;$$

$$(B) f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$$

$$(r) f(x, y) = \frac{1}{xy} \tan^{-1} \frac{xy}{1 + xy}, \quad a = 0, \quad b = \infty;$$

$$(L) f(x, y) = \log_x(x + y), \quad a = 1, \quad b = 0.$$

$$\text{解 (a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow +0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow +0} \frac{x^y}{1 + x^y} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow +0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{1 + x^y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +0} 1 = 1;$$

$$(B) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$(Г) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 0 \cdot \operatorname{tg} 1 \right\} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}}{\frac{xy}{1 + xy}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$(Д) \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \log_x(x + y) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} \right\} = \infty.$$

求下列极限:

$$3185. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2}.$$

解 由不等式 $x^2 + y^2 \geq 2|xy|$ 得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} \right| \leq \frac{|x+y|}{x^2 + y^2 - |xy|} \leq \frac{|x+y|}{|xy|} \\ &\leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) = 0$, 故有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2 - xy + y^2} = 0.$$

$$3186. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4}.$$

解 由不等式

$$0 \leq \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} \leq \frac{x^2 + y^2}{2x^2y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$$

及 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2 + y^2}{x^4 + y^4} = 0.$$

$$3187. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}.$$

解 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{\sin xy}{xy} \cdot y \right) = a.$

$$3188. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)},$$

$$\text{解 } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left[\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} - 2 \cdot \frac{x}{e^x} \cdot \frac{y}{e^y} \right] = 0^*).$$

*) 利用 564 题的结果.

$$3189. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$$

解 由不等式

$$0 \leq \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$$

及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

$$3190. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

解 由不等式

$$|x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} |\ln(x^2 + y^2)|$$

及 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4} t^2 \ln t = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)} = e^0 = 1.$$

$$3191. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot \frac{x}{x+y}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} e^{[x \ln(1 + \frac{1}{x})] \cdot \frac{x}{x+y}} \\ &= e^{[\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})] \cdot [\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{x}{x+y}]} = e^{1 \cdot 1} = e. \end{aligned}$$

$$3192. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln(1 + e^0)}{1} = \ln 2.$$

3193⁺. 若 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, 问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

$$(a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}}; \quad (b) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy.$$

$$\text{解} \quad (a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{\cos \varphi}{\rho}}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } \cos \varphi < 0; \\ 1, & \text{当 } \cos \varphi = 0; \\ +\infty, & \text{当 } \cos \varphi > 0. \end{cases}$$

于是, 仅当 $\cos \varphi \leq 0$ 即 $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, 所给的极限

才有确定的值.

$$(6) e^{x^2-y^2} \sin 2xy = e^{\rho^2 \cos 2\varphi} \sin(\rho^2 \sin 2\varphi).$$

当 $\rho \rightarrow +\infty$ 时, $\sin(\rho^2 \sin 2\varphi)$ 有界, 除 $\varphi = \frac{k\pi}{2}$

($k=0, 1, 2, 3$) 外无极限, 且

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{\rho^2 \cos 2\varphi} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \cos 2\varphi < 0; \\ 1, & \text{当 } \cos 2\varphi = 0; \\ +\infty, & \text{当 } \cos 2\varphi > 0. \end{cases}$$

于是, 仅当 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ 以及 $\varphi=0, \varphi$

$=\pi$ 时才有确定的极限.

求下列函数的不连续点:

$$3194. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解 函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在点 $(0, 0)$ 无定义, 故原点

$(0, 0)$ 为此函数的不连续点. 以下各题类似情况, 不再说明.

$$3195. u = \frac{xy}{x+y}.$$

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为 $u = \frac{xy}{x+y}$ 的不连续点.

$$3196. u = \frac{x+y}{x^a + y^a}.$$

解 对于任意不等于零的实数 a , 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow -a}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow -a}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \frac{1}{3a^2}.$$

于是，对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点均为可移去的不连续点。而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点。

3197. $u = \sin \frac{1}{xy}.$

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u = \sin \frac{1}{xy}$ 的不连续点。

3198. $u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ ($m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 上的各点均为 $u = \frac{1}{\sin x \sin y}$ 的不连续点。

3199. $u = \ln(1-x^2-y^2).$

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是 $u = \ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点。

3200. $u = \frac{1}{xyz}.$

解 坐标面： $x=0$ ， $y=0$ ， $z=0$ 上各点均为 $u = \frac{1}{xyz}$ 的不连续点。

3201. $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$

解 点 (a, b, c) 为 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ 的不连续点.

3202. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

分别对于每一个变数 x 或 y (当另一变数的值固定时)是连续的, 但并非对这些变数的总体是连续的.

证 先固定 $y = a \neq 0$, 则得 x 的函数

$$g(x) = f(x, a) = \begin{cases} \frac{2ax}{x^2 + a^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

即 $g(x) = \frac{2ax}{x^2 + a^2}$ ($-\infty < x < +\infty$), 它是处处有定义的有理函数. 又当 $y = 0$ 时, $f(x, 0) \equiv 0$, 它显然是连续的. 于是, 当变数 y 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 x 是连续的. 同理可证, 当变数 x 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 y 是连续的.

作为二元函数, $f(x, y)$ 虽在除点 $(0, 0)$ 外的各点均连续, 但在点 $(0, 0)$ 不连续. 事实上, 当动点 $P(x, y)$ 沿射线 $y = kx$ 趋于原点时, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y=kx)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的 k 可得不同的极限值, 从而知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在. 因此, 函数 $f(x, y)$ 在原点不是二元连续

的.

3203. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

在点 $O(0,0)$ 沿着过此点的每一射线

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

连续, 即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0);$$

但此函数在点 $(0,0)$ 并非连续的.

证 当 $\sin \alpha = 0$ 时, $\cos \alpha = 1$ 或 -1 . 于是, 当 $t \neq 0$ 时, $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{t^2 \cdot 0}{t^4 + 0} = 0$, 而 $f(0,0) = 0$,

故有 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0,0)$.

当 $\sin \alpha \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{0}{0 + \sin^2 \alpha} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0,0)$.

其次, 设动点 $P(x, y)$ 沿抛物线 $y = x^2$ 趋于原点, 得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y=x^2)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0,0).$$

因此, 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0,0)$ 不连续.

3204. 证明: 函数

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \text{ 若 } y \neq 0 \text{ 及 } f(x, 0) = 0$$

的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0 \neq 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 显见是连续的, 即 $f(x, y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| \leq |x|$, 故知 $f(x, y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0 \neq 0$ 时, 对于点 $(x_0, 0)$, 由于极限

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} x_0 \sin \frac{1}{y}$$

不存在, 故知 $f(x, y)$ 在点 $(x_0, 0)$ 不连续.

这样, 我们证明了, 函数 $f(x, y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点. 显然, 原点是不连续点集合的一个聚点, 但它本身却不是 $f(x, y)$ 的不连续点. 因此, $f(x, y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

3205. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的, 而关于 x 对变数 y 是一致连续的, 则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0, y_0) \in G$.

由于 $f(x, y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使当 $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ 且 $|y' - y''| < \delta_1$ 时, 就有

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于变数 x 是连续的, 故对上述的 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 就有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并使点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域全部包含在区域 G 内, 则当点 $P(x, y)$ 属于点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域, 即 $|PP_0| < \delta$ 时,

$$|x - x_0| < \delta \leq \delta_2, \quad |y - y_0| < \delta \leq \delta_1.$$

从而有

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| \\ &\quad + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, $f(x, y)$ 在点 P_0 连续. 由 P_0 的任意性知, 函数 $f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

3206. 证明: 若在某域 G 内函数 $f(x, y)$ 对变数 x 是连续的, 并满足对变数 y 的里普什兹条件, 即

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|,$$

式中 $(x, y') \in G, (x, y'') \in G$ 而 L 为常数, 则此函数在已知域内是连续的.

证 由于 $f(x, y)$ 在 G 内满足对 y 的里普什兹条件, 故知 $f(x, y)$ 在 G 内关于 x 对变数 y 是一致连续的. 因此, 由 3205 题的结果, 即知 $f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

3207. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 分别地对每一个变数 x 和 y 是

例 2 连续的并对于其中的一个是单调的, 则此函数对两个变量的总体是连续的 (尤格定理).

证 不妨设 $f(x, y)$ 关于 x 是单调的.

设 (x_0, y_0) 为函数 $f(x, y)$ 的定义域 G 内的任一点. 由于 $f(x, y)$ 关于 x 连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ (假定 δ_1 足够小, 使我们所考虑的点都落在 G 内), 使当 $|x - x_0| \leq \delta_1$ 时, 就有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0 - \delta_1, y_0)$ 及 $(x_0 + \delta_1, y_0)$, 由于 $f(x, y)$ 关于 y 连续, 故对上述的 ε , 存在 $\delta_2 > 0$ (也要求 δ_2 足够小, 使所考虑的点落在 G 内), 使当 $|y - y_0| < \delta_2$ 时, 就有

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$|f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta$ 时, 由于 $f(x, y)$ 关于 x 单调, 故有

$$\begin{aligned} & |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \max\{|f(x_0 + \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|, \\ & |f(x_0 - \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|\}. \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} & |f(x_0 \pm \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x_0 \pm \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0 \pm \delta_1, y_0)| \\ & \quad + |f(x_0 \pm \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故当 $|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是连续的. 由点 (x_0, y_0) 的任意性知, $f(x, y)$ 是 G 内的二元连续函数.

3208. 设函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上是连续的, 而函数叙列 $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, A]$ 上一致收敛并满足条件 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$. 证明: 函数叙列

$$F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也在 $[a, A]$ 上一致收敛.

证 由于 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$, 故 $F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)]$ 有意义.

由题设 $f(x, y)$ 在域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上连续, 故在此域上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于此域中的任意两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

特别地, 当 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时, 对于一切的 $x \in [a, A]$, 均有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

对于上述的 $\delta > 0$, 因为 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 故存在自然数 N , 使当 $m > N, n > N$ 时, 对于一切的 $x \in [a, A]$, 均有

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \delta.$$

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使当 $m >$

N , $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in (a, A)$, 均有

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_m(x)| &= \\ &= |f[x, \varphi_n(x)] - f[x, \varphi_m(x)]| < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, $F_n(x)$ 在 (a, A) 上一致收敛.

3209. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 内是连续的; 2) 函数 $\varphi(x)$ 于区间 (a, A) 内连续并有属于区间 (b, B) 内的值. 证明: 函数

$$F(x) = f[x, \varphi(x)]$$

于区间 (a, A) 内是连续的.

证 设点 (x_0, y_0) 为域 R 中的任一点. 由题设知函数 $f(x, y)$ 于域 R 中连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ ($(x, y) \in R$) 时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$ 在 (a, A) 中的连续性可知, 对上述的 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$ (可取 $\eta < \delta$), 使当 $|x - x_0| < \eta$ ($x \in (a, A)$) 时, 恒有

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta.$$

于是,

$$|f[x, \varphi(x)] - f[x_0, \varphi(x_0)]| < \varepsilon,$$

即

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

因此, $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知函数 $F(x)$ 在 (a, A) 内是连续的.

3210. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 内是连续的; 2) 函数 $x = \varphi(u, v)$ 及 $y = \psi(u, v)$ 于域 R'

$(a' < u < A'; b' < v < B')$ 内是连续的并有分别属于区间 (a, A) 和 (b, B) 的值. 证明: 函数

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

于域 R' 内连续.

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小, 使点的 δ 或 η 邻域都在所给的域内.

设点 (x_0, y_0) 为域 R 中的任一点. 由于 $f(x, y)$ 在 R 内连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

再由 φ 及 ψ 的连续性知, 对于上述的 δ , 存在 $\eta > 0$, 使当 $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$ 时, 就有

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta,$$

其中 $x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0)$.

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使当 $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$ 时, 就有

$$|f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] - f[\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)]| < \varepsilon,$$

即

$$|F(u, v) - F(u_0, v_0)| < \varepsilon.$$

因此, $F(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 连续, 由 (u_0, v_0) 的任意性知, 函数 $F(u, v)$ 于域 R' 内连续.

§2. 偏导函数. 多变量函数的数分

1° 偏导函数 若所论及的多变数的函数的一切偏导函

数是连续的, 则微分的结果与微分的次序无关.

2° 多变量函数的微分 若自变数 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

式中 A, B, C 与 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 无关而 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, 则称函数 $f(x, y, z)$ 可微分, 而增量的线性主部 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 等于

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz, \quad (1)$$

(其中 $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$) 称为此函数的微分.

当变数 x, y, z 为其他自变数的可微分的函数时, 公式(1)仍有其意义.

若 x, y, z 为自变数, 则对于高阶的微分, 有符号公式

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z).$$

3° 复合函数的导函数 若 $w = f(x, y, z)$, 其中 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$ 且函数 φ, ψ, χ 可微分, 则

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{及 } \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\text{其中 } P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\text{及 } R_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° 在已知方向上的导函数 若用方向余弦 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l , 且函数 $u = f(x, y, z)$ 可微分, 则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用向量——函数的梯度

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

来表示, 它的大小等于

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. 证明:

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

证 令 $\varphi(x) = f(x, b)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x, b)] &= \varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, b) - f(x, b)}{\Delta x} = f'_x(x, b). \end{aligned}$$

注 在求某一固定点的导数及微分时, 用本题的结果常可减少运算量. 在本节中, 我们就多次利用本题的结果来简化运算.

3212. 设:

$$f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x, 1)$.

解 由于 $f(x, 1) = x$, 故 $f'_x(x, 1) = 1$.

求下列函数的一阶和二阶偏导函数:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -16xy^{**}.$$

*) 以下各题不再写 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 而仅写 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 因为当它们连续时是相等的, 并且在今后各题中均捉

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 理解为 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}.$$

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}.$$

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2x \cdot x}{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3}{2} y^2 \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{6}{2}}} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} xy \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{6}{2}}}$$

$$= \frac{x(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3217. $u = x \sin(x + y).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x + y) + x \cos(x + y),$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(x + y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos(x + y) + \cos(x + y) - x \sin(x + y) \\ &= 2 \cos(x + y) - x \sin(x + y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x \sin(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x + y) - x \sin(x + y).$$

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x \sin x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}.$$

3219. $u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x}{y} \cdot 2 \sec^2 \frac{x^2}{y} \cdot \operatorname{tg} \frac{x^2}{y} \cdot \frac{2x}{y}$$

$$= \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4} \sec^2 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y}$$

3220. $u = x^y.$

解 由 $u = x^y = e^{y \ln x}$ 即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

$$= x^{y-1}(1+y \ln x) \quad (x > 0).$$

3221. $u = \ln(x + y^2).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{x + y^2} - \frac{2y \cdot 2y}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$$

3222. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3223. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{1 - xy}.$

解 由776题知

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y - \varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon = 0, 1$ 或 -1 . 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

本题如不用776题的结果, 直接求导数也可获解.

例如,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy + y(x+y)}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

3224. $u = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

解
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)'_x \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|} \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|y|}{x^2 + y^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)', \\
&= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|y|} \left[-\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^*) \\
&= -\frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{|y|} = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2 + y^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)} \right] \\
&= -\frac{x|y|(x^2 + y^2) - xy \left[\frac{|y|}{y}(x^2 + y^2) + 2y|y| \right]}{y^2(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\frac{|y|}{y}(x^2 + y^2) - 2y|y|}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^2 \operatorname{sgn} y - y|y|}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 - y^2) \operatorname{sgn} y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (y \neq 0).
\end{aligned}$$

*) 利用3216题的结果.

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} \\
 &= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.
 \end{aligned}$$

利用对称性, 即得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.
 \end{aligned}$$

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^n.$

解 $u = x^n y^{-n}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z x^{z-1} y^{-z} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z x^z y^{-z-1} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z(z-1) x^{z-2} y^{-z} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-z)(-z-1) x^z y^{-z-2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2 \frac{x}{y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{z}{x} u\right)'_y = \frac{z}{x} \left[-\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z\right] \\ &= -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \left(-\frac{z}{y} u\right)'_z = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y} - \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \\ &= -\frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= \left(u \ln \frac{x}{y}\right)'_x = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y} + \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z \\ &= \frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{x} \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \quad \left(\frac{x}{y} > 0\right). \end{aligned}$$

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} = \frac{yu}{xz}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x = \frac{u \ln x}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x = -\frac{yu \ln x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{xyz \frac{\partial u}{\partial x} - yzu}{x^2 z^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2 z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\ln x}{z} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln^2 x}{z^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -y \ln x \cdot \left[\frac{z^2 \frac{\partial u}{\partial z} - 2uz}{z^4} \right] \\ &= \frac{yu \ln x \cdot (2z + y \ln x)}{z^4}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{xz} \left(u + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{u(z + y \ln x)}{xz^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \ln x \cdot \left(\frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{z^2} \right) \\ &= -\frac{u \ln x \cdot (z + y \ln x)}{z^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -\frac{y}{z^2} \left(\ln x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} \right) = -\frac{yu(z + y \ln x)}{xy^3}.$$

$$3228. \quad u = x^{y^z}$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1} = \frac{u y^z}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z y^{z-1} x^{y^z} \ln x = z u y^{z-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln x \cdot \ln y = u y^z \ln x \cdot \ln y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^z \left(-\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{u y^z (y^z - 1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z \ln x \cdot \left[y^{z-1} \frac{\partial u}{\partial y} + (z-1) y^{z-2} u \right]$$

$$= u z y^{z-2} \ln x \cdot (z y^z \ln x + z - 1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(y^z \frac{\partial u}{\partial z} + u y^z \ln y \right) \ln x \cdot \ln y$$

$$= u y^z \ln x \cdot \ln^2 y \cdot (1 + y^z \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \left(y^z \frac{\partial u}{\partial y} + u z y^{z-1} \right)$$

$$= \frac{u z y^{z-1} (y^z \ln x + 1)}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \left(y^{z-1} u + u z y^{z-1} \ln y + z y^{z-1} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \ln x$$

$$= u y^{z-1} \ln x \cdot (1 + z \ln y \cdot (1 + y^z \ln x)),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= y^z \ln y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ln x + \frac{u}{x} \right) \\ &= \frac{u y^z \ln y \cdot (y^z \ln x + 1)}{x} \quad (x > 0, y > 0).\end{aligned}$$

3229. 设 (a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; (b) $u = x^{y^2}$; (B) $u =$

$\arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$, 验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

证 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - 6y$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2,$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x$ ($x > 0$),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1} + 2y^3 x^{y^2-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y^3 x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2-1},$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(B) 当 $0 < x \leq y$ 时, 我们有

$$u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} = \arccos \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}} + \frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是, 当 $0 < x \leq y$ 时, 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

$$\text{当 } y \leq x < 0 \text{ 时, } u = \arccos \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right] = -\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}} + \frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是, 当 $y \leq x < 0$ 时, 也有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

仔细观察可以看到, 在不同的区域上, 一阶偏导数相差一个符号, 但二阶混合偏导数却是相等的.

3230. 设 $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, 若 $x^2 + y^2 \neq 0$ 及 $f(0, 0) = 0$. 证明

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = -y,$$

故, $f'_x(0, y) = -y$, 从而

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dy} [f'_x(0, y)] \Big|_{y=0} = -1$$

同法可求得 $f'_y(x, 0) = x$, 从而

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dx} [f'_y(x, 0)] \Big|_{x=0} = 1.$$

于是, $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

3231. 设 $u = f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数, 就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理:

(a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; (b) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

(B) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$.

证 关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下:

设 n 次齐次函数 $f(x, y, z)$ * 在域 A 中关于所有变量均有连续偏导函数, 则下述等式成立

$$\begin{aligned} & xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) \\ &= nf(x, y, z). \end{aligned}$$

(a) 由于 $(tx - 2ty + 3tz)^2 = t^2u$, 故 u 为二次齐次函数. 又因

* 为了书写的简便, 在这里我们仅限于讨论三个变量的情形.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 2y + 3z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4(x - 2y + 3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 6(x - 2y + 3z),$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = (x - 2y + 3z)(2x - 4y$$

$$+ 6z) = 2u,$$

即函数 u 满足尤拉定理。

(6) 由于对任何的 $t > 0$,

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = t^0 \cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数。又因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (xy^2$$

$$+ xz^2 - xy^2 - xz^2) = 0 \cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理。

(B) 由于

$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{n}{t}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{t}} = t^0 \cdot u \quad (t > 0),$$

故函数 u 为零次齐次函数. 又因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{z} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{z}-1} = \frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{\frac{n}{t} \ln \frac{x}{y}}\right)' \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{z}} \cdot \left[\frac{1}{z} \ln \frac{x}{y} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y}\right]$$

$$= \frac{u}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{z}} \ln \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{yu}{z^2} \ln \frac{x}{y},$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot \frac{yu}{xz} + y \cdot \frac{u}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right)$$

$$- z \cdot \frac{yu}{z^2} \ln \frac{x}{y} = 0 \cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

3232. 证明: 若可微函数 $u = f(x, y, z)$ 满足方程式

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证 任意固定域中一点 (x_0, y_0, z_0) , 考察下面的 t 的函数 ($t > 0$):

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n},$$

它当 $t > 0$ 时有定义且是可微的。应用复合函数的求导法则，对 t 求导数即得

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{t^n} \left\{ x_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 f'_y(tx_0, \right. \\ &\quad \left. ty_0, tz_0) + z_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \right\} \\ &\quad - \frac{n}{t^{n+1}} f(tx_0, ty_0, tz_0) \\ &= \frac{1}{t^{n+1}} \left\{ tx_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + ty_0 \right. \\ &\quad \left. \cdot f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) + tz_0 f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) \right. \\ &\quad \left. - nf(tx_0, ty_0, tz_0) \right\}, \end{aligned}$$

由于 $tx_0 f'_x(tx_0, ty_0, tz_0) + ty_0 f'_y(tx_0, ty_0, tz_0) + tz_0$

$$\cdot f'_z(tx_0, ty_0, tz_0) = nf(tx_0, ty_0, tz_0),$$

故

$$F'(t) = 0.$$

从而当 $t > 0$ 时， $F(t) = c$ ，其中 c 为常数。现在确定 c 。为此，在定义 $F(t)$ 的等式中令 $t = 1$ ，则得

$$c = f(x_0, y_0, z_0).$$

于是，

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n} = f(x_0, y_0, z_0),$$

即

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^n f(x_0, y_0, z_0).$$

上式说明函数 $f(x, y, z)$ 为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的。

3233. 证明：若 $f(x, y, z)$ 是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$ 是 $(n-1)$ 次的齐次函数。

证 由等式

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

两端分别对 x, y, z 求偏导函数，则得

$$t f'_1(tx, ty, tz) = t^n f'_1(x, y, z),$$

$$t f'_2(tx, ty, tz) = t^n f'_2(x, y, z),$$

$$t f'_3(tx, ty, tz) = t^n f'_3(x, y, z),$$

其中 $f'_1(\cdot, \cdot, \cdot), f'_2(\cdot, \cdot, \cdot), f'_3(\cdot, \cdot, \cdot)$ 分别代表

$f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 对第一个，第二个，第三个变量的偏导数。

于是，

$$f'_1(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_1(x, y, z),$$

$$f'_2(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_2(x, y, z),$$

$$f'_3(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_3(x, y, z),$$

即偏导函数 $f'_2(x, y, z)$, $f'_1(x, y, z)$ 及 $f'_3(x, y, z)$

均为 $(n-1)$ 次的齐次函数,

3234. 设 $u = f(x, y, z)$ 是可微分两次的 n 次齐次函数. 证明

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

证 由3233题知: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 均为 $(n-1)$ 次齐次函数. 应用尤拉定理, 即得

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial y} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial z} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3)$$

将(1)式两端乘以 x , (2)式两端乘以 y , (3)式两端乘以 z , 然后相加, 即得

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u &= (n-1) \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + z \frac{\partial u}{\partial z}\right) = n(n-1)u, \end{aligned}$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x, y, z 为自变数):

3235. $u = x^m y^n$.

解 $du = x^{m-1} y^{n-1} (m y dx + n x dy),$
 $d^2 u = m(m-1)x^{m-2} y^n dx^2 + 2mnx^{m-1} y^{n-1} dx dy$
 $+ n(n-1)x^m y^{n-2} dy^2$
 $= x^{m-2} y^{n-2} [m(m-1)y^2 dx^2 + 2mnxy dx dy$
 $+ n(n-1)x^2 dy^2].$

3236. $u = \frac{x}{y}$.

解 $du = \frac{y dx - x dy}{y^2},$
 $d^2 u = \frac{y^2 (dxdy - dx dy) - 2y dy (y dx - x dy)}{y^4}$
 $= -\frac{2}{y^3} (y dx - x dy) dy.$

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$
 $d^2 u = \frac{d(x dx + y dy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x dx + y dy)$
 $\cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$
 $= \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

3238. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $du = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$,

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{d(xdx + ydy)}{x^2 + y^2} - \frac{2(xdx + ydy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2(xdx + ydy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(y^2 - x^2)(dx^2 - dy^2) - 4xydx dy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

3239. $u = e^{xy}$.

解 $du = e^{xy}(ydx + xdy)$,

$$\begin{aligned} d^2u &= e^{xy}[(ydx + xdy)^2 + 2dxdy] \\ &= e^{xy}[y^2dx^2 + 2(1 + xy)dxdy + x^2dy^2]. \end{aligned}$$

3240. $u = xy + yz + zx$.

解 $du = (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$,

$$d^2u = 2(dxdy + dydz + dzdx).$$

3241. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } du &= -\frac{2z}{(x^2 + y^2)^2}(xdx + ydy) + \frac{dz}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)dz - 2z(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \left\{ (x^2 + y^2)^2 [2(xdx + ydy)dz \right. \\ &\quad \left. - 2(xdx + ydy)dz - 2z(dx^2 + dy^2)] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4(x^2 + y^2)(xdx + ydy)[(x^2 + y^2)dz \\
& - 2z(xdx + ydy)] \Big\} \\
= & \frac{1}{(x^2 + y^2)^3} \Big\{ 2z[(3x^2 - y^2)dx^2 + 8xydx dy \\
& + (3y^2 - x^2)dy^2] - 4(x^2 + y^2)(xdx + ydy)dz \Big\}.
\end{aligned}$$

3242. 设 $f(x, y, z) = \sqrt[2]{\frac{x}{y}}$, 求 $df(1, 1, 1)$ 及 $d^2f(1, 1, 1)$.

解 本题将采用分别先求一阶及二阶偏导函数, 然后再合成以求一阶及二阶微分的方法. 由于

$$f'_x(x, 1, 1) = 1, \quad f''_x(1, 1, 1) = 1,$$

$$f'_y(1, y, 1) = -\frac{1}{y^2}, \quad f''_y(1, 1, 1) = -1,$$

$$f'_z(1, 1, z) = 0, \quad f''_z(1, 1, 1) = 0,$$

故得

$$df(1, 1, 1) = f'_x(1, 1, 1)dx + f'_y(1, 1, 1)dy$$

$$+ f'_z(1, 1, 1)dz = dx - dy.$$

又因

$$f''_{xx}(x, 1, 1) = 1, \quad f''_{xx}(1, 1, 1) = 0, \quad f''_{xx}(1, 1, 1) = 0,$$

$$f'_x(1, y, 1) = \frac{1}{y}, \quad f''_{xy}(1, y, 1) = -\frac{1}{y^2},$$

$$f''_{yx}(1, 1, 1) = -1,$$

$$f'_x(1, 1, z) = \frac{1}{z}, \quad f'_{xz}(1, 1, z) = -\frac{1}{z^2},$$

$$f''_{zx}(1, 1, 1) = -1,$$

$$f'_y(1, y, 1) = -\frac{1}{y^2}, \quad f''_{yy}(1, y, 1) = \frac{2}{y^3},$$

$$f''_{yy}(1, 1, 1) = 2,$$

$$f'_y(1, 1, z) = -\frac{1}{z}, \quad f'_{yz}(1, 1, z) = \frac{1}{z^2},$$

$$f''_{zy}(1, 1, 1) = 1,$$

$$f'_z(1, 1, z) = 0, \quad f''_{zx}(1, 1, z) = 0, \quad f''_{xz}(1, 1, 1) = 0,$$

故得

$$d^2 f(1, 1, 1) = f''_{xx}(1, 1, 1)dx^2 + f''_{yy}(1, 1, 1)dy^2$$

$$+ f''_{zz}(1, 1, 1)dz^2 + 2f''_{xy}(1, 1, 1)dx dy$$

$$+ 2f''_{yz}(1, 1, 1)dy dz + 2f''_{xz}(1, 1, 1)dx dz$$

$$= 2dy^2 - 2dx dy + 2dy dz - 2dx dz$$

$$= 2(dy - dx)(dy + dz),$$

3243. 证明: 若

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

则

$$d^2u \geq 0.$$

证 $du = \frac{xdx + ydy + zdz}{u},$

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{1}{u^2}[u(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (xdx \\ &+ ydy + zdz)du] \\ &= \frac{1}{u^3}[(xdy - ydx)^2 + (ydz - zdz)^2 \\ &+ (zdx - xdz)^2]. \end{aligned}$$

由于 $u > 0$ (在原点处 du 不存在), 故 $du \geq 0$.

3244. 假定 x, y 的绝对值甚小, 对下列各式推出近似公式:

(a) $(1+x)^m(1+y)^n$; (b) $\ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$;

(B) $\text{arc tg } \frac{x+y}{1+xy}$.

解 (a) 设 $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$, 则

$$f'_x(x, 0) = m(1+x)^{m-1}, f'_x(0, 0) = m,$$

$$f'_y(0, y) = n(1+y)^{n-1}, f'_y(0, 0) = n.$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y \\ &= 1 + mx + ny, \end{aligned}$$

即有近似公式

$$(1+x)^m(1+y)^n \approx 1+mx+ny.$$

(6) 设 $f(x, y) = \ln(1+x) \cdot \ln(1+y)$, 则

$$f'_x(x, 0) = 0, f'_x(0, 0) = 0,$$

$$f'_y(0, y) = 0, f'_y(0, 0) = 0,$$

$$f''_{xx}(x, 0) = 0, f''_{xx}(0, 0) = 0,$$

$$f''_{yy}(0, y) = 0, f''_{yy}(0, 0) = 0,$$

$$f'_x(0, y) = \ln(1+y), f''_{xy}(0, y)$$

$$= \frac{1}{1+y}, f''_{xy}(0, 0) = 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y \\ &+ \frac{1}{2!} \left[f''_{xx}(0, 0)x^2 + 2f''_{xy}(0, 0)xy + f''_{yy}(0, 0)y^2 \right] \\ &= xy, \end{aligned}$$

即有近似公式

$$\ln(1+x) \cdot \ln(1+y) \approx xy.$$

本题如不用求偏导函数的方法, 也可直接获解:

$$\ln(1+x) \cdot \ln(1+y) = [x + o(x)] \cdot [y + o(y)]$$

$\approx xy$.

(B) 设 $f(x, y) = \arctg \frac{x+y}{1+xy}$, 则

$$f'_x(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'_x(0, 0) = 1,$$

$$f'_y(0, y) = \frac{1}{1+y^2}, \quad f'_y(0, 0) = 1.$$

于是,

$$f(x, y) \approx f(0, 0) + f'_x(0, 0)x + f'_y(0, 0)y = x + y,$$

即有近似公式

$$\arctg \frac{x+y}{1+xy} \approx x + y.$$

3245. 用微分来代替函数的增量, 近似地计算:

(a) $1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3$; (b) $\frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98} \sqrt{1.05^3}}$;

(B) $\sqrt{1.02^3 + 1.97^3}$; (r) $\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ$;

(A) $0.97^{1.05}$.

解 (a) 设 $f(x, y, z) = (1+x)^m(1+y)^n(1+z)^l$, 则当 $|x|, |y|, |z|$ 甚小时, 有近似公式(参阅 3244(a))

$$f(x, y, z) \approx 1 + mx + ny + lz.$$

利用上式即得

$$1.002 \cdot 2.003^2 \cdot 3.004^3 = (1 + 0.002)$$

$$\cdot 2^2 \left(1 + \frac{0.003}{2}\right)^2 \cdot 3^3 \left(1 + \frac{0.004}{3}\right)^3$$

$$\approx 1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \left(1 + 0.002 + 2 \cdot \frac{0.003}{2} + 3 \cdot \frac{0.004}{3} \right)$$

$$= 108.972;$$

$$(6) \frac{1.03^2}{\sqrt[3]{0.98} \cdot \sqrt{1.05^3}} = (1 + 0.03)^2$$

$$\cdot (1 - 0.02)^{-\frac{1}{3}} (1 + 0.05)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\approx 1 + 2 \cdot 0.03 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-0.02) + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 0.05$$

$$\approx 1.054;$$

$$(B) \sqrt{1.02^3 + 1.97^3} = (1.97)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{0.03}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \left[1 + \left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\approx 2^{\frac{3}{2}} \left[1 + \frac{3}{2} \left(-\frac{0.03}{2}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1.02}{1.97}\right)^3 \right]$$

$$\approx 2.95;$$

(r) 设 $f(x, y) = \sin x \operatorname{tg} y$, 则有近似公式

$$f(x, y) \approx \sin x_0 \operatorname{tg} y_0 + \cos x_0 \operatorname{tg} y_0 \cdot (x - x_0)$$

$$+ \frac{\sin x_0}{\cos^2 y_0} \cdot (y - y_0).$$

在本题中, 令 $x_0 = \frac{\pi}{6}$, $y_0 = \frac{\pi}{4}$, $x - x_0 = -\frac{\pi}{180}$,

$y - y_0 = \frac{\pi}{180}$, 即得

$$\sin 29^\circ \operatorname{tg} 46^\circ \approx \sin \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$$

$$\cdot \left(-\frac{\pi}{180} \right) + \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos^2 \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\pi}{180} \right)$$

$$\approx 0.502;$$

(B) 设 $f(x, y) = x^y$, 由于

$$f'_x(1, 1) = \left. \frac{d}{dx} f(x, 1) \right|_{x=1} = 1,$$

$$f'_y(1, 1) = \left. \frac{d}{dy} f(1, y) \right|_{y=1} = 0,$$

于是, $x^y \approx x$. 所以, 我们有

$$0.97^{1.05} \approx 0.97.$$

3246. 设矩形的边 $x=6$ 米和 $y=8$ 米, 若第一个边增加 2 毫米, 而第二个边减少 5 毫米, 问矩形的对角线和面积变化多少?

解 而积 $A = xy$, 对角线 $l = \sqrt{x^2 + y^2}$. 于是,

$$\Delta A \approx ydx + xdy, \quad \Delta l \approx \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

以 $x=6000$, $y=8000$, $dx=2$, $dy=-5$ 代入上述二式, 即得

$$\Delta A \approx 8000 \cdot 2 + 6000 \cdot (-5) = -14000 \text{ (平方毫米)} \\ = -140 \text{ (平方厘米)},$$

$$\Delta l \approx \frac{6000 \cdot 2 + 8000 \cdot (-5)}{\sqrt{6000^2 + 8000^2}} \approx -3 \text{ (毫米)},$$

即对角线减少约 3 毫米，面积减少约 140 平方厘米。

3247. 扇形的中心角 $\alpha = 60^\circ$ 增加 $\Delta\alpha = 1^\circ$ 。为了使扇形的面积仍然不变，则应当把扇形的半径 $R = 20$ 厘米减少若干？

解 扇形的面积 $A = \frac{1}{2}R^2\alpha$ 。于是，

$$\Delta A \approx dA = R\alpha dR + \frac{1}{2}R^2 d\alpha.$$

按题设，应有 $\Delta A = 0$ ，即

$$20 \cdot \frac{\pi}{3} dR + \frac{1}{2} \cdot 20^2 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0.$$

解之，得

$$dR \approx -\frac{1}{6} \text{ (厘米)} \approx -1.7 \text{ (毫米)},$$

即应当使半径减少约 1.7 毫米。

3248. 证明乘积的相对误差近似地等于乘数的相对误差的和。

证 设 $u = xy$ ，则 $du = xdy + ydx$ ，从而

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

取绝对值，得

$$\left| \frac{du}{u} \right| \leq \left| \frac{dx}{x} \right| + \left| \frac{dy}{y} \right|,$$

上式各项均表示该量的相对误差，本题获证。

3249. 当测量圆柱的底半径 R 和高 H 时所得的结果如下：

$$R = 2.5 \text{米} \pm 0.1 \text{米}; H = 4.0 \text{米} \pm 0.2 \text{米},$$

则所计算出圆柱的体积可有怎样的绝对误差 ΔV 和相对误差 δV ？

解 体积 $V = \pi R^2 H$ 。于是，

$$\Delta V \approx dV = 2\pi R dR + \pi R^2 dH。$$

以 $R = 2.5$, $H = 4.0$, $dR = 0.1$, $dH = 0.2$ 代入上式，即得

$$\Delta V \approx 10.2 \text{立方米},$$

$$\delta V = \left| \frac{\Delta V}{V} \right| \approx 13\%。$$

3250. 三角形的边 $a = 200 \text{米} \pm 2 \text{米}$, $b = 300 \text{米} \pm 5 \text{米}$, 它们之间的角 $C = 60^\circ \pm 1^\circ$, 则所计算出三角形的第三边 c 可有怎样的绝对误差？

解 按余弦定律，有

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

微分之，即得

$$cdc = ada + bdb - b \cos C da - a \cos C db + ab \sin C dC。$$

$$\text{以 } a = 200, b = 300, c = \sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cos 60^\circ},$$

$$C = \frac{\pi}{3}, da = 2, db = 5, dC = \frac{\pi}{180} \text{ 代入上式, 即得}$$

$$dc \approx 7.6 \text{米},$$

故第三边 c 之绝对误差约为 7.6 米。

3251. 证明：在点 $(0, 0)$ 连续的函数

$$f(x, y) = \sqrt{|xy|}$$

于点 $(0,0)$ 有两个偏导函数 $f'_x(0,0)$ 和 $f'_y(0,0)$ ，但在点 $(0,0)$ 并非可微分的。

说明导函数 $f'_x(x,y)$ 和 $f'_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的邻域中的性质。

$$\text{解 } f'_x(0,0) = \left. \frac{d}{dx} [f(x,0)] \right|_{x=0} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \left. \frac{d}{dy} [f(0,y)] \right|_{y=0} = 0.$$

考察极限

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{aligned}$$

当动点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于点 $(0,0)$ 时，显然对不同的 k 有不同的极限值 $\frac{\sqrt{|k|}}{\sqrt{1+k^2}}$ ，因此，上述极限不存在，即在点 $(0,0)$ ，

$$f(x,y) - f(0,0) - f'_x(0,0)x - f'_y(0,0)y$$

不能表成 $o(\rho)$ ，其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ，故知 $\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 不可微分。

不难得到

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|xy|}}{2x}, & x \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0, \\ \text{无意义}, & x = 0, y \neq 0. \end{cases}$$

因此, $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的任何邻域中均有无意义之点及无界, $f'_y(x, y)$ 的性质类似.

3252. 证明: 函数

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ 若 } x^2 + y^2 \neq 0 \text{ 及 } f(0, 0) = 0,$$

于点 $(0, 0)$ 的邻域中连续且有有界的偏导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$, 但此函数于点 $(0, 0)$ 不能微分.

证 函数 $f(x, y)$ 在 $x^2 + y^2 \neq 0$ 的点显然是连续的. 由不等式

$$\begin{aligned} |f(x, y)| &= \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq \frac{x^2 + y^2}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \end{aligned}$$

知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$, 故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域中连续.

$$f'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, 由于

$$|f'_x(x, y)| \leq \frac{|y^3|}{(y^2)^{\frac{3}{2}}} = 1,$$

故 $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内有界. 同法可以证明 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内有界.

由于 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 且极限

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x f'_x(0, 0) - y f'_y(0, 0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

是不存在的, 因此可知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不可微分.

3253. 证明: 函数

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ 若 } x^2 + y^2 \neq 0$$

$$\text{和 } f(0, 0) = 0$$

于点 $(0, 0)$ 的邻域中有偏导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$, 这些偏导函数于点 $(0, 0)$ 是不连续的且在此点的任何邻域中是无界的; 然而此函数于点 $(0, 0)$ 可微分.

证 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时, $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 均存在, 且

$$f'_x(x, y) = 2x \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2x}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

$$f'_y(x, y) = 2y \sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2y}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2},$$

又因

$$\begin{aligned} f'_x(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x^2} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_y(0, 0) &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{y^2} = 0, \end{aligned}$$

故知在点 $(0, 0)$ 内有偏导函数 $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$.

考虑在点 $(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0)$ 的偏导函数 $f'_x(x, y)$:

$$\begin{aligned} f'_x\left(\frac{1}{\sqrt{2n\pi}}, 0\right) &= \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \sin 2n\pi - 2\sqrt{2n\pi} \cos 2n\pi \\ &= -2\sqrt{2n\pi} \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

因此, $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的任何邻域内无界, 由此

又知 $f'_x(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续. 同法可证 $f'_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 的任何邻域中也无界, 从而 $f'_y(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 也不连续.

最后,我们证明 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 可微分. 事实上,
 $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$, 且

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - x f'_x(0, 0) - y f'_y(0, 0)}{\rho} \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0, \end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(0, 0) + x f'_x(0, 0) + y f'_y(0, 0) \\ &\quad + o(\rho), \end{aligned}$$

即函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 可微分.

3254. 证明: 于某凸形的域 E 内有有界偏导函数 $f'_x(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 的函数 $f(x, y)$ 于域 E 内一致连续.

证 由于 $f'_x(x, y)$ 及 $f'_y(x, y)$ 在 E 内有界, 故存在 $L > 0$, 使当 $(x, y) \in E$ 时, 恒有

$$|f'_x(x, y)| \leq \frac{L}{2},$$

及

$$|f'_y(x, y)| \leq \frac{L}{2}.$$

在 E 内取两点 $P_1(x_1, y_1)$ 及 $P_2(x_2, y_2)$.

(1) 如果以 $|P_1 P_2|$ 为直径的圆(包括圆周在内)都属于 E (图6·25), 则点 $P_s(x_1, y_2)$ 及线段

P_1P_3 、 P_2P_3 都在 E 内.

于是,

$$\begin{aligned} & |f(x_1, y_1) - f(x_2, \\ & y_2)| \leq |f(x_1, y_1) - \\ & f(x_1, y_2)| + |f(x_1, y_2) \\ & - f(x_2, y_2)| \\ & = |f'_y(x_1, \xi)| \end{aligned}$$

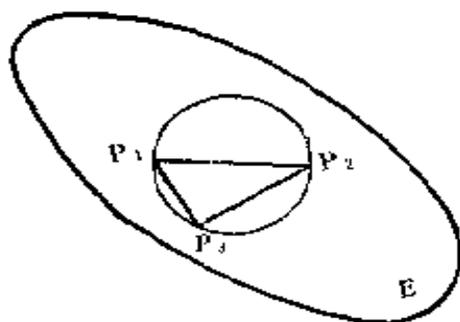


图 6.25

$$\cdot |y_1 - y_2| + |f'_x(\eta, y_2)| \cdot |x_1 - x_2|,$$

其中 ξ 介于 y_1, y_2 之间, η 介于 x_1, x_2 之间. 由偏导函数的有界性, 即得

$$\begin{aligned} & |f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \\ & \leq \frac{L}{2}|y_1 - y_2| + \frac{L}{2}|x_1 - x_2| \\ & \leq \frac{L}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ & + \frac{L}{2}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ & = L\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \end{aligned}$$

或

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_1P_2|.$$

(2) 如图 6.26 所示, $P_1 \in E$, $P_2 \in E$, 但点 (x_1, y_2) 和 (x_2, y_1) 都不一定属于 E . 由于 P_1 和 P_2 均为 E 的内点, 故存在 $R > 0$, 使得分别以 P_1, P_2 为

圆心， R 为半径的圆（包括圆周在内）都在 E 内。作两圆的外公切线 Q_1Q_4 及 Q_2Q_3 ，则由切点均在 E 内知，矩形 $Q_1Q_2Q_3Q_4$ 整个落在 E 内。

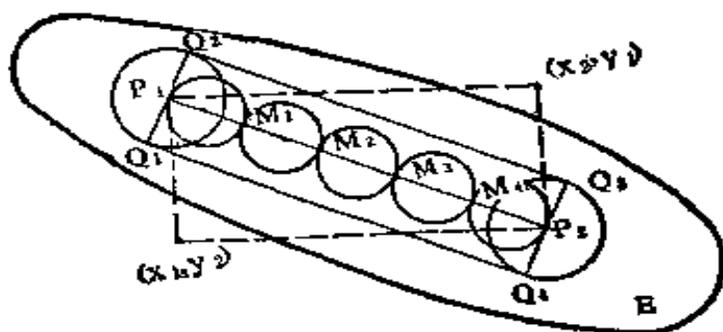


图 6.26

不难看出，在直线段 P_1P_2 上可取足够多的分点： $P_1=M_0, M_1, M_2, \dots, M_n=P_2$ ，使

$$|M_{k-1}M_k| < 2R \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

则以 $|M_{k-1}M_k|$ 为直径的圆全落在矩形内，从而也在 E 内。于是，

$$\begin{aligned} |f(P_1) - f(P_2)| &\leq \sum_{k=1}^n |f(M_k) - f(M_{k-1})| \\ &\leq \sum_{k=1}^n L \cdot |M_k M_{k-1}| = L \cdot \sum_{k=1}^n |M_k M_{k-1}| \\ &= L \cdot |P_1 P_2|. \end{aligned}$$

这就证明了对 E 中任意两点，函数 $f(P)$ 满足里普什兹条件。

对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ ，则当 $P_1 \in E, P_2$

$\in E$ 且 $|P_1P_2| < \delta$ 时, 就恒有

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_1P_2| < L\delta = \varepsilon,$$

即函数 $f(x, y)$ 在 E 中一致连续.

注. 用 ∂E 表区域 E 的边界, \bar{E} 表 E 加上 ∂E 所成的闭区域. 在本题的假定下, 还可证明 $f(x, y)$ 可开拓为 \bar{E} 上的一致连续函数. 事实上, 对 ∂E 上任一点 P_0 . 由柯西收敛准则知当点 P 从 E 内趋于 P_0 时 $f(P)$ 的极限 A 存在 (根据 $f(P)$ 在 E 的一致连续性易知它满足柯西收敛准则). 我们规定 $f(P_0) = A$. 于是 $f(P)$ 在整个 \bar{E} 上有定义. 在不等式

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_1P_2| \quad (P_1, P_2 \in E)$$

两端让 $P_1 \rightarrow P_0$ ($P_0 \in \partial E$) 取极限, 得

$$|f(P_0) - f(P_2)| \leq L \cdot |P_0P_2| \\ (P_0 \in \partial E, P_2 \in E),$$

再让 $P_2 \rightarrow P'_0$ ($P'_0 \in \partial E$) 取极限, 得

$$|f(P_0) - f(P'_0)| \leq L \cdot |P_0P'_0|$$

$$(P_0 \in \partial E, P'_0 \in \partial E).$$

由此可知, $f(P)$ 在 \bar{E} 上满足里普什兹条件, 从而 $f(P)$ 在 \bar{E} 上一致连续.

3255. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 对变数 x 是连续的 (对每一个固定的值 y) 且有对变数 y 的有界的导函数 $f'_y(x, y)$, 则此函数对变数 x 和 y 的总体是连续的.

证 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是所论的开域 E 中任一点. 取以 P_0

为中心的一个充分小的开球 G_0 ，使 G_0 完全含于 E 内。设在 G_0 内，有 $|f'_y(x, y)| \leq L$ 。于是，当 (x, y') ， (x, y'') 属于 G_0 时，有

$$\begin{aligned} |f(x, y') - f(x, y'')| &= |f'_y(x, \xi)| \cdot |y' - y''| \\ &\leq L|y' - y''|, \end{aligned}$$

其中 ξ 为介于 y' ， y'' 之间的一数，故 $f(x, y)$ 在 G_0 中满足里普什兹条件。因此，根据 3206 题结果知 $f(x, y)$ 在 G_0 中连续，特别是在 P_0 点连续。由 P_0 点的任意性，即知 $f(x, y)$ 在 E 内连续，证毕。

注。从证明过程中很明显，本题只要假定 $f'_y(x, y)$ 在 E 中每一点的某邻域中有界即可。

在下列问题中求所指出的偏导函数：

6. $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ ， $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$ ， $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$ ，若

$$\begin{aligned} u &= x - y + x^2 + 2xy + y^2 + x^3 - 3x^2y \\ &\quad - y^3 + x^4 - 4x^2y^2 + y^4. \end{aligned}$$

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 + 6x - 6y + 12x^2 - 8y^2,$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 + 24x.$$

于是，

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = -16.$$

3257. $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}$, 若 $u = x \ln(xy)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \ln(xy) + 1$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{x}$.

于是,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

3258. $\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3}$, 若 $u = x^3 \sin y + y^3 \sin x$.

解 $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 6 \sin y + y^3 \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$
 $= 6 \sin y - y^3 \cos x$.

于是,

$$\frac{\partial^6 u}{\partial x^3 \partial y^3} = 6 \sin\left(y + \frac{3\pi}{2}\right) - 6 \cos x$$

$$= -6(\cos y + \cos x).$$

3259. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = \arctg \frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$.

解 注意到

$$u = \arctg x + \arctg y + \arctg z + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon = 0, \pm 1),$$

即得

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

3260. $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$, 若 $u = e^{xyz}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = yze^{xyz}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = ze^{xyz} + xyz^2 e^{xyz}.$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} &= e^{xyz} + xyz e^{xyz} + 2xyz e^{xyz} \\ &+ x^2 y^2 z^2 e^{xyz} = e^{xyz} (1 + 3xyz + x^2 y^2 z^2). \end{aligned}$$

3261. $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta},$ 若 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}.$

解 设 $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2},$ 则 $u = -\ln r.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x-\xi}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2(x-\xi)(y-\eta)}{r^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial \xi} = -\frac{2(y-\eta)}{r^4} + \frac{8(x-\xi)^2(y-\eta)}{r^6}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y \partial \xi \partial \eta} &= \frac{2}{r^4} - \frac{8(y-\eta)^2}{r^6} \\ &- \frac{8(x-\xi)^2}{r^6} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8} \\ &= -\frac{6}{r^4} + \frac{48(x-\xi)^2(y-\eta)^2}{r^8}. \end{aligned}$$

3262. $\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q},$ 若 $u = (x-x_0)^p (y-y_0)^q.$

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = p_1 \cdot (y - y_0)^q.$

于是,

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial y^q} = p_1 q_1 \quad (p, q \text{ 均为自然数}).$$

3263. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = \frac{x+y}{x-y}.$

解 $u = 1 + \frac{2y}{x-y}, \quad \frac{\partial^m u}{\partial x^m} = (-1)^m m! \frac{2y}{(x-y)^{m+1}}.$ 利

用求高阶导数的莱布尼兹公式, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} &= (-1)^m \cdot 2(m!) \cdot \left\{ y \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}} \right] \right. \\ &+ C_n^1 \frac{\partial}{\partial y} (y) \cdot \left. \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} \left[\frac{1}{(x-y)^{m+1}} \right] \right\} \\ &= 2 \cdot (-1)^m m! \cdot \left\{ \frac{(m+1)(m+2) \cdots (m+n)y}{(x-y)^{m+n+1}} \right. \\ &+ \left. \frac{n(m+1)(m+2) \cdots (m+n-1)}{(x-y)^{m+n}} \right\} \\ &= \frac{2 \cdot (-1)^m (m+n-1)! (nx + my)}{(x-y)^{m+n-1}}. \end{aligned}$$

3264. $\frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n}$, 若 $u = (x^2 + y^2)e^{x+y}.$

解 $u = (x^2 + y^2)e^{x+y} = x^2 e^x \cdot e^y + y^2 e^y \cdot e^x = u_1 + u_2.$

显见 $\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m} = e^x \cdot y^2 e^y$, 利用求高阶导数的莱布尼兹公

式，即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n} u_2}{\partial x^m \partial y^n} &= \frac{\partial^n}{\partial y^n} \left(\frac{\partial^m u_2}{\partial x^m} \right) = \frac{\partial^n}{\partial y^n} (e^x y^2 e^y) \\ &= e^x \frac{\partial^n}{\partial y^n} (y^2 e^y) = e^x \left\{ y^2 \frac{\partial^n}{\partial y^n} (e^y) \right. \\ &\quad + C_1^n \frac{\partial}{\partial y} (y^2) \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}} (e^y) \\ &\quad \left. + C_2^n \frac{\partial^2}{\partial y^2} (y^2) \frac{\partial^{n-2}}{\partial y^{n-2}} (e^y) \right\} \\ &= e^{x+y} \{ y^2 + 2ny + n(n-1) \}. \end{aligned}$$

同法可求得

$$\frac{\partial^{m+n} u_1}{\partial x^m \partial y^n} = e^{x+y} \{ x^2 + 2mx + m(m-1) \}.$$

于是，

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{m+n} u}{\partial x^m \partial y^n} &= \frac{\partial^{m+n} u_1}{\partial x^m \partial y^n} + \frac{\partial^{m+n} u_2}{\partial x^m \partial y^n} \\ &= e^{x+y} \{ x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + m(m-1) + n(n-1) \}. \end{aligned}$$

3265⁺. $\frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$, 若 $u = x y z e^{x+y+z}$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} &= \frac{\partial^{p+q+r}}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r} (x e^x \cdot y e^y \cdot z e^z) \\ &= \frac{\partial^p}{\partial x^p} (x e^x) \cdot \frac{\partial^q}{\partial y^q} (y e^y) \cdot \frac{\partial^r}{\partial z^r} (z e^z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^x(x+p) \cdot e^y(y+q) \cdot e^z(z+r) \\
 &= e^{x+y+z}(x+p)(y+q)(z+r).
 \end{aligned}$$

3266. 若 $f(x, y) = e^x \sin y$, 求 $f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0)$.

$$\text{解 } f_{x^m y^n}^{(m+n)}(0, 0) = e^x \sin\left(y + \frac{n\pi}{2}\right) \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \sin \frac{n\pi}{2}.$$

3267. 证明: 若

$$u = f(xyz),$$

则

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = F(t),$$

式中 $t = xyz$, 并求函数 F .

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = yz f'(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = yz f''(t) \cdot xz + z f'(t).$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} &= x^2 y^2 z^2 f'''(t) + 2xyz f''(t) \\
 &\quad + f'(t) + xyz f''(t) \\
 &= x^2 y^2 z^2 f'''(t) + 3xyz f''(t) + f'(t) \\
 &= t^2 f'''(t) + 3t f''(t) + f'(t) = F(t).
 \end{aligned}$$

3268. 设 $u = x^4 - 2x^3y - 2xy^3 + y^4 + x^3 - 3x^2y - 3xy^2 + y^3 + 2x^2 - xy + 2y^2 + x + y + 1$, 求 d^4u .

导函数 $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3}$ 和 $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$

等于甚么?

解 $d^4 u = 24 dx^4 - 2C_4^1 d^3(x^3) dy$

$$- 2C_4^1 dx d^3(y^3) + 24 dy^4$$

$$= 24(dx^4 - 2dx^3 dy - 2dx dy^3 + dy^4).$$

由 $d^4 u = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^4 u$, 得

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 24, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y} = -12, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} = -12, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 24.$$

在下列各题中求所指出的阶的全微分:

3269. $d^3 u$, 若 $u = x^3 + y^3 - 3xy(x - y)$.

解 $d^3 u = 6(dx^3 + dy^3 - 3dx^2 dy + 3dx dy^2)$.

3270. $d^3 u$, 若 $u = \sin(x^2 + y^2)$.

解 $du = 2x \cos(x^2 + y^2) dx + 2y \cos(x^2 + y^2) dy$

$$= 2(x dx + y dy) \cos(x^2 + y^2)$$

$$d^2 u = -4 \sin(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy)^2$$

$$+ 2 \cos(x^2 + y^2) \cdot (dx^2 + dy^2).$$

于是,

$$d^3 u = -8 \cos(x^2 + y^2) \cdot (x dx + y dy)^3$$

$$\begin{aligned}
& -8\sin(x^2+y^2) \cdot (xdx+ydy) \cdot (dx^2+dy^2) \\
& -4\sin(x^2+y^2) \cdot (xdx+ydy) \cdot (dx^2+dy^2) \\
& = -8(xdx+ydy)^2 \cos(x^2+y^2) \\
& \quad -12(xdx+ydy)(dx^2+dy^2)\sin(x^2+y^2).
\end{aligned}$$

3271. $d^{10}u$, 若 $u = \ln(x+y)$.

解 $du = \frac{dx+dy}{x+y}$. 于是,

$$d^{10}u = -\frac{9!(dx+dy)^{10}}{(x+y)^{10}}.$$

3272. d^6u , 若 $u = \cos x \operatorname{ch} y$.

解 $d^6u = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y}\right)^6 u$

$$\begin{aligned}
& = -\cos x \operatorname{ch} y dx^6 - 6\sin x \operatorname{sh} y dx^5 dy \\
& \quad + 15\cos x \operatorname{ch} y dx^4 dy^2 \\
& \quad + 20\sin x \operatorname{sh} y dx^3 dy^3 - 15\cos x \operatorname{ch} y dx^2 dy^4 \\
& \quad - 6\sin x \operatorname{sh} y dx dy^5 + \cos x \operatorname{ch} y dy^6 \\
& = -(dx^6 - 15dx^4 dy^2 + 15dx^2 dy^4 \\
& \quad - dy^6)\cos x \operatorname{ch} y - 2dx dy(3dx^4 \\
& \quad - 10dx^2 dy^2 + 3dy^4)\sin x \operatorname{sh} y.
\end{aligned}$$

3273. d^3u , 若 $u = xyz$.

解 注意到 $d^2x = d^2y = d^2z = 0$, 即得

$$\begin{aligned}
d^3u & = d^3(xyz) = C\frac{1}{3}dx d^2(yz) = 3dx \cdot (C\frac{1}{2}dy dz) \\
& = 6dx dy dz.
\end{aligned}$$

3274. d^4u , 若 $u = \ln(x^x y^y z^z)$.

解 由于 $u = x \ln x + y \ln y + z \ln z$, 故

$$\begin{aligned}d^4 u &= (x \ln x)^{(4)} dx^4 + (y \ln y)^{(4)} dy^4 \\ &\quad + (z \ln z)^{(4)} dz^4 \\ &= 2 \left(\frac{dx^4}{x^3} + \frac{dy^4}{y^3} + \frac{dz^4}{z^3} \right).\end{aligned}$$

3275. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by}$.

解 注意到 $d^2(ax+by) = 0$, 即得

$$\begin{aligned}d^n u &= d^n(e^{ax+by}) = e^{ax+by} [d(ax+by)]^n \\ &= e^{ax+by} (adx + bdy)^n.\end{aligned}$$

3276. $d^n u$, 若 $u = X(x)Y(y)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } d^n u &= \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} X(x) \cdot d^k Y(y) \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k X^{(n-k)}(x) Y^{(k)}(y) dx^{n-k} dy^k,\end{aligned}$$

3277. $d^n u$, 若 $u = f(x+y+z)$.

解 注意到 $d^2(x+y+z) = 0$, 即得

$$d^n u = f^{(n)}(x+y+z) \cdot (dx + dy + dz)^n.$$

3278. $d^n u$, 若 $u = e^{ax+by+cz}$.

解 注意到 $d^2(ax+by+cz) = 0$, 即得

$$d^n u = e^{ax+by+cz} (adx + bdy + cdz)^n.$$

3279. $P_n(x, y, z)$ 为 n 次齐次多项式. 证明

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz).$$

证 $P_n(x, y, z)$ 可表示为形如

$$Ax^p y^q z^r$$

的单项式之和, 其中 A 为常数, p, q, r 为非负整数,

且 $p+q+r=n$.

由于微分运算对加法及乘以常数是线性的（可交换的），因此要证

$$d^n P_n(x, y, z) = n! P_n(dx, dy, dz),$$

只要证明

$$d^n(x^p y^q z^r) = n! dx^p dy^q dz^r$$

就可以了.事实上,

$$\begin{aligned} d^n(x^p y^q z^r) &= C_{r, p+q}^{p+q} d^{p+q}(x^p y^q) \cdot d^r(z^r) \\ &= \frac{n!}{r!(p+q)!} \{C_{p+q}^{p+q} d^p(x^p) d^q(y^q) \cdot d^r(z^r)\} \\ &= \frac{n!}{r!(p+q)!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!q!} \cdot p!q!r! dx^p dy^q dz^r \\ &= n! dx^p dy^q dz^r. \end{aligned}$$

3280. 设:

$$Au = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$$

求 Au 和 $A^2 u = A(Au)$, 若

$$(a) u = \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad (b) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$. 于

是,

$$Au = \frac{x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2xy^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x}{x^2 + y^2} = -u,$$

$$A^2 u = A(Au) = A(-u) = -Au = u.$$

$$(6) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}. \text{ 于是,}$$

$$\Delta u = \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1,$$

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = 0.$$

3281. 设:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

求 Δu , 若

$$(a) u = \sin x \operatorname{ch} y; \quad (b) u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解 (a) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sin x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin x \operatorname{ch} y.$ 于是,

$$\Delta u = -\sin x \operatorname{ch} y + \sin x \operatorname{ch} y = 0.$$

$$(b) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \text{ 由对称}$$

性知 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$ 于是,

$$\Delta u = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0.$$

3282. 设:

$$\Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

及

$$\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

求 $\Delta_1 u$ 和 $\Delta_2 u$, 若

(a) $u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$;

(b) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

解 (a) $\Delta_1 u = 9[(x^2 - yz)^2 + (y^2 - zx)^2 + (z^2 - xy)^2],$

$$\Delta_2 u = 6(x + y + z).$$

(b) 令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则 $u = \frac{1}{r}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}.$$

由对称性即知

$$\Delta_1 u = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^6} = \frac{1}{r^4} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\Delta_2 u = \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}\right) + \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}\right)$$

$$+ \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}\right) = 0.$$

求下列复合函数的一阶和二阶导函数:

3283. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xf'(x^2 + y^2 + z^2),$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) \\ + 4x^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy f''(x^2 + y^2 + z^2).$$

由对称性即知

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2zf'(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) \\ + 4y^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2f'(x^2 + y^2 + z^2) \\ + 4z^2 f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 4yz f''(x^2 + y^2 + z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = 4xz f''(x^2 + y^2 + z^2).$$

3284. $u = f(x, \frac{x}{y}).$

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = f'_1\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{1}{y}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''_{11}\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{2}{y}f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) \\ &\quad + \frac{1}{y^2}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{x^2}{y^4}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= -\frac{x}{y^2}f''_{12}\left(x, \frac{x}{y}\right) - \frac{1}{y^2}f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right) \\ &\quad - \frac{x}{y^3}f''_{22}\left(x, \frac{x}{y}\right)^{*}. \end{aligned}$$

*) $f'_1, f'_2, f''_{11}, f''_{12}, f''_{22}$ 均系按其下标的次序分别对第一、第二个中间变量求导函数。以下各题均同，不再说明。

3285. $u = f(x, xy, xyz)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} &= f'_1(x, xy, xyz) + yf'_2(x, xy, xyz) \\ &\quad + yzf'_3(x, xy, xyz). \end{aligned}$$

将 $f'_1(x, xy, xyz), f'_2(x, xy, xyz), f'_3(x, xy, xyz)$

简记为 f'_1, f'_2, f'_3 , 以后不再说明。于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + yf'_2 + yzf'_3, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = xf'_2 + xzf'_3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = xyf'_3,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''_{11} + yf''_{12} + yzf''_{13} + y(f''_{21} + yf''_{22} \\ &\quad + yzf''_{23}) + yz(f''_{31} + yf''_{32} + yzf''_{33}). \end{aligned}$$

由于 $f''_{12} = f''_{21}$, $f''_{13} = f''_{31}$, $f''_{23} = f''_{32}$ (以下各题均同), 故

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f''_{11} + y^2 f''_{22} + y^2 z^2 f''_{33} + 2yf''_{12} \\ &\quad + 2yzf''_{13} + 2y^2 z f''_{23}. \end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= x^2 f''_{22} + x^2 z f''_{23} + x^2 z f''_{32} + x^2 z^2 f''_{33} \\ &= x^2 f''_{22} + 2x^2 z f''_{23} + x^2 z^2 f''_{33}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 y^2 f''_{33},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= x f''_{12} + x z f''_{13} + f'_2 + x y f''_{22} + x y z f''_{23} \\
&\quad + z f'_3 + x y z f''_{32} + x y z^2 f''_{33} \\
&= x y f''_{22} + x y z^2 f''_{33} + x f''_{12} + x z f'_{13} \\
&\quad + 2 x y z f''_{23} + f'_2 + z f'_3.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = x y f''_{13} + x y^2 f''_{23} + x y^2 z f''_{33} + y f'_3,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = x^2 y f''_{23} + x^2 y z f''_{33} + x f'_3.$$

3286. 设 $u = f(x+y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + y f'_2$. 于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= f''_{11} + x f''_{12} + f'_2 + y f''_{21} + x y f''_{22} \\
&= f''_{11} + (x+y) f''_{12} + x y f''_{22} + f'_2.
\end{aligned}$$

3287. 设 $u = f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$, 求 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'_1 + 2xf'_2,$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{11} + 2xf''_{12} + 2f'_2 + 2xf''_{21} + 4x^2 f''_{22}$$

$$= f''_{11} + 4xf''_{12} + 4x^2 f''_{22} + 2f'_2.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''_{11} + 4yf''_{12} + 4y^2 f''_{22} + 2f'_2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''_{11} + 4zf''_{12} + 4z^2 f''_{22} + 2f'_2.$$

于是,

$$\Delta u = 3f''_{11} + 4(x+y+z)f''_{12}$$

$$+ 4(x^2 + y^2 + z^2)f''_{22} + 6f'_2.$$

求下列复合函数的一阶和二阶全微分 (x, y 及 z 为自变量):

3288. $u = f(t)$, 其中 $t = x + y$.

解 $du = f'(t)(dx + dy), d^2u = f''(t)(dx + dy)^2.$

3289. $u = f(t)$, 其中 $t = \frac{y}{x}$.

解 $du = f'(t) \cdot \frac{xdy - ydx}{x^2},$

$$d^2u = f''(t) \cdot \frac{(xdy - ydx)^2}{x^4} \\ - 2f'(t) \cdot \frac{dx(xdy - ydx)}{x^3}.$$

3290. $u = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

解 $du = f' \cdot \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

$$d^2u = f'' \cdot \frac{(xdx + ydy)^2}{x^2 + y^2} + f' \cdot \frac{(ydx - xdy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

3291. $u = f(t)$, 其中 $t = xyz$.

解 $du = f'(t)(yzdx + xzdy + xydz),$
 $d^2u = f''(t)(yzdx + xzdy + xydz)^2$
 $+ 2f'(t)(zdx dy + ydx dz + xdy dz).$

3292. $u = f(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 $du = 2f' \cdot (xdx + ydy + zdz),$
 $d^2u = 4f'' \cdot (xdx + ydy + zdz)^2$
 $+ 2f' \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2).$

3293. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = ax$, $\eta = by$.

解 $du = af'_1 dx + bf'_2 dy,$

$$d^2u = a^2 f''_{11} dx^2 + 2ab f''_{12} dx dy + b^2 f''_{22} dy^2.$$

3294. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

解 $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot (dx - dy),$

$$d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx^2 - dy^2) + f''_{22} \cdot (dx - dy)^2.$$

3295. $u = f(\xi, \eta)$, 其中 $\xi = xy$, $\eta = \frac{x}{y}$.

解 $du = f'_1 \cdot (ydx + xdy) + f'_2 \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2},$

$$d^2u = f''_{11} \cdot (ydx + xdy)^2 + f''_{22} \cdot \frac{(ydx - xdy)^2}{y^4} + 2f''_{12} \cdot \frac{y^2 dx^2 - x^2 dy^2}{y^2} + 2f'_1 \cdot dx dy - 2f'_2 \cdot \frac{(ydx - xdy)dy}{y^3}.$$

3296. $u = f(x + y, z).$

解 $du = f'_1 \cdot (dx + dy) + f'_2 \cdot dz,$

$$d^2u = f''_{11} \cdot (dx + dy)^2 + 2f''_{12} \cdot (dx + dy)dz + f''_{22} dz^2.$$

3297. $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$

解 $du = f'_1 \cdot (dx + dy + dz) + 2f'_2 \cdot (xdx$

$$+ ydy + zdz),$$

$$\begin{aligned} d^2u &= f''_{11} \cdot (dx + dy + dz)^2 + 4f''_{12} \cdot (dx \\ &\quad + dy + dz)(xdx + ydy + zdz) \\ &\quad + 4f''_{22} \cdot (xdx + ydy + zdz)^2 + 2f'_2 \cdot (dx^2 \\ &\quad + dy^2 + dz^2). \end{aligned}$$

3298. $u = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right).$

解 $du = f'_1 \cdot \frac{ydx - xdy}{y^2} + f'_2 \cdot \frac{zdy - ydz}{z^2},$

$$d^2u = f''_{11} \cdot \frac{(ydx - xdy)^2}{y^4} + f''_{22} \cdot \frac{(zdy - ydz)^2}{z^4}$$

$$+ 2f''_{12} \cdot \frac{(ydx - xdy)(zdy - ydz)}{y^2z^2}$$

$$- 2f'_1 \cdot \frac{(ydx - xdy)dy}{y^3} - 2f'_2 \cdot \frac{(zdy - ydz)dz}{z^3}.$$

3299. $u = f(x, y, z)$, 其中 $x = t, y = t^2, z = t^3.$

解 $du = (f'_1 + 2tf'_2 + 3t^2f'_3)dt,$

$$d^2u = (f''_{11} + 4t^2f''_{22} + 9t^4f''_{33} + 4tf''_{12} + 6t^2f''_{13}$$

$$+ 12t^3f''_{23} + 2f'_2 + 6tf'_3)dt^2.$$

3300. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz.$

解 $du = af'_1 \cdot dx + bf'_2 \cdot dy + cf'_3 \cdot dz,$

$$d^2u = a^2 f''_{11} \cdot dx^2 + b^2 f''_{22} \cdot dy^2 + c^2 f''_{33} \cdot dz^2$$

$$+ 2abf''_{12} \cdot dx dy + 2acf''_{13} \cdot dx dz + 2bcf''_{23} \cdot dy dz.$$

3301. $u = f(\xi, \eta, \zeta)$, 其中 $\xi = x^2 + y^2$, $\eta = x^2 - y^2$,
 $\zeta = 2xy$.

解 $du = 2f'_1 \cdot (xdx + ydy) + 2f'_2 \cdot (xdx - ydy)$
 $+ 2f'_3 \cdot (ydx + xdy),$

$$d^2u = 4f''_{11} \cdot (xdx + ydy)^2 + 4f''_{22} \cdot (xdx - ydy)^2$$

$$+ 4f''_{33} \cdot (ydx + xdy)^2 + 8f''_{12} \cdot (x^2 dx^2 - y^2 dy^2)$$

$$+ 8f''_{13} \cdot (xdx + ydy)(ydx + xdy)$$

$$+ 8f''_{23} \cdot (xdx - ydy)(ydx + xdy) + 2f'_1 \cdot (dx^2$$

$$+ dy^2) + 2f'_2 \cdot (dx^2 - dy^2) + 4f'_3 \cdot dx dy.$$

求 $d^n u$, 设:

3302. $u = f(ax + by + cz).$

解 $d^n u = f^{(n)}(ax + by + cz) \cdot (adx + bdy + cdz)^n.$

3303. $u = f(ax, by, cz).$

解 $d^*u = \left(a dx \frac{\partial}{\partial \xi} + b dy \frac{\partial}{\partial \eta} + c dz \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^* f(\xi, \eta, \zeta),$

其中 $\xi = ax, \eta = by, \zeta = cz.$

3304. $u = f(\xi, \eta, \zeta),$ 其中 $\xi = a_1x + b_1y + c_1z,$
 $\eta = a_2x + b_2y + c_2z, \zeta = a_3x + b_3y + c_3z.$

解 $d^*u = \left[(a_1 dx + b_1 dy + c_1 dz) \frac{\partial}{\partial \xi} + (a_2 dx + b_2 dy + c_2 dz) \frac{\partial}{\partial \eta} + (a_3 dx + b_3 dy + c_3 dz) \frac{\partial}{\partial \zeta} \right]^* f(\xi, \eta, \zeta)$
 $= \left[dx \left(a_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + a_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + a_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dy \left(b_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + b_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + b_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + dz \left(c_1 \frac{\partial}{\partial \xi} + c_2 \frac{\partial}{\partial \eta} + c_3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \right]^* f(\xi, \eta, \zeta).$

3305. 设 $u = f(r),$ 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 和 f 为可微分两次的函数. 证明:

$$\Delta u = F(r),$$

其中 $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$ Δ 为拉普拉斯算子,

并求函数 $F.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \cdot \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) \cdot \frac{z^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - z^2}{r^3}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) \\ &\quad + 2f'(r) \cdot \frac{1}{r} = F(r). \end{aligned}$$

3306. 设 u 和 v 为可微分两次的函数而 Δ 为拉普拉斯算子 (参阅 3305 题). 证明:

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + 2\Delta(u, v),$$

$$\text{其中 } \Delta(u, v) = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}.$$

$$\begin{aligned} \text{证 } \Delta(uv) &= \frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(uv)}{\partial z^2} \\ &= \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &\quad + \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

$$+ \left(u \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$= u \Delta v + v \Delta u + 2 \Delta(u, v),$$

这就是所要证明的。

3307. 证明：函数

$$u = \ln \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

(a 和 b 为常数) 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y-b)^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{(y-b)^2 - (x-a)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}.$$

由对称性即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{(x-a)^2 - (y-b)^2}{[(x-a)^2 + (y-b)^2]^2}.$$

于是,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3308. 证明：若函数 $u = u(x, y)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅 3307 题), 则函数

$$v = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$$

也满足这方程。

证 设 $\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$, 则 $v(x, y)$
 $= u(\xi, \eta)$. 从而

$$v''_{xx} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2 + 2u'_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \eta'_x \\
+ u'_\xi \cdot \xi''_{xx} + u'_\eta \cdot \eta''_{xx},$$

$$v''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_y)^2 + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_y)^2 + 2u'_{\xi\eta} \cdot \xi'_y \eta'_y \\
+ u'_\xi \cdot \xi''_{yy} + u'_\eta \cdot \eta''_{yy}.$$

由于

$$\xi'_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\eta'_y, \xi'_y = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \eta'_x,$$

$$\xi''_{yy} = (\xi'_y)'_y = (\eta'_x)'_y = (\eta'_y)'_x = -\xi''_{xx},$$

$$\eta''_{yy} = (\eta'_y)'_y = (-\xi'_x)'_y = -(\xi'_y)'_x = -\eta''_{xx}$$

及

$$u''_{\xi\xi}(\xi, \eta) + u''_{\eta\eta}(\xi, \eta) = 0,$$

故

$$\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = u''_{\xi\xi} \cdot (\xi'_x)^2 + u''_{\eta\eta} \cdot (\eta'_x)^2$$

$$\begin{aligned}
& + 2u'_{\xi\eta} \cdot \xi'_x \eta'_x + u'_\xi \cdot \xi'_{xx} \\
& + u'_\eta \cdot \eta'_{xx} + u'_{\xi\xi} \cdot (\eta'_x)^2 + u'_{\eta\eta} \cdot (-\xi'_x)^2 \\
& + 2u'_{\xi\eta} \cdot \eta'_x (-\xi'_x) + u'_\xi \cdot (-\xi'_{xx}) + u'_\eta \cdot (-\eta'_{xx}) \\
& = (u'_{\xi\xi} + u'_{\eta\eta}) \left[(\xi'_x)^2 + (\eta'_x)^2 \right] = 0,
\end{aligned}$$

即函数 v 也满足拉普拉斯方程。

3309. 证明: 函数

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}}$$

(a 和 b 为常数) 满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

证 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{8a^3 t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}} \cdot \left[(x-b)^2 - 2a^2 t \right],$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-b}{4a^3 t \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{8a^5 t^2 \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2 t}} \cdot \left[(x-b)^2 - 2a^2 t \right].$$

将 $\frac{\partial u}{\partial t}$ 与 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 比较即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

即函数 u 满足热传导方程.

3310. 证明: 若函数 $u = u(x, t)$ 满足热传导方程 (参阅 3309 题), 则函数

$$v = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}} u\left(\frac{x}{a^2t}, -\frac{1}{a^4t}\right) \quad (t > 0)$$

也满足该方程.

证 设 $w = w(x, t) = \frac{1}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$, 此函数即 3309 题

中的函数 u 乘以 $2\sqrt{\pi}$, 并令 $b = 0$ 后得到. 因此, 它满足热传导方程

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

显然有

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{2x}{4a^2t} w = -\frac{xw}{2a^2t}.$$

令 $\xi = \xi(x, t) = \frac{x}{a^2t}$, $\eta = \eta(t) = -\frac{1}{a^4t}$, 则

$$\xi'_x = \frac{1}{a^2t}, \xi'_{tx} = 0, \xi'_t = -\frac{x^2}{a^2t^2}, \eta'_t = \frac{1}{a^4t^2}.$$

由于 $v = w(x, t) \cdot u(\xi, \eta)$ 及 $u'_x = a^2 u'_{\xi}$, 故

$$v_t^1 = w_t^1 \cdot u + w \cdot (u_t^1 \cdot \xi_t^1 + u_{tt}^1 \cdot \eta_t^1)$$

$$= a^2 w_{xx}^1 \cdot u + w \cdot \left[u_t^1 \cdot \left(-\frac{x^2}{a^2 t^2} \right) + a^2 u_{tt}^1 \cdot \left(\frac{1}{a^4 t^2} \right) \right],$$

$$v_x^1 = w_x^1 \cdot u + w u_t^1 \cdot \xi_x^1,$$

$$v_{xx}^1 = w_{xx}^1 \cdot u + 2w_x^1 \cdot u_t^1 \xi_x^1 + w u_{tt}^1 \cdot (\xi_x^1)^2 + w u_t^1 \cdot \xi_{xx}^1$$

$$= w_{xx}^1 \cdot u + 2 \left(-\frac{xw}{2a^2 t} \right) u_t^1 \cdot \left(\frac{x}{a^2 t} \right) + w u_{tt}^1 \cdot \left(\frac{1}{a^2 t} \right)^2$$

$$= w_{xx}^1 \cdot u - \frac{x^2 w}{a^4 t^2} u_t^1 + \frac{w}{a^4 t^2} u_{tt}^1.$$

将 v_t^1 与 v_{xx}^1 比较即得

$$v_t^1 = a^2 v_{xx}^1,$$

即函数 v 也满足热传导方程。

3311. 证明: 函数

$$u = \frac{1}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$) 当 $r \neq 0$ 时, 满足拉普拉斯方程

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 本题证法与 3282 题(6)的证法完全类似, 只要将该题中的 x, y, z 换成 $x-a, y-b, z-b$ 即可. 事实上,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(x-a)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(y-b)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(z-c)^2}{r^5}.$$

将上述三式相加, 即证得

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0.$$

3312. 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程 (参阅 3311 题), 则函数

$$v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right)$$

(式中 k 为常数及 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 也满足该方程.

证 证法一

设 $S = S(x, y, z) = \frac{1}{r}$, 则由 3282 题(6)知

$$\Delta S = S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz} = 0,$$

$$(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2 = \frac{1}{r^4} = S^4.$$

$$S'_x = -\frac{x}{r^3} = -S^3 x, \quad S'_y = -S^3 y, \quad S'_z = -S^3 z.$$

$$\text{记 } v = \frac{1}{r} u\left(\frac{k^2 x}{r^2}, \frac{k^2 y}{r^2}, \frac{k^2 z}{r^2}\right)$$

$$= Su(k^2 S^2 x, k^2 S^2 y, k^2 S^2 z)$$

$$= Sw(x, y, z, S) = F(x, y, z, S).$$

于是,

$$v'_x = F'_x + F'_S \cdot S'_x.$$

注意到 F'_x 和 F'_S 也是自变量 x, y, z 和中间变量 S 的函数, 即得

$$v''_{xx} = F''_{xx} + 2F''_{xS} \cdot S'_x + F''_{SS} \cdot (S'_x)^2 + F'_S \cdot S''_{xx}.$$

由对称性得

$$v''_{yy} = F''_{yy} + 2F''_{yS} \cdot S'_y + F''_{SS} \cdot (S'_y)^2 + F'_S \cdot S''_{yy},$$

$$v''_{zz} = F''_{zz} + 2F''_{zS} \cdot S'_z + F''_{SS} \cdot (S'_z)^2 + F'_S \cdot S''_{zz}.$$

于是,

$$\Delta v = (F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz}) + F'_S \cdot (S''_{xx} + S''_{yy} + S''_{zz})$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ 2(F''_{xs} \cdot S'_x + F''_{ys} \cdot S'_y + F''_{zs} \cdot S'_z) \right. \\
& \left. + F''_{ss} \cdot \left[(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

显然第二个括弧为零，也不难验证第一个括弧为零。事实上，

$$F''_{xx} + F''_{yy} + F''_{zz} = k^4 S^6 \cdot (u''_{11} + u''_{22} + u''_{33}) = 0.$$

现在来计算最后一个括弧。注意到

$$\begin{aligned}
S\tau'_s &= 2k^2 S^2 x u'_1 + 2k^2 S^2 y u'_2 + 2k^2 S^2 z u'_3 \\
&= 2xw'_x + 2yw'_y + 2zw'_z,
\end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned}
F''_{ss} \cdot \left[(S'_x)^2 + (S'_y)^2 + (S'_z)^2 \right] &= (S\tau)''_{ss} \cdot S^4 \\
&= (w + S w'_s)'_s \cdot S^4 \\
&= (w + 2xw'_x + 2yw'_y + 2zw'_z)'_s \cdot S^4 \\
&= S^4 w'_s + 2xS^4 w''_{xs} + 2yS^4 w''_{ys} + 2zS^4 w''_{zs}. \quad (1)
\end{aligned}$$

而

$$2(F''_{xs} \cdot S'_x + F''_{ys} \cdot S'_y + F''_{zs} \cdot S'_z)$$

$$\begin{aligned}
&= 2(Sw)''_{xs} \cdot (-S^3x) + 2(Sw)''_{ys} \cdot (-S^3y) \\
&\quad + 2(Sw)''_{zs} \cdot (-S^3z) \\
&= -2S^3x \cdot (Sw'_x)'_s - 2S^3y \cdot (Sw'_y)'_s - 2S^3z \cdot (Sw'_z)'_s \\
&= -2S^3x \cdot (w'_x + Sw''_{xs}) - 2S^3y \cdot (w'_y \\
&\quad + Sw''_{ys}) - 2S^3z \cdot (w'_z + Sw''_{zs}) \\
&= -S^3 \cdot (2xw'_x + 2yw'_y + 2zw'_z) - 2S^4w''_{xs} \\
&\quad - 2yS^4w''_{ys} - 2zS^4w''_{zs} \\
&= -S^4w'_s - 2xS^4w''_{xs} - 2yS^4w''_{ys} - 2zS^4w''_{zs}. \quad (2)
\end{aligned}$$

比较(1)式和(2)式即知第三个括弧也为零。于是，最后证得

$$\Delta v = 0$$

证法二

本题也可直接求出 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 、 $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ ，进而证得

$\Delta v = 0$ 。事实上，设

$$\frac{k^2 x}{r^2} = t_1, \quad \frac{k^2 y}{r^2} = t_2, \quad \frac{k^2 z}{r^2} = t_3,$$

利用 3306 题的结果即得

$$\begin{aligned} \Delta v = & \frac{1}{r} \left[\frac{\partial^2 u(t_1, t_2, t_3)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t_1, t_2, t_3)}{\partial y^2} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u(t_1, t_2, t_3)}{\partial z^2} \right] + u(t_1, t_2, t_3) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) \\ & + 2 \left[\frac{\partial u(t_1, t_2, t_3)}{\partial x} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial x} + \frac{\partial u(t_1, t_2, t_3)}{\partial y} \right. \\ & \left. \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial y} + \frac{\partial u(t_1, t_2, t_3)}{\partial z} \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \right]. \quad (1) \end{aligned}$$

为书写简便起见, 记 $u(t_1, t_2, t_3) = u$. 分别求 u 及 $\frac{1}{r}$ 对 x, y, z 的一阶偏导函数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = & k^2 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right. \\ & \left. \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial y} = & k^2 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right], \\ \frac{\partial u}{\partial z} = & k^2 \cdot \left[\frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_2} \right. \\ & \left. \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) + \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} = -\frac{y}{r^3},$$

$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}.$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = & k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\ & \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \left. \right] \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) \\ & + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left[\frac{-2xr^4 - 4xr^2(r^2 - 2x^2)}{r^8} \right] \\ & + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \\ & + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \left[\frac{-2yr^4 - 4xr^2(-2xy)}{r^8} \right] \\ & + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_1} \cdot \left(\frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_2} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \\ & + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left[\frac{-2zr^4 - 4xr^2(-2xz)}{r^8} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left[\frac{-2xr^4 - 4yr^2(-2xy)}{r^8} \right] \\
&\quad + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_3} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right] \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \left[\frac{-2yr^4 - 4yr^2(r^2 - 2y^2)}{r^8} \right] \\
&\quad + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xy}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_2} \right. \\
&\quad \cdot \left(\frac{r^2 - 2y^2}{r^4} \right) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left[\frac{-2zr^4 - 4yr^2(-2yz)}{r^8} \right], \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_2} \right. \\
&\quad \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t_1 \partial t_3} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) \\
&\quad + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1} \cdot \left[\frac{-2xr^4 - 4zr^2(-2xz)}{r^8} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2 \partial t_3} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right] \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \\
& + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_2} \cdot \left[\frac{-2yr^4 - 4zr^2(-2yz)}{r^8} \right] \\
& + k^4 \cdot \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_1} \cdot \left(-\frac{2xz}{r^4} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3 \partial t_2} \cdot \left(-\frac{2yz}{r^4} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \cdot \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \right] \left(\frac{r^2 - 2z^2}{r^4} \right) \\
& + k^2 \frac{\partial u}{\partial t_3} \cdot \left[\frac{-2zr^4 - 4zr^2(r^2 - 2z^2)}{r^8} \right].
\end{aligned}$$

$$\text{將 } \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x}, \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y}, \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z},$$

及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ 代入 (1) 式, 合并整理, 并注意

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \text{ 及 } \frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} = 0,$$

即得

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{1}{r} \left[\frac{k^4}{r^4} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t_3^2} \right) \right. \\
& \left. - \frac{2k^2}{r^4} \cdot \left(x \frac{\partial u}{\partial t_1} + y \frac{\partial u}{\partial t_2} + z \frac{\partial u}{\partial t_3} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ 0 \cdot \sum_{\substack{i, i=1 \\ (i+i)}}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t_i \partial t_i} \Big] + u \cdot 0 + \frac{2k^2}{r^6} \left(x \frac{\partial u}{\partial t_1} \right. \\ \left. + y \frac{\partial u}{\partial t_2} + z \frac{\partial u}{\partial t_3} \right) = 0,$$

上式说明函数 $v = v(x, y, z)$ 也满足拉普拉斯方程。

3313. 证明：函数

$$u = \frac{C_1 e^{-ar} + C_2 e^{ar}}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 及 C_1, C_2 为常数) 满足
爱尔木戈尔兹方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a^2 u.$$

证 设

$$v = \frac{1}{r} e^{-ar}, \quad w = \frac{1}{r} e^{ar},$$

则有

$$u = C_1 v + C_2 w.$$

$$v'_x = v'_x \cdot r'_x = e^{-ar} \cdot \left(-\frac{1}{r^2} - \frac{a}{r} \right) \cdot \frac{x}{r}$$

$$= -xv \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right),$$

$$v''_{xx} = -v'_x \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right) x - v \cdot \left(-\frac{2}{r^3} - \frac{a}{r^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{x}{r} \cdot x - v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right) \\
& = x^2 v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right)^2 + x^2 v \cdot \frac{1}{r} \\
& \cdot \left(\frac{2}{r^3} + \frac{a}{r^2} \right) - v \cdot \left(\frac{1}{r^2} + \frac{a}{r} \right) \\
& = v \cdot \left[\left(\frac{3}{r^4} + \frac{3a}{r^3} + \frac{a^2}{r^2} \right) x^2 - \frac{1}{r^2} - \frac{a}{r} \right].
\end{aligned}$$

利用对称性, 即得

$$\begin{aligned}
\Delta v & = v \cdot \left[\left(\frac{3}{r^4} + \frac{3a}{r^3} + \frac{a^2}{r^2} \right) \cdot (x^2 + y^2 \right. \\
& \left. + z^2) - \frac{3}{r^2} - \frac{3a}{r} \right] = a^2 v.
\end{aligned}$$

记 $b = -a$, 则 $w = \frac{1}{r} e^{-br}$. 仿上述证明, 有

$$\Delta w = b^2 w = a^2 w.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\Delta u & = \Delta(C_1 v + C_2 w) = C_1 \Delta v + C_2 \Delta w \\
& = C_1 a^2 v + C_2 a^2 w = a^2 u,
\end{aligned}$$

即

$$\Delta u = a^2 u.$$

3314. 设函数 $u_1 = u_1(x, y, z)$ 及 $u_2 = u_2(x, y, z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta u = 0$. 证明: 函数

$$v = u_1(x, y, z) + (x^2 + y^2 + z^2)u_2(x, y, z)$$

满足二重调和方程

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

证 利用 3306 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} \Delta v &= \Delta u_1 + (x^2 + y^2 + z^2) \Delta u_2 \\ &\quad + u_2 \cdot \Delta(x^2 + y^2 + z^2) + 2\left(2x \frac{\partial u_2}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + 2y \frac{\partial u_2}{\partial y} + 2z \frac{\partial u_2}{\partial z}\right) \\ &= 6u_2 + 4\left(x \frac{\partial u_2}{\partial x} + y \frac{\partial u_2}{\partial y} + z \frac{\partial u_2}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

重复应用同一结果于 Δv , 得

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta v) &= 6\Delta u_2 + 4\left\{x\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + y\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) \right. \\ &\quad \left. + z\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial u_2}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u_2}{\partial y}\Delta y \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u_2}{\partial z}\Delta z + 2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right)\right\}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\Delta u_2) = 0, \\ \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) &= 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) = 0, \end{aligned}$$

故最后证得

$$\Delta(\Delta v) = 0.$$

3315. 设 $f(x, y, z)$ 是可微分 m 次的 n 次齐次函数. 证明

$$\begin{aligned} & \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z) \\ &= n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x, y, z). \end{aligned}$$

证 证法一

根据齐次函数的定义知, 函数 $f(x, y, z)$ 满足

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z). \quad (1)$$

在(1)式两端分别对 t 求 m 次导数. 首先考察 $\frac{d^m f}{dt^m}$. 由求全导数的公式知

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= x \frac{\partial f}{\partial(xt)} + y \frac{\partial f}{\partial(yt)} + z \frac{\partial f}{\partial(zt)} \\ &= t^{n-1} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x, y, z). \\ \frac{d^2 f}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{df}{dt} \right) = x \left\{ x \frac{\partial^2 f}{\partial(xt)^2} \right. \\ &\quad \left. + y \frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(yt)} + z \frac{\partial^2 f}{\partial(xt)\partial(zt)} \right\} \\ &\quad + y \left\{ x \frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(xt)} + y \frac{\partial^2 f}{\partial(yt)^2} + z \frac{\partial^2 f}{\partial(yt)\partial(zt)} \right\} \\ &\quad + z \left\{ x \frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(xt)} + y \frac{\partial^2 f}{\partial(zt)\partial(yt)} + z \frac{\partial^2 f}{\partial(zt)^2} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (xt)^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (yt)^2} + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial (zt)^2} \\
&\quad + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial (xt)\partial (yt)} + 2yz \frac{\partial^2 f}{\partial (yt)\partial (zt)} \\
&\quad + 2zx \frac{\partial^2 f}{\partial (zt)\partial (xt)} \\
&= t^{n-2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f(x, y, z).
\end{aligned}$$

一般地，由数学归纳法可得

$$\begin{aligned}
\frac{d^m f}{dt^m} &= \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m} C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \frac{\partial^m f}{\partial (xt)^{\alpha_1} \partial (yt)^{\alpha_2} \partial (zt)^{\alpha_3}} \\
&\quad \cdot x^{\alpha_1} y^{\alpha_2} z^{\alpha_3} \\
&= t^{n-m} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z), \quad (2)
\end{aligned}$$

其中总和是关于 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m$ 的非负整数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的一切可能组合而取的，且

$$C_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} = \frac{m!}{\alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!}.$$

而(1)式右端对 t 求 m 次导数，得

$$\begin{aligned}
[t^m f(x, y, z)]^{(m)} &= n(n-1)\cdots(n-m \\
&\quad + 1)t^{n-m} f(x, y, z). \quad (3)
\end{aligned}$$

比较(2)式和(3)式，令 $t=1$ ，即证得

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^m f(x, y, z)$$

$$=n(n-1)\cdots(n-m+1)f(x, y, z).$$

证法二

当 $m=1$ 时, 则由

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

两端对 t 求导, 可得

$$\begin{aligned} & x \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial(tx)} + y \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial(ty)} \\ & + z \frac{\partial f(tx, ty, tz)}{\partial(tz)} \end{aligned}$$

$$= nt^{n-1} f(x, y, z) \quad (t > 0).$$

令 $t=1$, 即有

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) f = nf.$$

当 $m=2$ 时, 由 3234 题的结果知

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 f = n(n-1)f.$$

在 3233 题中已证得 $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z),$

$f'_z(x, y, z)$ 为 $(n-1)$ 次的齐次函数.

今设 $m=k-1$ 时命题为真. 对 f'_x, f'_y, f'_z 用数

学归纳法的假设, 即

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_i$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_x, \quad (4)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_y$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_y, \quad (5)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{k-1} f'_z$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f'_z. \quad (6)$$

将(4)两端乘以 x , (5)式两端乘以 y , (6)式两端乘以 z , 然后相加, 即得

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^k f(x, y, z)$$

$$= (n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) \left(x \frac{\partial}{\partial x}$$

$$+ y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) f(x, y, z).$$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)f(x, y, z).$$

即当 $m=k$ 时命题也为真.

于是, 命题对于一切自然数 m 为真, 即

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^n f$$

$$= n(n-1)\cdots(n-k+1)f.$$

3316. 若

$z = \sin y + f(\sin x - \sin y)$,
 其中 f 为可微分的函数. 简化式子

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y}.$$

解
$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y} = \sec x \cos x \cdot f'$$

$$+ \sec y \cdot (\cos y - \cos y \cdot f')$$

$$= f' + 1 - f' = 1,$$

即

$$\sec x \frac{\partial z}{\partial x} + \sec y \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

3317. 证明: 函数

$$z = x^n f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

(其中 f 为任意的可微分函数) 满足方程

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

证
$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left\{ nx^{n-1} f\left(\frac{y}{x^2}\right) \right.$$

$$\left. - \frac{2x^n y}{x^3} f'\left(\frac{y}{x^2}\right) \right\} + 2y \frac{x^n}{x^2} f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= nx^n f\left(\frac{y}{x^2}\right) = nz,$$

即

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} = nz.$$

3318. 证明:

$$z = yf(x^2 - y^2)$$

(其中 f 为任意的可微分函数) 满足方程

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

证 $y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = y^2 \cdot 2xyf' + xy \cdot (f - 2y^2f') = xyz = xz,$

即

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xz.$$

3319. 若

$$u = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{6}x^3(y+z) + \frac{1}{2}x^2yz + f(y-x, z-x),$$

式中 f 为可微分的函数. 简化式子

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2(y+z) + xyz - f'_1 - f'_2,$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2z + f'_1,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + f_2.$$

将上述三式相加，即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = xyz.$$

3320. 设：

$$x^2 = vw, \quad y^2 = uw, \quad z^2 = uv$$

及

$$f(x, y, z) = F(u, v, w).$$

证明：

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = uF'_u + vF'_v + wF'_w.$$

证 把 u, v, w 当作自变量^{*}，故

$$uF'_u = uf'_x \cdot x'_u + uf'_y \cdot y'_u + uf'_z \cdot z'_u,$$

$$vF'_v = vf'_x \cdot x'_v + vf'_y \cdot y'_v + vf'_z \cdot z'_v,$$

$$wF'_w = wf'_x \cdot x'_w + wf'_y \cdot y'_w + wf'_z \cdot z'_w.$$

将上述三式相加，得

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = (ux'_u + vx'_v + wx'_w) f'_x$$

$$+ (uy'_u + vy'_v + wy'_w) f'_y + (uz'_u$$

$$+vz'_v + wz'_w) f'_z. \quad (1)$$

由题设得 $2x \frac{\partial x}{\partial u} = 0$. 因为 x 不恒等于零, 所以 $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$. 同法可得 $\frac{\partial y}{\partial v} = 0, \frac{\partial z}{\partial w} = 0$.

再由题设, 得

$$2x \frac{\partial x}{\partial w} = v, \quad 2x \frac{\partial x}{\partial v} = w, \quad 2y \frac{\partial y}{\partial u} = w,$$

$$2y \frac{\partial y}{\partial w} = u, \quad 2x \frac{\partial z}{\partial u} = v, \quad 2x \frac{\partial z}{\partial v} = u.$$

将上述结果代入 (1) 式, 得

$$\begin{aligned} uF'_x + vF'_y + wF'_z &= \left(\frac{vw}{2x} + \frac{wv}{2x} \right) f'_z \\ &\quad + \left(\frac{uw}{2y} + \frac{wu}{2y} \right) f'_y + \left(\frac{uv}{2z} + \frac{vu}{2z} \right) f'_x \\ &= xf'_x + yf'_y + zf'_z. \end{aligned}$$

即

$$uF'_x + vF'_y + wF'_z = xf'_x + yf'_y + zf'_z.$$

*) 如果把 x, y, z 当作自变量, 也可以证明本题的结果.

假定任意函数 φ, ψ 等等为可微分足够多次的函数,

验证下列等式:

$$3321. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \text{ 若 } z = \varphi(x^2 + y^2),$$

证 由于

$$y \frac{\partial z}{\partial x} = y \cdot 2x\varphi'(x^2 + y^2),$$

$$x \frac{\partial z}{\partial y} = x \cdot 2y\varphi'(x^2 + y^2),$$

所以

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$3322. \quad x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, \text{ 若 } z = \frac{y^2}{3x} + \varphi(xy).$$

$$\text{证 } x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = x^2 \cdot \left[-\frac{y^2}{3x^2} + y\varphi'(xy) \right]$$

$$-xy \cdot \left[\frac{2y}{3x} + x\varphi'(xy) \right] + y^2 = 0.$$

$$3323. \quad (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = xyz, \text{ 若 } z = e^x \varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right).$$

$$\text{证 } (x^2 - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = (x^2 - y^2) e^x \cdot \frac{x\varphi'}{y^2} ye^{\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$+ xy \cdot \left\{ e^x \cdot \varphi + e^x \varphi' \cdot \left[e^{\frac{x^2}{2y^2}} - \frac{x^2}{y^3} ye^{\frac{x^2}{2y^2}} \right] \right\}$$

$$= xye^x \varphi = xyz.$$

$$3324. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} = nu, \text{ 若 } u = x^\alpha \varphi\left(\frac{y}{x^\alpha}, \frac{z}{x^\beta}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha y \frac{\partial u}{\partial y} + \beta z \frac{\partial u}{\partial z} &= nx^n \varphi - \alpha x^{n-\alpha} y \varphi'_1 \\ &\quad - \beta x^{n-\beta} z \varphi'_2 + \alpha y x^{n-\alpha} \varphi'_1 + \beta z x^{n-\beta} \varphi'_2 \\ &= nx^n \varphi = nu. \end{aligned}$$

$$3325. \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}, \text{ 若}$$

$$u = \frac{xy}{z} \ln x + x \varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right).$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad x \frac{\partial u}{\partial x} &= x \cdot \frac{y}{z} \ln x + \frac{xy}{z} + x\varphi - y\varphi'_1 - z\varphi'_2, \\ y \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{xy}{z} \ln x + y\varphi'_1, \quad z \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xy}{z} \ln x + z\varphi'_2. \end{aligned}$$

将上述三式相加, 即得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}.$$

$$3326. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 若 } u = \varphi(x-at) + \psi(x+at).$$

$$\text{证} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \varphi'' + a^2 \psi'', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi''.$$

将上述二式比较, 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$3327. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \text{ 若}$$

$$u = x\varphi(x+y) + y\psi(x+y).$$

证 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi + y\psi' + x\varphi', \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x\varphi' + \psi + y\psi',$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\varphi' + y\psi'' + x\varphi'', \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \varphi' + \psi' + y\psi'' + x\varphi'', \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x\varphi'' + 2\psi' + y\psi''. \quad (3)$$

(1) - 2 × (2) + (3), 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3328. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 若

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

证 $u_1 = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 为零次齐次函数, $u_2 = x\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ 为一次齐次函数. 由 3234 题的结果 (对于二元更成立) 知

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1 = 0, \quad \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2 = 0.$$

于是,

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (u_1 + u_2) \\
&= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1 + \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2 \\
&= 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

注. 也可不引用3234题的结果, 求出偏导数直接验证.

3329. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$, 若

$$u = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

证 $u_1 = x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ 为 n 次齐次函数, $u_2 = x^{1-n} \psi\left(\frac{y}{x}\right)$

为 $1-n$ 次齐次函数. 由 3234 题的结果知

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_1 = n(n-1)u_1,$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u_2 = (1-n)(1-n-1)u_2$$

$$= n(n-1)u_2.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\
&= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}\right)^2 (u_1 + u_2)
\end{aligned}$$

$$=n(n-1)(u_1+u_2)=n(n-1)u.$$

值得注意的是, 3328 题即为本题的特殊情形,
 $n=0$.

$$3330. \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ 若 } u = \varphi(x + \psi(y)).$$

$$\text{证 } \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi'' \psi',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi' \psi', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''.$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

用逐次微分的方法消去任意函数 φ 和 ψ ,

$$3331. z = x + \varphi(xy).$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + y\varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'.$$

于是,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$$3332. z = x\varphi\left(\frac{x}{y^2}\right).$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi + \frac{x}{y^2} \varphi', \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2x^2}{y^3} \varphi'.$$

于是,

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2x\varphi + \frac{2x^2}{y^2}\varphi' - \frac{2x^2}{y^2}\varphi'$$

$$= 2x\varphi = 2z,$$

即

$$2x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2z.$$

3333. $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x\varphi'}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\varphi'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

于是,

$$y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3334. $u = \varphi(x - y, y - z)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'_1, \frac{\partial u}{\partial y} = -\varphi'_1 + \varphi'_2, \frac{\partial u}{\partial z} = -\varphi'_2$.

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

3335. $u = \varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}\varphi'_1, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\varphi'_1 + \frac{1}{z}\varphi'_2,$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2}\varphi'_2.$$

于是,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0^*).$$

*) 注意到 $\varphi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)$ 为零次齐次函数, 本题即3315

题的特殊情形: $n=0$.

3336. $z = \varphi(x) + \psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi'(x)$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

3337. $z = \varphi(x)\psi(y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' \psi$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi \psi'$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \varphi' \psi'$.

于是,

$$z \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}.$$

3338. $z = \varphi(x+y) + \psi(x-y)$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi' + \psi'$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi' - \psi'$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \varphi'' + \psi'', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'' + \psi''.$$

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

3339. $z = x\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + y\psi\left(\frac{x}{y}\right).$

解 注意到函数 z 为一次齐次函数, 由3315题知

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

3340. $z = \varphi(xy) + \psi\left(\frac{x}{y}\right).$

解 设 $z_1 = \varphi(xy)$, 则由3331题知

$$x \frac{\partial z_1}{\partial x} - y \frac{\partial z_1}{\partial y} = 0.$$

又 $z_2 = \psi\left(\frac{x}{y}\right)$ 为零次齐次函数, 且函数

$$x \frac{\partial z_2}{\partial x} - y \frac{\partial z_2}{\partial y} = \frac{2x}{y} \psi'$$

也为零次齐次函数. 从而, 函数

$$\begin{aligned} u = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} &= \left(x \frac{\partial z_1}{\partial x} - y \frac{\partial z_1}{\partial y} \right) \\ &+ \left(x \frac{\partial z_2}{\partial x} - y \frac{\partial z_2}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

是零次齐次函数. 于是, 由3315题知

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

但是,

$$\begin{aligned}x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} &= x \frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &+ y \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ &\quad - y \frac{\partial z}{\partial y} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y},\end{aligned}$$

故得

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

3341. 求函数

$$z = x^2 - y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成角 $\alpha = 60^\circ$ 的方向 l 上的导函数.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=1} = -2.$

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos \beta = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{x=1} = 2 \cdot \frac{1}{2} + (-2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}.$$

3342. 求函数

$$z = x^2 - xy + y^2$$

在点 $M(1, 1)$ 沿与 Ox 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的导函数. 在怎样的方向上此导函数有: (a) 最大的值; (b) 最小的值; (B) 等于 0.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{x=1} = 1$, $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{y=1} = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{x=1} &= \cos\alpha + \cos(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha + \sin\alpha \\ &= \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

(a) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 1$, 即 $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 时, $\frac{\partial z}{\partial l}$ 最大;

(b) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -1$, 即 $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ 时, $\frac{\partial z}{\partial l}$ 最小;

(B) 当 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, 即 $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ 或 $\alpha = \frac{7\pi}{4}$ 时, $\frac{\partial z}{\partial l} = 0$.

3343. 求函数

$$z = \ln(x^2 + y^2)$$

在点 $M_0(x_0, y_0)$ 沿与过此点的等位线成垂直的方向上的导数.

解 与等位线垂直的方向即梯度的方向或与梯度相反

的方向。于是，

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} &= \pm |\operatorname{grad} z| \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \Big|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0}} \\ &= \pm \sqrt{\left(\frac{2x_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)^2 + \left(\frac{2y_0}{x_0^2 + y_0^2}\right)^2} = \pm \frac{2}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}. \end{aligned}$$

3344. 求函数

$$z = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 沿曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 在此点的内法线方向上的导数。

解 曲线 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 是函数 z 的一条等位线。随着 x, y 的绝对值增大， z 是减少的，因此，曲线的内法线方向即梯度方向。于是，

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial l} \Big|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} &= |\operatorname{grad} z| \Big|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} = \sqrt{\frac{4x^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}} \Big|_{\substack{x=\frac{a}{\sqrt{2}} \\ y=\frac{b}{\sqrt{2}}}} \\ &= \frac{\sqrt{2(a^2 + b^2)}}{ab} \quad (a > 0, b > 0). \end{aligned}$$

3345. 求函数

$$u = xyz$$

在点 $M(1,1,1)$ 沿方向 $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 上的导数。函数在该点的梯度的大小等于甚么？

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial l} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma.$$

$$\begin{aligned} |\text{grad } u| \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} \\ &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

3346. 求函数

$$u = \frac{1}{r}$$

(式中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处梯度的大小和方向。

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}. \text{ 于是,}$$

$$\text{grad } u = -\frac{1}{r^3} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

或简记成

$$\text{grad } u = \left\{ -\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right\}.$$

在点 M_0 处的梯度为

$$\text{grad } u = \left\{ -\frac{x_0}{r_0^3}, -\frac{y_0}{r_0^3}, -\frac{z_0}{r_0^3} \right\},$$

其中 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. 从而得

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(-\frac{x_0}{r_0^3}\right)^2 + \left(-\frac{y_0}{r_0^3}\right)^2 + \left(-\frac{z_0}{r_0^3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{r_0^2},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{x}) = \frac{-\frac{x_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{x_0}{r_0},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{y}) = \frac{-\frac{y_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{y_0}{r_0},$$

$$\cos(\text{grad } u \hat{z}) = \frac{-\frac{z_0}{r_0^3}}{\frac{1}{r_0^2}} = -\frac{z_0}{r_0}.$$

3347. 求函数

$$u = x^2 + y^2 - z^2$$

在点 $A(\varepsilon, 0, 0)$ 及 $B(0, \varepsilon, 0)$ 二点的梯度之间的角度.

解 $\text{grad } u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = \{2x, 2y, -2z\}$. 若

以 $\text{grad } u_A$ 及 $\text{grad } u_B$ 分别表示在 A 点及 B 点的梯度, 则有

$$\text{grad } u_A = \{2\varepsilon, 0, 0\}, \quad \text{grad } u_B = \{0, 2\varepsilon, 0\}.$$

由于

$$\text{grad } u_A \cdot \text{grad } u_B = 2\varepsilon \cdot 0 + 0 \cdot 2\varepsilon + 0 \cdot 0 = 0,$$

故知

$$\text{grad } u_A \perp \text{grad } u_B,$$

即在点 A 及点 B 二点的梯度之间的夹角为

$$(\widehat{\text{grad } u_A}, \text{grad } u_B) = \frac{\pi}{2}.$$

3348⁺. 在点 $M(1, 2, 2)$ 处, 函数

$$u = x + y + z$$

的梯度之大小与函数

$$v = x + y + z + 0.001 \sin(10^6 \pi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$$

的梯度之大小相差若干?

解 $\text{grad } u = \{1, 1, 1\}$, $|\text{grad } u| = \sqrt{3}$.

令 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 + 1000\pi \frac{x}{r} \cos(10^6 \pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 1000\pi \frac{y}{r} \cos(10^6 \pi r),$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 1 + 1000\pi \frac{z}{r} \cos(10^6 \pi r).$$

在点 $M(1, 2, 2)$ 处,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1000\pi}{3} + 1 \approx \frac{1000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2000\pi}{3} + 1 \approx \frac{2000\pi}{3},$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2000\pi}{3} + 1 \approx \frac{2000\pi}{3},$$

$$|\text{grad } v| \approx 1000\pi \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$= 1000\pi.$$

于是, 两梯度之大小相差为

$$|\operatorname{grad} v| - |\operatorname{grad} u| \approx 1000\pi - \sqrt{3} \approx 3140.$$

3349. 证明: 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处函数

$$u = ax^2 + by^2 + cz^2$$

及

$$v = ax^2 + by^2 + cz^2 + 2mx + 2ny + 2pz$$

(a, b, c, m, n, p 为常数且 $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$) 二者的梯度之间的角度当点 M_0 无限远移时趋于零.

证 本题的题设条件“点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 无限远移”应理解为“ $x_0 \rightarrow \infty, y_0 \rightarrow \infty, z_0 \rightarrow \infty$ 同时成立” (此时 $\sqrt{(ax_0)^2 + (by_0)^2 + (cz_0)^2} \rightarrow +\infty$), 否则, 本题的结论不成立.

显见有

$$\operatorname{grad} u = \{2ax_0, 2by_0, 2cz_0\},$$

$$\operatorname{grad} v = \{2ax_0 + 2m, 2by_0 + 2n, 2cz_0 + 2p\}.$$

令 $\alpha = ax_0, \beta = by_0, \gamma = cz_0$;

$$\alpha_1 = ax_0 + m = \alpha + m, \beta_1 = by_0 + n = \beta + n, \gamma_1 = cz_0 + p = \gamma + p.$$

于是, $\operatorname{grad} u$ 与 $\operatorname{grad} v$ 的夹角 θ 满足

$$\cos\theta = \frac{\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}}$$

或

$$\begin{aligned} \sin^2\theta &= 1 - \cos^2\theta \\ &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) - (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(a\beta_1 - a_1\beta)^2 + (a\gamma_1 - a_1\gamma)^2 + (\beta\gamma_1 - \beta_1\gamma)^2}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)} \\
&= \frac{(na - m\beta)^2 + (pa - m\gamma)^2 + (p\beta - n\gamma)^2}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)}.
\end{aligned}$$

$\delta = \max(|ax_0|, |by_0|, |cz_0|)$
 $= \max(|a|, |\beta|, |\gamma|)$, 则
 $\delta \leq \sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \leq \sqrt{3}\delta$.

于是, 当 $\sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \rightarrow +\infty$ 时, $\delta \rightarrow +\infty$.

再令 $q = \max(|m|, |n|, |p|)$, 则下述不等式显然成立:

$$\begin{aligned}
0 \leq \sin^2 \theta &= \frac{(na - m\beta)^2 + (pa - m\gamma)^2 + (p\beta - n\gamma)^2}{(a^2 + \beta^2 + \gamma^2)(a_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)} \\
&\leq \frac{(2q\delta)^2 + (2q\delta)^2 + (2q\delta)^2}{\delta^2(\delta^2 - 6\delta q - 3q^2)} \\
&= \frac{12q^2}{\delta^2 - 6\delta q - 3q^2} \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \delta \rightarrow +\infty \text{ 时}).
\end{aligned}$$

于是, 当 $\sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \rightarrow +\infty$ 时, $\sin^2 \theta \rightarrow 0$, 即当 $\sqrt{a^2 + \beta^2 + \gamma^2} \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow 0$. 证毕.

3350. 设 $u = f(x, y, z)$ 为可微分两次的函数. 若 $\cos \alpha, \cos \beta,$

$\cos \gamma$ 为方向 l 的方向余弦, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\partial u}{\partial l} \right)$.

解
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cos \beta + \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cos \gamma) \cos \alpha \\
& + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} \cos \gamma \right) \cos \beta \\
& + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \cos \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos \gamma \right) \cos \gamma \\
& = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cos^2 \beta + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cos^2 \gamma \\
& + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cos \beta \\
& + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \cos \beta \cos \gamma + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \cos \gamma \cos \alpha.
\end{aligned}$$

3351. 设 $u = f(x, y, z)$ 为可微分两次的函数及

$$l_1 \{\cos \alpha_1, \cos \beta_1, \cos \gamma_1\}, l_2 \{\cos \alpha_2, \cos \beta_2, \cos \gamma_2\},$$

$$l_3 \{\cos \alpha_3, \cos \beta_3, \cos \gamma_3\}$$

为三个互相垂直的方向. 证明:

$$(a) \left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2;$$

$$(b) \frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

$$\text{证 (a) } \left(\frac{\partial u}{\partial l_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3} \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha_i + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta_i + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma_i \right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \beta_i \\
&\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \gamma_i \\
&\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \beta_i \\
&\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \cos \gamma_i \\
&\quad + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \gamma_i \cos \alpha_i. \tag{1}
\end{aligned}$$

由于 l_1, l_2, l_3 是互相垂直的三个单位矢量，故

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \beta_i &= 0, \quad \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \cos \gamma_i = 0, \\
\sum_{i=1}^3 \cos \gamma_i \cos \alpha_i &= 0, \\
\sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i &= 1, \quad \sum_{i=1}^3 \cos^2 \beta_i = 1, \\
\sum_{i=1}^3 \cos^2 \gamma_i &= 1. \tag{2}
\end{aligned}$$

将上述诸等式 (2) 代入 (1) 式，即得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2. \end{aligned}$$

(6) 利用3350题的结果, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial l_i^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \alpha_i \\ &+ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \beta_i + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos^2 \gamma_i \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \alpha_i \cos \beta_i \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \beta_i \cos \gamma_i \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \sum_{i=1}^3 \cos \gamma_i \cos \alpha_i. \end{aligned} \quad (3)$$

将诸等式(2)代入(3)式, 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3352. 设 $u = u(x, y)$ 为可微分的函数且当 $y = x^2$ 时有:

$$u(x, y) = 1$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x.$$

求当 $y = x^2$ 时的 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 $\frac{d}{dx}u(x, x^2) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}$.

当 $y = x^2$, $u(x, y) = u(x, x^2) = 1$, 故 $\frac{du(x, x^2)}{dx} = 0$,

且有 $\frac{\partial u}{\partial x} = x$, $\frac{dy}{dx} = 2x$. 将这些结果代入上式, 即得

$$x + 2x \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

于是, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2} (x \neq 0)$.

3353. 设函数 $u = u(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

以及下列条件:

$$u(x, 2x) = x, u'_x(x, 2x) = x^2.$$

求: $u''_{xx}(x, 2x)$, $u''_{xy}(x, 2x)$, $u''_{yy}(x, 2x)$.

解 由于 $u(x, 2x) = x$, 故

$$u'_x(x, 2x) + 2u'_y(x, 2x) = 1. \quad (1)$$

又因 $u'_x(x, 2x) = x^2$, 故由 (1) 式即得

$$u'_y(x, 2x) = \frac{1-x^2}{2}. \quad (2)$$

将(2)式两端对 x 求导数, 有

$$u''_{yx}(x, 2x) + 2u''_{yy}(x, 2x) = -x; \quad (3)$$

由 $u'_x(x, 2x) = x^2$ 两端对 x 求导数, 有

$$u''_{xx}(x, 2x) + 2u''_{xy}(x, 2x) = 2x. \quad (4)$$

联立(3)式和(4)式并利用题设条件 $u''_{xx} = u''_{yy}$, 解之

即得

$$u''_{xx}(x, 2x) = u''_{yy}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x,$$

$$u''_{xy}(x, 2x) = \frac{5}{3}x.$$

假定 $z = z(x, y)$, 解下列方程:

$$3354. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(y), \quad z = x\varphi(y) + \psi(y).$$

$$3355. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_1(x),$$

$$z = \int_0^x \varphi_1(t) dt + \psi(y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

3356. $\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = 0.$

解 $\frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} = \bar{\varphi}_{n-1}(x),$

$$\frac{\partial^{n-2} z}{\partial y^{n-2}} = y \bar{\varphi}_{n-1}(x) + \bar{\varphi}_{n-2}(x),$$

累次积分 n 次, 最后得

$$z = y^{n-1} \varphi_{n-1}(x) + y^{n-2} \varphi_{n-2}(x) + \dots + y \varphi_1(x) + \varphi_0(x).$$

3357. 假定 $u = u(x, y, z)$ 解方程

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = 0.$$

解 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi_1(x, y),$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_2(x, y) + \psi_1(x, z),$$

$$u = \varphi(x, y) + \psi(x, z) + \chi(y, z).$$

3358. 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$$

的满足条件 $z(x, x^2) = 1$ 的解 $z = z(x, y).$

解 由 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2y$ 得

$$z = x^2 y + y^2 + \varphi(x).$$

又因 $z(x, x^2) = 1$, 故

$$1 = x^4 + x^4 + \varphi(x),$$

从而有

$$\varphi(x) = 1 - 2x^4.$$

最后得

$$z = 1 + x^2 y + y^2 - 2x^4.$$

3359. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

的满足条件 $z(x, 0) = 1$, $z'_y(x, 0) = x$ 的解

$z = z(x, y)$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + \varphi(x).$$

又因 $z'_y(x, 0) = x$, 所以

$$x = 0 + \varphi(x) \text{ 或 } x = \varphi(x).$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x.$$

由此得

$$z = y^2 + xy + \varphi_1(x).$$

又因 $z(x, 0) = 1$, 故

$$1 = 0 + 0 + \varphi_1(x) \text{ 或 } 1 = \varphi_1(x).$$

最后得

$$z = 1 + xy + y^2.$$

3360. 求方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$$

的满足条件 $z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$ 的解 $z = z(x, y)$.

解 由 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x + y$ 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi_1(x),$$

$$z = \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \varphi(x) + \psi(y).$$

现确定 $\varphi(x)$ 及 $\psi(y)$. 由于 $z(x, 0) = x, z(0, y) = y^2$, 故有

$$x = \varphi(x) + \psi(0),$$

$$y^2 = \varphi(0) + \psi(y),$$

于是,

$$z = x + y^2 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 - [\varphi(0) + \psi(0)].$$

又因 $z(0, 0) = 0$, 故 $\varphi(0) + \psi(0) = 0$. 最后得

$$z = x + y^2 + \frac{1}{2}xy(x + y).$$

§3. 隐函数的微分法

1° 存在定理 设: 1) 函数 $F(x, y, z)$ 在某点 $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 等于零; 2) $F(x, y, z)$ 和 $F'_z(x, y, z)$ 在点 \hat{A}_0 的邻域内有定义并且是连续的; 3) $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, 则在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的某充分小的邻域内存在唯一的连续函数

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

满足方程 $F(x, y, z) = 0$

而且是 $z_0 = f(x_0, y_0)$.

2° 隐函数的可微分性 设除了上面的条件外, 4) 如果函数 $F(x, y, z)$ 在点 $\hat{A}_0(x_0, y_0, z_0)$ 的邻域内可微分, 则函数 (1) 在点 $A_0(x_0, y_0)$ 的邻域内也可微分并且它的导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 可从方程

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

求得. 若函数 $F(x, y, z)$ 可微分任意多次, 则用逐次微分方程 (2) 的方法也可计算函数 z 的高阶导函数.

3° 由方程组定义的隐函数 设函数 $F_i(x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$ ($i=1, 2, \dots, n$) 满足下列条件:

(1) 于点 $\hat{A}_0(x_{10}, \dots, x_{m0}; y_{10}, \dots, y_{n0})$ 变成为零;

(2) 在点 \hat{A}_0 的邻域内可微分;

(3) 在点 \hat{A}_0 函数行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \neq 0$.

在这种情况下，方程组

$$F_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

在点 $A_0(x_{10}, \dots, x_{n0})$ 的邻域内唯一地确定出一组可微分的函数：

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

这些方程满足方程 (3) 及原始条件

$$f_i(x_{10}, \dots, x_{n0}) = y_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

这些隐函数的微分可由方程组

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial x_j} dx_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial y_i} dy_i = 0$$

($i=1, 2, \dots, n$)^{*} 求得。

3361. 证明：在每一点都不连续的迪里黑里函数

$$y = \begin{cases} 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数;} \\ 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数} \end{cases}$$

满足方程

$$y^2 - y = 0.$$

证 当 x 为有理数时， $y^2 - y = 1 - 1 = 0$ ；当 x 为无理数时， $y^2 - y = 0 - 0 = 0$ 。因此，不论 x 为任何实数 x ，均有

$$y^2 - y = 0.$$

3362. 设函数 $f(x)$ 定义于区间 (a, b) 内。问在怎样的情况下方程

$$f(x)y = 0$$

* 这一段在简明陈述大多数的问题时无条件地假定隐函数和它们的对应导函数存在的条件满足。

当 $a < x < b$ 时才有唯一连续的解 $y = 0$?

解 函数 $f(x)$ 的非零点的集合在区间 (a, b) 内是处处稠密的, 即 $f(x)$ 的零点的集合不能充满区间 (a, b) 的任意一个子区间 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$. 此时, 方程 $f(x)y = 0$ 有唯一连续的解 $y = 0$. 事实上, 设 $y = y(x)$ 为方程 $f(x)y = 0$ 的一个连续解, $x_0 \in (a, b)$, 则

(1) 当 $f(x_0) \neq 0$ 时, 显然有 $y(x_0) = 0$;

(2) 当 $f(x_0) = 0$ 时, 由 $f(x)$ 的非零点的稠密性知: 存在数列 $\{x_n\}$, 满足 $x_n \rightarrow x_0$ 及 $f(x_n) \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$). 于是, $y(x_n) = 0$. 由 $y(x)$ 的连续性即得

$$y(x_0) = y(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n) = 0.$$

于是, 当 $a < x < b$ 时, $y \equiv 0$.

反之, 若方程 $f(x)y = 0$ 在 (a, b) 只有唯一的连续解 $y = 0$, 则 $f(x)$ 的零点集必不能充满 (a, b) 的任何子区间. 事实上, 设在 (a, b) 的某子区间 (α, β) 上 $f(x) \equiv 0$. 定义 (a, b) 上的函数 $y_0(x)$ 如下:

$$y_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } a < x < a + \frac{\beta - \alpha}{4} \text{ 时;} \\ -\frac{4}{\beta - \alpha} \left(x - a - \frac{\beta - \alpha}{4} \right), & \\ \quad \text{当 } a + \frac{\beta - \alpha}{4} \leq x < a + \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ 时;} \\ -\frac{4}{\beta - \alpha} \left[x - a - \frac{3(\beta - \alpha)}{4} \right], & \\ \quad \text{当 } a + \frac{\beta - \alpha}{2} \leq x \leq a + \frac{3}{4}(\beta - \alpha) \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } a + \frac{3}{4}(\beta - \alpha) < x < b \text{ 时.} \end{cases}$$

如图6·27所示, 图中 $c_1 = a + \frac{\beta - a}{4}$, $c_0 = a + \frac{\beta - a}{2}$, $c_2 = a + \frac{3(\beta - a)}{4}$.

显然 $y_0(x) \neq 0$, 但 $y = y_0(x)$ 是方程 $f(x)y = 0$ 在 (a, b) 上的一个连续解.

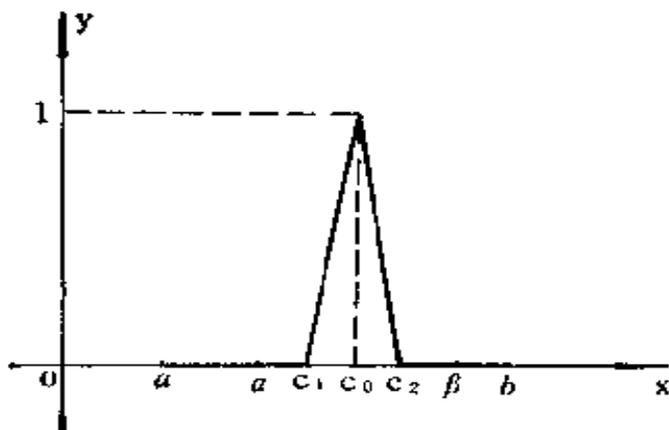


图 6·27

3363. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 于区间 (a, b) 内有定义且连续. 问在怎样的情况下, 方程

$$f(x)y = g(x)$$

于区间 (a, b) 内才有唯一连续的解.

解 下面三个条件显然是必要的:

(1) $f(x)$ 的零点必须是 $g(x)$ 的零点, 否则 y 无解;

(2) $f(x)$ 的非零点集合必须在 (a, b) 内稠密. 否则, 存在 $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, 当 $x \in (\alpha, \beta)$ 时, 恒有 $f(x) = g(x) = 0$. 从而当 $x \in (\alpha, \beta)$ 时, 任意改变原方程

一个连续解 $y(x)$ 的函数值 (但保持连续性) 就得出原方程的另一个连续解 (参看3362题的图), 此与原方程连续解的唯一性矛盾.

(3) 如果 $f(x_0) = 0$, 则对任一点列 $x_n \rightarrow x_0$, $f(x_n) \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 均有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n)}{f(x_n)} = y_0 \quad (y_0 \text{ 是有限数且只与 } x_0 \text{ 有关}).$$

显然, 如果上述极限不存在或对不同的序列取不同的值均导致 y 不连续.

反之, 若上述三个条件满足, 我们证明原方程的连续解存在唯一. 事实上, 这时令

$$y_0(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{f(x)}, & \text{在 } f(x) \neq 0 \text{ 的点;} \\ \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ x_n \rightarrow x, f(x_n) \neq 0}} \frac{g(x_n)}{f(x_n)}, & \text{在 } f(x) = 0 \text{ 的点, 这里任取} \\ & x_n \rightarrow x, f(x_n) \neq 0 (n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

易知 $y_0(x)$ 是 (a, b) 内的连续函数且满足原方程, 即是原方程的一个连续解. 现若原方程在 (a, b) 内还有一连续解 $y = y_1(x)$, 则

$$f(x)y_1(x) = g(x), f(x)y_0(x) = g(x) \quad (a < x < b).$$

对任何 $x_0 \in (a, b)$, 若 $f(x_0) \neq 0$, 则 $y_1(x_0) = \frac{g(x_0)}{f(x_0)} = y_0(x_0)$; 若 $f(x_0) = 0$, 取 $x_n \rightarrow x_0, f(x_n) \neq 0 (n = 1, 2, \dots)$, 则根据 $y_1(x)$ 的连续性, 得

$$y_1(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(x_n)}{f(x_n)} = y_0(x_0).$$

于是, $y_1(x) \equiv y_0(x)$ ($a < x < b$). 唯一性获证.

3364. 设已知方程

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1)$$

及

$$y = y(x) \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (2)$$

为满足方程(1)的单值函数.

1) 问有多少单值函数(2)满足方程(1)?

2) 问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

3) 设: (a) $y(0) = 1$; (b) $y(1) = 0$, 问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

解 1) 无限个. 例如, 令

$$y_n(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{当 } -1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq \frac{1}{n} \text{ 时;} \\ -\sqrt{1-x^2}, & \text{当 } x = \frac{1}{n} \text{ 时} \end{cases}$$

$$(n=1, 2, 3, \dots),$$

则显然 $y = y_n(x)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) 都是满足方程(1)的单值函数.

2) 二个: $y = -\sqrt{1-x^2}$ 及 $y = \sqrt{1-x^2}$.

3) (a) 满足条件 $y(0) = 1$ 的仅 $y = \sqrt{1-x^2}$ 这一个连续函数; (b) 满足条件 $y(1) = 0$ 的有 $y = -\sqrt{1-x^2}$ 及 $y = \sqrt{1-x^2}$ 这二个连续函数.

3365. 设已知方程

$$x^2 = y^2 \quad (1)$$

及

$$y = y(x) \quad (-\infty < x < +\infty) \quad (2)$$

是满足方程(1)的单值函数.

1) 问有多少单值函数(2)满足方程(1)?

2) 问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

3) 问有多少单值可微分的函数(2)满足方程(1)?

4) 设: (a) $y(1)=1$; (b) $y(0)=0$, 问有多少单值连续函数(2)满足方程(1)?

5) 设 $y(1)=1$ 及 δ 为充分小的数, 问有多少单值连续函数 $y=y(x)$ ($1-\delta < x < 1+\delta$) 满足方程(1)?

解 1) 无限个. 例如, $y_n(x) = \begin{cases} |x|, & x \neq \frac{1}{n}; \\ -|x|, & x = \frac{1}{n}, \end{cases}$

($n=1, 2, \dots$) 都是.

2) 四个: $y=-x$, $y=x$, $y=|x|$ 和 $y=-|x|$.

3) 二个: $y=-x$ 和 $y=x$.

4) (a) 二个: $y=x$ 和 $y=|x|$; (b) 四个: 即 2) 中之四个.

5) 一个: $y=x$.

3366⁺. 方程

$$x^2 + y^2 = x^4 + y^4$$

是定义 y 为 x 的多值函数. 问这个函数在怎样的域内, 1) 单值, 2) 有二个值, 3) 有三个值, 4) 有四个值? 求此函数的各枝点及它的单值连续的各枝.

解 由 $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$ 得 $y^4 - y^2 + (x^4 - x^2) = 0$.

解之, 得 $y^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}$. 一共有单值连续

的六支，其中当 $\frac{1}{4} + x^2 - x^4 \geq 0$ 即 $|x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$

时有二支：

$$y_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}, \quad |x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}},$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}, \quad |x| \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}.$$

而当 $0 \leq \frac{1}{4} + x^2 - x^4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 即 $1 \leq x^2 \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ 时

有四支：

$$y_3 = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_4 = \sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}, \quad -\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \leq x \leq -1;$$

$$y_5 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}}, \quad 1 \leq x \leq \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}};$$

$$y_6 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + x^2 - x^4}},$$

$$-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} \leq x \leq -1.$$

此外还有一个孤立点 $(0,0)$ (参看 1542 题的图形)。考虑上述六支的公共定义域知：

1) 没有单值区域。

2) 双值区域为 $0 < |x| < 1$ 及 $x = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$ 。

3) 三值区域为 $x=0$ 及 $x=\pm 1$.

4) 四值区域为 $1 < |x| < \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

枝点的必要条件为

$$(y^4 - y^2 + (x^4 - x^2))'_y = 0,$$

即

$$4y^3 - 2y = 0.$$

于是,

$$y = 0 \text{ 及 } y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

由 $y=0$ 解得 $x=0$ 及 $x=\pm 1$; 而由 $y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ 解得

$x = \pm \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$. 经验证, 得六个枝点:

$$(-1, 0), (1, 0), \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

3367. 求由方程

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

所定义的多值函数 y 的各枝点和单值连续的各枝 $y = y(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$).

解 由 $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$ 得

$$y^2 = \frac{-(1+2x^2) \pm \sqrt{8x^2+1}}{2}.$$

因为当 $|x| \leq 1$ 时, $\sqrt{8x^2+1} \geq 1+2x^2$, 故单值连续
的各枝为 (共有四枝)

$$y = \varepsilon(x) \sqrt{\frac{\sqrt{8x^2+1} - (1+2x^2)}{2}} \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

其中 $\varepsilon(x)$ 分别为 $1, -1, \operatorname{sgn} x, -\operatorname{sgn} x$.

下面再求枝点:

$$\left[(x^2 + y^2)^2 - x^2 + y^2 \right]_y' = 2(x^2 + y^2) \cdot 2y + 2y = 0,$$

解之得 $y = 0$, 从而得 $x = 0$ 及 $x = \pm 1$. 经验证得枝
点为

$$(0, 0), (1, 0) \text{ 及 } (-1, 0).$$

3368. 设函数 $f(x)$ 当 $a < x < b$ 时连续, 并且函数 $\varphi(y)$ 当
 $c < y < d$ 时单调增加而且连续. 问在怎样的条件下
方程

$$\varphi(y) = f(x)$$

定义出单值函数

$$y = \varphi^{-1}[f(x)]?$$

研究例子: (a) $\sin y + \operatorname{sh} y = x$; (b) $e^{-y} = -\sin^2 x$.

解 根据 $\varphi(y)$ 的严格增加性以及 $\varphi(y)$ 、 $f(x)$ 的连续
性可知, 若存在 (x_0, y_0) 满足 $\varphi(y_0) = f(x_0)$, 则在 x_0 近
旁由方程 $\varphi(y) = f(x)$ 可唯一地确定 y 为 x 的单值连
续函数

$$y = \varphi^{-1}[f(x)] \quad (\text{满足 } y_0 = \varphi^{-1}[f(x_0)]); \quad (1)$$

若更设满足不等式

$$\lim_{y \rightarrow c+0} \varphi(y) < f(x) < \lim_{y \rightarrow d-0} \varphi(y) \quad (a < x < b), \quad (2)$$

则显然函数(1)是整个 $a < x < b$ 上定义的连续函数.

$$(a) \text{ 设 } \varphi(y) = \sin y + \operatorname{sh} y \quad (-\infty < y < +\infty),$$

$f(x)=x$ ($-\infty < x < +\infty$). 由于 $\varphi'(y)=\cos y + \operatorname{ch} y > 0$ ($-\infty < y < +\infty$), 故 $\varphi(y)$ 是 $-\infty < y < +\infty$ 上的严格增函数, 又显然有

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \varphi(y) = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \varphi(y) = +\infty,$$

故不等式(2)满足. 于是, 由方程 $\sin y + \operatorname{sh} y = x$ 唯一确定 y 为 x 的连续函数, 它定义在整个数轴: $-\infty < x < +\infty$ 上.

(6) $\varphi(y)=e^{-y}$ 及 $f(x)=-\sin^2 x$ 虽然也满足题设条件, 但此方程是矛盾的 ($e^{-y} > 0, -\sin^2 x \leq 0$), 即不存在点 (x_0, y_0) , 使有 $e^{-y_0} = -\sin^2 x_0$. 因此, 不能定义 y 为 x 的单值函数.

3369. 设:

$$x = y + \varphi(y), \quad (1)$$

其中 $\varphi(0)=0$ 且当 $-a < y < a$ 时 $\varphi'(y)$ 连续并满足 $|\varphi'(y)| \leq k < 1$. 证明: 当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时存在唯一的可微分函数 $y=y(x)$ 满足方程(1)且 $y(0)=0$.

证 设 $F(x, y) = x - y - \varphi(y)$, 则

1) 由于 $\varphi(0)=0$, 故 $F(0, 0)=0$;

2) 当 $-\infty < x < +\infty, -a < y < a$ 时, $F(x, y), F'_x(x, y)$ 及 $F'_y(x, y) = -1 - \varphi'(y)$ 均连续;

3) $F'_y(0, 0) = -1 - \varphi'(0) < 0$, 当然 $F'_y(0, 0) \neq 0$.

于是, 由隐函数的存在及可微性定理知: 存在 $\varepsilon > 0$, 使当 $-\varepsilon < x < \varepsilon$ 时, 存在唯一的可微分函数 $y=y(x)$ 满足方程 $x = y + \varphi(y)$ 及 $y(0)=0$.

3370. 设 $y=y(x)$ 为由方程

$$x = ky + \varphi(y)$$

所定义的隐函数，其中常数 $k \neq 0$ 且 $\varphi(y)$ 为以 ω 为周期的可微周期函数，且 $|\varphi'(y)| \leq |k|$ 。证明

$$y = \frac{x}{k} + \psi(x),$$

其中 $\psi(x)$ 为以 $|k|\omega$ 为周期的周期函数。

证 由于 $x = ky + \varphi(y)$ ，故 $\frac{dx}{dy} = k + \varphi'(y)$ 。又因

$|\varphi'(y)| \leq |k|$ ，故 $\frac{dx}{dy}$ 与 k 同号，即 x 为 y 的严格

单调函数，且为连续的。由于 $\varphi(y)$ 是连续的以 ω 为周期的函数，故有界，从而当 $k > 0$ 时，

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} x = -\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} x = +\infty;$$

当 $k < 0$ 时，

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} x = +\infty, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} x = -\infty;$$

由此可知，其反函数 $y = y(x)$ 存在唯一，且是 $-\infty < x < +\infty$ 上有定义严格单调可微函数。令

$$y(x) - \frac{x}{k} = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty), \quad (1)$$

则由 $x = ky(x) + \varphi[y(x)]$ ， $\varphi[y(x) + \omega] = \varphi[y(x)]$ 知 $x + k\omega = ky(x) + \varphi[y(x)] + k\omega = k[y(x) + \omega] + \varphi[y(x) + \omega]$ 。从而，根据反函数的唯一性，得

$$y(x + k\omega) = y(x) + \omega \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (2)$$

由 (1) 式与 (2) 式，得

$$\psi(x + k\omega) = y(x + k\omega) - \frac{x + k\omega}{k} = y(x) - \frac{x}{k}$$

$$= \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty).$$

同理可证

$$\psi(x - k\omega) = \psi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

故 $\psi(x)$ 是以 $|k|\omega$ 为周期的可微周期函数. 由(1)得

$$y = y(x) = \frac{1}{k}x + \psi(x).$$

证毕.

对于由下列各方程式所定义的函数 y , 求出 y' 和 y'' :

3371. $x^2 + 2xy - y^2 = a^2.$

解 用求导数及微分两种方法解之.

解法一

等式两端分别对 x 求导数, 得

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' = 0,$$

故有

$$y' = \frac{y+x}{y-x}.$$

再对上式求导数, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(y-x)(y'+1) - (y+x)(y'-1)}{(y-x)^2} \\ &= \frac{2y - 2xy'}{(y-x)^2} = \frac{2y(y-x) - 2x(y+x)}{(y-x)^3} \\ &= \frac{2(y^2 - 2xy - x^2)}{(y-x)^3} = -\frac{2a^2}{(y-x)^3} = \frac{2a^2}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

解法二

等式两端分别微分，得

$$2xdx + 2xdy + 2ydx - 2ydy = 0, \quad (1)$$

故有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}.$$

对(1)式两端再微分一次，并注意 $d^2x = 0$ ，得

$$dx^2 + 2dxdy - dy^2 + (x-y)d^2y = 0,$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1 + 2\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y-x} = \frac{1 + \frac{2(y+x)}{y-x} - \left(\frac{y+x}{y-x}\right)^2}{y-x} \\ &= \frac{2x^2}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

3372. $\ln\sqrt{x^2+y^2} = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}.$

解 解法一

等式两端对 x 求导数，得

$$\frac{x+yy'}{x^2+y^2} = \frac{xy'-y}{x^2+y^2}.$$

解之即得

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

将上式再对 x 求导数，得

$$y'' = \frac{(x-y)(1+y') - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(xy' - y)}{(x-y)^2} \\
&= \frac{2x(x+y) - 2y(x-y)}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

解法二

等式两端分别微分，得

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

解之即得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}.$$

对 $x dx + y dy = x dy - y dx$ 再微分一次，得

$$dx^2 + dy^2 + y d^2 y = x dy^2,$$

故有

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{1}{x-y} \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] \\
&= \frac{(x-y)^2 + (x+y)^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x-y)^3}.
\end{aligned}$$

以下各题根据情况采用直接求导法或微分法。

3373. $y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 < \varepsilon < 1).$

解 等式两端对 x 求导数，得

$$y' - \varepsilon y' \cos y = 1,$$

故有

$$y' = \frac{1}{1 - \varepsilon \cos y}$$

将上式再对 x 求导数, 得

$$y'' = -\frac{\varepsilon y' \sin y}{(1 - \varepsilon \cos y)^2} = -\frac{\varepsilon \sin y}{(1 - \varepsilon \cos y)^3}.$$

3374. $x^x = y^y$ ($x \neq y$).

解 取对数得

$$y \ln x = x \ln y \text{ 或 } \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y} \quad (x > 0, y > 0).$$

两端对 x 求导数, 得

$$\frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{y'(1 - \ln y)}{y^2},$$

故有

$$y' = \frac{y^2(1 - \ln x)}{x^2(1 - \ln y)}.$$

将上式再对 x 求导数, 得

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{1}{x^4(1 - \ln y)^2} \left\{ x^2(1 - \ln y) \left[2yy'(1 - \ln x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{y^2}{x} \right] - y^2(1 - \ln x) \left[2x - 2x \ln y - \frac{x^2 y'}{y} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{x^4(1 - \ln y)^3} \left\{ y^2 \left[y(1 - \ln x)^2 - 2(x - y) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cdot (1 - \ln x)(1 - \ln y) - x(1 - \ln y)^2 \right] \right\}. \end{aligned}$$

3375. $y = 2x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

解 $\frac{y}{x} = 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, 显然 $\frac{y}{x} \neq 1$.

两端微分, 得

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{2d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

于是, $d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$, 即 $\frac{x dy - y dx}{x^2} = 0$, 故有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

将上式对 x 求导数, 即得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} = 0.$$

3376. 证明: 当

$$1 + xy = k(x - y)$$

(式中 k 为常数) 时, 有等式

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

证 将等式 $1 + xy = k(x - y)$ 两端微分, 得

$$x dy + y dx = k(dx - dy),$$

故

$$\begin{aligned} (x - y)(x dy + y dx) &= k(x - y)(dx - dy) \\ &= (1 + xy)(dx - dy), \end{aligned}$$

简化即得

$$\frac{dx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}.$$

证毕.

3377. 证明: 若

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0,$$

则当 $xy > 0$ 时有等式

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

证 将所给等式两端微分, 得

$$2xy^2dx + 2x^2ydy + 2xdx + 2ydy = 0,$$

即

$$x(y^2+1)dx + y(x^2+1)dy = 0. \quad (1)$$

由 $x^2y^2 + x^2 + y^2 - 1 = 0$ 可解得

$$x = \pm \sqrt{\frac{1-y^2}{1+y^2}}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}. \quad (2)$$

因为 $xy > 0$, 故知 x, y 应同取正号或同取负号. 不论取什么符号, 当用(2)式代入(1)式后, 均可得

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = 0.$$

3378. 证明: 方程

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a \neq 0)$$

在点 $x=0, y=0$ 的邻域中定义两个可微分的函数:
 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$. 求 $y'_1(0)$ 及 $y'_2(0)$.

解 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 即

$$y^4 + (2x^2 + a^2)y^2 - (a^2x^2 - x^4) = 0.$$

解之得

$$y^2 = \frac{-(2x^2 + a^2) + \sqrt{8a^2x^2 + a^4}}{2}$$

(根号前取正号是由于 $y^2 \geq 0$)。记

$$y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2 + a^4} - 2x^2 - a^2}{2}} = \pm f(x^2).$$

不难看出 $(0, 0)$ 为枝点。从点 $(0, 0)$ 出发，有单值连续的四个分枝：

$$y_{\text{I}} = f(x^2), \quad 0 \leq x \leq \delta;$$

$$y_{\text{II}} = f(x^2), \quad -\delta \leq x \leq 0;$$

$$y_{\text{III}} = -f(x^2), \quad 0 \leq x \leq \delta;$$

$$y_{\text{IV}} = -f(x^2), \quad -\delta \leq x \leq 0.$$

这几个单值分枝能否组成 $(-\delta, \delta)$ 上的可微分函数，主要是看组成的函数在 $x=0$ 是否可微。为此，研究各分枝在点 $x=0$ 处的单侧导数。

$$\begin{aligned} y'_{\text{I}+}(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{y_{\text{I}}(x) - y_{\text{I}}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x^2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2 + a^4} - 2x^2 - a^2}{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{\sqrt{8a^2x^2 + a^4} - 2x^2 - a^2}{2x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{8a^2x^2 + a^4 - (2x^2 + a^2)^2}{2x^2(\sqrt{8a^2x^2 + a^4} + 2x^2 + a^2)}} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \sqrt{\frac{4a^2 - 4x^2}{2(\sqrt{8a^2x^2 + a^4} + 2x^2 + a^2)}} = 1.$$

同法可得

$$y'_{\text{I}^-}(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f(x^2)}{x} = -1,$$

$$y'_{\text{II}^+}(0) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-f(x^2)}{x} = -1,$$

$$y'_{\text{IV}^-}(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{-f(x^2)}{x} = 1.$$

由上可以看出

$$y_1(x) = \begin{cases} f(x^2), & 0 \leq x < \delta, \\ -f(x^2), & -\delta < x < 0, \end{cases}$$

及

$$y_2(x) = \begin{cases} -f(x^2), & 0 \leq x < \delta, \\ f(x^2), & -\delta < x < 0 \end{cases}$$

是仅有的两个过点 $(0, 0)$ 的可微分函数, 且 $y'_1(0) = 1$ 及 $y'_2(0) = -1$.

*) 此方程的图象系双纽线 (图 6·28), 它的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta.$$

以上作法及结论由图很容易看

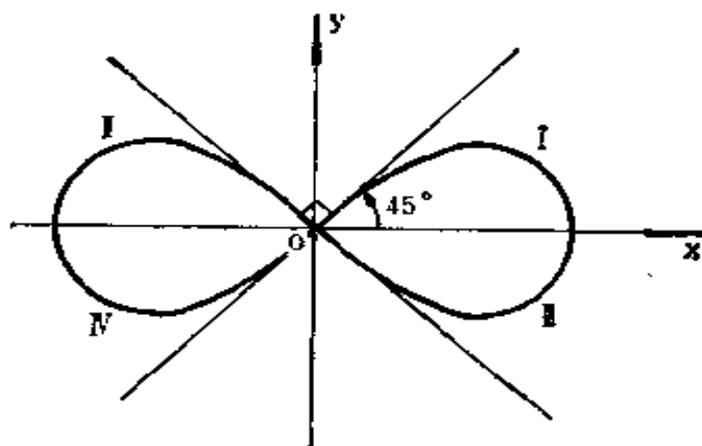


图 6·28

出.

3379. 设:

$$(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3,$$

求 y' 当 $x=0$ 和 $y=0$ 时的值.

解 本题讨论方法与 3378 题类似, 但由于不能直接解出 $y=f(x)$, 故只能用隐函数表示. 由 $(x^2 + y^2)^2 = 3x^2y - y^3$ 得

$$x^4 + (2y^2 - 3y)x^2 + y^4 + y^3 = 0.$$

解之得

$$x^2 = \frac{(3y - 2y^2) \pm \sqrt{9y^2 - 16y^3}}{2}.$$

令

$$g(y) = \frac{3y - 2y^2 + \sqrt{9y^2 - 16y^3}}{2},$$

$$h(y) = \frac{3y - 2y^2 - \sqrt{9y^2 - 16y^3}}{2},$$

则不难验证: 在 $y=0$ 的邻域内均有 $g(y) \geq 0$, 而仅当 $y \geq 0$ 时才有 $h(y) \geq 0$. 于是, 点 $(0, 0)$ 为枝点, 且从该点出发, 有六个单值连续枝:

I. $x_1 = \sqrt{g(y)}$, $0 \leq y < \varepsilon$; 它在 $0 \leq x < \delta$ 上定义隐函数 $y = f_1(x)$.

II. $x_2 = -\sqrt{g(y)}$, $0 \leq y < \varepsilon$; 它在 $-\delta < x \leq 0$ 上定义隐函数 $y = f_2(x)$.

III. $x_3 = \sqrt{h(y)}$, $-\varepsilon < y \leq 0$; 它在 $0 \leq x < \delta$ 上定义隐函数 $y = f_3(x)$.

IV. $x_4 = -\sqrt{h(y)}$, $-\varepsilon < y \leq 0$; 它在 $-\delta < x \leq 0$

上定义隐函数 $y=f_4(x)$.

V. $x_5=\sqrt{h(y)}$, $0\leq y<\varepsilon$; 它在 $0\leq x<\delta$ 上定义隐函数 $y=f_5(x)$.

VI. $x_6=-\sqrt{h(y)}$, $0\leq y<\varepsilon$; 它在 $-\delta<x\leq 0$ 上定义隐函数 $y=f_6(x)$.

上述隐函数的存在性, 易从对右端 y 的表达式求导数而导数不为零获证. 因此, 只要求上述六枝在原点的单侧导数.

$$f'_{1+}(0)=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x-0}=\lim_{y\rightarrow 0^+}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{y\rightarrow 0^+}\sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3}}}$$

$$=\lim_{y\rightarrow 0^+}\sqrt{\frac{2y}{3-2y+\sqrt{9-16y}}}=0.$$

$$f'_{2-}(0)=\lim_{x\rightarrow 0^-}\frac{f_2(x)-f_2(0)}{x-0}=\lim_{y\rightarrow 0^+}\frac{y}{-\sqrt{g(y)}}=0.$$

$$f'_{3+}(0)=\lim_{x\rightarrow 0^+}\frac{f_3(x)-f_3(0)}{x-0}=\lim_{z\rightarrow 0^+}\frac{y}{\sqrt{g(y)}}$$

$$=\lim_{z\rightarrow 0^+}\frac{-z}{\sqrt{g(-z)}}$$

$$=-\lim_{z\rightarrow 0^+}\sqrt{\frac{2z^2}{\sqrt{9z^2+16z^3}-3z-2z^2}}$$

$$=-\lim_{z\rightarrow 0^+}\sqrt{\frac{2z^2(\sqrt{9z^2+16z^3}+3z+2z^2)}{(9z^2+16z^3)-(3z+2z^2)^2}}$$

$$= -\lim_{z \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2(\sqrt{9+16z}+3+2z)}{4-4z}} = -\sqrt{3}.$$

$$\begin{aligned} f'_{4-}(0) &= \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f_4(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow -0} \frac{y}{-\sqrt{g(y)}} \\ &= -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_{5+}(0) &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f_5(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{y}{\sqrt{h(y)}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2y^2}{3y-2y^2-\sqrt{9y^2-16y^3}}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2y^2(3y-2y^2+\sqrt{9y^2-16y^3})}{(3y-2y^2)^2-(9y^2-16y^3)}} \\ &= \lim_{y \rightarrow +0} \sqrt{\frac{2(3-2y+\sqrt{9-16y})}{4+4y}} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$f'_{6-}(0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{f_6(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow -0} \frac{y}{-\sqrt{h(y)}} = -\sqrt{3}.$$

于是, 上述六个单值连续枝可组成三个 $(-\delta, \delta)$ 上的可微函数 $y = y_i(x)$ ($i=1, 2, 3$):

$$y_1(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \geq 0 \\ f_2(x), & x < 0 \end{cases}, \quad y'_1(0) = 0;$$

$$y_2(x) = \begin{cases} f_3(x), & x \geq 0 \\ f_6(x), & x < 0 \end{cases}, \quad y'_2(0) = -\sqrt{3};$$

$$y_3(x) = \begin{cases} f_5(x), & x \geq 0 \\ f_4(x), & x < 0 \end{cases}, \quad y'_3(0) = \sqrt{3}.$$

*) 此方程的图象为三瓣玫瑰线 (图 6·29), 它的极坐标方程为

$$r = a \sin 3\theta.$$

以上作法及结论, 由图很容易看出.

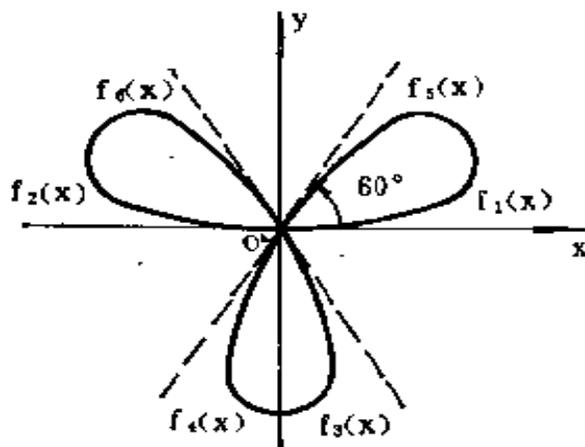


图 6·29

3380. 设 $x^2 + xy + y^2 = 3$,
求 y' , y'' 及 y''' .

解 等式两端对 x 求导数, 得

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0.$$

于是,

$$y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

再对上式求导数, 得

$$y'' = -\frac{1}{(x + 2y)^2} \left\{ (2 + y')(x + 2y) - (1 + 2y')(2x + y) \right\} = -\frac{18}{(x + 2y)^3};$$

$$y''' = \frac{54}{(x + 2y)^4} (1 + 2y') = -\frac{162x}{(x + 2y)^5}.$$

3381. 设:

$$x^2 - xy + 2y^2 + x - y - 1 = 0,$$

求 y' , y'' 及 y''' 当 $x = 0$, $y = 1$ 时的值.

解 等式两端对 x 求导数, 得

$$2x - y - xy' + 4yy' + 1 - y' = 0. \quad (1)$$

以 $x=0$, $y=1$ 代入(1)式, 得

$$y' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = 0.$$

将(1)式再对 x 求导数, 得

$$2 - y' - y' - xy'' + 4y'^2 + 4yy'' - y'' = 0. \quad (2)$$

以 $x=0$, $y=1$, $y'=0$ 代入(2)式, 得

$$y'' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{2}{3}.$$

将(2)式再对 x 求导数, 得

$$-3y'' - xy''' + 12y'y'' + 4yy''' - y''' = 0. \quad (3)$$

以 $x=0$, $y=1$, $y'=0$, $y''=-\frac{2}{3}$ 代入(3)式, 得

$$y''' \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} = -\frac{2}{3}.$$

3382. 证明: 对于二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

等式

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0$$

为真.

证 原题中的二次曲线应是非退化的, 即

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} \neq 0,$$

由 $\Delta \neq 0$ 保证 $y'' \neq 0$.

等式两端对 x 求导数, 得

$$2ax + 2by + 2bxy' + 2cyy' + 2d + 2ey' = 0. \quad (1)$$

于是,

$$y' = -\frac{ax + by + d}{bx + cy + e}.$$

(1) 式除以 2 后, 两端再对 x 求导数, 得

$$a + 2by' + cy'^2 + (bx + cy + e)y'' = 0.$$

于是,

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{a + 2by' + cy'^2}{bx + cy + e} = -\frac{1}{(bx + cy + e)^3} \\ &\quad \cdot \{a(bx + cy + e)^2 - 2b(bx + cy + e)(ax + by + d) \\ &\quad + c(ax + by + d)^2\} \\ &= \frac{\Delta}{(bx + cy + e)^3}, \\ (y'')^{-\frac{2}{3}} &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot (bx + cy + e)^2 \\ &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot [b^2x^2 + c(cy^2 + 2bxy + 2ey) + e^2 + 2bex] \\ &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot [b^2x^2 - c(ax^2 + 2dx + f) + 2bex + e^2] \\ &= \Delta^{-\frac{2}{3}} \cdot [(b^2 - ac)x^2 + 2(be - cd)x + e^2 - cf], \end{aligned}$$

即 $(y'')^{-\frac{2}{3}}$ 是关于 x 的二次三项式, 故

$$\frac{d^3}{dx^3} \left[(y'')^{-\frac{2}{3}} \right] = 0.$$

对于函数 $z = z(x, y)$ 求一阶和二阶的偏导函数, 设:

3383. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

解 等式两端微分, 得

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0, \quad (1)$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + zd^2z = 0, \quad (2)$$

由 (1) 得

$$dz = -\frac{x}{z}dx - \frac{y}{z}dy,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{z}.$$

由 (2) 得

$$\begin{aligned} d^2z &= -\frac{1}{z}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ &= -\frac{1}{z}dx^2 - \frac{1}{z}dy^2 - \frac{1}{z}\left(\frac{x}{z}dx + \frac{y}{z}dy\right)^2 \\ &= -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)dx^2 - \frac{2xy}{z^3}dxdy - \frac{1}{z}\left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right)dy^2, \end{aligned}$$

故有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right) = -\frac{z^2 + x^2}{z^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{xy}{z^3}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{z^2 + y^2}{z^3}.$$

3384. $z^3 - 3xyz = a^3$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} - 3yz - 3xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yz}{z^2 - xy}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xz}{z^2 - xy}.$$

(1) 式除以 3 后再分别对 x 及对 y 求偏导函数, 得

$$2z \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + z^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2y \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\left(2z \frac{\partial z}{\partial y} - x \right) \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - xy) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

$$- z - y \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入上述两式, 化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = - \frac{2xy^3z}{(z^2 - xy)^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{z(z^4 - 2xyz^2 - x^2y^2)}{(z^2 - xy)^3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = - \frac{2x^3yz}{(z^2 - xy)^3}.$$

3385. $x + y + z = e^z.$

解 等式两端微分, 得

$$dx + dy + dz = e^z dz, \quad (1)$$

故有

$$dz = \frac{1}{e^z - 1}(dx + dy) = \frac{1}{x + y + z - 1}(dx + dy).$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + y + z - 1}.$$

再将 (1) 式微分一次, 得

$$d^2 z = e^z d^2 z + e^z dz^2,$$

故有

$$d^2 z = -\frac{e^z}{e^z - 1}(dz)^2 = -\frac{e^z}{(e^z - 1)^3}(dx^2 + 2dxdy + dy^2).$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{e^z}{(e^z - 1)^3} \\ &= -\frac{x + y + z}{(x + y + z - 1)^3}. \end{aligned}$$

3386. $z = \sqrt{x^2 - y^2} \operatorname{tg} \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$

解 设 $r = \sqrt{x^2 - y^2}$, 则 $\frac{z}{r} = \operatorname{tg} \frac{z}{r},$

$$d\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{d\left(\frac{z}{r}\right)}{1 + \left(\frac{z}{r}\right)^2}.$$

从而有 $d\left(\frac{z}{r}\right) = 0$, 或 $rdz - zdr = 0$, 即

$$dz = \frac{z}{r^2}(xdx - ydy). \quad (1)$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{zx}{r^2} = \frac{xz}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{yz}{r^2} = -\frac{yz}{x^2 - y^2}.$$

由 (1) 得

$$(x^2 - y^2)dz = xzdx - yzdy. \quad (2)$$

(2) 式再微分一次, 得

$$\begin{aligned} & (x^2 - y^2)d^2z = -(2xdx - 2ydy)dz + xdx dz \\ & \quad + zdx^2 - ydy dz - zdy^2 \\ & = -(xdx - ydy) \left[\frac{z(xdx - ydy)}{x^2 - y^2} \right] + zdx^2 - zdy^2 \\ & = \frac{z}{x^2 - y^2} \left[-x^2 dx^2 + 2xy dx dy - y^2 dy^2 \right. \\ & \quad \left. + (x^2 - y^2) dx^2 - (x^2 - y^2) dy^2 \right] \\ & = \frac{z(-y^2 dx^2 + 2xy dx dy - x^2 dy^2)}{x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{y^2 z}{(x^2 - y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{xyz}{(x^2 - y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x^2 z}{(x^2 - y^2)^2}.$$

3387. $x + y + z = e^{-(x+y+z)}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$1 + \frac{\partial z}{\partial x} = e^{-(x+y+z)} \cdot \left(-1 - \frac{\partial z}{\partial x}\right).$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

利用对称性, 得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$

显见

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

3388. 设,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0 \quad (1)$$

及

$$f(x, y, z) = xyz^3.$$

求: (a) $f'_x(1, 1, 1)$, 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 (1) 所定义的隐函数, (b) $f'_y(1, 1, 1)$, 设 $y = y(x, z)$ 是由方程 (1) 所定义的隐函数. 说明为什么这些导

函数相异.

解 (a) 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3xyz = 0$,
则由方程 (1) 所定义的隐函数 $z = z(x, y)$ 的偏导
函数 $z'_x(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 点的值为

$$\begin{aligned} z'_x(1, 1) &= -\frac{F'_x(1, 1, 1)}{F'_z(1, 1, 1)} = -\frac{\frac{d}{dx}F(x, 1, 1)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dz}F(1, 1, z)\Big|_{z=1}} \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}(x^2 + 2 - 3x)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dz}(2 + z^2 - 3z)\Big|_{z=1}} = -1. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y, z(x, y))]\Big|_{(1, 1, 1)} \\ &= \frac{d}{dx}f(x, 1, 1)\Big|_{x=1} + \frac{\partial}{\partial z}f(1, 1, z)\Big|_{z=1} \cdot z'_x(1, 1) \\ &= 1 + 3 \cdot (-1) = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \quad y'_x(1, 1) &= -\frac{F'_x(1, 1, 1)}{F'_y(1, 1, 1)} \\ &= -\frac{\frac{d}{dx}F(x, 1, 1)\Big|_{x=1}}{\frac{d}{dy}F(1, y, 1)\Big|_{y=1}} = -1. \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x, y(x, z), z)]\Big|_{(1, 1, 1)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dx} f(x, 1, 1) \Big|_{x=1} + \frac{d}{dy} f(1, y, 1) \Big|_{y=1} \cdot y'_x(1, 1) \\
&= 1 + 2 \cdot (-1) = -1.
\end{aligned}$$

由 (a) 与 (6) 所求得的对 x 的偏导函数在 $(1, 1, 1)$ 点的值不相等, 可说明如下:

方程 $F(x, y, z) = 0$ 代表一个空间曲面, 而 $f(x, y, z)$ 表示定义在这个曲面上的一个函数. 函数 $G(x, y) = f(x, y, z(x, y))$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxy 平面上后, 原曲面上的函数看成在 Oxy 平面上定义的一个函数, $G'_x(x, y)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率, 它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率, 还包含了原来函数在 Oz 轴方向的变化率的一部份. 同样地, $H(x, z) = f(x, y(x, z), z)$ 表示把原曲面上的点投影到 Oxz 平面上后, 原曲面上的函数看成在 Oxz 平面上定义的函数, $H'_x(x, z)$ 表示此函数在 Ox 轴方向的变化率, 它不仅包含了原来函数在 Ox 轴方向的变化率, 还包含了原来函数在 Oy 轴方向的变化率的一部份. 一般地, 原来函数在 Oy 轴和 Oz 轴方向的变化率的那两部份是不相等的.

3389. 设 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$,

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 当 $x = 1$, $y = -2$, $z = 1$ 时的值.

解 等式两端微分一次, 得

$$2x dx + 4y dy + 6z dz + x dy + y dx - dz = 0.$$

即

$$(1-6z)dz=(2x+y)dx+(4y+x)dy. \quad (1)$$

再微分一次, 得

$$(1-6z)d^2z=6dz^2+2dx^2+2dxdy+4dy^2. \quad (2)$$

以 $x=1, y=-2, z=1$ 代入 (1) 式, 得 $dz=\frac{7}{5}dy$.

再以 $z=1, dz=\frac{7}{5}dy$ 代入 (2) 式, 得

$$d^2z=-\frac{2}{5}dx^2-\frac{2}{5}dxdy-\frac{394}{125}dy^2.$$

于是, 当 $x=1, y=-2, z=1$ 时,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\frac{1}{5}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{394}{125}.$$

求 dz 和 d^2z , 设:

$$3390. \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

解 等式两端微分一次, 得

$$\frac{2x}{a^2}dx + \frac{2y}{b^2}dy + \frac{2z}{c^2}dz = 0.$$

于是,

$$dz = -\frac{c^2}{z} \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} \right).$$

再将 dz 微分一次, 得

$$d^2z = -\frac{c^2}{z^2} \left[z \left(\frac{dx^2}{a^2} + \frac{dy^2}{b^2} \right) - \left(\frac{xdx}{a^2} + \frac{ydy}{b^2} \right) dz \right]$$

$$= -\frac{c^4}{z^3} \left[\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dx^2}{a^2} + \frac{2xy}{a^2 b^2} dx dy + \left(\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \frac{dy^2}{b^2} \right].$$

3391. $xyz = x + y + z.$

解 等式两端微分一次, 得

$$yz dx + xz dy + xy dz = dx + dy + dz. \quad (1)$$

于是,

$$dz = -\frac{(1-yz)dx + (1-xz)dy}{1-xy}. \quad (2)$$

对 (1) 式再微分一次, 得

$$2z dx dy + 2x dy dz + 2y dx dz + xy d^2 z = d^2 z. \quad (3)$$

以 (2) 式代入 (3) 式, 化简整理得

$$\begin{aligned} d^2 z &= -\frac{2}{(1-xy)^2} \left\{ y(1-yz) dx^2 + [x+y \right. \\ &\quad \left. - z(1+xy)] dx dy + x(1-xz) dy^2 \right\} \\ &= -\frac{2 \{ y(1-yz) dx^2 - 2z dx dy + x(1-xz) dy^2 \}}{(1-xy)^2}. \end{aligned}$$

3392. $\frac{x}{z} = \ln \frac{z}{y}.$

解 等式两端微分一次, 得

$$\frac{z dx - x dz}{z^2} = \frac{dz}{z} - \frac{dy}{y}.$$

于是,

$$dz = \frac{z(ydx + zdy)}{y(x+z)}.$$

对 $(x+z)dz = zdx + \frac{z^2}{y}dy$ 再微分一次, 得

$$\begin{aligned}(x+z)d^2z &= -(dx+dz)dz + dzdx \\ &+ \frac{2z}{y}dzdy - \frac{z^2}{y^2}dy^2 \\ &= -dz^2 + \frac{2z}{y}dydz - \frac{z^2}{y^2}dy^2 = -\left(dz - \frac{z}{y}dy\right)^2 \\ &= -\frac{z^2[(ydx + zdy) - (x+z)dy]^2}{y^2(x+z)^2} \\ &= -\frac{z^2(ydx - xdy)}{y^2(x+z)^2}.\end{aligned}$$

于是,

$$d^2z = -\frac{z^2(ydx - xdy)^2}{y^2(x+z)^3}.$$

3393. $z = x + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{z-x}.$

解 等式两端微分一次, 得

$$dz = dx + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{(z-x)^2}} \cdot \frac{(z-x)dy - y(dz - dx)}{(z-x)^2}.$$

化简整理, 得

$$dz = dx + \frac{z-x}{(z-x)^2 + y(y+1)} dy.$$

再对上式微分一次，得

$$d^2z = \frac{1}{[(z-x)^2 + y(y+1)]^2} \{ [(z-x)^2 + y(y+1)] dy \cdot (dz - dx) - (z-x) dy \cdot [2(z-x)(dz - dx) + 2y dy + dy] \}.$$

将 dz 代入化简整理，即有

$$d^2z = \frac{2(x-z)(y+1)[(x-z)^2 + y^2]}{[(x-z)^2 + y(y+1)]^3} dy^2.$$

3394. 设 $u^3 - 3(x+y)u^2 + z^3 = 0$ ，求 du 。

解 等式两端微分，得

$$3u^2 du - 3u^2(dx + dy) - 6u(x+y)du + 3z^2 dz = 0.$$

于是，

$$du = \frac{u^2(dx + dy) - z^2 dz}{u[u - 2(x+y)]}.$$

3395. 设 $F(x+y+z, x^2+y^2+z^2) = 0$ ，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解 等式两端对 x 求偏导函数，得

$$F'_1 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_2 \cdot \left(2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0.$$

于是，

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{F'_1 + 2xF'_2}{F'_1 + 2zF'_2}. \quad (1)$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_1 + 2yF'_2}{F'_1 + 2zF'_2}.$$

(1) 式两端对 y 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{(F'_1 + 2zF'_2)^2} \{ (F'_1 + 2zF'_2) \\ &\cdot [(F'_1)'_y + 2x(F'_2)'_y] - (F'_1 + 2xF'_2) \\ &\cdot [(F'_1)'_y + 2z(F'_2)'_y + 2z'_y \cdot F'_2] \} \\ &= -\frac{1}{(F'_1 + 2zF'_2)^2} \{ 2(x-z)F'_1 \cdot (F'_2)'_y + 2(z-x)F_2 \\ &\cdot (F'_1)'_y - 2[F'_1F'_2 + x(F'_2)^2]z'_y \} \\ &= -\frac{2(x-z)}{(F'_1 + 2zF'_2)^2} \{ F'_1 \cdot (F'_2)'_y - F'_2 \cdot (F'_1)'_y \} \\ &\quad - \frac{2F'_2 \cdot (F'_1 + 2xF'_2) \cdot (F'_1 + 2yF'_2)}{(F'_1 + 2zF'_2)^3}.\end{aligned}$$

现分别求 $(F'_1)'_y$ 及 $(F'_2)'_y$:

$$(F'_1)'_y = F''_{11} \cdot (1 + z'_y) + F''_{12} \cdot (2y + 2zz'_y),$$

$$(F'_2)'_y = F''_{21} \cdot (1 + z'_y) + F''_{22} \cdot (2y + 2zz'_y).$$

注意到

$$1 + z'_y = \frac{2(z-y)F'_2}{F'_1 + 2zF'_2}, \quad 2y + 2zz'_y = \frac{2(y-z)F'_1}{F'_1 + 2zF'_2},$$

即得

$$F'_1 \cdot (F'_2)'_y - F'_2 \cdot (F'_1)'_y = F'_1 F''_{21} \cdot \frac{2(z-y)F'_2}{F'_1 + 2zF'_2}$$

$$\begin{aligned}
& + F'_1 F''_{22} \cdot \frac{2(y-z)F'_1}{F'_1 + 2zF'_2} \\
& - F'_2 F''_{11} \cdot \frac{2(z-y)F'_2}{F'_1 + 2zF'_2} - F'_2 F''_{12} \cdot \frac{2(y-z)F'_1}{F'_1 + 2zF'_2} \\
= & \frac{2(y-z)}{F'_1 + 2zF'_2} \{ (F'_1)^2 F''_{22} - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_2)^2 F''_{11} \}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = & - \frac{4(x-z)(y-z)}{(F'_1 + 2zF'_2)^3} \{ (F'_1)^2 F''_{22} \\
& - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_2)^2 F''_{11} \} \\
& - \frac{2F'_2 \cdot (F'_1 + 2xF'_2) \cdot (F'_1 + 2yF'_2)}{(F'_1 + 2zF'_2)^3}.
\end{aligned}$$

3396. 设 $F(x-y, y-z, z-x) = 0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$F'_1 + F'_2 \cdot \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_3 \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial x} - 1\right) = 0.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_1 - F'_3}{F'_2 - F'_3}.$$

同法可得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_2 - F'_1}{F'_2 - F'_3}.$$

3397. 设 $F(x, x+y, x+y+z)=0$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 等式两端分别对 x 及对 y 求偏导函数, 得

$$F'_1 + F'_2 + F'_3 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$F'_2 + F'_3 \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(1 + \frac{F'_1 + F'_2}{F'_3}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\left(1 + \frac{F'_2}{F'_3}\right).$$

再将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & -\frac{1}{(F'_3)^2} \left\{ F'_3 \cdot \left[F''_{11} + F''_{12} + F''_{13} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right. \right. \\ & \left. \left. + F''_{21} + F''_{22} + F''_{23} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right] \right. \\ & \left. - (F'_1 + F'_2) \cdot \left[F''_{31} + F''_{32} + F''_{33} \cdot \left(1 + \frac{\partial z}{\partial x}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & -\frac{1}{(F'_3)^3} \left\{ (F'_3)^2 \cdot (F''_{11} + 2F''_{12} + F''_{22}) \right. \\ & \left. - 2(F'_1 + F'_2)F'_3 \cdot (F''_{13} + F''_{23}) + (F'_1 + F'_2)^2 F''_{33} \right\}. \end{aligned}$$

3398. 设 $F(xz, yz)=0$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 等式两端对 x 求偏导函数, 得

$$F'_1 \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F'_2 \cdot y \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{zF'_1}{xF'_1 + yF'_2}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 再对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & - \frac{1}{(xF'_1 + yF'_2)^2} \left\{ (xF'_1 + yF'_2) \cdot \left[F'_1 \frac{\partial z}{\partial x} \right. \right. \\ & \left. \left. + z \left(F''_{11} \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F''_{12} y \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] \right. \\ & - \left[F'_1 + x \left(F''_{11} \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F''_{12} y \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right. \\ & \left. \left. + y \left(F''_{21} \cdot \left(z + x \frac{\partial z}{\partial x} \right) + F''_{22} y \frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] z F'_1 \right\}. \end{aligned}$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 代入化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = & - \frac{1}{(xF'_1 + yF'_2)^3} \{ y^2 z^2 [(F'_1)^2 F''_{22} \\ & - 2F'_1 F'_2 F''_{12} + (F'_2)^2 F''_{11}] - 2z(F'_1)^2 \\ & \cdot (xF'_1 + yF'_2) \}. \end{aligned}$$

3399. 设 (a) $F(x+z, y+z)=0$;

(b) $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0$, 求 $d^2 z$.

解 (a) 等式两端微分, 得

$$F'_1 \cdot (dx + dz) + F'_2 \cdot (dy + dz) = 0. \quad (1)$$

于是,

$$dz = -\frac{F'_1 dx + F'_2 dy}{F'_1 + F'_2},$$

$$dx + dz = \frac{F'_2 \cdot (dx - dy)}{F'_1 + F'_2},$$

$$dy + dz = -\frac{F'_1 \cdot (dx - dy)}{F'_1 + F'_2}.$$

对 (1) 式再求一次微分, 得

$$F''_{11} \cdot (dx + dz)^2 + 2F''_{12} \cdot (dx + dz)(dy + dz) \\ + F''_{22} \cdot (dy + dz)^2 + (F'_1 + F'_2)d^2z = 0.$$

于是,

$$d^2z = -\frac{1}{F'_1 + F'_2} [F''_{11} \cdot (dx + dz)^2 + 2F''_{12} \\ \cdot (dx + dz)(dy + dz) + F''_{22} \cdot (dy + dz)^2] \\ = -\frac{1}{(F'_1 + F'_2)^2} [F''_{11} \cdot (F'_2)^2 - 2F'_1 F'_2 F''_{12} \\ + F''_{22} \cdot (F'_1)^2] (dx - dy)^2.$$

(6) 等式两端微分, 得

$$F'_1 \cdot \frac{zdx - xdz}{z^2} + F'_2 \cdot \frac{zdy - ydz}{z^2} = 0. \quad (2)$$

于是,

$$dz = \frac{z(F'_1 dx + F'_2 dy)}{xF'_1 + yF'_2},$$

$$zdx - xdz = \frac{zF'_2 \cdot (ydx - xdy)}{xF'_1 + yF'_2},$$

$$zdy - ydz = -\frac{zF'_1 \cdot (ydx - xdy)}{xF'_1 + yF'_2}.$$

(2) 式乘以 z^2 后再微分一次, 得

$$F''_{11} \cdot \frac{(zdx - xdz)^2}{z^2} + 2F''_{12}$$

$$\cdot \frac{(zdx - xdz)(zdy - ydz)}{z^2} + F''_{22} \cdot \frac{(zdy - ydz)^2}{z^2}$$

$$- (xF'_1 + yF'_2) d^2z = 0.$$

于是,

$$d^2z = \frac{1}{z^2(xF'_1 + yF'_2)} [F''_{11} \cdot (zdx - xdz)^2$$

$$+ 2F''_{12}(zdx - xdz)(zdy - ydz)$$

$$+ F''_{22} \cdot (zdy - ydz)^2]$$

$$= \frac{(ydx - xdy)^2}{(xF'_1 + yF'_2)^3} [F''_{11} \cdot (F'_2)^2$$

$$- 2F'_1 F'_2 F''_{12} + F''_{22} \cdot (F'_1)^2].$$

3400. 设 $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$, $z = z(x, y)$ 为由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所定义的函数. 证明:

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

证 根据隐函数求导法, 有

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

三式相乘即得

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

3401. 设 $x+y+z=0$, $x^2+y^2+z^2=1$, 求 $\frac{dx}{dz}$ 和 $\frac{dy}{dz}$.

解 对 z 求导数, 得

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, \\ 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} + 2z = 0. \end{cases}$$

联立求解, 得

$$\frac{dx}{dz} = \frac{y-z}{x-y}, \quad \frac{dy}{dz} = \frac{z-x}{x-y}.$$

3402. 设 $x^2+y^2=\frac{1}{2}z^2$, $x+y+z=2$, 求 $\frac{dx}{dz}$, $\frac{dy}{dz}$, $\frac{d^2x}{dz^2}$

和 $\frac{d^2y}{dz^2}$ 当 $x=1$, $y=-1$, $z=2$ 时的值.

解 对 z 求导数, 得

$$\begin{cases} 2x \frac{dx}{dz} + 2y \frac{dy}{dz} = z, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dz} + \frac{dy}{dz} + 1 = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dz^2} + 2\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 + 2\frac{d^2y}{dz^2} = 1, & (3) \\ \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{d^2y}{dz^2} = 0, & (4) \end{cases}$$

将 $x=1, y=-1, z=2$ 代入 (1), (2), 解得

$$\frac{dx}{dz} = 0, \quad \frac{dy}{dz} = -1.$$

将上述结果及 x, y, z 值联同由 (4) 式所决定的式子

$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{d^2y}{dz^2}$ 一起代入 (3) 式, 即得

$$\frac{d^2x}{dz^2} = -\frac{1}{4}, \quad \frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{4}.$$

3403. 设 $xu - yv = 0, yu + xv = 1$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 和

$$\frac{\partial v}{\partial y}.$$

解 微分得

$$\begin{cases} xdu - ydv = vdy - udx, \\ ydu + xdv = -vdx - udy. \end{cases}$$

于是,

$$du = \frac{1}{x^2 + y^2} [-(xu + yv)dx + (xv - yu)dy],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xv - yu}{x^2 + y^2}.$$

同法可得

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{yu - xv}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{xu + yv}{x^2 + y^2} \quad (x^2 + y^2 > 0).$$

3404. 设 $u + v = x + y$, $\frac{\sin u}{\sin v} = \frac{x}{y}$, 求 du, dv, d^2u 和 d^2v .

解 将原式改写为

$$\begin{cases} u + v = x + y, \\ y \sin u = x \sin v. \end{cases}$$

微分得

$$\begin{cases} du + dv = dx + dy, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin u dy + y \cos u du = \sin v dx + x \cos v dv. & (2) \end{cases}$$

联立求解, 得

$$du = \frac{1}{x \cos v + y \cos u} [(\sin v + x \cos v) dx - (\sin u - x \cos v) dy],$$

$$dv = \frac{1}{x \cos v + y \cos u} [-(\sin v - y \cos u) dx + (\sin u + y \cos u) dy].$$

对 (1), (2) 式再微分一次, 得

$$\begin{cases} d^2u + d^2v = 0, \\ y \cos u \cdot d^2u + 2 \cos u \cdot dy du - y \sin u \cdot du^2 \\ = x \cos v \cdot d^2v + 2 \cos v \cdot dx dv - x \sin v \cdot dv^2. \end{cases}$$

联立求解, 得

$$d^2u = -d^2v = \frac{1}{x \cos v + y \cos u} [(2 \cos v dx - x \sin v dv) dv - (2 \cos u dy - y \sin u du) du].$$

3405. 设:

$$e^{\frac{v}{x}} \cos \frac{v}{y} = \frac{x}{\sqrt{2}}, e^{\frac{v}{x}} \sin \frac{v}{y} = \frac{y}{\sqrt{2}}.$$

求 du, dv, d^2u 和 d^2v 当 $x=1, y=1, u=0, v=\frac{\pi}{4}$ 时的表达式.

解 将所给二式相除及平方相加, 分别得

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{v}{y} = \frac{y}{x}, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{\frac{2v}{x}} = \frac{x^2 + y^2}{2}. & (2) \end{cases}$$

微分 (1) 式:

$$\sec^2 \frac{v}{y} \cdot \frac{y dv - v dy}{y^2} = \frac{x dy - y dx}{x^2}. \quad (3)$$

以 $x=1, y=1, v=\frac{\pi}{4}$ 代入 (3) 代, 得

$$dv = \frac{\pi}{4} dy - \frac{1}{2} (dx - dy).$$

微分 (3) 式:

$$2 \sec^2 \frac{v}{y} \operatorname{tg} \frac{v}{y} \cdot \left(\frac{y dv - v dy}{y^2} \right)^2 + \sec^2 \frac{v}{y}$$

$$\begin{aligned} & \frac{y^2 d^2 v - 2(ydv - vdy)dy}{y^3} \\ &= \frac{-2(xdy - ydx)dx}{x^3}. \end{aligned} \quad (4)$$

以 $x=1$, $y=1$, $v=\frac{\sigma v}{4}$ 及 dv 值代入 (4) 式, 得

$$d^2 v = \frac{1}{2}(dx - dy)^2.$$

微分 (2) 式:

$$2e^{\frac{2x}{x}} \cdot \frac{xdu - udx}{x^2} = xdx + ydy. \quad (5)$$

以 $x=1$, $y=1$, $u=0$ 代入 (5) 式, 得

$$du = \frac{dx + dy}{2}.$$

微分 (5) 式:

$$\begin{aligned} & 4e^{\frac{2x}{x}} \left(\frac{xdu - udx}{x^2} \right)^2 + 2e^{\frac{2x}{x}} \frac{x^2 d^2 u - 2(xdu - udx)dx}{x^3} \\ &= dx^2 + dy^2. \end{aligned} \quad (6)$$

以 $x=1$, $y=1$, $u=0$ 及 du 代入 (6) 式, 得

$$d^2 u = dx^2.$$

3406. 设:

$$x = t + t^{-1}, \quad y = t^2 + t^{-2}, \quad z = t^3 + t^{-3}.$$

求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$ 和 $\frac{d^2 z}{dx^2}$.

$$\text{解 } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t - \frac{2}{t^3}}{1 - \frac{1}{t^2}} = 2\left(t + \frac{1}{t}\right);$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - \frac{3}{t^4}}{1 - \frac{1}{t^2}} = 3\left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1\right);$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)}{1 - \frac{1}{t^2}} = 2;$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\left(2t - \frac{2}{t^3}\right)}{1 - \frac{1}{t^2}} = 6\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

注 本题也可消去 t 以求 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ 和 $\frac{d^2z}{dx^2}$. 事实上,

$$y = \left(t + \frac{1}{t}\right)^2 - 2 = x^2 - 2,$$

$$z = \left(t + \frac{1}{t}\right)\left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2}\right) = x(x^2 - 3) = x^3 - 3x.$$

于是,

$$\frac{dy}{dx} = 2x, \quad \frac{dz}{dx} = 3x^2 - 3,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 6x.$$

再将 $x = t + \frac{1}{t}$ 代入上述结果, 即得

$$\frac{dy}{dx} = 2 \left(t + \frac{1}{t} \right), \quad \frac{dz}{dx} = 3 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} + 1 \right),$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = 6 \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

3407. 在 Oxy 平面上怎样的域内方程组

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

(式中参数 u 和 v 取一切可能的实数值) 定义 z 为变

数 x 和 y 的函数? 求导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由 $u + v = x$, $u^2 + v^2 = y$ 解得

$$u = \frac{x \pm \sqrt{2y - x^2}}{2}, \quad v = \frac{x \mp \sqrt{2y - x^2}}{2},$$

其中 $2y - x^2 \geq 0$ 或 $y \geq \frac{x^2}{2}$, 此即所求之域.

再由 $x = u + v$ 及 $y = u^2 + v^2$ 分别对 x 求偏导函数, 得

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad 0 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} + 2v \frac{\partial v}{\partial x}.$$

联立求解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v - u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{u}{v - u} \quad (u \neq v).$$

又由 $z = u^3 + v^3$ 对 x 求偏导函数, 即可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2 \frac{\partial v}{\partial x} = 3u^2 \cdot \frac{v}{v-u}$$

$$- 3v^2 \cdot \frac{u}{v-u} = -3uv.$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

注 本题也可消去 u, v 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 事实上,

$$x^2 - y = 2uv,$$

$$z = (u+v)(u^2 - uv + v^2) = x\left(\frac{3}{2}y - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \frac{x}{2}(3y - x^2).$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}x^2 = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}(u+v).$$

但一般说来, 用参数表示的函数和消去参数后的函数, 它们的定义域是不同的.

3408. 设 $x = \cos\varphi\cos\psi$, $y = \cos\varphi\sin\psi$, $z = \sin\varphi$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 由 $x = \cos\varphi\cos\psi$, $y = \cos\varphi\sin\psi$ 对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{cases} 1 = -\sin\varphi\cos\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \cos\varphi\sin\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ 0 = -\sin\varphi\sin\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \cos\varphi\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}. \end{cases}$$

联立求解，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}.$$

于是，

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \cos\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\operatorname{ctg}\varphi\cos\psi, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ &= \frac{\cos\psi}{\sin^2\varphi}\cdot\left(-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi}\right) + \operatorname{ctg}\varphi\sin\psi\cdot\left(-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}\right) \\ &= -\frac{\cos^2\psi + \sin^2\psi\sin^2\varphi}{\sin^3\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}. \end{aligned}$$

注 本题也可消去 φ ， ψ 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ 。事实上，

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \cos^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi \\ &= \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1. \end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned} 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{z-x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{z^2+x^2}{z^3}. \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \cos^2 \psi}{\sin^3 \varphi}.$$

3409. 设 $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = v$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 及

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

解 本题求微分, 可将所有的二阶偏导函数一起求出.

$$dx = \cos v du - u \sin v dv,$$

$$dy = \sin v du + u \cos v dv.$$

联立求解, 得

$$du = \cos v dx + \sin v dy,$$

$$dv = \frac{1}{u} (-\sin v dx + \cos v dy),$$

$$u dv = -\sin v dx + \cos v dy.$$

再对上式微分一次, 得

$$\begin{aligned} u d^2 v + du dv &= -\cos v dv dx - \sin v dv dy \\ &= -du dv, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} d^2 z &= d^2 v = -\frac{2}{u} du dv = -\frac{2}{u^2} (\cos v dx + \sin v dy) \\ &\quad \cdot (-\sin v dx + \cos v dy) \\ &= \frac{2}{u^2} (\sin v \cos v dx^2 - \cos 2v dx dy - \sin v \cos v dy^2), \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2 \sin v \cos v}{u^2} = \frac{\sin 2v}{u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{\cos 2v}{u^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{\sin 2v}{u^2}.$$

注 本题也可消去 u, v , 由 $z = v = \arctg \frac{y}{x}$ 获解.

3410. 设 $z = z(x, y)$ 为由方程组:

$$x = e^{u+v}, \quad y = e^{u-v}, \quad z = uv$$

(u 及 v 为参数) 所定义的函数, 求当 $u=0$ 及 $v=0$ 时的 dz 及 d^2z .

$$\text{解} \quad dx \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = e^{u+v}(du+dv) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = du+dv,$$

$$dy \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = e^{u-v}(du-dv) \Big|_{\substack{u=0 \\ v=0}} = du-dv.$$

于是, 当 $u=0$ 及 $v=0$ 时,

$$du = \frac{1}{2}(dx+dy), \quad dv = \frac{1}{2}(dx-dy);$$

$$dz = u dv + v du = 0;$$

$$d^2z = u d^2v + 2 du dv + v d^2u = 2 du dv$$

$$= 2 \left(\frac{dx+dy}{2} \right) \left(\frac{dx-dy}{2} \right) = \frac{1}{2}(dx^2 - dy^2).$$

3411. 设 $z = x^2 + y^2$, 其中 $y = y(x)$ 为由方程 $x^2 - xy + y^2$

$= 1$ 所定义的函数. 求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

解 先由 $x^2 - xy + y^2 = 1$ 求 $\frac{dy}{dx}$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\begin{aligned} 2x - y - xy' + 2yy' &= 0, \\ 2 - 2y' - xy'' + 2y'^2 + 2yy'' &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

于是,

$$y' = \frac{2x - y}{x - 2y}, \quad y'' = \frac{6(x^2 - xy + y^2)}{(x - 2y)^3} = \frac{6}{(x - 2y)^3}.$$

下面求 $\frac{dz}{dx}$ 及 $\frac{d^2z}{dx^2}$.

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 2yy' = 2x + 2y \cdot \frac{2x - y}{x - 2y} = \frac{2(x^2 - y^2)}{x - 2y},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = 2 + 2y'^2 + 2y''y = 2y' + xy''$$

$$= \frac{2(2x - y)}{x - 2y} + \frac{6x}{(x - 2y)^3}.$$

3412. 设 $u = \frac{x+z}{y+z}$, 其中 z 为由方程式 $ze^z = xe^x + ye^y$ 所

定义的函数, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 将 $ze^z = xe^x + ye^y$ 两端微分, 得

$$e^z(1+z)dz = e^x(1+x)dx + e^y(1+y)dy.$$

又因

$$du = \frac{1}{(y+z)^2} [(y+z)dx + (y+z)dz$$

$$- (x+z)dy - (x+z)dz]$$

$$= \frac{1}{(y+z)^2} [(y+z)dx - (x+z)dy + (y-x)dz]$$

$$= \frac{1}{(y+z)^2} [(y+z)dx - (x+z)dy + \frac{(y-x)e^x(1+x)}{e^x(1+z)}dx + \frac{(y-x)e^y(1+y)}{e^x(1+z)}dy],$$

故得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y+z} + \frac{(x+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{x-x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x+z}{(y+z)^2} + \frac{(y+1)(y-x)}{(z+1)(y+z)^2} e^{y-x}.$$

3413. 设方程:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

定义 z 为 x 和 y 的函数. 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 对 x 求偏导函数, 得

$$1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (1)$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (3)$$

由 (1) 及 (2) 解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial u}, \quad (4)$$

其中

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

再将 (4) 的结果代入 (3), 即得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right),$$

同法求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{I} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

3414. 设:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v).$$

求反函数: $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 的一阶和二阶偏导函数.

解 微分二次, 得

$$dx = \varphi'_1 du + \varphi'_2 dv, \tag{1}$$

$$dy = \psi'_1 du + \psi'_2 dv, \tag{2}$$

$$0 = \varphi''_{11} du^2 + 2\varphi''_{12} dudv + \varphi''_{22} dv^2 + \varphi'_1 d^2u + \varphi'_2 d^2v, \tag{3}$$

$$0 = \psi''_{11} du^2 + 2\psi''_{12} dudv + \psi''_{22} dv^2 + \psi'_1 d^2u + \psi'_2 d^2v. \tag{4}$$

其中右下角标号 1, 2 分别代表对 u, v 的偏导函数, 余类推.

令 $I = \varphi'_1 \psi'_2 - \varphi'_2 \psi'_1$, 则由 (1), (2) 可解得

$$du = \frac{1}{I}(\psi'_2 dx - \varphi'_2 dy), \quad (5)$$

$$dv = \frac{1}{I}(\varphi'_1 dy - \psi'_1 dx). \quad (6)$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I}\psi'_2 = \frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I}\frac{\partial\psi}{\partial u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{I}\frac{\partial\varphi}{\partial u}.$$

由 (3), (4) 解出 d^2u, d^2v , 并把 (5), (6) 的结果代入, 即得

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{1}{I}[\varphi'_2(\psi''_{11}du^2 + 2\psi''_{12}dudv + \psi''_{22}dv^2) \\ &\quad - \psi'_2(\varphi''_{11}du^2 + 2\varphi''_{12}dudv + \varphi''_{22}dv^2)] \\ &= \frac{1}{I^3}[(\varphi'_2\psi''_{11} - \psi'_2\varphi''_{11})(\psi'_2 dx - \varphi'_2 dy)^2 \\ &\quad + 2(\varphi'_2\psi''_{12} - \psi'_2\varphi''_{12})(\psi'_2 dx - \varphi'_2 dy)(\varphi'_1 dy \\ &\quad - \psi'_1 dx) + (\varphi'_2\psi''_{22} - \psi'_2\varphi''_{22})(\varphi'_1 dy - \psi'_1 dx)^2] \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

比较上式两端的系数, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{I^3} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} - \frac{\partial\psi}{\partial v} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\frac{\partial\psi}{\partial v} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} \frac{\partial^2\psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial v} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\cdot \frac{\partial \psi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \psi}{\partial u} \right)^2 \Big],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{I^3} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} \right) \right.$$

$$\cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} \right)$$

$$\cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right.$$

$$\left. - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial u} \Big].$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{I^3} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u^2} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 \right.$$

$$\left. - 2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \right) \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial^2 \psi}{\partial v^2} - \frac{\partial \psi}{\partial v} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right].$$

同法可求得 d^2v 和 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$.

3415. 设 (a) $x = u \cos \frac{v}{u}$, $y = u \sin \frac{v}{u}$;

$$(b) x = e^u + u \sin v, \quad y = e^u - u \cos v,$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解 利用 3414 题的结果求之.

(a) $\varphi(u, v) = u \cos \frac{v}{u}$, $\psi(u, v) = u \sin \frac{v}{u}$. 于是,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos \frac{v}{u} + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\sin \frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = \cos \frac{v}{u},$$

$$I = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \left(\cos \frac{v}{u} \right.$$

$$\left. + \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} \right) \cos \frac{v}{u} - \left(-\sin \frac{v}{u} \right)$$

$$\cdot \left(\sin \frac{v}{u} - \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} \right) = 1.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial v} = \cos \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \sin \frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{v}{u} \cos \frac{v}{u} - \sin \frac{v}{u},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{v}{u} \sin \frac{v}{u} + \cos \frac{v}{u}.$$

(b) $\varphi(u, v) = e^u + u \sin v$, $\psi(u, v) = e^u - u \cos v$.

于是,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = e^u + \sin v, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = u \cos v,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = e^u - \cos v, \quad \frac{\partial \psi}{\partial v} = u \sin v,$$

$$I = (e^x + \sin v)u \sin v - (e^x - \cos v)u \cos v \\ = u[e^x(\sin v - \cos v) + 1].$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\sin v}{e^x(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos v}{e^x(\sin v - \cos v) + 1},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{e^x - \cos v}{u[e^x(\sin v - \cos v) + 1]},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{e^x + \sin v}{u[e^x(\sin v - \cos v) + 1]}.$$

3416. 函数 $u = u(x)$ 由方程组

$$u = f(x, y, z), \quad g(x, y, z) = 0, \\ h(x, y, z) = 0$$

定义. 求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2u}{dx^2}$.

解 微分得

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \left. + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) f, \quad (1)$$

$$0 = g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} \right. \\ \left. + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) g,$$

$$0 = h'_x dx + h'_y dy + h'_z dz = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right) h. \quad (3)$$

令 $\frac{\partial(g, h)}{\partial(y, z)} = I_1$, $\frac{\partial(g, h)}{\partial(z, x)} = I_2$, $\frac{\partial(g, h)}{\partial(x, y)} = I_3$, 则

由(2), (3)可解得

$$dy = \frac{I_2}{I_1} dx, \quad dz = \frac{I_3}{I_1} dx.$$

将 dy , dz 代入(1), 得

$$\begin{aligned} du &= f'_x dx + f'_y \cdot \frac{I_2}{I_1} dx + f'_z \cdot \frac{I_3}{I_1} dx \\ &= \frac{1}{I_1} (I_1 f'_x + I_2 f'_y + I_3 f'_z) dx = \frac{I}{I_1} dx, \end{aligned}$$

其中 $I = \frac{D(f, g, h)}{D(x, y, z)}$. 于是,

$$\frac{du}{dx} = \frac{I}{I_1}.$$

对(1), (2), (3)式再求一次微分, 得

$$\begin{aligned} d^2u &= \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f + f''_y d^2y \\ &\quad + f''_z d^2z, \end{aligned} \quad (4)$$

$$0 = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g + g''_y d^2y$$

$$+g'_z d^2 z, \quad (5)$$

$$0 = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h + h'_z d^2 y \\ + h'_z d^2 z. \quad (6)$$

于是,

$$d^2 y = \frac{1}{I_1} \left[g'_z \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right. \\ \left. - h'_z \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g \right],$$

$$d^2 z = \frac{1}{I_1} \left[h'_z \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g - g'_z \cdot \right. \\ \left. \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right].$$

令 $\frac{\partial(h, f)}{\partial(y, z)} = I_4$, $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y, z)} = I_5$, 并将 $d^2 y$ 及 $d^2 z$

代入(4), 即得

$$d^2 u = \frac{1}{I_1} \left[I_1 \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \right. \\ \left. + I_4 \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g \right. \\ \left. + I_5 \cdot \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right],$$

再以 $dy = \frac{I_2}{I_1} dx$ 及 $dz = \frac{I_3}{I_1} dx$ 代入上式, 即得

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{dx^2} = & \frac{1}{I_1^3} \left[I_1 \cdot \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 f \right. \\ & + I_4 \cdot \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 g \\ & \left. + I_5 \cdot \left(I_1 \frac{\partial}{\partial x} + I_2 \frac{\partial}{\partial y} + I_3 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 h \right]. \end{aligned}$$

3417. 函数 $u = u(x, y)$ 由方程组

$$u = f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0$$

定义. 求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 微分得

$$du = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_t dt, \quad (1)$$

$$0 = g'_y dy + g'_z dz + g'_t dt, \quad (2)$$

$$0 = h'_z dz + h'_t dt. \quad (3)$$

令 $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(z, t)}$, 则由(2), (3)可解得

$$dz = \frac{1}{I_1} \cdot (-g'_y h'_t) dy, \quad dt = \frac{1}{I_1} \cdot (g'_y h'_z) dy.$$

将 dz 及 dt 代入(1)式, 得

$$du = f'_x dx + f'_y dy - \frac{g'_y}{I_1} (f'_z h'_t - f'_t h'_z) dy.$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'_y + g'_y \cdot \frac{I_2}{I_1},$$

其中 $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(z, t)}$.

3418. 设:

$$x = f(u, v, w), \quad y = g(u, v, w), \quad z = h(u, v, w).$$

求 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

解 微分得

$$dx = f'_u du + f'_v dv + f'_w dw,$$

$$dy = g'_u du + g'_v dv + g'_w dw,$$

$$dz = h'_u du + h'_v dv + h'_w dw.$$

令 $I = \frac{D(f, g, h)}{D(u, v, w)}$, 则有

$$du = \frac{1}{I} \begin{vmatrix} dx & f'_v & f'_w \\ dy & g'_v & g'_w \\ dz & h'_v & h'_w \end{vmatrix} = \frac{I_1}{I} dx + \frac{I_2}{I} dy + \frac{I_3}{I} dz,$$

其中 $I_1 = \frac{\partial(g, h)}{\partial(v, w)}$, $I_2 = \frac{\partial(h, f)}{\partial(v, w)}$, $I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(v, w)}$.

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{I_1}{I}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{I_2}{I}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{I_3}{I}.$$

3419. 设函数 $z = z(x, y)$ 满足方程组

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad g(x, y, z, t) = 0,$$

式中 t 为参变数. 求 dz .

解 微分得

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_t dt = 0,$$

$$g'_x dx + g'_y dy + g'_z dz + g'_t dt = 0.$$

把 dz, dt 看作未知数, 其它为系数. 解之得

$$\begin{aligned} dz &= \frac{1}{I_3} \{ f'_t \cdot (g'_x dx + g'_y dy) - g'_t \cdot (f'_x dx + f'_y dy) \} \\ &= \frac{1}{I_3} \{ (f'_t g'_x - g'_t f'_x) dx + (f'_t g'_y - g'_t f'_y) dy \} \\ &= - \frac{I_1 dx + I_2 dy}{I_3}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } I_1 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, t)}, \quad I_2 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(y, t)}, \quad I_3 = \frac{\partial(f, g)}{\partial(z, t)}.$$

3420. 设 $u = f(z)$, 其中 z 为由方程式 $z = x + y\varphi(z)$ 所定义的为变数 x 和 y 的隐函数. 证明拉格朗日公式

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left\{ [\varphi(z)]^n \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

证 $dz = dx + \varphi(z)dy + y\varphi'(z)dz$. 于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi'(z)} = \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x}.$$

从而得

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial y} = f'(z) \varphi(z) \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x},$$

即当 $n = 1$ 时, 拉格朗日公式为真.

对于任意可微函数 $g(z)$, 有

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y} \left[g(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] &= g'(z) \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
 &= \varphi(z) g'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 &= \varphi(z) g'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + g(z) \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\
 &= \varphi(z) g'(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \varphi'(z) g(z) \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \\
 &\quad + \varphi(z) g(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi(z) g(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right].
 \end{aligned}$$

令 $g(z) = \varphi(z)$, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi^2(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right],
 \end{aligned}$$

即当 $n=2$ 时, 拉格朗日公式也为真. 设当 $n=k$ 时, 公式为真, 即有

$$\frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left[\varphi^k(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

于是,

$$\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left[\varphi^k(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left[\varphi^k(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} \\
&= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\varphi^{k+1}(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \right\} \\
&= \frac{\partial^k}{\partial x^k} \left[\varphi^{k+1}(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right],
\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 拉格朗日公式也为真. 于是, 对于一切自然数 n , 均有

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \left[\varphi^n(z) \frac{\partial u}{\partial x} \right].$$

3421. 证明: 由方程

$$\Phi(x-az, y-bz) = 0 \quad (1)$$

[其中 $\Phi(u, v)$ 是变数 u, v 的任意可微分函数, a 和 b 为常数] 所定义的函数 $z=z(x, y)$ 为方程

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

的解. 说明曲面(1)的几何性质.

解 由于

$$\Phi'_1 \cdot \left(1 - a \frac{\partial z}{\partial x} \right) - b \Phi'_2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$-\Phi'_1 \cdot a \frac{\partial z}{\partial y} + \Phi'_2 \cdot \left(1 - b \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\Phi'_1}{a\Phi'_1 + b\Phi'_2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\Phi'_2}{a\Phi'_1 + b\Phi'_2}.$$

将上面二个等式依次乘以 a, b , 然后相加, 即得

$$a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1,$$

这就说明 $z = z(x, y)$ 为方程 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ 的解.

等式 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} - 1 = 0$ 表示曲面 (1) 上任一

点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 的法向量 $\vec{n}_1 = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_1}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_1}, -1 \right\}$ 皆与向量 $\vec{r}_1 = \{a, b, 1\}$ 垂直. 过点 P_1 作平行于 \vec{r}_1 的直线 l_1 :

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{1}.$$

易知 l_1 上的点皆在曲面 (1) 上. 于是, 曲面 (1) 是母线平行于 \vec{r}_1 的柱面.

3422. 证明: 由方程

$$\Phi\left(\frac{x-x_0}{z-z_0}, \frac{y-y_0}{z-z_0}\right) = 0 \quad (2)$$

[其中 $\Phi(u, v)$ 是变数 u 和 v 的任意可微分函数] 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程式

$$(x-x_0) \frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0) \frac{\partial z}{\partial y} = z-z_0.$$

说明曲面 (2) 的几何性质.

解 由于

$$\begin{aligned} \Phi_1' \cdot \frac{z-z_0-(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2} - \Phi_2' \cdot \frac{(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial x}}{(z-z_0)^2} &= 0, \\ -\Phi_1' \cdot \frac{(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2} + \Phi_2' \cdot \frac{z-z_0-(y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y}}{(z-z_0)^2} &= 0, \end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{(z-z_0)\Phi_1'}{(x-x_0)\Phi_1' + (y-y_0)\Phi_2'}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{(z-z_0)\Phi_2'}{(x-x_0)\Phi_1' + (y-y_0)\Phi_2'}. \end{aligned}$$

将上面二个等式依次乘以 $x-x_0$ 及 $y-y_0$, 然后相加, 即得

$$(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y} = z-z_0,$$

本题获证.

等式 $(x-x_0)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial z}{\partial y} - (z-z_0) = 0$ 表示曲面 (2) 在其上任一点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的法向量 $\vec{n}_2 = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_2}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_2}, -1 \right\}$ 与向量 $\vec{r}_2 = \{x_2-x_0, y_2-y_0, z_2-z_0\}$ 垂直. 作过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 、 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 的直线 l_2 :

$$\frac{x-x_0}{x_2-x_0} = \frac{y-y_0}{y_2-y_0} = \frac{z-z_0}{z_2-z_0}.$$

易知 l_2 上的任一点皆在曲面(2)上. 于是, 曲面(2)是顶点在 P_0 的锥面.

3423. 证明: 由方程

$$ax+by+cz=\Phi(x^2+y^2+z^2) \quad (3)$$

[其中 $\Phi(u)$ 是变数 u 的任意可微分函数, a , b 和 c 为常数] 所定义的函数 $z=z(x, y)$ 满足方程

$$(cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az-cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx-ay.$$

说明曲面(3)的几何性质.

解 由于

$$a+c\frac{\partial z}{\partial x} = \Phi' \cdot \left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$b+c\frac{\partial z}{\partial y} = \Phi' \cdot \left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x\Phi' - a}{c - 2z\Phi'}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y\Phi' - b}{c - 2z\Phi'}.$$

将上面二个等式依次乘以 $(cy-bz)$ 及 $(az-cx)$, 然后相加, 即得

$$\begin{aligned} & (cy-bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az-cx)\frac{\partial z}{\partial y} \\ &= \frac{(2x\Phi' - a)(cy - bz) + (2y\Phi' - b)(az - cx)}{c - 2z\Phi'} \end{aligned}$$

$$= \frac{(c - 2z\Phi')(bx - ay)}{c - 2z\Phi'} = bx - ay,$$

本题获证.

设 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 是曲面 (3) 上任意一点, 并记 $\vec{r}_3 = \{a, b, c\}$. 由于曲面 (3) 在 P_3 点的法向量为

$$\vec{n}_3 = \left\{ \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{P_3}, \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{P_3}, -1 \right\}, \text{ 故由方程}$$

$$(cy - bz) \frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx) \frac{\partial z}{\partial y} - (bx - ay) = 0$$

知

$$\vec{n}_3 \perp (\vec{P}_3 \times \vec{r}_3),$$

其中 $\vec{P}_3 = \{x_3, y_3, z_3\}$.

设由原点到 P_3 的距离为 d , 即

$$x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = d^2.$$

考虑平面

$$\Pi: ax + by + cz = d$$

和过点 P_3 的球面

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = d^2,$$

并设平面 Π 与球面 S 的交线为 C , 则

1° 由点 P_3 在曲面 (3) 上可知

$$ax_3 + by_3 + cz_3 = \Phi(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2),$$

即

$$d = \Phi(d^2).$$

这表明曲线 C 上的点的坐标皆满足方程 (3), 即曲线 C 位于曲面 (3) 上.

2°由 Π 为平面， S 为球面知交线 C 为一圆周曲线。

3°圆 C 的圆心 Q 即为由原点到平面 Π 的垂足，故 Q 点位于过原点且与平面 Π 垂直的直线 l 上。

综上所述，可见曲面(3)是以直线

$$l: \quad \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

为旋转轴的旋转曲面。

3424. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = yf\left(\frac{z}{y}\right)$$

所给出，证明：

$$(x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz.$$

证 由于

$$2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{z}{y}\right) \frac{\partial z}{\partial x},$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{f'\left(\frac{z}{y}\right) - 2z}.$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2 + z^2 - zf'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz - yf'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

于是，

$$\begin{aligned}
& (x^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial z}{\partial x} + 2xy \frac{\partial z}{\partial y} \\
&= \frac{2xy(y^2 + z^2 - x^2) + 2xy(x^2 - y^2 + z^2 - zf')}{y(2z - f')} \\
&= \frac{2xyz(2z - f')}{y(2z - f')} = 2xz,
\end{aligned}$$

本题获证.

3425. 函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$$

所给出, 证明:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

证 由于

$$F'_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial x}\right) + F'_2 \cdot \left(\frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - z}{x^2}\right) = 0,$$

$$F'_1 \cdot \left(\frac{y \frac{\partial z}{\partial y} - z}{y^2}\right) + F'_2 \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{yzF'_2 - x^2yF'_1}{x(xF'_1 + yF'_2)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{xzF'_1 - xy^2F'_2}{y(xF'_1 + yF'_2)}.$$

于是,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{yzF'_2 - x^2yF'_1 + xzF'_1 - xy^2F'_2}{xF'_1 + yF'_2}$$

$$= -\frac{(z-xy)(xF'_1+yF'_2)}{xF'_1+yF'_2} = z-xy,$$

本题获证.

3426. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z &= f(\alpha), \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha &= f'(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

[其中 $\alpha = \alpha(x, y)$ 为参变数及 $f(\alpha)$ 为任意可微分的函数] 所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程式

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2.$$

证 由 $x\cos\alpha + y\sin\alpha + \ln z = f(\alpha)$ 两端对 x 求偏导函数, 得

$$\begin{aligned} \cos\alpha - x\sin\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + y\cos\alpha \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ = f'(\alpha) \frac{\partial\alpha}{\partial x}. \end{aligned}$$

由于 $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = f'(\alpha)$, 代入上式, 即得

$$\cos\alpha + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \text{或} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -z\cos\alpha. \quad (1)$$

同法可求得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -z\sin\alpha. \quad (2)$$

将 (1), (2) 两式依次平方, 然后相加, 即得

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2,$$

本题获证.

3427. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} z &= \alpha x + \frac{y}{\alpha} + f(\alpha), \\ 0 &= x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha) \end{aligned} \right\}$$

所给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

证 由于

$$\begin{aligned} dz &= \alpha dx + \frac{1}{\alpha} dy + \left[x - \frac{y}{\alpha^2} + f'(\alpha) \right] d\alpha \\ &= \alpha dx + \frac{1}{\alpha} dy, \end{aligned}$$

故有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\alpha}.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1,$$

本题获证.

3428. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} [z - f(\alpha)]^2 &= x^2(y^2 - \alpha^2), \\ [z - f(\alpha)] f'(\alpha) &= \alpha x^2 \end{aligned} \right\}$$

所定义的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = xy.$$

证 $2[z - f(a)][dz - f'(a)da] = (y^2 - a^2)2xdx + x^2(2ydy - 2ada)$. 于是,

$$\begin{aligned} [z - f(a)]dz &= x(y^2 - a^2)dx + x^2ydy \\ &\quad - \{ax^2 - [z - f(a)]f'(a)\}da \\ &= x(y^2 - a^2)dx + x^2ydy, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x(y^2 - a^2)}{z - f(a)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2y}{z - f(a)},$$

从而得

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{x^3y(y^2 - a^2)}{[z - f(a)]^2} \\ &= xy \cdot \frac{x^2(y^2 - a^2)}{[z - f(a)]^2} = xy, \end{aligned}$$

本题获证.

3429. 证明: 由方程组

$$\left. \begin{aligned} z &= ax + y\varphi(a) + \psi(a), \\ 0 &= x + y\varphi'(a) + \psi'(a) \end{aligned} \right\}$$

所给出的函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0.$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = a + x \frac{\partial a}{\partial x} + y\varphi'(a) \frac{\partial a}{\partial x} + \psi'(a) \frac{\partial a}{\partial x}$

$$= \alpha + [x + y\varphi'(\alpha) + \psi'(\alpha)] \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \alpha}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \frac{\partial z}{\partial y} &= x \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \varphi(\alpha) + y\varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} \\ &+ \psi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \varphi(\alpha), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

$$\begin{aligned} \text{而 } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \varphi'(\alpha) - \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} \right)^2 \\ &= \frac{\partial \alpha}{\partial y} \left[\varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

由于 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, 故 $\frac{\partial \alpha}{\partial y} = \varphi'(\alpha) \frac{\partial \alpha}{\partial x}$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0^*),$$

本题获证.

*) 此式也可由原方程组第二式两端分别对 x 和 y 求偏导函数而获得.

3430. 证明: 由方程

$$y = x\varphi(z) + \psi(z)$$

所定义的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足方程

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

证 记 $\frac{\partial z}{\partial x} = p$, $\frac{\partial z}{\partial y} = q$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

将所给方程两端分别对 x 和对 y 逐次求偏导数, 得

$$\varphi(z) + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]p = 0,$$

$$[x\varphi'(z) + \psi'(z)]q = 1;$$

$$2\varphi'(z)p + [x\varphi''(z) + \psi''(z)]p^2 + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]r = 0, \quad (1)$$

$$\varphi'(z)q + [x\varphi''(z) + \psi''(z)]pq + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]s = 0, \quad (2)$$

$$[x\varphi''(z) + \psi''(z)]q^2 + [x\varphi'(z) + \psi'(z)]t = 0. \quad (3)$$

将 (1), (2), (3) 三式依次乘以 q^2 , $(-2pq)$ 及 p^2 , 然后相加, 并注意到 $x\varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0$ (因为 $[x\varphi'(z) + \psi'(z)]q = 1$), 即得

$$rq^2 - 2pqs + tp^2 = 0,$$

此即所要证明的.

§4. 变量代换

1° 在含有导函数的式子中的变量代换. 设于式

$$A = \Phi(x, y, y'_x, y''_{xx}, \dots)$$

中需要把 x, y 换为新的变量: t (自变量) 及 u (函数), 这些变量由方程

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u) \quad (1)$$

与原来的变量 x 和 y 联系起来.

把方程式 (1) 微分, 便有:

$$y'_x = \frac{\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial u} u'_i}{\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial u} u'_i}.$$

同样地可表示出高阶的导函数 y''_{xx} , ... 因此我们得:

$$A = \Phi_1(t, u, u'_i, u''_{ii}, \dots).$$

2° 在含有偏导函数的式子中自变量的代换. 若于下式中

$$B = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dots\right)$$

令

$$x = f(u, v), \quad y = g(u, v), \quad (2)$$

其中 u 和 v 为新的自变量, 则挨次的偏导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$

由下列方程所确定:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial u}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial v}, \end{aligned}$$

等等.

3° 在含有偏导函数的式子中自变量和函数的代换. 在一般的情况下, 设有方程

$$x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), z = h(u, v, w), \quad (3)$$

其中 u, v 为新的自变量及 $w = w(u, v)$ 为新的函数, 则对于偏

导函数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \dots$ 得到这样的方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial u}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v} \right) \\ &= \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial v}, \end{aligned}$$

等等.

在某些情况下, 使用全微分法进行变量代换是方便的.

3431. 把 y 看作新的自变量, 变换方程

$$y' y - 3y''^2 = x.$$

解 函数 $y = y(x)$ 的各阶导函数 y', y'', y''', \dots 与其反函数 $x = x(y)$ 的各阶导函数 x', x'', x''', \dots 之间有下述关系.

$$y' = \frac{1}{x'}, \quad \text{公式 1}$$

$$\begin{aligned}
 y'' &= (y')' = \left(\frac{1}{x'}\right)' \cdot y'_x = -\frac{x''}{x'^2} \cdot \frac{1}{x} \\
 &= -\frac{x''}{(x')^3}, \quad \text{公式 2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y''' &= (y'')' = -\left[\frac{x''}{(x')^3}\right]' \cdot y'_x \\
 &= \frac{3(x'')^2 - x'x'''}{(x')^5}. \quad \text{公式 3}
 \end{aligned}$$

以公式 1、2、3 代入所给方程，化简整理即得

$$x''' + x(x')^5 = 0.$$

3432. 用同样的方法变换方程

$$(y')^2 y^{(4)} - 10y' y'' y''' + 15(y'')^3 = 0.$$

解 解法一

由公式 3 可得

$$\begin{aligned}
 y^{(4)} &= (y''')' = \left[\frac{3(x'')^2 - x'x'''}{(x')^5}\right]' \cdot y'_x \\
 &= \frac{6x'x''x''' - (x')^2x^{(4)} - x'x''x'''' - 5[3(x'')^2 - x'x''']x''}{(x')^6} \\
 &\cdot \frac{1}{x'} = \frac{10x'x''x''' - (x')^2x^{(4)} - 15(x'')^3}{(x')^7}. \quad \text{公式 4}
 \end{aligned}$$

以公式 1、2、3、4 代入所给方程，化简整理即得

$$x^{(4)} = 0.$$

解法二

由公式 4 可看出

$$x^{(4)} = \frac{10y'y''y''' - (y')^2y^{(4)} - 15(y'')^3}{(y')^7}.$$

因此, 所给方程可改写为

$$-x^{(4)}(y')^7 = 0.$$

由于 $y' \neq 0$, 故得

$$x^{(4)} = 0.$$

3433. 取 x 作函数, $t = xy$ 作自变量, 变换方程

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0.$$

解 将 $t = t(x)$ 看作 x 的函数, 对 $t = xy$ 两端分别求 x 的一阶、二阶导数, 得

$$\frac{dt}{dx} = y + xy', \quad (1)$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = 2y' + xy''. \quad (2)$$

由于 $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dx}}$, 故由 (1) 式得

$$y' = \frac{1 - y\frac{dx}{dt}}{x\frac{dx}{dt}}. \quad (3)$$

由公式 2 及 (2) 式可得

$$-\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} = 2y' + xy'',$$

$$y'' = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} - \frac{2y'}{x}. \quad (4)$$

將 (4) 式代入所給方程，得

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + xy\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = 0 \text{ 或 } \frac{d^2x}{dt^2} - t\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 = 0.$$

引入新變量，變換下列常微分方程：

3434. $x^2y'' + xy' + y = 0$ ，若 $x = e^t$ 。

解 當函數 y 不變，只作自變量的代換 $x = x(t)$ 時，

注意到對 $\frac{dt}{dx}$ ， $\frac{d^2t}{dx^2}$ 運用公式 1 及 2，即得

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \quad \text{公式 5}$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d^2y}{dt^2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{dy}{dt} \frac{d^2t}{dx^2} \\ &= \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt} \right)^3}. \end{aligned} \quad \text{公式 6}$$

在本題中， $x = e^t$ ，故有

$$\frac{dx}{dt} = e^t = x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = e^t = x,$$

從而有

$$\begin{aligned} y' &= \frac{\frac{dy}{dt}}{x}, \\ y'' &= \frac{x \frac{d^2y}{dt^2} - x \frac{dy}{dt}}{x^3} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right). \end{aligned}$$

將 y' 及 y'' 代入所給方程，即得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + y = 0.$$

3435. $y'' = \frac{6y}{x^3}$, 若 $t = \ln|x|$.

解 应用复合函数求导公式, 有

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \frac{dy}{dt} \right) = \frac{1}{x^2} \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} \frac{dt}{dx} - \frac{dy}{dt} \right)$$

$$= \frac{\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}}{x^2},$$

$$y''' = \frac{1}{x^4} \left[x^2 \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \frac{dt}{dx} - 2x \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{x^3} \left(\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} \right).$$

将 y'' 代入所给方程, 即得

$$\frac{d^3 y}{dt^3} - 3 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} - 6y = 0.$$

3436. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0$, 若 $x = \cos t$.

解 注意到 $\frac{dx}{dt} = -\sin t$, $\frac{d^2 x}{dt^2} = -\cos t$, 用公式 5 及

6, 就有

$$y' = -\frac{\frac{dy}{dt}}{\sin t}, \quad y'' = \frac{-\sin t \frac{d^2 y}{dt^2} + \cos t \frac{dy}{dt}}{-\sin^3 t}.$$

将 y' , y'' 及 x 代入所给方程, 即得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + n^2 y = 0.$$

3437. $y'' + y' \operatorname{th} x + \frac{m^2}{\operatorname{ch}^2 x} y = 0$, 若 $x = \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$.

解 仍用公式 5 及 6, 注意到

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\sin t}, \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\cos t}{\sin^2 t},$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{1}{\sin t}, \quad \operatorname{th} x = -\cos t,$$

就有

$$y' = \sin t \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \sin^2 t \frac{d^2 y}{dt^2} + \sin t \cos t \frac{dy}{dt}.$$

将 y' , y'' , $\operatorname{ch} x$ 及 $\operatorname{th} x$ 代入所给方程, 即得

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + m^2 y = 0.$$

3438. $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, 令 $y = ue^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$.

解 $y' = \frac{du}{dx} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} - \frac{1}{2} u \cdot p(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$

$$y'' = \frac{d^2 u}{dx^2} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi} - p(x) \frac{du}{dx} e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$$

$$+ \frac{1}{4} u \cdot p^2(x) e^{-\frac{1}{2} \int_{x_0}^x p(\xi) d\xi}$$

$$-\frac{1}{2}u \cdot p'(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^x p(t) dt}.$$

将 y', y'' 代入所给方程, 化简整理即得

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[q(x) - \frac{1}{4}p^2(x) - \frac{1}{2}p'(x) \right]u = 0.$$

3439. $x^4 y'' + x y y' - 2y^2 = 0$. 令

$$x = e^t, \quad y = u e^{2t},$$

其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{2t}(2u + u')}{e^t} = e^t(2u + u'),$$

$$y'' = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t(u'' + 3u' + 2u)}{e^t} = u'' + 3u' + 2u,$$

其中 u' 及 u'' 表示 u 对 t 的一阶及二阶导函数, 以下各题类似, 不再说明.

将 y', y'' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$u'' + (u+3)u' + 2u = 0.$$

3440. $(1+x^2)^2 y'' = y$, 若

$$x = \operatorname{tg} t, \quad y = \frac{u}{\cos^2 t},$$

其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{\frac{u' \cos^2 t + u \sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^2 t}} = u' \cos t + u \sin t,$$

$$y'' = \frac{u'' \cos t + u \cos t}{\frac{1}{\cos^2 t}} = (u'' + u) \cos^3 t.$$

將 y' , y'' 及 x, y 代入所給方程, 化簡整理即得

$$u'' = 0.$$

3441. $(1-x^2)^2 y'' = -y$, 若

$$x = \operatorname{th} t, \quad y = \frac{u}{\operatorname{ch} t},$$

其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{\frac{u' \operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t}}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}} = u' \operatorname{ch} t - u \operatorname{sh} t,$$

$$y'' = \frac{u'' \operatorname{ch} t - u \operatorname{ch} t}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}} = (u'' - u) \operatorname{ch}^3 t.$$

將 y'' 及 x, y 代入所給方程, 化簡整理即得

$$u'' = 0.$$

3442. $y'' + (x+y)(1+y')^3 = 0$, 若 $x = u+t$, $y = u-t$,

其中 $u = u(t)$.

$$\text{解 } y' = \frac{u' - 1}{u' + 1},$$

$$y'' = \frac{\frac{u''(u'+1) - u''(u'-1)}{(u'+1)^2}}{u'+1} = \frac{2u''}{(u'+1)^3}.$$

将 y' , y'' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$u'' + 8u(u')^3 = 0.$$

3443. $y'' - x^3 y'' + xy' - y = 0$, 若 $x = \frac{1}{t}$ 及 $y = \frac{u}{t}$, 其中 $u = u(t)$.

解 $y' = \frac{\frac{u't - u}{t^2}}{-\frac{1}{t^2}} = u - tu'$,

$$y'' = \frac{-tu''}{-\frac{1}{t^2}} = t^3 u'',$$

$$y''' = \frac{3t^2 u'' + t^3 u'''}{-\frac{1}{t^2}} = -t^4 (3u'' + tu''').$$

将 y' , y'' , y''' 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$t^5 u + (3t^4 + 1)u'' + u' = 0.$$

3444. 假定

$$u = \frac{y}{x-b}, \quad t = \ln \left| \frac{x-a}{x-b} \right|,$$

并取 u 作为变量 t 的函数, 以变换斯托克斯方程

$$y'' = \frac{Ay}{(x-a)^2(x-b)^2}.$$

解 由于 $t = \ln|x-a| - \ln|x-b|$, 故有

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b} = \frac{a-b}{(x-a)(x-b)}$$

$$\text{或 } \frac{dx}{dt} = \frac{(x-a)(x-b)}{a-b}. \quad (1)$$

又因 $u = \frac{y}{x-b}$, 故 $y = u(x-b)$,

$$\begin{aligned} y' &= (x-b) \frac{du}{dx} + u = \frac{\frac{du}{dt}}{\frac{dx}{dt}} (x-b) + u \\ &= \frac{(a-b)u'}{x-a} + u, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \left[\frac{(a-b)u''}{x-a} + u' - \frac{(a-b)u'}{(x-a)^2} \frac{dx}{dt} \right] \\ &\cdot \frac{b-a}{(x-a)(x-b)} = \frac{(a-b)^2(u''-u')}{(x-a)^2(x-b)}. \end{aligned} \quad (3)$$

将(3)式代入所给方程, 即得

$$u'' - u' = \frac{Au}{(a-b)^2} \quad (a \neq b).$$

3445. 证明: 若方程

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x) \frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

由代换 $x = \varphi(\xi)$ 变换为方程

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + P(\xi) \frac{dy}{d\xi} + Q(\xi)y = 0,$$

则

$$\begin{aligned} & [2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} \\ &= [2p(x)q(x) + q'(x)][q(x)]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

证 $\frac{dx}{d\xi} = \varphi'(\xi)$, $\frac{d^2x}{d\xi^2} = \varphi''(\xi)$. 由公式 5 及 6, 得

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\xi}}{\varphi'(\xi)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{(\varphi'(\xi))^2} \frac{d^2y}{d\xi^2} \\ &\quad - \frac{\varphi''(\xi)}{(\varphi'(\xi))^3} \frac{dy}{d\xi}. \end{aligned}$$

代入原方程, 两端同乘 $[\varphi'(\xi)]^2$, 即得

$$\begin{aligned} & \frac{d^2y}{d\xi^2} + \left\{ p[\varphi(\xi)]\varphi'(\xi) - \frac{\varphi''(\xi)}{\varphi'(\xi)} \right\} \frac{dy}{d\xi} \\ & + q[\varphi(\xi)][\varphi'(\xi)]^2 y = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$P(\xi) = p\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'}, \quad Q(\xi) = q \cdot (\varphi')^2;$$

$$Q'(\xi) = q' \cdot (\varphi')^2 + 2q\varphi'\varphi''.$$

从而得知

$$\begin{aligned} & [2P(\xi)Q(\xi) + Q'(\xi)][Q(\xi)]^{-\frac{3}{2}} \\ &= \left\{ 2\left(p\varphi' - \frac{\varphi''}{\varphi'} \right) q \cdot (\varphi')^2 + q' \cdot (\varphi')^2 \right. \\ & \quad \left. + 2q\varphi'\varphi'' \right\} [q \cdot (\varphi')^2]^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{2pq \cdot (\varphi')^3 + q' \cdot (\varphi')^3\} q^{-\frac{3}{2}} \cdot (\varphi')^{-3}, \\
&= [2p(x)q(x) + q'(x)] [q(x)]^{-\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

本题获证.

3446. 在方程

$$\Phi(y, y', y'') = 0$$

(其中 Φ 为变量 y, y', y'' 的齐次函数) 中令 $y = e^{\int_{x_0}^x u dx}$.

$$\text{解 } y' = u \cdot e^{\int_{x_0}^x u dx}, \quad y'' = (u' + u^2) e^{\int_{x_0}^x u dx}.$$

代入方程 $\Phi(y, y', y'') = 0$, 由于 Φ 关于 y, y', y'' 是齐次的, 因此, 各项含有的因式 $e^{\int_{x_0}^x u dx}$ 均可约去, 最后得

$$\Phi(1, u, u' + u^2) = 0.$$

3447. 在方程

$$F(x^2 y'', xy', y) = 0$$

(其中 F 为其变量的齐次函数) 中令 $u = x \cdot \frac{y'}{y}$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } y' &= \frac{yu}{x}, \quad y'' = \frac{x(u'y + y'u) - yu}{x^2} \\
&= \frac{y[xu' + (u^2 - u)]}{x^2}. \text{ 于是,}
\end{aligned}$$

$$xy' = uy, \quad x^2 y'' = y[xu' + (u^2 - u)].$$

由于 F 为其变量的齐次函数, 因此, 各项含有的因子 y 均可约去, 最后得

$$F(xu' + u^2 - u, u, 1) = 0.$$

3448. 证明: 经射影变换

$$x = \frac{a_1\xi + b_1\eta + c_1}{a\xi + b\eta + c}, \quad y = \frac{a_2\xi + b_2\eta + c_2}{a\xi + b\eta + c},$$

方程式

$$y''(1+y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

不变其形状.

证 本题似有误. 事实上, 作压缩变换

$$x = \xi, \quad y = a\eta \quad (a \neq 0)$$

(它是射影变换的特例), 则原方程变为

$$a\eta''(1+a\eta'^2) - 3a^3\eta'\eta''^2 = 0,$$

显然形式已改变.

3449. 证明:

$$S[x(t)] = \frac{x''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2$$

对于线性分式变换

$$y = \frac{ax(t) + b}{cx(t) + d} \quad (ad - bc \neq 0),$$

其值不变.

证 已知的变换

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x + \frac{d}{c}\right) + \left(b - \frac{ad}{c}\right)}{cx+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cx+d)} \end{aligned}$$

可由下述变换所构成:

$$y = \alpha + \beta y_2, \quad y_2 = \frac{1}{y_1}, \quad y_1 = cx + d.$$

只要证明在上述各种变换下 S 的值不变即可。

1° 令 $y_1 = cx + d$, 则 $y_1'(t) = cx'(t)$, $y_1''(t) = cx''(t)$, $y_1'''(t) = cx'''(t)$. 于是,

$$\begin{aligned} S[y_1(t)] &= \frac{y_1'''(t)}{y_1'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{y_1''(t)}{y_1'(t)} \right]^2 \\ &= \frac{x'''(t)}{x'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{x''(t)}{x'(t)} \right]^2 = S[x(t)]; \end{aligned}$$

$$2^\circ \text{ 令 } y_2 = \frac{1}{y_1}, \text{ 则 } y_2'(t) = -\frac{y_1'}{y_1^2},$$

$$y_2''(t) = -\frac{y_1 y_1'' - 2y_1'^2}{y_1^3},$$

$$y_2'''(t) = -\frac{y_1''' y_1^2 - 6y_1'' y_1' y_1 + 6y_1'^3}{y_1^4}. \text{ 于是,}$$

$$\begin{aligned} S[y_2(t)] &= \frac{y_2'''(t)}{y_2'(t)} - \frac{3}{2} \left[\frac{y_2''(t)}{y_2'(t)} \right]^2 \\ &= \frac{\frac{y_1''' y_1^2 - 6y_1'' y_1' y_1 + 6y_1'^3}{y_1^4}}{-\frac{y_1'}{y_1^2}} - \frac{3}{2} \left[\frac{\frac{y_1 y_1'' - 2y_1'^2}{y_1^3}}{-\frac{y_1'}{y_1^2}} \right]^2 \\ &= \frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{6y_1''}{y_1} + \frac{6y_1'^2}{y_1^2} - \frac{3}{2} \left(\frac{y_1''}{y_1'} - \frac{2y_1'}{y_1} \right)^2 \\ &= \frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y_1''}{y_1'} \right)^2 = S[y_1(t)] = S[x(t)]; \end{aligned}$$

3° 由1°及2°即知

$$\begin{aligned}
 S(y(t)) &= S(\alpha + \beta y_2) = \frac{(\alpha + \beta y_2)'''}{(\alpha + \beta y_2)'} \\
 &\quad - \frac{3}{2} \left\{ \frac{(\alpha + \beta y_2)''}{(\alpha + \beta y_2)'} \right\}^2 \\
 &= \frac{y_2'''}{y_2'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y_2''}{y_2'} \right)^2 = S(y_2(t)) = S(x(t)). \text{证毕.}
 \end{aligned}$$

将下列方程式改变为极坐标 r 与 φ 所表示的方程, 即令 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$:

3450. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.

解 当 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ 时,

$$\frac{dx}{d\varphi} = \cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi, \quad \frac{dy}{d\varphi} = \sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2x}{d\varphi^2} = \cos \varphi \frac{d^2r}{d\varphi^2} - 2 \sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \cos \varphi,$$

$$\frac{d^2y}{d\varphi^2} = \sin \varphi \frac{d^2r}{d\varphi^2} + 2 \cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi.$$

由公式 5 及 6, 即得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\sin \varphi \frac{dr}{d\varphi} + r \cos \varphi}{\cos \varphi \frac{dr}{d\varphi} - r \sin \varphi}, \quad \text{公式 7}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{d\varphi^2} \frac{dx}{d\varphi} - \frac{dy}{d\varphi} \frac{d^2x}{d\varphi^2}}{\left(\frac{dx}{d\varphi} \right)^3}$$

$$= \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\varphi^2}}{\left(\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi\right)^3}. \quad \text{公式 8}$$

将公式 7 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$\frac{dr}{d\varphi} = r \text{ 或 } r' = r.$$

以下各题, $\frac{dr}{d\varphi}$ 及 $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$ 均简记为 r' 及 r'' .

3451. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2).$

$$\begin{aligned} \text{解 } xy' - y &= r\cos\varphi \cdot \frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} - r\sin\varphi \\ &= \frac{r(r'\sin\varphi\cos\varphi + r\cos^2\varphi - r'\sin\varphi\cos\varphi + r\sin^2\varphi)}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi} \\ &= \frac{r^2}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + y'^2 &= 1 + \left(\frac{r'\sin\varphi + r\cos\varphi}{r'\cos\varphi - r\sin\varphi}\right)^2 \\ &= \frac{r'^2 + r^2}{(r'\cos\varphi - r\sin\varphi)^2}. \end{aligned}$$

将 $xy' - y, 1 + y'^2$ 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$r'^2 = \frac{1 - \sin 2\varphi}{\sin 2\varphi} r^2.$$

$$3452. (x^2 + y^2)^2 y'' = (x + yy')^3.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } x + yy' &= r \cos \varphi + r \sin \varphi \cdot \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} \\ &= \frac{rr' \cos^2 \varphi - r^2 \sin \varphi \cos \varphi + rr' \sin^2 \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi} \\ &= \frac{rr'}{r' \cos \varphi - r \sin \varphi}. \end{aligned}$$

将公式 8, $x + yy'$ 及 x, y 代入所给方程, 化简整理即得

$$r(r^2 + 2r'^2 - rr'') = r'^3.$$

3453. 把式子

$$\frac{x + yy'}{xy' - y}$$

变换为极坐标的式子.

解 将 3451 题中 $xy' - y$ 的结果及 3452 题中 $x + yy'$ 的结果代入所给式子, 即得

$$\frac{x + yy'}{xy' - y} = \frac{r'}{r}.$$

3454. 把平面曲线的曲率

$$K = \frac{|y''_{xx}|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

用极坐标 r 及 φ 表示之.

解 将 3451 题中 $1 + y'^2$ 的结果及公式 8 代入, 化简整理即得

$$K = \frac{|r^2 + 2r'{}^2 - rr''|}{(r^2 + r'{}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

3455. 将方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + kx(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + ky(x^2 + y^2)$$

改变为极坐标方程.

解 由原方程组得

$$\cos\varphi \frac{dr}{dt} - r\sin\varphi \frac{d\varphi}{dt} = r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi \frac{dr}{dt} + r\cos\varphi \frac{d\varphi}{dt} = -r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi.$$

联立解之, 即得

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} [r\cos\varphi \cdot (r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi)$$

$$- (-r\sin\varphi)(-r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi)] = kr^2,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{r} [\cos\varphi \cdot (-r\cos\varphi + kr^3\sin\varphi)$$

$$- \sin\varphi \cdot (r\sin\varphi + kr^3\cos\varphi)] = -1,$$

即原方程组转化为

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = kr^2, \\ \frac{d\varphi}{dt} = -1. \end{cases}$$

3456. 引用新函数 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$, 变换式子

$$W = x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

解 由 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 两端微分, 得

$$dr = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy$$

或

$$r dr = x dx + y dy. \quad (1)$$

由 $\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ 两端微分, 得

$$d\varphi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r^2} dy - \frac{y}{r^2} dx$$

或

$$r^2 d\varphi = x dy - y dx. \quad (2)$$

于是, 由(1)及(2)可得

$$\begin{aligned} x r dr - y r^2 d\varphi &= (x^2 dx + x y dy) - (x y dy - y^2 dx) \\ &= (x^2 + y^2) dx = r^2 dx, \end{aligned}$$

$$dx = \frac{x}{r} dr - y d\varphi. \quad (3)$$

同理可得

$$dy = \frac{y}{r} dr + x d\varphi. \quad (4)$$

从而由(3)及(4), 得

$$\begin{aligned} x d^2 y - y d^2 x &= x \left(\frac{y}{r} d^2 r - \frac{y}{r^2} dr^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{r} dr dy + dx d\varphi + x d^2 \varphi \\ &\quad - y \left(\frac{x}{r} d^2 r - \frac{x}{r^2} dr^2 + \frac{1}{r} dx dr - dy d\varphi - y d^2 \varphi \right) \\ &= \frac{dr}{r} (x dy - y dx) + (x dx + y dy) d\varphi \\ &\quad + (x^2 + y^2) d^2 \varphi \\ &= \frac{dr}{r} (r^2 d\varphi) + (r dr) d\varphi + r^2 d^2 \varphi \\ &= 2r dr d\varphi + r^2 d^2 \varphi, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} W &= x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \\ &= \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right). \end{aligned}$$

3457. 在勒襄德变换中曲线 $y = y(x)$ 的每一点 (x, y) 对应于点 (X, Y) , 其中

$$X = y', \quad Y = xy' - y.$$

求 Y' , Y'' 及 Y''' .

$$\text{解 } Y' = \frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dx} \cdot \frac{dx}{dX} = \frac{xy''}{\frac{dX}{dx}} = \frac{xy''}{y''} = x;$$

$$Y'' = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{1}{y''};$$

$$Y''' = \frac{\frac{dY''}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{-\frac{y'''}{y''^2}}{y''} = -\frac{y'''}{y''^3}.$$

引入新变量 ξ 及 η , 解下列方程:

$$3458. \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \text{令 } \xi = x + y, \eta = x - y.$$

解 当仅作为自变量代换, 引入新自变量

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y)$$

这个最简单的情形时, 只要把 ξ, η 看作中间变量, 用复合函数求偏导函数的公式, 即可求出:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}.$$

代入原方程, 即得变换后的方程. 本题中,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -1.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程, 得

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta} \quad \text{或} \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0,$$

即

$$z = \varphi(\xi) = \varphi(x + y),$$

其中 φ 为任意的函数.

3459. $y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 令 $\xi = x$, $\eta = x^2 + y^2$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 2y$.

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程, 得

$$y \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} + 2x \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - 2xy \frac{\partial z}{\partial \eta} = 0 \quad \text{或} \quad y \frac{\partial z}{\partial \xi} = 0.$$

由于 $y \neq 0$, 故 $\frac{\partial z}{\partial \xi} = 0$, 即

$$z = \varphi(\eta) = \varphi(x^2 + y^2),$$

其中 φ 为任意的函数.

3460. $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = 1$ ($a \neq 0$), 令 $\xi = x$, $\eta = y - bx$.

解 当变量间的变换关系比较复杂时，用全微分法较好。首先，根据新旧变元之间的关系，求出它们微分之间的关系

$$d\xi = dx, \quad d\eta = dy - b dz. \quad (1)$$

其次，将所求得的微分式代入表示新变元关系的全微分式，并按旧变元关系重新整理。

$$dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta = \frac{\partial z}{\partial \xi} dx + \frac{\partial z}{\partial \eta} (dy - b dz),$$

$$\left(1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} dx + \frac{\partial z}{\partial \eta} dy,$$

$$dz = \frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}} dx + \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}} dy.$$

把整理后的式子与表示旧变元的全微分式

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

比较，即得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

代入原方程，得

$$a \frac{\partial z}{\partial \xi} + b \frac{\partial z}{\partial \eta} = 1 + b \frac{\partial z}{\partial \eta} \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{1}{a}.$$

于是，

$$z = \frac{\xi}{a} + \varphi(\eta) = \frac{x}{a} + \varphi(y - bz).$$

3461. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$, 令 $\xi = x$ 及 $\eta = \frac{y}{x}$.

解 $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

代入原方程, 得

$$x \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) + \frac{y}{x} \frac{\partial z}{\partial \eta} = z,$$

$$x \frac{\partial z}{\partial \xi} = z \text{ 或 } \xi \frac{\partial z}{\partial \xi} = z.$$

解之, 得

$$z = \xi \varphi(\eta) = x \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

取 u 与 v 作新的自变量, 变换下列方程式:

3462. $x \frac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2} \frac{\partial z}{\partial y} = xy$, 若 $u = \ln x$,

$$v = \ln(y + \sqrt{1+y^2}).$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

注意到 $x=e^u$ 及 $y=\operatorname{sh}v$, 代入原方程, 即得

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = e^u \operatorname{sh}v.$$

3463. $(x+y)\frac{\partial z}{\partial x} - (x-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, 若 $u = \ln\sqrt{x^2+y^2}$,

$$v = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2},$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{x^2+y^2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程, 得

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} \left(x \frac{\partial z}{\partial u} - y \frac{\partial z}{\partial v} \right) - \frac{x-y}{x^2+y^2}$$

$$\cdot \left(y \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$3464. \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{若 } u = \frac{y}{x},$$

$$v = z + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

解 本解用微分法较好。

$$du = \frac{xdy - ydx}{x^2}.$$

$$dv = dz + \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= dz + \frac{xdx + ydy + zdz}{r}$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}).$$

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} \left(\frac{dy}{x} - \frac{ydx}{x^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial v} \left(dz + \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz \right). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz &= \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx \\ &\quad + \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dy, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1}.$$

代入原方程, 得

$$\begin{aligned} & x \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) + y \left(\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= (z+r) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\ & 2(z+r) \frac{\partial z}{\partial v} = z+r. \end{aligned}$$

如果 $z+r=0$, 则可推得 $x^2+y^2=0$, 但由于 $x \neq 0$, 所以 x^2+y^2 不可能为零. 于是, $z+r \neq 0$, 从而得

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2}.$$

3465. $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{z}$, 若 $u=2x-z^2$, $v=\frac{y}{z}$.

解 $du=2dx-2zdz$, $dv=\frac{dy}{z}-\frac{y}{z^2}dz$.

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} (2dx - zdz) \\ &+ \frac{\partial z}{\partial v} \left(\frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz \right). \end{aligned}$$

于是,

$$\left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz = 2 \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} \left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial v} \left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1}.$$

代入原方程，得

$$2x \frac{\partial z}{\partial u} + y \cdot \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{x}{z} \left(1 + 2z \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{y}{z^2} \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$\left(\frac{y}{z} - \frac{xy}{z^3} \right) \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{x}{z}.$$

再以 $y = zv$, $x = \frac{1}{2}(u + z^2)$ 代入上式，最后得

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{z}{v} \cdot \frac{z^2 + u}{z^2 - u}.$$

3466+. $(x+z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = x+y+z$, 若 $u = x+z$,

$$v = y+z.$$

解 $dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} (dx + dz)$

$$+ \frac{\partial z}{\partial v} (dy + dz).$$

于是，

$$\left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz = \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^{-1}.$$

将 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程, 并注意到 $x + y + z = u + v - z$, 即得

$$u \frac{\partial z}{\partial u} + v \frac{\partial z}{\partial v} = (u + v - z) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

$$(2u + v - z) \frac{\partial z}{\partial u} + (2v + u - z) \frac{\partial z}{\partial v} = u + v - z.$$

3467. 取

$$\xi = y + ze^{-x}, \quad \eta = x + ze^{-y}$$

作为新的自变量, 变换式子

$$(z + e^x) \frac{\partial z}{\partial x} + (z + e^y) \frac{\partial z}{\partial y} = (z^2 - e^{x+y}).$$

$$\text{解 } dz = \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta$$

$$= \frac{\partial z}{\partial \xi} (dy + e^{-x} dz - ze^{-x} dx) + \frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$\cdot (dx + e^{-y} dz - ze^{-y} dy),$$

于是,

$$\left(1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) dz = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - ze^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) dx$$

$$+ \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - ze^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta} - z e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \left(1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} - z e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \left(1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^{-1}.$$

代入原式，化简整理即得

$$\text{原式} = \frac{e^{x+y} - z^2}{1 - e^{-x} \frac{\partial z}{\partial \xi} - e^{-y} \frac{\partial z}{\partial \eta}}.$$

3468. 假定

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$$

变换式子

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2.$$

解 $dx = vdu + u dv$, $dy = udu - v dv$. 解之，得

$$du = \frac{v dx + u dy}{u^2 + v^2}, \quad dv = \frac{u dx - v dy}{u^2 + v^2}.$$

于是，

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\frac{\partial z}{\partial u} (v dx + u dy) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial z}{\partial v} (u dx - v dy) \right] \\ &= \frac{1}{u^2 + v^2} \left[\left(v \frac{\partial z}{\partial u} + u \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx + \left(u \frac{\partial z}{\partial u} - v \frac{\partial z}{\partial v} \right) dy \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 &= \frac{1}{(u^2+v^2)^2} \left[\left(v\frac{\partial z}{\partial u} + u\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(u\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{u^2+v^2} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \right]. \end{aligned}$$

3469. 于方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

中令 $\xi = x$, $\eta = y - x$, $\zeta = z - x$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta}.$$

三式相加即得

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0.$$

3470. 取 x 作为函数, 而 y 和 z 作为自变量, 变换方程

$$(x-z)\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

$$\text{解 } dx = \frac{\partial x}{\partial y} dy + \frac{\partial x}{\partial z} dz, \quad dz = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} dx - \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}} dy.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}}.$$

代入原方程, 得

$$(x-z) \cdot \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} - y \cdot \frac{\frac{\partial x}{\partial y}}{\frac{\partial x}{\partial z}} = 0,$$

即

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{x-z}{y} \quad (y \neq 0).$$

3471. 取 x 作为函数, 而 $u=y-z$, $v=y+z$ 作为自变量, 变换方程

$$(y-z) \frac{\partial z}{\partial x} + (y+z) \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

解 $du = dy - dz$, $dv = dy + dz$.

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{\partial x}{\partial u} (dy - dz) \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial v} (dy + dz). \end{aligned}$$

于是,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v} \right) dz = -dx + \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} \right) dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原方程，去分母，即得

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{v} \quad (v \neq 0).$$

3472⁺. 取 x 作为函数及 $u = xz$, $v = yz$ 作为自变量，变换式子

$$A = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

解 $du = xdz + zdx$, $dv = ydz + zdy$.

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = \frac{\partial x}{\partial u} (xdz + zdx)$$

$$+ \frac{\partial x}{\partial v} (ydz + zdy).$$

于是，

$$\left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}\right) dz = \left(1 - z \frac{\partial x}{\partial u}\right) dx - z \frac{\partial x}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - z \frac{\partial x}{\partial u}}{x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z \frac{\partial x}{\partial v}}{x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}}.$$

代入原式，即得

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\left(1 - z \frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \\
&= \frac{1 - 2z \frac{\partial x}{\partial u} + z^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{\left(x \frac{\partial x}{\partial u} + y \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \\
&= \frac{1 - 2 \cdot \frac{u}{x} \frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{u}{x}\right)^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right]}{x^2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{v}{u} \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} \\
&= \frac{u^2 \left\{ x^2 - 2xu \frac{\partial x}{\partial u} + u^2 \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right] \right\}}{x^4 \left(u \frac{\partial x}{\partial u} + v \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}.
\end{aligned}$$

3473. 于方程

$$\begin{aligned}
&(y+z+u) \frac{\partial u}{\partial x} + (x+z+u) \frac{\partial u}{\partial y} \\
&+ (x+y+u) \frac{\partial u}{\partial z} = x+y+z
\end{aligned}$$

中, 令: $e^\xi = x-u$, $e^\eta = y-u$, $e^\zeta = z-u$.

$$\begin{aligned}
\text{解 } du &= \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial u}{\partial \zeta} d\zeta \\
&= \frac{\partial u}{\partial \xi} e^{-\xi} (dx - du) + \frac{\partial u}{\partial \eta} e^{-\eta} (dy - du) \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial \zeta} e^{-\zeta} (dz - du).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \left(1 + e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) du \\ &= e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} dx + e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} dy + e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} dz. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程, 即得

$$\begin{aligned} & (y+z+u)e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (x+z+u)e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ & + (x+y+u)e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ &= (x+y+z) \left(1 + e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right). \end{aligned}$$

消去同类项, 得

$$\begin{aligned} & (x-u)e^{-\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + (y-u)e^{-\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + (z-u)e^{-\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \\ & + (x+y+z) = 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} + 3u + e^{\xi} + e^{\eta} + e^{\zeta} = 0.$$

于下列方程中, 代入新的变量 u, v, w , 其中 $w = w(u, v)$,

$$3474. \quad y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z, \quad \text{令 } u = x^2 + y^2, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},$$

$$w = \ln z - (x+y).$$

$$\text{解 } du = 2x dx + 2y dy, \quad dv = -\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy,$$

$$dw = \frac{1}{z} dz - dx - dy.$$

另一方面, $dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} dz - dx - dy &= \frac{\partial w}{\partial u} (2x dx + 2y dy) \\ &+ \frac{\partial w}{\partial v} \left(-\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy \right). \end{aligned}$$

整理得

$$\begin{aligned} dz &= \left(2xz \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + z \right) dx \\ &+ \left(2yz \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{z}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} + z \right) dy. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程, 得

$$\begin{aligned} &yz \left(2x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right) \\ &- xz \left(2y \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} + 1 \right) \\ &= (y-x)z, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

3475. $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2$, 令 $u=x$, $v=\frac{1}{y} - \frac{1}{x}$,

$$w = \frac{1}{z} - \frac{1}{x}.$$

解 $du = dx$, $dv = \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy$, $dw = \frac{1}{x^2} dx$

$-\frac{1}{z^2} dz$. 于是,

$$\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{z^2} dz = \frac{\partial w}{\partial u} dx + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{y^2} dy \right),$$

$$dz = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) dx + \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z^2}{y^2} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

代入原方程, 得

$$z^2 \left(1 - x^2 \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) + z^2 \frac{\partial w}{\partial v} = z^2$$

或 $x^2 z^2 \frac{\partial w}{\partial u} = 0$.

由于 $z \neq 0$, $x \neq 0$, 故得

$$\frac{\partial w}{\partial u} = 0.$$

3476. $(xy + z) \frac{\partial z}{\partial x} + (1 - y^2) \frac{\partial z}{\partial y} = x + yz$, 设 $u = yz - x$,

$v = xz - y$, $w = xy - z$.

解 $dw = ydx + xdy - dz = \frac{\partial w}{\partial u} (zdy + ydz - dx)$

$$+ \frac{\partial w}{\partial v}(z dx + x dz - dy).$$

整理得

$$\begin{aligned} \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right) dz &= \left(y + \frac{\partial w}{\partial u} - z \frac{\partial w}{\partial v}\right) dx \\ &+ \left(x + \frac{\partial w}{\partial v} - z \frac{\partial w}{\partial u}\right) dy. \end{aligned}$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(y + \frac{\partial w}{\partial u} - z \frac{\partial w}{\partial v}\right) \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{\partial w}{\partial v} - z \frac{\partial w}{\partial u}\right) \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right)^{-1}.$$

代入原方程, 得

$$\begin{aligned} &(xy + z) \left(y + \frac{\partial w}{\partial u} - z \frac{\partial w}{\partial v}\right) \\ &+ (1 - y^2) \left(x + \frac{\partial w}{\partial v} - z \frac{\partial w}{\partial u}\right) \\ &= (x + yz) \left(1 + x \frac{\partial w}{\partial v} + y \frac{\partial w}{\partial u}\right), \end{aligned}$$

即

$$(1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz) \frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

不难验证, 由方程 $1 - x^2 - y^2 - z^2 - 2xyz = 0$ 所确定的隐函数不是原方程的解 (证略). 于是,

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0.$$

$$3477. \left(x \frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(y \frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = z^2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \text{ 令 } x = ue^w, y = ve^w,$$

$$z = we^w.$$

$$\text{解 } dx = e^w du + ue^w dw, \quad dy = e^w dv + ve^w dw, \\ dz = e^w(1+w)dw.$$

于是, 有

$$e^w dw = \frac{1}{1+w} dz,$$

$$e^w du = dx - ue^w dw = dx - \frac{u}{1+w} dz,$$

$$e^w dv = dy - ve^w dw = dy - \frac{v}{1+w} dz.$$

在全微分式 $dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv$ 的两端都乘以 e^w , 并

将上述结果代入, 得

$$\frac{dz}{1+w} = \frac{\partial w}{\partial u} \left(dx - \frac{u}{1+w} dz \right) \\ + \frac{\partial w}{\partial v} \left(dy - \frac{v}{1+w} dz \right)$$

或

$$\left(1 + u \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial v} \right) dz = (1+w) \frac{\partial w}{\partial u} dx$$

$$+(1+w) \frac{\partial w}{\partial v} dy.$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入原方程, 得

$$\begin{aligned} & \left[ue^w(1+w) \frac{\partial w}{\partial u} \right]^2 + \left[ve^w(1+w) \frac{\partial w}{\partial v} \right]^2 \\ &= (we^w)^2 (1+w)^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}. \end{aligned}$$

消去 $[e^w(1+w)]^2$, 即得

$$u^2 \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 = w^2 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v}.$$

3478. 假定 $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $v = \operatorname{arctg} z$, $w = x + y + z$, 其中 $w = w(u, v)$, 变换式子

$$(x-y) : \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad dw &= dx + dy + dz = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial w}{\partial u} \left(\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial v} \left(\frac{dz}{1+z^2} \right). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{1+z^2} \frac{\partial w}{\partial v} \right) dz &= \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \frac{\partial w}{\partial u} - 1 \right) dx \\ &+ \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial w}{\partial u} - 1 \right) dy. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 代入所给式子, 即得

$$\begin{aligned} \frac{x-y}{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}} &= \frac{(x-y)\left(1 - \frac{1}{1+z^2} \frac{\partial w}{\partial v}\right)}{\frac{x-y}{x^2+y^2} \frac{\partial w}{\partial u}} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 v) \frac{\partial w}{\partial v} e^{2v}}{\frac{\partial w}{\partial u}}. \end{aligned}$$

3479. 假定 $u = xe^z$, $v = ye^z$, $w = ze^z$, 其中 $w = w(u, v)$. 变换式子

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } dw &= e^z(1+z)dz = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial w}{\partial u} (e^z dx + xe^z dz) + \frac{\partial w}{\partial v} (e^z dy + ye^z dz). \end{aligned}$$

于是,

$$\left(1+z - x \frac{\partial w}{\partial u} - y \frac{\partial w}{\partial v}\right) dz = \frac{\partial w}{\partial u} dx + \frac{\partial w}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial w}{\partial u}}{1+z - x \frac{\partial w}{\partial u} - y \frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial w}{\partial v}}{1 + z - x \frac{\partial w}{\partial u} - y \frac{\partial w}{\partial v}},$$

$$A = \frac{\partial z}{\partial x} : \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} : \frac{\partial w}{\partial v}.$$

3480. 在方程

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = u + \frac{xy}{z}$$

中令: $\xi = \frac{x}{z}, \eta = \frac{y}{z}, \zeta = z, w = \frac{u}{z},$

其中 $w = w(\xi, \eta, \zeta).$

$$\begin{aligned} \text{解 } dw &= \frac{z du - u dz}{z^2} = \frac{\partial w}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial w}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial w}{\partial \zeta} d\zeta \\ &= \frac{\partial w}{\partial \xi} \left(\frac{z dx - x dz}{z^2} \right) + \frac{\partial w}{\partial \eta} \left(\frac{z dy - y dz}{z^2} \right) \\ &\quad + \frac{\partial w}{\partial \zeta} dz. \end{aligned}$$

两端同乘 z^2 , 整理得

$$\begin{aligned} z du &= z \frac{\partial w}{\partial \xi} dx + z \frac{\partial w}{\partial \eta} dy + \left(u - x \frac{\partial w}{\partial \xi} - y \frac{\partial w}{\partial \eta} \right. \\ &\quad \left. + z^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) dz. \end{aligned}$$

将由上式所确定的 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 代入原方程, 得

$$x \frac{\partial w}{\partial \xi} + y \frac{\partial w}{\partial \eta} + \left(u - x \frac{\partial w}{\partial \xi} - y \frac{\partial w}{\partial \eta} + z^2 \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)$$

$$= u + \frac{xy}{z},$$

即

$$\frac{\partial w}{\partial \zeta} = \frac{xy}{z^2} = \frac{\xi\eta}{\zeta}.$$

假定 $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, 改变下列各式为极坐标 r 和 φ 所表示的式子.

3481. $w = x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}.$

解 $dx = \cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi,$

$$dy = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi.$$

联立解之, 得

$$dr = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy, \quad d\varphi = \frac{x}{r^2} dy - \frac{y}{r^2} dx.$$

于是,

$$du = \frac{\partial u}{\partial r} dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$= \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) dx + \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) dy,$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

公式 9

将公式 9 代入原式, 即得

$$\begin{aligned} w &= x \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) - y \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

3482. $w = x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}.$

解 将公式 9 代入, 即得

$$\begin{aligned} w &= x \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + y \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \\ &= r \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned}$$

3483. $w = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$

解 $w = \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2$
 $= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2.$

3484. $w = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

解 先导出极坐标变换的所有二阶偏导函数的变换式. 将 r, φ 看作中间变量, x, y 看作自变量. 由于

$$d^2 r = d(dr) = d\left(\frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r}(dx^2 + dy^2) - \frac{xdx + ydy}{r^2}dr \\
&= \frac{1}{r}(dx^2 + dy^2) - \frac{1}{r^3}(xdx + ydy)^2 \\
&= \frac{1}{r^3}(ydx - xdy)^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d^2\varphi &= d(d\varphi) = d\left(\frac{x}{r^2}dy - \frac{y}{r^2}dx\right) \\
&= -\frac{2(xdy - ydx)}{r^3}dr \\
&= -\frac{2}{r^4}(xdy - ydx)(xdx + ydy),
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
d^2u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}dr^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi}drd\varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}d\varphi^2 \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial r}d^2r + \frac{\partial u}{\partial\varphi}d^2\varphi \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{xdx + ydy}{r}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\varphi} \\
&\quad \cdot \left(\frac{xdx + ydy}{r}\right)\left(\frac{xdy - ydx}{r^2}\right) \\
&\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\left(\frac{xdy - ydx}{r^2}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{(ydx - xdy)^2}{r^3} \\
&\quad + \frac{\partial u}{\partial\varphi}\left(-\frac{2}{r^4}\right)(xdy - ydx)(xdx + ydy).
\end{aligned}$$

将上式右端按 dx^2 , $dx dy$, dy^2 合并同类项, 并与全微分式

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2$$

比较, 即得

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{y^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{y^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2xy}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} + \frac{x^2}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{x^2}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2xy}{r^4} \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{xy}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{x^2 - y^2}{r^3} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \varphi} - \frac{xy}{r^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad - \frac{xy}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right. \quad \text{公式10}$$

将公式10代入原式, 即得

$$w = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

3485. $w = x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$

解 将公式10代入原式, 化简整理得

$$w = r^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}.$$

$$3486. \quad w = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ - \left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

解 将公式10中的 u 换成 z ，然后代入原式，化简整理得

$$w = \frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2}.$$

3487. 在式子

$$I = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}$$

中，令 $x = r \cos \varphi$ ， $y = r \sin \varphi$ 。

解 对函数 u 及 v 分别用公式9，即得

$$I = \left(\frac{x}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{y}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ - \left(\frac{y}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) \left(\frac{x}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{y}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \\ = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial v}{\partial r} \right).$$

3488. 引用新的自变量

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at$$

解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial \xi} + a \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

于是, 由 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

解之, 得 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$, 从而

$$u = \varphi(\xi) + \psi(\eta) = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

其中 φ 及 ψ 为任意的函数.

取 u 及 v 作新的自变量, 变换下列方程:

$$3489. \quad 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

设 $u = x + 2y + 2$ 及 $v = x - y - 1$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2 \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理即得

$$3 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

$$3490. (1+x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1+y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

设 $u = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 及 $v = \ln(y + \sqrt{1+y^2})$.

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial z}{\partial u} \right)$$

$$= -\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{1+x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{1+y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

3491⁺. $ax^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2bxy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + cy^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ (a, b, c 为常数), 设 $u = \ln x, v = \ln y$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial v},$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，化简整理得

$$a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2b \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) = 0.$$

3492. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}. \end{aligned} \right.$$

公式11

本题中,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \end{aligned}$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

注意到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

则由公式11, 即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]$$

$$\cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 0.$$

由于 $\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \neq 0$, 故得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$$

3493. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = 0$, 设 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$.

解 由于 $x = e^u \cos v, y = e^u \sin v$, 故有

$$x^2 + y^2 = e^{2u}, \quad u = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\operatorname{tg} v = \frac{y}{x}, \quad v = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (v \text{ 的多值性不影响求导}$$

所得的结果). 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由 3492 题得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + m^2 z = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] \\
& \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + m^2 z \\
& = \left[\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\
& \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + m^2 z \\
& = e^{-2u} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + m^2 z = 0,
\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + m^2 e^{2u} z = 0.$$

3494. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial z}{\partial y}$ ($y > 0$), 设 $u = x - 2\sqrt{y}$ 及 $v = x + 2\sqrt{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{2y^{\frac{3}{2}}} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$- \frac{2}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

3495. $x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = xy$, $v = \frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x$,

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}.$$

由公式11得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2x^2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$$

$$+ \frac{x^2}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2x}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程，化简整理得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$3496. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{设 } u = x + y, \quad v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{x^2} \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2}{x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2}{x^3} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{2}{y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{y^4} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2}{y^3} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{x^2 y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

代入原方程，得

$$\frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

注意到 $v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x+y}{xy} = \frac{u}{xy}$ ，即 $xy = \frac{u}{v}$ ，于是

就有

$$\begin{aligned} \frac{(x^2 - y^2)^2}{x^2 y^2} &= \frac{(x+y)^2}{x^2 y^2} (x-y)^2 \\ &= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 [(x+y)^2 - 4xy] \\ &= v^2 \left(u^2 - 4\frac{u}{v}\right) = uv(uv - 4). \end{aligned}$$

从而得变换后的方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{2}{u(4-uv)} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

$$\begin{aligned} 3497. \quad xy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} \\ = 0, \quad \text{设 } u = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \text{ 及 } v = xy. \end{aligned}$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = x \frac{\partial z}{\partial u} + y \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = y \frac{\partial z}{\partial u} + x \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) + (x^2 + y^2)$$

$$\cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

代入原方程, 得

$$[(x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2] \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 4xy \frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$(u^2 - v^2) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = v \frac{\partial z}{\partial u}.$$

$$3498. \quad x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \sin y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \sin^2 y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

$$\text{设 } u = x \operatorname{tg} \frac{y}{2}, \quad v = x.$$

$$\text{解 } \frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u} + \frac{x^2}{4} \sec^4 \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$$

$$+ \frac{x}{2} \sec^2 \frac{y}{2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}.$$

代入原方程，得

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \left(x \sin y \sec^2 \frac{y}{2} - \frac{x}{2} \sin^2 y \sec^2 \frac{y}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right)$$

$$\cdot \frac{\partial z}{\partial u} = \left(2x \operatorname{tg} \frac{y}{2} - 2x \operatorname{tg} \frac{y}{2} \sin^2 \frac{y}{2} \right) \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$= 2x \operatorname{tg} \frac{y}{2} \cos^2 \frac{y}{2} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{2x \operatorname{tg} \frac{y}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{y}{2}} \frac{\partial z}{\partial u},$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{2u}{u^2 + v^2} \frac{\partial z}{\partial u}.$$

3499. $x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ ($x > 0, y > 0$), 设 $x = (u+v)^2$

及 $y = (u-v)^2$.

解 由 $x = (u+v)^2$ 及 $y = (u-v)^2$ 分别对 x 及对 y 求偏导函数, 得

$$\begin{cases} 1 = 2(u+v) \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \\ 0 = 2(u-v) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \right); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = 2(u+v) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \\ 1 = 2(u-v) \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right). \end{cases}$$

解得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4(u+v)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{4(u-v)}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4(u+v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\
\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{4(u-v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= -\frac{1}{4(u+v)^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4(u+v)} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
&= -\frac{1}{8(u+v)^2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{16(u+v)^2} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{8(u-v)^2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{1}{16(u-v)^2} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

代入原方程，得

$$\begin{aligned}
x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= -\frac{1}{8(u+v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
&\quad + \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8(u-v)} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \\
& - \frac{1}{16} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \\
& = \frac{1}{16} \left(\frac{4v}{u^2-v^2} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{4u}{u^2-v^2} \frac{\partial z}{\partial v} + 4 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) = 0,
\end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{1}{u^2-v^2} \left(v \frac{\partial z}{\partial u} - u \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0.$$

3500. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right)^3$, 设 $u=x$, $v=y+z$.

解 由 $u=x$, $v=y+z$ 得

$$du = dx, \quad dv = dy + dz,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} (dy + dz).$$

于是,

$$\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz = \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}.$$

$$1 + \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}} = \frac{1}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}. \quad (1)$$

又

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1 - \frac{\partial z}{\partial v}} \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^3} \left[\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \frac{\partial z}{\partial u} \right]. \quad (2)\end{aligned}$$

将(1)式和(2)式代入原方程,去分母即得

$$\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 1.$$

3501. 利用线性变换

$$\xi = x + \lambda_1 y, \quad \eta = x + \lambda_2 y$$

变换方程

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

(其中 A, B 和 C 为常数及 $C \neq 0, AC - B^2 < 0$)
为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

求满足方程 (1) 的函数的普遍形状.

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial \xi} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\lambda_1 \lambda_2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \lambda_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

将上述结果代入原方程, 得

$$\begin{aligned} & (A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2[A + B(\lambda_1 + \lambda_2) \\ & + C\lambda_1 \lambda_2] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + (A + 2B\lambda_2 + C\lambda_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0. \end{aligned}$$

当 $A + 2B\lambda_1 + C\lambda_1^2 = 0$ 及 $A + 2B\lambda_2 + C\lambda_2^2 = 0$. 即 λ_1 与 λ_2 为方程

$$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

的根时 (注意, 由假定 $C \neq 0$, $AC - B^2 < 0$, 故此方程恰有两个相异的实根), 原方程变换为

$$[A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1 \lambda_2] \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

由根与系数的关系得: $\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2B}{C}$, $\lambda_1 \lambda_2 = \frac{A}{C}$.

于是,

$$A + B(\lambda_1 + \lambda_2) + C\lambda_1\lambda_2 = \frac{2(AC - B^2)}{C} \neq 0.$$

从而必有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

此时, $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$, 故 $\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)$ 且

$$u = \int f(\xi) d\xi + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

$$= \varphi(x + \lambda_1 y) + \psi(x + \lambda_2 y).$$

3502. 证明拉普拉斯方程

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

在满足条件 $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial v}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial u}$

的非退化的变数代换

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v)$$

下形式不变.

$$\text{证} \quad \begin{cases} dx = \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv, \\ dy = \frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} du + \frac{\partial \varphi}{\partial u} dv. \end{cases}$$

令 $I = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2$. 由于变换是非退化的, 故知

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 = I \neq 0.$$

由上述方程组解得

$$du = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial v} dy \right),$$

$$dv = \frac{1}{I} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial u} dy \right).$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{I} \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由3492题的证明及公式11, 并考虑到

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{I^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 \right] = \frac{1}{I},$$

即得

$$\begin{aligned} \Delta z &\equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \\ &= \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) \\ &= \frac{1}{I} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right) = 0, \end{aligned}$$

或

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

即形式是不变的.

3503. 假定 $u=f(r)$, 其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$, 改变方程

$$(a) \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad (b) \Delta(\Delta u) = 0.$$

解 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{r}.$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f'(r) \frac{x}{r} \right] = \frac{f'(r)}{r} \\ &\quad + \frac{x^2}{r^2} f''(r) + x f'(r) \cdot \left(-\frac{x}{r^3} \right) \\ &= \frac{x^2}{r^2} f''(r) + \frac{y^2}{r^3} f'(r). \end{aligned}$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2} f''(r) + \frac{x^2}{r^3} f'(r).$$

于是,

$$\Delta u = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) = \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = 0,$$

也可写成 $\Delta u = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = 0.$

$$\begin{aligned}
(6) \quad \Delta(\Delta u) &= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} (\Delta u) \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d}{dr} \left(\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right) \right] \\
&= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right] \\
&= \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 u}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{du}{dr} = 0.
\end{aligned}$$

3504. 若令

$$w = f(u),$$

其中 $u = (x - x_0)(y - y_0),$

方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$

变成怎样的形状?

解 $\frac{\partial w}{\partial x} = (y - y_0) \frac{dw}{du}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{dw}{du} + u \frac{d^2 w}{du^2}.$ 于

是, 方程 $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + cw = 0$ 变换成

$$u \frac{d^2 w}{du^2} + \frac{dw}{du} + cw = 0.$$

3505. 假定

$$x + y = X, \quad y = XY,$$

变换式子 $A = x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}.$

解 $X = x + y$, $Y = \frac{y}{X} = \frac{y}{x+y} = 1 - \frac{x}{x+y}$. 于

$$\text{是, } \frac{\partial X}{\partial x} = 1, \frac{\partial X}{\partial y} = 1, \frac{\partial Y}{\partial x} = -\frac{y}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{x}{(x+y)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X} - \frac{y}{(x+y)^2} \frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - \frac{2y}{(x+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}$$

$$+ \frac{y^2}{(x+y)^4} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{2y}{(x+y)^3} \frac{\partial u}{\partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{x-y}{(x+y)^2} \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y}$$

$$- \frac{xy}{(x+y)^4} \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} - \frac{x-y}{(x+y)^3} \frac{\partial u}{\partial Y}.$$

代入所给式子, 得

$$A = X \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} - Y \frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial u}{\partial X}.$$

3506. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2(y-y^3) \frac{\partial z}{\partial y} + x^2 y^2 z^2 = 0$$

在变换 $x = uv$ 及 $y = \frac{1}{v}$

下形状不变.

证 $v = \frac{1}{y}$, $u = \frac{x}{v} = xy$. 于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial z}{\partial u} \right) = y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}.$$

代入原方程, 得

$$y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2xy^3 \frac{\partial z}{\partial u} + 2x(y - y^3) \frac{\partial z}{\partial v} - 2(y - y^3)$$

$$\cdot \frac{1}{y^2} \frac{\partial z}{\partial v} + x^2 y^2 z^2 = 0,$$

即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2uv^2 \frac{\partial z}{\partial u} + 2(v - v^3) \frac{\partial z}{\partial v} + u^2 v^2 z^2 = 0,$$

故其形状不变.

3507. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

在变换 $u = x + z$ 及 $v = y + z$

下形状不变。

证 将 u, v 作中间变量, x, y 作自变量。微分得

$$du = dx + dz, \quad dv = dy + dz, \quad d^2u = d^2v = d^2z.$$

于是,

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} \right) dz \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy. \end{aligned}$$

令 $A = 1 - \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}$, 则有 $dz = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial u} dx + \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial v} dy$, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{A} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

从而有

$$du = dx + dz = \frac{1 - \frac{\partial z}{\partial v}}{A} dx + \frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{A} dy,$$

$$dv = dy + dz = \frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{A} dx + \frac{1 - \frac{\partial z}{\partial u}}{A} dy,$$

$$\begin{aligned} d^2z &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} dv^2 \\ &\quad + \frac{\partial z}{\partial u} d^2u + \frac{\partial z}{\partial v} d^2v. \end{aligned}$$

上面最后一个等式即

$$\begin{aligned}
 Ad^2z &= \frac{1}{A^2} \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \left[\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy \right]^2 \right. \\
 &+ 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \left[\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) dx + \frac{\partial z}{\partial v} dy \right] \\
 &\cdot \left[\frac{\partial z}{\partial u} dx + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) dy \right] + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \left[\frac{\partial z}{\partial u} dx \right. \\
 &\left. \left. + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) dy \right]^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{1}{A^3} \left[\left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right. \\
 &\cdot \left. \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \right], \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{A^3} \left[\frac{\partial z}{\partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right. \\
 &+ \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) \left(1 - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\
 &\left. + \frac{\partial z}{\partial u} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right], \\
 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{A^3} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial v} \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right) \right. \\
 &\cdot \left. \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \left(1 - \frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right].
 \end{aligned}$$

代入原方程，化简整理即得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

故其形状不变。

3508. 假定

$$x = \eta \zeta, \quad y = \xi \zeta, \quad z = \xi \eta,$$

变换方程 $xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0.$

解 由于

$$\begin{cases} 1 = \zeta \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ 0 = \zeta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ 0 = \eta \frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi \frac{\partial \eta}{\partial x}, \end{cases}$$

故有

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\xi}{2\eta\zeta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2\zeta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{2\eta}.$$

同法求得

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{2\zeta}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{\eta}{2\xi\zeta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{2\xi}.$$

于是，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\xi}{2\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\xi}{2\eta\zeta} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} \\
&\quad - \frac{\xi}{2\eta\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\zeta} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} \\
&\quad + \frac{1}{2\zeta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2\eta} \right) \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{2\eta} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&= -\frac{1}{4\eta\zeta^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{4\eta\zeta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\xi\zeta^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\eta}{4\xi\zeta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
&\quad + \frac{1}{4\xi\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{1}{4\xi\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2\zeta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}. \quad (1)
\end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{4\xi\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{4\eta\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\xi^2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\eta}{4\xi^2\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\xi^2\eta} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\zeta}{4\xi^2\eta} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2\xi^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta}, \quad (2) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= -\frac{1}{4\eta^2\zeta} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{4\eta^2\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\xi\eta\zeta} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{1}{4\xi\zeta} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \\
& - \frac{1}{4\eta^2\xi} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\zeta}{4\eta^2\xi} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{2\eta^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi}. \quad (3)
\end{aligned}$$

將(1), (2), (3) 三式连同 x, y, z 一起代入原方程, 化简整理得

$$\begin{aligned}
& \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial u}{\partial \eta} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \eta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \\
& = 2 \left(\xi\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta\zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} + \zeta\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \right),
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
& \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\eta \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
& = 2 \left(\xi\eta \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \eta\zeta \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} + \zeta\xi \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \xi} \right).
\end{aligned}$$

3509. 假定

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_2 + x_3 - x_1, \quad y_2 = x_1 + x_3 - x_2, \\
y_3 &= x_1 + x_2 - x_3,
\end{aligned}$$

变换方程

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\
& + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} = 0.
\end{aligned}$$

解 不难看出

304.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) z,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_3} \right) z.$$

把上述结果代入所给方程的左端，即得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \\ & + \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_3} \\ & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial z}{\partial x_2} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial z}{\partial x_3} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(2 \frac{\partial z}{\partial y_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(2 \frac{\partial z}{\partial y_1} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(2 \frac{\partial z}{\partial y_2} \right) \\ & = 2 \left[\left(-\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{\partial z}{\partial y_3} \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{\partial z}{\partial y_1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial y_3} \right) \frac{\partial z}{\partial y_2} \Big] \\
& = 2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} \right).
\end{aligned}$$

从而原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y_3^2} = 0.$$

3510. 假定

$$\xi = \frac{y}{x}, \eta = \frac{z}{x}, \zeta = y - z,$$

变换方程

$$\begin{aligned}
& x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
& + 2xz \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2yz \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.
\end{aligned}$$

解 定义算子 A :

$$Au = \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) u,$$

则有

$$\begin{aligned}
A^2 u &= A(Au) = x \frac{\partial}{\partial x} (Au) + y \frac{\partial}{\partial y} (Au) \\
& + z \frac{\partial}{\partial z} (Au)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x \left(x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + z \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \right) u \\
&\quad + y \left(x \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + z \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \right) u \\
&\quad + z \left(x \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + y \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \right) u, \\
&= \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u + Au.
\end{aligned}$$

于是, 原方程可改写成

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = 0 \quad \text{或} \quad A^2 u - Au = 0.$$

但是,

$$\begin{aligned}
Au &= x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} \\
&= x \left(-\frac{y}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{z}{x^2} \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) + y \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&\quad + z \left(\frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&= (y - z) \frac{\partial u}{\partial \zeta} = \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \\
A^2 u &= A(Au) = \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) Au = \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) \\
&= \zeta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \zeta \frac{\partial u}{\partial \zeta},
\end{aligned}$$

从而 $\Delta^2 u - \Delta u = \xi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}$. 由于 $\xi \neq 0$, 故原方程

变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0.$$

3511. 假定

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\text{变换式子 } \Delta_1 u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2$$

$$\text{及 } \Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

为球坐标所表的式子.

解 先作变换

$$x = R \cos \varphi, \quad y = R \sin \varphi, \quad z = z,$$

它相当于对 x, y 坐标作一次极坐标变换.

利用 3483 题及 3484 题的结果, 对新变元 R, φ, z 有

$$\begin{aligned} \Delta_1 u &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

再作变换

$$R = r \sin \theta, \quad \varphi = \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

它相当于对 R, z 坐标又作一次极坐标变换, 其中 R 相当于公式 9 中的 y , θ 相当于公式 9 中的 φ . 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial R} = \frac{R}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

再利用 3483 题及 3484 题的结果, 得

$$\begin{aligned} \Delta_1 u &= \left(\frac{\partial u}{\partial R} \right)^2 + \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} \right)^2, \\ \Delta_2 u &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \operatorname{tg} \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right],$$

注意到两次变换的乘积就是所给的变换，因此，最后得到的 $\Delta_1 u$ 及 $\Delta_2 u$ 的结果即为所求。

3512. 在方程

$$z \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

中引入新函数 w ，假定 $w = z^2$ 。

$$\text{解} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dw} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{2z} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2z} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2z} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ &= \frac{1}{2z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{4z^3} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{1}{2z} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{1}{4z^3} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

代入原方程，化简整理得

$$w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2,$$

即形式是不变的。

取 u 和 v 为新的自变量及 $w = w(u, v)$ 为新函数，变

换下列方程:

$$3513. \quad y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2}{x}, \quad \text{设 } u = \frac{x}{y}, \quad v = x, \quad w = xz - y.$$

解 从 3513 题到 3522 题均属作变换

$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w(x, y, z)$
的类型. 我们来导出一般公式, 顺便指出一般方法.
将 u, v 看作中间变量, x, y 看作自变量, 则有

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy,$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz.$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^2v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} dy^2.$$

$$d^2w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} dz^2$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} dy dz$$

$$+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} dz dx + \frac{\partial w}{\partial z} d^2z.$$

将 dw, du 及 dv 代入全微分式

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv,$$

化简整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} dz &= \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx \\ &+ \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-1} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \right), \end{cases} \quad \text{公式12}$$

其中 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是原方程中旧变元间的偏导函数, 而 $\frac{\partial w}{\partial u}$

及 $\frac{\partial w}{\partial v}$ 是变换后新变元间的偏导函数, 其它均为由已

给变换导出的已知关系式.

把上面求得的 d^2w , du , dv , d^2u , d^2v 代入表示新变元关系的二阶全微分式:

$$\begin{aligned} d^2w &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} dudv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} dv^2 \\ &+ \frac{\partial w}{\partial u} d^2u + \frac{\partial w}{\partial v} d^2v, \end{aligned}$$

再把式中的 dz 表成已求得的 $\frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, 按

dx^2 , $dx dy$ 及 dy^2 合并同类项, 最后把所得的结果与表示旧变元关系的全微分式:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

相比较, 即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\ &+ \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\left. - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &+ \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ &\left. - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^{-1} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\
& + \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \Big]. \quad \text{公式13}
\end{aligned}$$

公式13太复杂，一般不直接应用。本题用求偏导数法较方便。由于

$$\frac{\partial w}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial y} - 1$$

$$\text{及 } \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u},$$

故得

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u}.$$

于是，

$$\begin{aligned}
y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{y} \left(y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2y \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
&= y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^2 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\
&= y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y^2} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{x} \right) - y^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \\
&= \frac{2}{x} - y^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
&= \frac{2}{x} + \frac{x}{y^3} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{2}{x}.
\end{aligned}$$

由于 $\frac{x}{y^3} \neq 0$, 故原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0.$$

3514. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x + y$, $v = \frac{y}{x}$,

$$w = \frac{z}{x}.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x}$,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{z}{x^2}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{x}.$$

代入公式12, 得

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= x \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x^2} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x^2} \right) \\
&= x \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{y}{x} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x},
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial v} \right) = x \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

$$\text{令 } R = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{x} \frac{\partial w}{\partial v} + \frac{z}{x} - \frac{\partial w}{\partial v} = w - (1+v)$$

$\cdot \frac{\partial w}{\partial v}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) \\ & \quad - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y} \\ & = \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \\ & = \frac{\partial R}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial R}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & = \frac{\partial}{\partial v} \left[w - (1+v) \frac{\partial w}{\partial v} \right] \left(-\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x} \right) \\ & = \left[\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial v} - (1+v) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right] \left[-\frac{1}{x} (1+v) \right] \\ & = \frac{1}{x} (1+v)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0, \end{aligned}$$

由于 $x \neq 0$, $1 + v \neq 0$, 故原方程变为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

3515. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x + y, v = x - y$,

$$w = xy - z.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \frac{\partial v}{\partial y} = -1,$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y, \frac{\partial w}{\partial y} = x, \frac{\partial w}{\partial z} = -1.$$

代入公式12, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}.$$

令 $R = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = x + y - 2 \frac{\partial w}{\partial u} = u - 2 \frac{\partial w}{\partial u}$. 于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial R}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

$$= 2 \frac{\partial}{\partial u} \left(u - 2 \frac{\partial w}{\partial u} \right) = 2 - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = 0,$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}.$$

3516. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = z$, 设 $u = \frac{x+y}{2}$, $v = \frac{x-y}{2}$,

$$w = ze^v.$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} = -\frac{\partial v}{\partial y}$,

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = ze^v, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = e^v.$$

代入公式12, 得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} e^{-v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2} e^{-v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) = z.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + z \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(e^{-v} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \\ &= e^{-v} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) = e^{-v} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right) = z.$$

原方程变换为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 2z e^z = 2w.$$

3517. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, 设 $u = x$, $v = x$

$+ y$, $w = x + y + z$.

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} - 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial v} - 1.$$

于是,

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}.$$

同 3514 题的方法可求得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}, \end{aligned}$$

$$\frac{y}{x} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{v}{u} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{v}{u} - 1\right) \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
&= \left(\frac{v}{u} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

將上述結果代入原方程，即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \left(\frac{v}{u} - 1\right) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

3518. $(1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (1-y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$, 設

$$x = \sin u, \quad y = \sin v, \quad z = e^w.$$

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dw} \frac{\partial w}{\partial u} \frac{du}{dx} = \frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial w}{\partial u},$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^w}{\cos v} \frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial w}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial w}{\partial u} \right) \cdot \frac{du}{dx} \\
&= \frac{1}{\cos u} \left[\frac{e^w}{\cos u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \frac{e^w}{\cos u} \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{e^w \sin u}{\cos^2 u} \frac{\partial w}{\partial u} \right] \\
&= \frac{e^w}{\cos^2 u} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial u} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \operatorname{tg} u \cdot \frac{\partial w}{\partial u} \right],
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{e^w}{\cos^2 v} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial v} \right)^2 + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \operatorname{tg} v \cdot \frac{\partial w}{\partial v} \right].$$

將上述結果代入原方程，並注意到

$$1 - x^2 = \cos^2 u, \quad 1 - y^2 = \cos^2 v,$$

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} + \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = 0.$$

3519. $(1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{4}z = 0$ ($|x| < 1$), 设

$$u = \frac{1}{2}(y + \arccos x), \quad v = \frac{1}{2}(y - \arccos x), \quad w =$$

$$z \sqrt{1-x^2}.$$

解 由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{xz}{2(1-x^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right).$$

于是,

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[(1-x^2) \frac{\partial z}{\partial x} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{xz}{2} \right] \\ &= -\frac{x}{4(1-x^2)^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) + \frac{z}{2} + \frac{x}{2} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &\quad + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{z}{2} + \frac{x^2 z}{4(1-x^2)} + \frac{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial v} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial v} - \frac{\partial w}{\partial u} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
&= \frac{z}{4} + \frac{z}{4(1-x^2)} + \frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \\
&\quad \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right), \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{1}{2(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] \\
&= \frac{1}{4(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

将上述结果代入原方程, 并注意到

$$\arccos x = u - v, \quad x = \cos(u - v),$$

$$1 - x^2 = \sin^2(u - v),$$

化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{w}{4 \sin^2(u - v)}.$$

$$3520. \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2 \frac{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}}{x^2 - y^2} - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^2} \quad (|x|$$

$\Rightarrow |y|)$, 设 $u = x + y, v = x - y, w = \frac{z}{\sqrt{x^2 - y^2}}$.

解 原方程可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{2x}{(x^2 - y^2)^2} \\ & \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2y}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^3} \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial y} \right) \\ & = - \frac{3(x^2 + y^2)z}{(x^2 - y^2)^3}. \end{aligned} \quad (1)$$

由公式12不难求出

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sqrt{x^2 - y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{xz}{x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2 - y^2} \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) - \frac{yz}{x^2 - y^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right. \\ & \left. \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{xz}{(x^2 - y^2)^2} \right] \\ & = - \frac{x}{(x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{x}{(x^2 - y^2)^2} \frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{4x^2 z}{(x^2 - y^2)^3} \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \\
= & \frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{3x^2 z}{(x^2 - y^2)^3} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \\
& \cdot \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v} \right) \frac{\partial v}{\partial x} \right] \\
= & \frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{3x^2 z}{(x^2 - y^2)^3} \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{x^2 - y^2} \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right. \\
& \left. \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v} \right) - \frac{yz}{(x^2 - y^2)^2} \right] \\
= & -\frac{z}{(x^2 - y^2)^2} - \frac{3y^2 z}{(x^2 - y^2)^3} \\
& + \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \right).
\end{aligned}$$

把上述结果代入方程(1), 化简整理即得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = 0.$$

3521. 证明: 任何方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0$$

(a, b, c 为常数) 用代换

$$z = ue^{\alpha x + \beta y}$$

(其中 α 与 β 为常量, $u = u(x, y)$) 可以化为下面的形状

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 = \text{常数}).$$

证 $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\alpha x + \beta y} \left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\alpha x + \beta y} \left(\beta u + \frac{\partial u}{\partial y} \right),$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{\alpha x + \beta y} \left(\alpha \beta u + \beta \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right).$$

将上述结果代入所给方程, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\beta + a) \frac{\partial u}{\partial x} + (\alpha + b) \frac{\partial u}{\partial y} + (\alpha \beta + a\alpha \\ & + b\beta + c) u = 0. \end{aligned}$$

按题意, 需 $\beta + a = 0$ 及 $\alpha + b = 0$, 即 $\beta = -a, \alpha = -b$, 这是可能的. 事实上, 只需取代换

$$z = ue^{-(bx+ay)},$$

原方程即变换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c_1 u = 0 \quad (c_1 \text{ 为常数}).$$

3522. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

对于变量代换

$$x' = \frac{x}{y}, \quad y' = -\frac{1}{y}, \quad u = \frac{u'}{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

(u' 为变量 x' 与 y' 的函数) 其形状不变.

$$\text{证} \quad dx' = \frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy, \quad dy' = \frac{1}{y^2} dy,$$

$$\ln u' = \ln u + \frac{1}{2} \ln y + \frac{x^2}{4y},$$

$$du' = \frac{u'}{u} du + \frac{u'}{2y} dy + \frac{xu'}{2y} dx - \frac{x^2 u'}{4y^2} dy.$$

把上面三个微分式代入

$$du' = \frac{\partial u'}{\partial x'} dx' + \frac{\partial u'}{\partial y'} dy'$$

得

$$\begin{aligned} & \frac{u'}{u} du + \frac{u'}{2y} dy + \frac{xu'}{2y} dx - \frac{x^2 u'}{4y^2} dy \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x'} \left(\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy \right) + \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{dy}{y^2}, \end{aligned}$$

整理得

$$du = \left(\frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y} \right) dx + \left(\frac{u}{y^2 u'} \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{u}{2y} \right) dy$$

$$-\frac{xu}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y} \Big) dy.$$

于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{u}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial y'} - \frac{xu}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ &\quad + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y} \right) \\ &= \frac{u}{yu'} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{1}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{yu'^2} \\ &\quad \cdot \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 \frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{u}{2y} - \frac{x}{2y} \frac{\partial u}{\partial x} \\ &= \frac{u}{y^2u'} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \left(\frac{1}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{x}{2y} \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{u}{yu'} \frac{\partial u'}{\partial x'} - \frac{xu}{2y} \right) - \frac{u}{y^2u'^2} \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} \right)^2 - \frac{u}{2y} \\ &= \frac{u}{y^2u'} \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} - \frac{xu}{y^2u'} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ &\quad + \frac{x^2u}{4y^2} - \frac{u}{2y}. \end{aligned} \quad (2)$$

将(1)式和(2)式代入原方程, 得

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} = \frac{\partial u'}{\partial y'},$$

即方程的形式不变.

3523. 在方程

$$\begin{aligned} q(1+q) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1+p+q+2pq) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ + p(1-p) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

(其中 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$) 中令 $u = x + z$, $v = y + z$,

$w = x + y + z$, 假定 $w = w(u, v)$.

解 本题用全微分法解较好. 由

$$dz = p dx + q dy \text{ 及 } u = x + z, v = y + z, w = x + y + z$$

可得

$$du = dx + dz = (1+p)dx + qdy,$$

$$dv = dy + dz = p dx + (1+q)dy,$$

$$d^2u = d^2v = d^2w = d^2z.$$

把上述结果代入新变元的全微分式

$$\begin{aligned} d^2w &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} dv^2 \\ &+ \frac{\partial w}{\partial u} d^2u + \frac{\partial w}{\partial v} d^2v, \end{aligned}$$

并记 $S = 1 - \frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}$, 即得

$$Sd^2z = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} \left[(p+1)dx + qdy \right]^2 + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \cdot \left[(p+1)dx + qdy \right] \left[pdx + (q+1)dy \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \left[pdx + (q+1)dy \right]^2.$$

将上式与

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$$

比较, 可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{S} \left[(1+p)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2p(1+p) \right]$$

$$\cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + p^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \Big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{S} \left[q(p+1) \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + (1+p+q+2pq) \right]$$

$$\cdot \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} + p(q+1) \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \Big],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{S} \left[q^2 \frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2q(q+1) \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} \right]$$

$$+ (q+1)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial v^2} \Big].$$

代入原方程, 并注意

$$q(1+q)(1+p)^2 - (1+p+q+2pq)q$$

$$\cdot (p+1) + p(1+p)q^2$$

$$= q(1+p) \left[(1+p)(1+q) - (1+p) \right]$$

$$+q+2pq)+pq]=0,$$

$$p^2q(1+q)-(1+p+q+2pq)p(q+1) \\ +p(1+p)(q+1)^2=0$$

及

$$2p(1+p)q(1+q)-(1+p+q+2pq)^2 \\ +2q(q+1)p(1+p)=-(1+p+q)^2,$$

原方程变换为

$$-\frac{(1+p+q)^2}{S} \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0 \text{ 或 } \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0.$$

8524. 在方程

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \\ + \left(y \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(z \frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$$

中令 $x=e^\xi, y=e^\eta, z=e^\zeta, u=e^w$, 其中 $w=w(\xi, \eta, \zeta)$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{e^w}{x} \frac{\partial w}{\partial \xi},$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = e^w \frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad (1)$$

$$y \frac{\partial u}{\partial y} = e^w \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad z \frac{\partial u}{\partial z} = e^w \frac{\partial w}{\partial \zeta}.$$

(1)式两端对 x 求偏导函数, 得

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)^2 \frac{d\xi}{dx} + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \frac{d\xi}{dx}.$$

两端同乘 x , 整理得

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - e^w \frac{\partial w}{\partial \xi}. \quad (2)$$

同法可得

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - e^w \frac{\partial w}{\partial \eta}, \quad (3)$$

$$z^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = e^w \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 + e^w \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} - e^w \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \quad (4)$$

将(2), (3), (4)三式代入原方程, 化简整理即得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} &= (e^w - 1) \left[\left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)^2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 \right] + \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

3525. 证明: 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

的形状与变量 x , y 和 z 所分别担任的角色无关.

证 令 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, 则 $dz = p dx + q dy$. 若以 x

作为新函数, 则有

$$\begin{aligned} d^2 x &= \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} dy dz + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} dz^2 \\ &+ \frac{\partial x}{\partial y} d^2 y + \frac{\partial x}{\partial z} d^2 z. \end{aligned}$$

今以作为旧变元的关系:

$$d^2x = 0, \quad d^2y = 0, \quad dz = pdx + qdy$$

代入上式, 可得

$$d^2z = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial z}} \left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} dy^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} dy \cdot (pdx + qdy) + \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} (pdx + qdy)^2 \right].$$

于是,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -p \left(p^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -p \left(p \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + pq \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -p \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + q^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right). \quad (3)$$

代入原方程, 得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)^2 = p^2 \left(p^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ & \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2q \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + q^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ & - p^2 \left(p \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + pq \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right)^2 \\ & = p^4 \left[\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} \right)^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} \right)^2 = 0.$$

类似地, 若以 y 作为函数, 则也有

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial z} \right)^2 = 0,$$

即方程的形状与变量 x , y 和 z 所分别担任的角色无关.

3526. 取 x 作为变量 y 和 z 的函数, 解方程

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ & + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

解 将 3525 题中的(1), (2), (3)三式及 $p = \frac{\partial z}{\partial x}$,

$q = \frac{\partial z}{\partial y}$ 代入, 得

$$\begin{aligned} & q^2 \left(-p^3 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) + 2pq \left(p^2 \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + p^2 q \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ & - p^2 \left(p \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} + 2pq \frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} + pq^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right) \\ & = -p^3 \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0, \end{aligned}$$

即 $\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$ 或 $p = 0$. 由

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 0$$

解之，得原方程的解为

$$x = \varphi(z)y + \psi(z),$$

其中 φ, ψ 为任意函数；由 $p=0$ 解之，得 $z=f(y)$

(f 为任意函数)，它也是原方程的解。

3527⁺. 运用勒襄德变换

$$X = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Z = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z,$$

其中 $Z = Z(X, Y)$ ，变换方程

$$\begin{aligned} & A\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ & + C\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned}$$

$$\text{解 } dZ = d\left(x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z\right)$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy - dz + x dX + y dY$$

$$= x dX + y dY.$$

于是，

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = x, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = y.$$

微分上式，得

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} dX + \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dY, \\ dy = \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dX + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} dY. \end{cases} \quad (1)$$

又由 $X = \frac{\partial z}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial z}{\partial y}$ 微分得

$$\begin{cases} dX = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dy, \\ dY = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy. \end{cases} \quad (2)$$

由 (1) 式与 (2) 式, 得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

从而

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{vmatrix} = 1,$$

因此

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

于是, 由 (1) 式解之, 得

$$\begin{cases} dX = I^{-1} \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} dx - \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dy \right), \\ dY = I^{-1} \left(-\frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} dx + \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} dy \right). \end{cases} \quad (3)$$

比较 (2) 式与 (3) 式, 得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = I^{-1} \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -I^{-1} \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = I^{-1} \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}.$$

代入原方程, 即得

$$\begin{aligned} & A(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} - 2B(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X \partial Y} \\ & + C(X, Y) \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = 0. \end{aligned}$$

§5. 几何上的应用

1° 切线和法平面 在曲线

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t)$$

上的一点 $M(x, y, z)$ 的切线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{dx}{dt}} = \frac{Y-y}{\frac{dy}{dt}} = \frac{Z-z}{\frac{dz}{dt}}.$$

在此点的法平面方程为

$$\frac{dx}{dt}(X-x) + \frac{dy}{dt}(Y-y) + \frac{dz}{dt}(Z-z) = 0.$$

2° 切平面和法线 曲面 $z = f(x, y)$ 上点 $M(x, y, z)$ 处的切平面方程为

$$Z-z = \frac{\partial z}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial z}{\partial y}(Y-y).$$

在 M 点处的法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{Z-z}{-1}.$$

若曲面的方程给成隐函数的形状 $F(x, y, z) = 0$, 则切平面方程为:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0,$$

法线方程为

$$\frac{X-x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y-y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z-z}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

3° 平面曲线族的包线 含一个参数的曲线族 $f(x, y, \alpha) = 0$ (α 为参数)的包线满足方程组:

$$f(x, y, \alpha) = 0, f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0.$$

4° 曲面族的包面 含一个参数的曲面族 $F(x, y, z, \alpha) = 0$ 的包面满足方程组:

$$F(x, y, z, \alpha) = 0, F'_\alpha(x, y, z, \alpha) = 0.$$

在含两个参数的曲面族 $\Phi(x, y, z, \alpha, \beta) = 0$ 的情形, 其包面满足下面的方程组:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0, \Phi'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta) = 0, \\ \Phi'_\beta(x, y, z, \alpha, \beta) &= 0. \end{aligned}$$

对下列曲线写出在已知点的切线和法平面方程:

3528. $x = a \cos \alpha \cos t, y = a \sin \alpha \cos t, z = a \sin t$; 在点 $t = t_0$.

解 曲线

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$$

在点 $t = t_0$ 的切向量为

$$\vec{v}(t_0) = \{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}.$$

本题中, 当 $t = t_0$ 时曲线上点的坐标及曲线在该点的切向量分别为

$$x_0 = x(t_0) = a \cos \alpha \cos t_0,$$

$$y_0 = y(t_0) = a \sin \alpha \cos t_0,$$

$$z_0 = z(t_0) = a \sin t_0,$$

$$\vec{v}(t_0) = \{-a \cos \alpha \sin t_0, -a \sin \alpha \sin t_0, a \cos t_0\}.$$

于是，切线方程为

$$\frac{x-x_0}{-a \cos \alpha \sin t_0} = \frac{y-y_0}{-a \sin \alpha \sin t_0} = \frac{z-z_0}{a \cos t_0},$$

即

$$\frac{x-x_0}{-\cos \alpha \sin t_0} = \frac{y-y_0}{-\sin \alpha \sin t_0} = \frac{z-z_0}{\cos t_0};$$

法平面方程为

$$(-a \cos \alpha \sin t_0)(x-x_0) + (-a \sin \alpha \sin t_0)(y-y_0) + (a \cos t_0)(z-z_0) = 0,$$

以 x_0, y_0, z_0 的值代入上式，化简整理得

$$x \cos \alpha \sin t_0 + y \sin \alpha \sin t_0 - z \cos t_0 = 0,$$

即法平面过原点。

3529. $x = a \sin^2 t, y = b \sin t \cos t, z = c \cos^2 t$; 在点 $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\text{解 } x_0 = a \sin^2 \frac{\pi}{4} = \frac{a}{2}, y_0 = \frac{b}{2}, z_0 = \frac{c}{2};$$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \{a, 0, -c\}.$$

于是，切线方程为

$$\begin{cases} \frac{x - \frac{a}{2}}{a} = \frac{z - \frac{c}{2}}{-c}, \\ y = \frac{b}{2}; \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1, \\ y = \frac{b}{2}; \end{cases}$$

法平面方程为

$$a\left(x - \frac{a}{2}\right) + (-c)\left(z - \frac{c}{2}\right) = 0,$$

即

$$ax - cz = \frac{1}{2}(a^2 - c^2).$$

3530. $y = x, z = x^2$; 在点 $M(1, 1, 1)$.

解 设 $x = t$, 则 $y = t, z = t^2$. 于是,

$$\vec{v}(1) = \{1, 1, 2\},$$

切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2};$$

法平面方程为

$$(x-1) + (y-1) + 2(z-1) = 0 \text{ 或 } x + y + 2z = 4.$$

3531. $x^2 + z^2 = 10, y^2 + z^2 = 10$; 在点 $M(1, 1, 3)$.

解 当曲线以两个曲面方程

$$F_1(x, y, z) = 0, F_2(x, y, z) = 0$$

交线形式给出时, 可先求出两曲面在交点处的法向量:

$$\vec{n}_1 = \{F'_{1x}, F'_{1y}, F'_{1z}\}, \vec{n}_2 = \{F'_{2x}, F'_{2y}, F'_{2z}\},$$

则曲线在该点的切向量为

$$\vec{\tau} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left\{ \begin{vmatrix} F'_{1y} & F'_{1z} \\ F'_{2y} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1z} \\ F'_{2x} & F'_{2z} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_{1x} & F'_{1y} \\ F'_{2x} & F'_{2y} \end{vmatrix} \right\}.$$

本题中,

$$\vec{n}_1 = \{2, 0, 6\}, \quad \vec{n}_2 = \{0, 2, 6\},$$

$$\vec{v} = \{1, 0, 3\} \times \{0, 1, 3\} = \{-3, -3, 1\}.$$

于是, 切线方程为

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-3}{1}$$

或
$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{-1};$$

法平面方程为

$$-3(x-1) - 3(y-1) + (z-3) = 0,$$

即

$$3x + 3y - z = 3.$$

3532. $x^2 + y^2 + z^2 = 6, x + y + z = 0$; 在点 $M(1, -2, 1)$.

解 $F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - 6 = 0, F_2 = x + y + z = 0,$

$$\vec{n}_1 = 2\{1, -2, 1\}, \quad \vec{n}_2 = \{1, 1, 1\},$$

$$\vec{v} = \{1, -2, 1\} \times \{1, 1, 1\}$$

$$= -3\{1, 0, -1\}.$$

于是, 切线方程为

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{z-1}{-1}, & \text{或} \\ y = -2; & \begin{cases} x+z=2, \\ y+2=0; \end{cases} \end{cases}$$

法平面方程为

$$(x-1) - (z-1) = 0 \text{ 或 } x - z = 0.$$

3533. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求出一点, 此点的切线是平行于平面 $x+2y+z=4$ 的.

解 $\vec{v} = \{1, 2t, 3t^2\}$, 平面法向量 $\vec{n} = \{1, 2, 1\}$.

按题设, 应有

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 + 4t + 3t^2 = 0.$$

解之, 得 $t = -1$ 或 $t = -\frac{1}{3}$. 于是, 所求的点为 M_1

$$(-1, 1, -1), M_2\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}\right).$$

3534. 证明: 螺旋线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ 的切线与 Oz 轴形成定角.

证 $\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \frac{dy}{dt} = a \cos t, \frac{dz}{dt} = b$. 于是, 切

线与 Oz 轴形成之角 γ 的余弦

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ &= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

由于 $\cos \gamma$ 为常数, 故知切线与 Oz 轴形成定角.

3535. 证明: 曲线

$$x = ae^t \cos t, y = ae^t \sin t, z = ae^t$$

与锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的各母线相交的角度相同.

证 圆锥 $x^2 + y^2 = z^2$ 的顶点在原点, 过圆锥上任一点 $P(x, y, z)$ 的母线也过原点. 因此, 母线的方向向量为 $\vec{v}_1 = \{x, y, z\}$.

曲线在点 P 的切向量为 $\vec{v}_2 = \{x', y', z'\} = \{ae^t \cdot (\cos t - \sin t), ae^t (\sin t + \cos t), ae^t\} = \{x - y, x + y,$

$z\}$.

注意到 $x^2 + y^2 = z^2$, 即得

$$\begin{aligned}\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} \\ &= \frac{x(x-y) + y(x+y) + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{(x-y)^2 + (x+y)^2 + z^2}} \\ &= \frac{2z^2}{\sqrt{2z^2} \sqrt{3z^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}},\end{aligned}$$

于是, 交角相同.

3536. 证明斜驶线

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{k\varphi} \quad (k = \text{常数}),$$

(其中 φ ——地球上点的经度, ψ ——地球上点的纬度) 与地球的一切子午线相交成定角.

证 取直角坐标系如下: 赤道平面为 Oxy 平面, 球心为坐标原点, Ox 轴正向过 0° 子午线, Oz 轴正向过北极, 并取 $Oxyz$ 坐标系为右手系.

下面我们先确定斜驶线和子午线在直角坐标系中的方程. 为此, 假定讨论地球上的点的经度为 φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$), 纬度为 ψ ($-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$), 则它在上述坐标系下的坐标为

$$\begin{cases} x = R \cos \psi \cos \varphi, \\ y = R \cos \psi \sin \varphi, \\ z = R \sin \psi, \end{cases}$$

其中 R 为地球半径.

对 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right) = e^{k\varphi}$ 的两端微分, 得

$$\frac{d\psi}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)} = ke^{k\varphi}d\varphi = k\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)d\varphi.$$

于是,

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{d\psi} &= \left[2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)k\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\right]^{-1} \\ &= \left[k\sin\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)\right]^{-1} = \frac{1}{k\cos\psi}.\end{aligned}$$

今将斜驶线方程看作决定 φ 为 ψ 的隐函数. 因此, 对斜驶线来说, 在 (φ_0, ψ_0) 点, 有

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\psi} &= -R\sin\psi_0\cos\varphi_0 - R\cos\psi_0\sin\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi} \\ &= -R\left(\sin\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{\sin\varphi_0}{k}\right).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\psi} &= -R\sin\psi_0\sin\varphi_0 + R\cos\psi_0\cos\varphi_0\frac{d\varphi}{d\psi} \\ &= -R\left(\sin\psi_0\sin\varphi_0 - \frac{\cos\varphi_0}{k}\right),\end{aligned}$$

$$\frac{dz}{d\psi} = R\cos\psi_0.$$

于是, 可取斜驶线切向量

$$\vec{v}_1 = \left\{ \sin\psi_0\cos\varphi_0 + \frac{\sin\varphi_0}{k}, \sin\psi_0\sin\varphi_0 \right.$$

$$\left. -\frac{\cos\varphi_0}{k}, -\cos\psi_0 \right\}.$$

当 φ 为常数时即得子午线, 故其参数方程为

$$\begin{cases} x = R \cos\psi \cos\varphi_0, \\ y = R \cos\psi \sin\varphi_0, \\ z = R \sin\psi. \end{cases}$$

于是, 子午线在点 (φ_0, ψ_0) 的切向量为

$$\vec{v}_2 = \{\sin\psi_0 \cos\varphi_0, \sin\psi_0 \sin\varphi_0, -\cos\psi_0\}.$$

从而得

$$\cos(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{k_2^2}}} = \text{常数},$$

即斜驶线与子午线相交成定角.

3537. 已知曲线

$$z = f(x, y), \quad \frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha},$$

其中 f 为可微分函数. 求曲线上 $M_0(x_0, y_0)$ 点的切线与 Oxy 平面所成角的正切.

解 解法一

将曲线看作由参数方程

$$x = x, \quad y = \varphi(x) = y_0 + (x - x_0) \operatorname{tg}\alpha, \quad z = \psi(x)$$

$\equiv f(x, \varphi(x))$ 给出, 则切向量为

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{1, \varphi'(x_0), \psi'(x_0)\} \\ &= \{1, \operatorname{tg}\alpha, f'_x[x_0, \varphi(x_0)] \\ &\quad + f'_y[x_0, \varphi(x_0)]\varphi'(x_0)\} \end{aligned}$$

$$= \{1, \operatorname{tg} \alpha, f'_x(x_0, y_0) + \operatorname{tg} \alpha \cdot f'_y(x_0, y_0)\}.$$

于是, 曲线上 M_0 点的切线与 Oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\psi'(x_0)}{\sqrt{1 + \varphi'^2(x_0)}} = \frac{f'_x(x_0, y_0) + \operatorname{tg} \alpha \cdot f'_y(x_0, y_0)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$= f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha.$$

解法二

将曲线看作两条曲线的交线, 则所给曲线在 M_0 点的切线方程为

$$\begin{aligned} \frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & -1 \\ -\frac{1}{\sin \alpha} & 0 \end{vmatrix}} &= \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} -1 & f'_x(x_0, y_0) \\ 0 & \frac{1}{\cos \alpha} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ \frac{1}{\cos \alpha} & -\frac{1}{\sin \alpha} \end{vmatrix}}, \end{aligned}$$

即

$$\frac{x-x_0}{\cos \alpha} = \frac{y-y_0}{\sin \alpha} = \frac{z-z_0}{f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha},$$

因此, 切线与 Oxy 平面所成角 φ 的正切为

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} \\ &= f'_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f'_y(x_0, y_0) \sin \alpha. \end{aligned}$$

3538. 求函数

$$u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 沿曲线

$$x=t, y=2t^2, z=-2t^4$$

在此点的切线方向上的导函数.

解
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

在点 $M(1, 2, -2)$ 它们的值分别为 $\frac{8}{27}$, $-\frac{2}{27}$, $\frac{2}{27}$.

又曲线在该点的切线的方向余弦为 $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$, $-\frac{8}{9}$.

于是, 所求的导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_M = \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{9} + \left(-\frac{2}{27}\right) \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{27} \cdot \left(-\frac{8}{9}\right) = -\frac{16}{243}.$$

写出下列曲面上已知点的切面和法线方程:

3539. $z = x^2 + y^2$; 在点 $M_0(1, 2, 5)$.

解 当曲面由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给出时, 法向量

为 $\vec{n} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\}$; 特别是曲面由显式方程

$z=f(x, y)$ 给出时, 法向量为 $\vec{n} = \{f'_x, f'_y, -1\}$.
 本题中, $\vec{n} = \{2x, 2y, -1\}_{M_0} = \{2, 4, -1\}$.
 于是, 切面方程为

$$2(x-1) + 4(y-2) - (z-5) = 0,$$

或

$$2x + 4y - z = 5;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-5}{-1}.$$

3540. $x^2 + y^2 + z^2 = 169$; 在点 $M_0(3, 4, 12)$.

解 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 169 = 0$, 则在点 M_0 处 $\vec{n} = \{2x, 2y, 2z\}_{M_0} = \{6, 8, 24\} = 2\{3, 4, 12\}$. 于是, 切面方程为

$$3(x-3) + 4(y-4) + 12(z-12) = 0$$

或

$$3x + 4y + 12z = 169;$$

法线方程为

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12} \text{ 或 } \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{12}.$$

3541. $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; 在点 $M_0(1, 1, \frac{\pi}{4})$.

解 $\vec{n} = \left\{ \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, -1 \right\}_{M_0} = \left\{ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right\}$. 于是, 切面方程为

$$z - \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)$$

或
$$z = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-y);$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z - \frac{\pi}{4}}{2}.$$

3542. $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$; 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

解 $\vec{n} = 2\{ax_0, by_0, cz_0\}$. 于是, 切面方程为

$$ax_0(x-x_0) + by_0(y-y_0) + cz_0(z-z_0) = 0,$$

注意到 $ax_0^2 + by_0^2 + cz_0^2 = 1$, 上述方程即化为

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = 1;$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{ax_0} = \frac{y-y_0}{by_0} = \frac{z-z_0}{cz_0}.$$

3543. $z = y + \ln \frac{x}{z}$; 在点 $M_0(1, 1, 1)$.

解 $F(x, y, z) = y + \ln x - \ln z - z = 0$.

$$\vec{n} = \left\{ \frac{1}{x}, 1, -\frac{1}{z} - 1 \right\}_{M_0} = \{1, 1, -2\}.$$

于是, 切面方程为

$$(x-1) + (y-1) - 2(z-1) = 0 \text{ 或 } x + y - 2z = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}.$$

3544. $2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} = 8$; 在点 $M_0(2, 2, 1)$.

解 $F(x, y, z) = 2^{\frac{x}{z}} + 2^{\frac{y}{z}} - 8$,

$$\vec{n} = \left\{ \frac{1}{z} 2^{\frac{x}{z}} \ln 2, \frac{1}{z} 2^{\frac{y}{z}} \ln 2, \left(x \cdot 2^{\frac{x}{z}} \right. \right.$$

$$\left. \left. + y \cdot 2^{\frac{y}{z}} \right) \left(-\frac{1}{z^2} \ln 2 \right) \right\}_{M_0}$$

$$= 4 \ln 2 \{ 1, 1, -4 \}.$$

于是, 切面方程为

$$(x-2) + (y-2) - 4(z-1) = 0 \text{ 或 } x + y - 4z = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{-4}.$$

3545. $x = a \cos \psi \cos \varphi$, $y = b \cos \psi \sin \varphi$, $z = c \sin \psi$; 在点 $M_0(\varphi_0, \psi_0)$.

解 当曲面由参数方程

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

给出时, 曲面上分别令 $u = u_0$, $v = v_0$ 得到的两条曲线的切向量分别为

$$\vec{v}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\},$$

$$\vec{v}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\},$$

则切面的法向量为

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \left\{ \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{array} \right|, \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right| \right\}.$$

本题中,

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right\}_{M_0} \\ &= \{-a \cos \psi_0 \sin \varphi_0, b \cos \psi_0 \cos \varphi_0, 0\} \\ &= \cos \psi_0 \{-a \sin \varphi_0, b \cos \varphi_0, 0\}, \\ \vec{v}_2 &= \left\{ \frac{\partial x}{\partial \psi}, \frac{\partial y}{\partial \psi}, \frac{\partial z}{\partial \psi} \right\}_{M_0} \\ &= \{-a \sin \psi_0 \cos \varphi_0, -b \sin \psi_0 \sin \varphi_0, c \cos \psi_0\}, \\ \vec{n} &= \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \\ &= abc \left\{ \frac{\cos \psi_0 \cos \varphi_0}{a}, \frac{\cos \psi_0 \sin \varphi_0}{b}, \frac{\sin \psi_0}{c} \right\}. \end{aligned}$$

于是, 切面方程为

$$\begin{aligned} &\frac{\cos \psi_0 \cos \varphi_0}{a} (x - a \cos \psi_0 \cos \varphi_0) + \frac{\cos \psi_0 \sin \varphi_0}{b} \\ &\cdot (y - b \cos \psi_0 \sin \varphi_0) \\ &+ \frac{\sin \psi_0}{c} (z - c \sin \psi_0) = 0, \end{aligned}$$

即

$$\frac{x}{a} \cos \psi_0 \cos \varphi_0 + \frac{y}{b} \cos \psi_0 \sin \varphi_0 + \frac{z}{c} \sin \psi_0 = 1;$$

法线方程为

$$\frac{x - a \cos \psi_0 \cos \varphi_0}{\cos \psi_0 \cos \varphi_0} = \frac{y - b \cos \psi_0 \sin \varphi_0}{\cos \psi_0 \sin \varphi_0} = \frac{z - c \sin \psi_0}{\sin \psi_0},$$

即

$$\frac{x \sec \psi_0 \sec \varphi_0 - a}{bc} = \frac{y \sec \psi_0 \csc \varphi_0 - b}{ac} = \frac{z \csc \psi_0 - c}{ab}.$$

3546. $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = r \operatorname{ctg} \alpha$; 在点 $M_0(\varphi_0, r_0)$.

$$\text{解 } \vec{v}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \varphi} \right\}_{M_0}$$

$$= r_0 \{-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0, 0\},$$

$$\vec{v}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial r}, \frac{\partial y}{\partial r}, \frac{\partial z}{\partial r} \right\}_{M_0}$$

$$= \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, \operatorname{ctg} \alpha\},$$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = r_0 \{\cos \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha, \sin \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha, -1\}.$$

于是, 切面方程为

$$\begin{aligned} & \cos \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha (x - r_0 \cos \varphi_0) + \sin \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha \\ & \cdot (y - r_0 \sin \varphi_0) - (z - r_0 \operatorname{ctg} \alpha) = 0. \end{aligned}$$

即

$$x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 - z \operatorname{tg} \alpha = 0;$$

法线方程为

$$\frac{x - r_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{y - r_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0 \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{z - r_0 \operatorname{ctg} \alpha}{-1}$$

或

$$\frac{x - r_0 \cos \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{y - r_0 \sin \varphi_0}{\sin \varphi_0} = \frac{z - r_0 \operatorname{ctg} \alpha}{-\operatorname{tg} \alpha}.$$

3547. $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$; 在点 $M_0(u_0, v_0)$.

解 $\vec{v}_1 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right\}_{M_0} = \{\cos v_0, \sin v_0, 0\},$

$$\vec{v}_2 = \left\{ \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right\}_{M_0}$$

$$= \{-u_0 \sin v_0, u_0 \cos v_0, a\},$$

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \{a \sin v_0, -a \cos v_0, u_0\}.$$

于是, 切面方程为

$$a \sin v_0 (x - u_0 \cos v_0) - a \cos v_0 (y - u_0 \sin v_0) + u_0 (z - av_0) = 0,$$

即

$$ax \sin v_0 - ay \cos v_0 + u_0 z = au_0 v_0;$$

法线方程为

$$\frac{x - u_0 \cos v_0}{a \sin v_0} = \frac{y - u_0 \sin v_0}{-a \cos v_0} = \frac{z - av_0}{u_0}.$$

3548. 求曲面

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = u^3 + v^3$$

的切平面当切点 $M(u, v)$ ($u \neq v$) 无限接近于曲面的边界线 $u = v$ 上的点 $M_0(u_0, v_0)$ 时的极限位置.

解 $\vec{n}(u, v) = \{1, 2u, 3u^2\} \times \{1, 2v, 3v^2\}$
 $= (v - u) \{6uv, -3(u + v), 2\},$

则 \vec{n} 方向上的单位向量为

$$\vec{n}^0(u, v) = \left\{ \frac{6uv}{l}, -\frac{3(u+v)}{l}, \frac{2}{l} \right\},$$

其中 $l = \sqrt{36u^2v^2 + 9(u+v)^2 + 4}$. 于是

$$\lim_{\substack{u \rightarrow u_0 \\ v \rightarrow v_0}} \vec{n}^0 = \left\{ \frac{6u_0^2}{l_0}, -\frac{6u_0}{l_0}, \frac{2}{l_0} \right\},$$

其中 $l_0 = \sqrt{36u_0^4 + 36u_0^2 + 4}$. 而 $M_0(u_0, v_0) = (2u_0, 2u_0^2, 2u_0^3)$, 故知切面在 M_0 点的极限位置为

$$\begin{aligned} & 3u_0^2x - 3u_0y + z \\ &= 3u_0^2(2u_0) - 3u_0(2u_0^2) + 2u_0^3 \\ &= 2u_0^3, \end{aligned}$$

或

$$\frac{3x}{u_0} - \frac{3y}{u_0^2} + \frac{z}{u_0^3} = 2.$$

3549. 在曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2xz + 4yz = 8$ 上求出切平面平行于坐标平面的诸切点.

解 $\vec{n} = \{2(x+y+z), 2(x+2y+2z), 2(x+2y+3z)\}$. 当

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x+2y+2z=0, \\ x+2y+3z=\lambda \end{cases}$$

时, \vec{n} 与 $\vec{k} = \{0, 0, 1\}$ 平行, 即切面平行于 Oxy 平面. 解之, 得 $x=0, y=-\lambda, z=\lambda$. 将求得的 x, y, z 值代入所给的曲面方程, 得 $\lambda = \pm 2\sqrt{2}$. 于是, 切面平行于 Oxy 坐标平面的切点为 $(0, \pm 2\sqrt{2}, \pm 2\sqrt{2})$.

$\mp 2\sqrt{2}$). 同法可求得切面平行于 Oyz 坐标平面及 Oxz 坐标平面的诸切点分别为 $(\pm 4, \mp 2, 0)$ 及 $(\pm 2, \mp 4, \pm 2)$.

3550. 在椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上怎样的点, 椭球面的法线与坐标轴成等角?

解 $\vec{n} = 2 \left\{ \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right\}$. 按题设, 应有

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{l} = \frac{\frac{y}{b^2}}{l} = \frac{\frac{z}{c^2}}{l} \quad (l = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}),$$

即

$$\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2} = \lambda.$$

将上式代入椭球面方程, 得 $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

于是, 所求的点为 $x = \pm \frac{a^2}{d}$, $y = \pm \frac{b^2}{d}$, $z = \pm \frac{c^2}{d}$,

其中 $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

3551. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面

$$x + 4y + 6z = 0$$

的各切平面.

解 $\vec{n} = 2\{x, 2y, 3z\}$. 按题设, 应有

$$x = \lambda, \quad 2y = 4\lambda, \quad 3z = 6\lambda,$$

解之, 得 $x = \lambda$, $y = 2\lambda$, $z = 2\lambda$. 将它们代入方程

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$, 得 $\lambda = \pm 1$, 故切点为 $(\pm 1, \pm 2, \pm 2)$. 于是, 所求的切面方程为

$$(x \mp 1) + 4(y \mp 2) + 6(z \mp 2) = 0,$$

即

$$x + 4y + 6z = \pm 21.$$

3552. 证明: 曲面 $xyz = a^3$ ($a > 0$) 的切平面与坐标面形成体积一定的四面体.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$y_0 z_0 (x - x_0) + x_0 z_0 (y - y_0) + x_0 y_0 (z - z_0) = 0,$$

它与各坐标面的交点为 $A(3x_0, 0, 0)$, $B(0, 3y_0, 0)$, $C(0, 0, 3z_0)$. 注意到各坐标轴的垂直关系, 即知以 A 、 B 、 C 、 O 诸点为顶点的四面体的体积为

$$\begin{aligned} V_{ABCO} &= \frac{1}{3} OC \cdot \left(\frac{1}{2} OA \cdot OB \right) \\ &= \frac{1}{6} 3z_0 \cdot 3x_0 \cdot 3y_0 = \frac{9}{2} x_0 y_0 z_0 = \frac{9}{2} a^3, \end{aligned}$$

它为一个常数, 本题获证.

3553. 证明: 曲面

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \quad (a > 0)$$

的切平面在坐标轴上割下的诸线段, 其和为常量.

证 在曲面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 则曲面在该点的切平面方程为

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y - y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z - z_0) = 0$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\sqrt{y_0 z_0}(x-x_0)+\sqrt{x_0 z_0}(y-y_0)+\sqrt{x_0 y_0} \cdot (z-z_0)=0.$$

此切面在坐标轴上所割下的诸线段分别为

$$\sqrt{ax_0}, \sqrt{ay_0}, \sqrt{az_0},$$

其和为 $\sqrt{a}(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0})=\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}=a$, 它是常数, 本题获证.

3554. 证明: 锥面

$$z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$$

的切平面经过其顶点.

证 $\frac{\partial z}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\frac{y}{x}\right)$. 于是,

锥面在任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切面方程为

$$z-z_0=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right](x-x_0) \\ +f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0),$$

化简整理得

$$z=\left[f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right]x+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)y,$$

它显然通过锥面 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的顶点 $(0, 0, 0)$.

3555. 证明: 旋转面

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (f' \neq 0)$$

的法线与旋转轴相交.

证 在旋转面上任取一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 其中 $z_0 = f(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})$, 则曲面在该点的法向量为

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right\}_{P_0} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \\ &\cdot \{x_0 f', y_0 f', -\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\}. \end{aligned}$$

于是, 法线方程为

$$\frac{x - x_0}{x_0 f'} = \frac{y - y_0}{y_0 f'} = \frac{z - z_0}{-\sqrt{x_0^2 + y_0^2}},$$

显然, 法线通过 Oz 轴上的点

$$\left(0, 0, f(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}) + \frac{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{f'(\sqrt{x_0^2 + y_0^2})} \right),$$

即法线和 Oz 轴相交.

3556. 求椭球面

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$$

在坐标面上的射影.

解 先考虑椭球面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$ 在 Oxy 平面上的射影. 该射影即通过所给曲面上的每一点向 Oxy 平面作垂线所得到的垂足的全体, 它是 Oxy 平面上的一个区域, 这个区域的边界由曲面上这样的点的投影构成: 这一点向 Oxy 平面所作的垂线在它的切面内 (这里用到了椭球面的凸性), 即该点的法线与 Oxy

平面平行，注意到该点的法向量为 $\{2x-y, 2y-x, 2z\}$ 。因此，该点的坐标满足

$$\begin{cases} 2z=0, \\ x^2+y^2+z^2-xy=1, \end{cases}$$

这些点的投影为

$$\begin{cases} z=0, \\ x^2+y^2-xy=1, \end{cases}$$

它即椭球面在 Oxy 平面上射影的边界。

同法可考虑切面与 Oxz 平面垂直，则有

$$2y-x=0.$$

因此，对 Oxz 平面投影为边界点的椭球面上的点应满足方程

$$\begin{cases} 2y-x=0, \\ x^2+y^2+z^2-xy=1. \end{cases}$$

这是椭球面与平面的交线，将它改写为柱面与平面的交线

$$\begin{cases} 2y-x=0, \\ \frac{3x^2}{4}+z^2=1. \end{cases}$$

于是，椭球面在 Oxz 平面上射影的边界由方程

$$\begin{cases} y=0, \\ \frac{3x^2}{4}+z^2=1 \end{cases}$$

所确定。

同法可确定椭球面在 Oyz 平面上射影的边界由

方程

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{3y^2}{4} + z^2 = 1 \end{cases}$$

所确定.

于是, 椭球面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy = 1$ 在 Oxy 平面上的射影为圆: $x^2 + y^2 - xy \leq 1, z = 0$; 在 Oyz 平面上的射影为椭圆: $\frac{3}{4}y^2 + z^2 \leq 1, x = 0$; 在 Oxz 平面上的射影为椭圆 $\frac{3}{4}x^2 + z^2 \leq 1, y = 0$.

3557. 分正方形 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 为直径 $\leq \delta$ 的有限个部分 σ . 若曲面

$$z = 1 - x^2 - y^2$$

在属于同一部分 σ 的任何两点 $P(x, y)$ 及 $P_1(x_1, y_1)$ 的法线方向相差小于 1° , 求数 δ 的上界.

解 记曲面在点 $P(x, y)$ 及 $P_1(x_1, y_1)$ 的法向量为 \vec{n} 及 \vec{n}_1 , 则 $\vec{n} = \{2x, 2y, 1\}$, $|\vec{n}| \geq 1$, $\vec{n}_1 = \{2x_1, 2y_1, 1\}$, $|\vec{n}_1| \geq 1$, 且有

$$\vec{n} \times \vec{n}_1 = \{2(y - y_1), 2(x_1 - x), 4(xy_1 - x_1y)\},$$

$$\sin \widehat{(\vec{n}, \vec{n}_1)} = \frac{|\vec{n} \times \vec{n}_1|}{|\vec{n}| |\vec{n}_1|} \leq \frac{|\vec{n} \times \vec{n}_1|}{|\vec{n}| |\vec{n}_1|}$$

$$= 2 \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2 + 4(xy_1 - x_1y)^2}.$$

注意到 $(xy_1 - x_1y)^2 = [x(y_1 - y) + y(x - x_1)]^2$

$$\begin{aligned} &\leq 2[x^2(y_1 - y)^2 + y^2(x - x_1)^2] \\ &\leq 2[(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2], \end{aligned}$$

并记 $\rho = \sqrt{(y - y_1)^2 + (x - x_1)^2}$, 即有

$$\widehat{\sin(n, n_1)} \leq 2\sqrt{\rho^2 + 4 \cdot 2\rho^2} = 6\rho.$$

当 $\varphi = \widehat{(n, n_1)} < 1^\circ$ 时, $\varphi \approx \widehat{\sin(n, n_1)}$. 于是, 要 $\varphi < \frac{\pi}{180}$, 只要 $6\rho < \frac{\pi}{180}$, 即 $\rho < \frac{\pi}{1080} \approx 0.003$ 即可.

从而得

$$\delta < 0.003.$$

3558. 设:

$$z = f(x, y), \text{ 其中 } (x, y) \in D \quad (1)$$

为曲面的方程, $\varphi(P_1, P)$ 为曲面 (1) 在点 $P(x, y) \in D$ 及 $P_1(x_1, y_1) \in D$ 二点的法线之间的夹角.

证明: 若域 D 有界且为封闭的, 函数 $f(x, y)$ 在域 D 内有有界的二阶导函数, 则李雅甫诺夫不等式

$$\varphi(P_1, P) \leq C\rho(P_1, P) \quad (2)$$

成立. 其中 C 为常数, $\rho(P_1, P)$ 为点 P 与 P_1 之间的距离.

证 本题应加区域是凸的这个条件, 否则结论就不成立. 例如,

$$z = \begin{cases} 0, & \text{当 } y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1, \\ y^3, & \text{当 } y > 0, x \geq y^4, x^2 + y^2 \leq 1, \\ -y^3, & \text{当 } y > 0, x \leq -y^4, x^2 + y^2 \leq 1, \end{cases}$$

如图6·30所示, 函数 z 在单位圆内缺一个角的闭区域内定义, 且有连续的二

阶偏导函数, 取 $P_n\left(\frac{1}{n^3},$

$\frac{1}{n}\right)$ 与 $P'_n\left(-\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n}\right)$, 则

$$\vec{n} = \vec{n}(P_n) = \{0, 3y^2,$$

$$-1\}_{P_n} = \left\{0, \frac{3}{n^2}, -1\right\},$$

$$\vec{n}' = \vec{n}(P'_n) = \{0, -3y^2, -1\}_{P'_n}$$

$$= \left\{0, -\frac{3}{n^2}, -1\right\},$$

$$\vec{n} \times \vec{n}' = \left\{-\frac{6}{n^2}, 0, 0\right\},$$

$$\sin\varphi_n = \frac{|\vec{n} \times \vec{n}'|}{|\vec{n}| |\vec{n}'|} = \frac{\frac{6}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^4}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

又因

$$\rho_n(P_n, P'_n) = \frac{2}{n^3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\rho_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin\varphi_n}{\rho_n} \cdot \frac{\varphi_n}{\sin\varphi_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\varphi_n}{\rho_n}$$

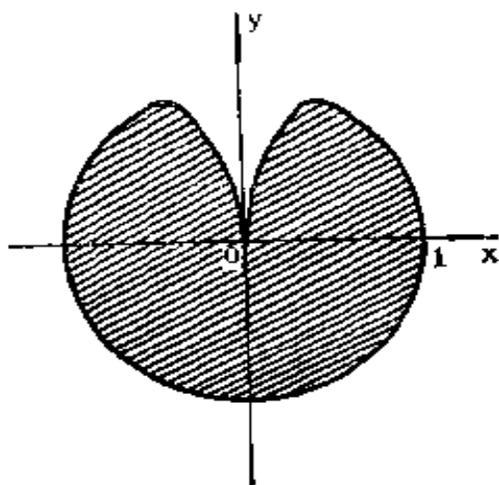


图 6·30

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{\frac{6}{n^2}}{1 + \frac{9}{n^4}}}{\frac{2}{n^3}} = +\infty,$$

故不存在常数 C , 使 $\varphi_n \leq C\rho_n$.

下面证明当 D 为凸的有界闭域时, 不等式(2)为真.

由 3255 题知: 当 $f(x, y)$ 在 D 内有二阶连续的偏导函数时, $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 内是二元连续的. 又因 D 是有界闭域, 故 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上有界, 记

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq M, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq M.$$

又由 3254 题的证明过程可知: 当 D 是凸域, $f(x, y)$ 有有界二阶偏导函数时, 对 D 中任意两点 P 及 P_1 , $\frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 满足里普什兹条件, 即存在常数 L , 使有

$$\left| \frac{\partial f(P)}{\partial x} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \right| \leq L\rho(P_1, P),$$

$$\left| \frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right| \leq L\rho(P_1, P).$$

$$\bar{n}(P_1) = \left\{ \frac{\partial f(P_1)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_1)}{\partial y}, -1 \right\}$$

及 $\vec{n}(P) = \left\{ \frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, -1 \right\}$ 知: 对于 $\varphi = \varphi$

(P_1, P) 有下列不等式

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{|\vec{n}(P_1) \times \vec{n}(P)|^2}{|\vec{n}(P_1)|^2 |\vec{n}(P)|^2} \leq |\vec{n}(P_1) \times \vec{n}(P)|^2 \\ &= \left[\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial f(P)}{\partial x} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \right]^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \frac{\partial f(P)}{\partial x} \right]^2 \\ &\leq L^2 \rho^2 + L^2 \rho^2 + 2 \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x} \right]^2 \\ &\quad \cdot \left[\frac{\partial f(P)}{\partial y} - \frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right]^2 \\ &\quad + 2 \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial y} \right]^2 \left[\frac{\partial f(P_1)}{\partial x} - \frac{\partial f(P)}{\partial x} \right]^2 \\ &\leq 2L^2 \rho^2 + 2M^2 L^2 \rho^2 + 2M^2 L^2 \rho^2 \\ &= 2L^2 \rho^2 (1 + 2M^2). \end{aligned}$$

于是,

$$\sin \varphi \leq C_1 \rho(P_1, P),$$

其中 $C_1^2 = 2L^2(1 + 2M^2)$, 从而得

$$\begin{aligned} \varphi(P_1, P) &\leq \frac{\pi}{2} \sin \varphi^* \leq \frac{\pi}{2} C_1 \rho(P_1, P) \\ &= C \rho(P_1, P), \end{aligned}$$

其中 $C = \frac{\sigma}{2} C_1$ 为常数, 本题获证.

*) 利用 1290 题的结果.

3559. 圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 与曲面 $bz = xy$ 在公共点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 相交成怎样的角?

解 二曲面在 M_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{y_0, x_0, -b\} \text{ 及 } \vec{n}_2 = \{2x_0, 2y_0, 0\}.$$

于是, 交角 φ 满足

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2x_0 y_0 + 2x_0 y_0 + 0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + b^2} \sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2}} \\ &= \frac{4bz_0}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot 2a} = \frac{2bz_0}{a\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

3560. 证明: 球坐标的坐标曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, $y = x \operatorname{tg} \varphi$, $x^2 + y^2 = z^2 \operatorname{tg}^2 \theta$ 两两相交.

证 各曲面在其交点 $P(x, y, z)$ 处的法向量分别为

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 &= \{2x, 2y, 2z\}, \quad \vec{n}_2 = \{\operatorname{tg} \varphi, -1, 0\}, \\ \vec{n}_3 &= \{2x, 2y, -2z \operatorname{tg}^2 \theta\}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 2x \operatorname{tg} \varphi - 2y = 2y - 2y = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 &= 4x^2 + 4y^2 - 4z^2 \operatorname{tg}^2 \theta = 4z^2 \operatorname{tg}^2 \theta \\ &\quad - 4z^2 \operatorname{tg}^2 \theta = 0, \\ \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 &= 2x \operatorname{tg} \varphi - 2y = 0, \end{aligned}$$

故知这些曲面在其交点处分别两两直交.

3561. 证明: 球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2cz$ 形成三直交系.

证 设球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ 与球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2by$ 交于 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 点, 则它们在 P_0 点的法向量为

$$\vec{n}_1 = \{2(x_0 - a), 2y_0, 2z_0\},$$

$$\vec{n}_2 = \{2x_0, 2(y_0 - b), 2z_0\}.$$

由于

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= 4[x_0(x_0 - a) + y_0(y_0 - b) + z_0^2] \\ &= 2[2x_0^2 + 2y_0^2 + 2z_0^2 - 2ax_0 - 2by_0] \\ &= 2[(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2ax_0) + (x_0^2 + y_0^2 \\ &\quad + z_0^2 - 2by_0)] = 0, \end{aligned}$$

故知这二球在其交点处直交, 同法可证其它球的两两直交性.

3562. 当 $\lambda = \lambda_1, \lambda = \lambda_2, \lambda = \lambda_3$ 时, 经过每一点 $M(x, y, z)$ 有三个二次曲面:

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0).$$

证明这些曲面是直交的.

证 先证 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$ 的存在性. 考虑 λ^2 的多项式

$$\begin{aligned} F(\lambda^2) &= x^2(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2) + y^2(a^2 - \lambda^2) \\ &\quad \cdot (c^2 - \lambda^2) + z^2(a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2) \\ &\quad + (a^2 - \lambda^2)(b^2 - \lambda^2)(c^2 - \lambda^2). \end{aligned}$$

显然有

$$F(a^2) = x^2(b^2 - a^2)(c^2 - a^2) \geq 0,$$

$$F(b^2) = y^2(a^2 - b^2)(c^2 - b^2) \leq 0,$$

$$F(c^2) = z^2(a^2 - c^2)(b^2 - c^2) \geq 0,$$

$$\lim_{\lambda^2 \rightarrow +\infty} F(\lambda^2) = -\infty.$$

因此, $F(\lambda^2) = 0$ 在 $(a^2, +\infty), (b^2, a^2)$ 及 $(c^2,$

b^2)内各有一根, 记为 $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$. 但 $F(\lambda^2)$ 是关于 λ^2 的三次多项式, 因此, 也仅有三个实根 λ_i^2 ($i=1, 2, 3$), 且知 $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j; i, j=1, 2, 3$). 由 $F(\lambda_i^2) = 0$ 不难推得

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_i^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_i^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_i^2} = -1 \quad (i=1, 2, 3).$$

下面再证明这三个二次曲面是两两直交的, 由于

$$\vec{n}_i = \left\{ \frac{2x}{a^2 - \lambda_i^2}, \frac{2y}{b^2 - \lambda_i^2}, \frac{2z}{c^2 - \lambda_i^2} \right\} \quad (i=1, 2, 3),$$

及当 $i \neq j$ 时,

$$\begin{aligned} \vec{n}_i \cdot \vec{n}_j &= \frac{4x^2}{(a^2 - \lambda_i^2)(a^2 - \lambda_j^2)} + \frac{4y^2}{(b^2 - \lambda_i^2)(b^2 - \lambda_j^2)} \\ &\quad + \frac{4z^2}{(c^2 - \lambda_i^2)(c^2 - \lambda_j^2)} \\ &= \frac{4}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} \left[\left(\frac{x^2}{a^2 - \lambda_i^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_i^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_i^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{x^2}{a^2 - \lambda_j^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_j^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_j^2} \right) \right] \\ &= \frac{4}{\lambda_i^2 - \lambda_j^2} [(-1) - (-1)] = 0. \end{aligned}$$

故本题获证.

3563. 求函数 $u = x + y + z$ 在沿球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法线方向上的导函数.

在球面上怎样的点使得上述的导函数有：(a) 最大值，(b) 最小值，(B) 等于零？

解 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1$ ，则在 M_0 点处球面的外法线单位向量为 $\left\{ \frac{x_0}{r_0}, \frac{y_0}{r_0}, \frac{z_0}{r_0} \right\} = \{x_0, y_0, z_0\}$ 。

于是，

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \cdot \{x_0, y_0, z_0\} \\ &= \{1, 1, 1\} \cdot \{x_0, y_0, z_0\} = x_0 + y_0 + z_0. \end{aligned}$$

(a) 利用 1294 题的结果，得

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 + z_0 &= 1 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 1 \cdot z_0 \\ &\leq \sqrt{3} \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

当 $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 时，上述等式成立，此点恰在

球面上。因此，在 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ 点 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 取得最大值。

(b) 同法可得

$$\begin{aligned} -(x_0 + y_0 + z_0) &= (-1)x_0 + (-1)y_0 \\ &+ (-1)z_0 \leq \sqrt{3}, \end{aligned}$$

或

$$x_0 + y_0 + z_0 \geq -\sqrt{3}.$$

故在点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$ ， $\frac{\partial u}{\partial n}$ 取得最小值。

(B) 当 $x+y+z=0$ 及 $x^2+y^2+z^2=1$ 时 $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

因此, 所求的点为由方程

$$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

所确定的解 (x, y, z) , 它在单位球面与过圆心的平面 $x+y+z=0$ 的交线——圆上面.

3564. 求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在沿椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 点的外法线方向上的导函数.

解 $\vec{n}=\left\{\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2}\right\}$, 此法向量的单位向量

为 $\vec{n}^0=\left\{\frac{x_0}{a^2\Delta}, \frac{y_0}{b^2\Delta}, \frac{z_0}{c^2\Delta}\right\}$, 其中

$$\Delta=\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{M_0} &= \frac{x_0}{a^2\Delta} \cdot 2x_0 + \frac{y_0}{b^2\Delta} \cdot 2y_0 + \frac{z_0}{c^2\Delta} \cdot 2z_0 \\ &= \frac{2}{\Delta} \left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} \right) = \frac{2}{\Delta} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4} + \frac{z_0^2}{c^4}}}. \end{aligned}$$

3565. 设 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial n}$ 为函数 u 和 v 在沿曲面 $F(x, y, z)=0$

上的点的法线方向上的导函数，证明：

$$\frac{\partial}{\partial n}(uv) = u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}.$$

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \frac{\partial}{\partial n}(uv) &= \frac{\partial}{\partial x}(uv) \cos \alpha \\ &+ \frac{\partial}{\partial y}(uv) \cos \beta + \frac{\partial}{\partial z}(uv) \cos \gamma \\ &= u \left(\frac{\partial v}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial v}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial v}{\partial z} \cos \gamma \right) \\ &+ v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) \\ &= u \frac{\partial v}{\partial n} + v \frac{\partial u}{\partial n}. \end{aligned}$$

求含一个参变数的平面曲线族的包线：

3566. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ ($p = \text{常数}$).

$$\text{解} \quad \begin{cases} f(x, y, \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = -x \sin \alpha + y \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

消去 α ，得

$$x^2 + y^2 = p^2. \quad (1)$$

由于原曲线族没有奇点，且(1)也不是原曲线族中的某一支，故(1)为原曲线族的包线方程。

3567. $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$

$$\text{解 } \begin{cases} (x-a)^2 + y^2 - \frac{a^2}{2} = 0, \\ 2(x-a) + a = 0. \end{cases}$$

消去 a , 得 $y = \pm x$, 同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

3568. $y = kx + \frac{a}{k}$ ($a = \text{常数}$).

$$\text{解 } \begin{cases} kx - y + \frac{a}{k} = 0, \\ x - \frac{a}{k^2} = 0. \end{cases}$$

消去 k , 得 $y^2 = 4ax$, 同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

3569. $y^2 = 2px + p^2$.

$$\text{解 } \begin{cases} 2px - y^2 + p^2 = 0, \\ x + p = 0. \end{cases}$$

消去 p , 得 $x^2 + y^2 = 0$, 它仅为一点 $(0, 0)$. 于是, 原曲线族无包线.

3570. 设有长为 l 的线段, 其两 endpoint 沿坐标轴滑动, 求如此产生的线段族的包线.

解 如图 6.31 所示, 直线方程为

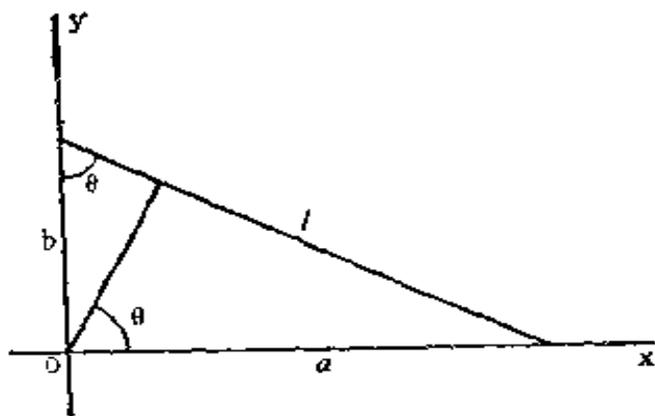


图 6.31

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

但是 $a = l \sin \theta$, $b = l \cos \theta$, 所以,

$$\frac{x}{\sin \theta} + \frac{y}{\cos \theta} = l. \quad (1)$$

对 θ 求导数, 得

$$-\frac{x}{\sin^2 \theta} \cos \theta + \frac{y}{\cos^2 \theta} \sin \theta = 0$$

或
$$\frac{x}{\sin^3 \theta} = \frac{y}{\cos^3 \theta}. \quad (2)$$

由(1), (2)消去 θ , 得 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}}$, 同 3566 题的理由可知, 它是包线方程.

3571. 求椭圆族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的包线, 已知此族中椭圆的面积 S 为常数.

解 由题设 $\pi ab = S$, 得 $a = \frac{S}{\pi b}$, 且

$$\frac{\pi^2 b^2 x^2}{S^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1)$$

对 b 求导数, 得

$$\frac{2\pi^2 b x^2}{S^2} - \frac{2y^2}{b^3} = 0. \quad (2)$$

由(2)式 $b^4 = \frac{y^2 S^2}{\pi^2 x^2}$ 或 $b^2 = \pm \frac{yS}{\pi x}$. 再代入(1), 得

$$\pm \frac{\pi xy}{S} \pm \frac{\pi xy}{S} = 1, \text{ 即}$$

$$|xy| = \frac{S}{2\pi},$$

同 3566 题的理由可知，它是包线方程。

3572. 炮弹在真空中以初速度 v_0 射出，当投射角 α 在铅垂平面中变化下，求炮弹轨道的包线。

解 炮弹轨道方程为

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (1)$$

对 α 求导数，得

$$0 = \frac{x}{\cos^2 \alpha} - \frac{gx^2 \sin \alpha}{v_0^2 \cos^3 \alpha}. \quad (2)$$

由(2)式得 $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{xg}$ 。代入(1)式，得

$$\begin{aligned} y &= x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = x \frac{v_0^2}{xg} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \left(1 + \frac{v_0^4}{x^2 g^2} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \end{aligned}$$

同 3566 题的理由可知，它是包线方程。

3573. 证明：平面曲线的法线的包线是此曲线的渐屈线。

证 这里我们仅就由显式 $y=f(x)$ 所给出的平面曲线情形加以证明。

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x, y)$ 的法线方程为

$$(X-x) + y'(Y-y) = 0, \quad (1)$$

对 x 求导数, 得

$$-1 + y''(Y - y) - y'^2 = 0$$

或

$$y''(Y - y) = 1 + y'^2. \quad (2)$$

由(1), (2)解得

$$\begin{cases} X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \\ Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}, \end{cases}$$

此即 $y = f(x)$ 的渐屈线方程(参看第二章§14前言3°). 同 3566 题的理由可知, 它是平面曲线的法线的包线方程.

3574. 研究下列曲线族的判别曲线的性质 (c ——参变数):

(a) 立方抛物线 $y = (x - c)^3$;

(b) 半立方抛物线 $y^2 = (x - c)^3$;

(B) 奈尔半立方抛物线 $y^3 = (x - c)^2$;

(r) 环索线 $(y - c)^2 = x^2 \frac{a - x}{a + x}$.

解 (a) $\begin{cases} f(x, y, c) = y - (x - c)^3 = 0, \\ f'_c(x, y, c) = 3(x - c)^2 = 0. \end{cases}$

消去 c , 得 $y = 0$, 它为判别曲线的方程.

原曲线无奇点, 且 $y = 0$ 也不是原曲线族的某一支, 因此, 它是包线. 此包线与原曲线在 $(c, 0)$ 点相切, 且 $(c, 0)$ 点是曲线的拐点, 即它又是原曲线族拐点的轨迹. 如图 6.32(1) 所示.

$$(6) \begin{cases} y^2 - (x-c)^3 = 0, \\ 3(x-c)^2 = 0. \end{cases}$$

消去 c , 得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c, 0)$, 因此它是奇点的轨迹. 要看是否为包线, 还要看在奇点的两支是否与判别曲线相切. 事实上, 两支分别为 $y_1 = (x-c)^{\frac{3}{2}}$, $y_2 = -(x-c)^{\frac{3}{2}}$, 均有 $y'_1(c)=0$, $y'_2(c)=0$. 因此, $y=0$ 为原曲线族的包线. 如图 6·32(2) 所示.

$$(B) \begin{cases} y^3 - (x-c)^2 = 0, \\ 2(x-c) = 0. \end{cases}$$

消去 c , 得判别曲线 $y=0$.

原曲线的奇点为 $(c, 0)$. 由于 $y = (x-c)^{\frac{3}{2}}$ 在 $x=c$ 处的导数为无穷, 因此, 它与 $y=0$ 不相切, 从而它无包线. 奇点 $(c, 0)$ 为尖点. 如图 6·32(3) 所示.

$$(F) \begin{cases} (y-c)^2 - x^2 \frac{a-x}{a+x} = 0, \\ -2(y-c) = 0. \end{cases}$$

消去 c , 得 $x^2(a-x)=0$, 即判别曲线为直线 $x=0$ 及 $x=a$.

显然 $x=0$ 为原曲线族奇点的轨迹, 用 §6. 的方法可判别出它是二重点的轨迹. 事实上,

$$A = f''_{xx}(0, c) = 2, \quad B = f''_{xy}(0, c) = 0,$$

$$C = F''_{yy}(0, c) = -2, \quad AC - B^2 = -4 < 0.$$

从而知 $x=0$ 不是包线.

但是, 在 $x=a$ 处 $f'_x(a, y) \neq 0$ ($a \neq 0$). 因此 $x=a$ 不是原曲线族奇点的轨迹, 同时它又不是原曲线族的某一支. 因此, $x=a$ 是原曲线族的包线, 如图 6.32 (4) 所示.

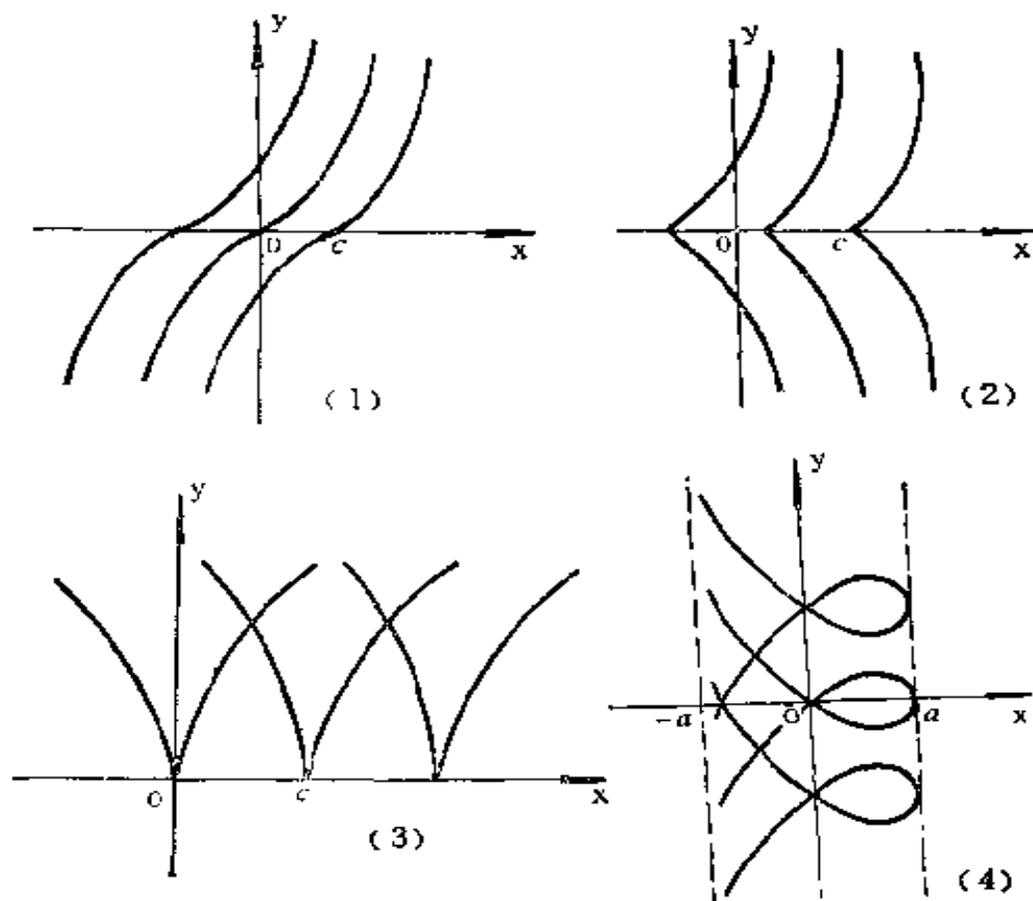


图 6.32

3575. 求半径为 r , 中心在圆周 $x=R\cos t, y=R\sin t, z=0$ (t —参数, $R > r$) 上的球族的包面.

解
$$\begin{cases} (X - R\cos t)^2 + (Y - R\sin t)^2 + Z^2 = r^2, & (1) \\ 2R\sin t(X - R\cos t) - 2R\cos t(Y - R\sin t) = 0. & (2) \end{cases}$$

(2)式化简得 $X \sin t - Y \cos t = 0$. 于是,

$$\operatorname{tg} t = \frac{Y}{X}, \quad \cos t = \pm \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}},$$

$$\sin t = \pm \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 得

$$(X^2 + Y^2) \left(1 \pm \frac{R}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)^2 + Z^2 = r^2.$$

当取“+”号时, 由于 $R^2 > r^2$, 故它不代表任何点(不是虚的)的轨迹.

当取“-”号时, 由于原曲面族无奇点, 且 $(\sqrt{X^2 + Y^2} - R)^2 + Z^2 = r^2$ 不是原曲面族的某一个, 因此, 它是原曲面族的包面(圆环).

3576. 求球族

$$(x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 + (z - t \cos \gamma)^2 = 1$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ 及 t —参变数)的包面.

$$\text{解} \quad \begin{cases} (x - t \cos \alpha)^2 + (y - t \cos \beta)^2 \\ + (z - t \cos \gamma)^2 - 1 = 0, & (1) \\ -2 \cos \alpha (x - t \cos \alpha) - 2 \cos \beta (y - t \cos \beta) \\ - 2 \cos \gamma (z - t \cos \gamma) = 0. & (2) \end{cases}$$

$$\text{由(2)得} \quad t = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma. \quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 化简整理得

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2 = 1. \quad (4)$$

由于原曲面族的奇点均不在此方程所表示的曲面上, 并且曲面(4)也不是原曲面族中的某一个, 因此, 曲面(4)为原曲面族的包面.

3577. 求椭球面族 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的包面, 这些椭球的体

积 V 是常数.

解 引入辅助函数

$$F(x, y, z, a, b, c) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \lambda abc,$$

则包面的方程由方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} abc = \frac{3V}{4\pi}, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_a = -\frac{2x^2}{a^3} + \lambda bc = 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_b = -\frac{2y^2}{b^3} + \lambda ac = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F'_c = -\frac{2z^2}{c^3} + \lambda ab = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可解得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \frac{\lambda abc}{2} = \mu. \quad (6)$$

将(6)式代入(1)式, 得

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} = \mu = \frac{1}{3}.$$

于是,

$$a = \sqrt{3}|x|, \quad b = \sqrt{3}|y|, \quad c = \sqrt{3}|z|. \quad (7)$$

将(7)式代入(2)式, 得

$$|xyz| = \frac{V}{4\pi\sqrt{3}}. \quad (8)$$

由于原曲面族无奇点, 且曲面(8)也不是原曲面族中的某一个, 故知曲面(8)为原曲面族的包面.

3578. 求半径为 ρ , 中心在圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 上的球族的包面.

解 设球心为 (a, b, c) , 则球的方程为

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2,$$

其中 $a^2 + b^2 = c^2$.

引入辅助函数

$$F(x, y, z, a, b, c) = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda(a^2 + b^2 - c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = \rho^2, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = c^2, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_a = -2(x-a) + 2\lambda a = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_b = -2(y-b) + 2\lambda b = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} F'_c = -2(z-c) - 2\lambda c = 0 & (5) \end{cases}$$

确定.

由(3)、(4)、(5)可得

$$\frac{x}{a} - 1 = \frac{y}{b} - 1 = -\frac{z}{c} + 1 = \lambda.$$

引入记号 $\frac{1}{\mu} = \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 2 - \frac{z}{c}$, 则有

$$a = \mu x, \quad b = \mu y, \quad c = \frac{\mu z}{2\mu - 1}. \quad (6)$$

将(6)式代入(1),(2)两式,得

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(2\mu - 1)^2} = \frac{\rho^2}{(\mu - 1)^2}, & (7) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{z^2}{(2\mu - 1)^2} = 0. & (8) \end{cases}$$

(7)+(8)得

$$2(x^2 + y^2) = \frac{\rho^2}{(\mu - 1)^2}$$

或 $\sqrt{2}\rho = \sqrt{x^2 + y^2} |2\mu - 2|. \quad (9)$

由(8)得 $2\mu - 1 = \pm \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (10)$

将(10)代入(9),整理得

$$\sqrt{2}\rho = |\sqrt{x^2 + y^2} \pm z|. \quad (11)$$

由于原曲面族无奇点,且曲面(11)也不是原曲面族的某一个.因此,曲面(11)为原曲面族的包面.

3579. 有一发光点位于坐标原点.若 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 > R^2$, 求由球

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq R^2$$

投影所生成的阴影圆锥.

解 解法一.

所求的阴影圆锥的表面,可看作是一个过原点的平面族的包面,此平面族的方程为

$$ax + by + cz = 0,$$

其中 a, b, c 满足约束条件

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + cz_0 = \pm R, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1. \end{cases}$$

引进辅助函数

$$F(x, y, z, a, b, c) = ax + by + cz + \lambda(ax_0 + by_0 + cz_0) + \mu(a^2 + b^2 + c^2),$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0, & (1) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1, & (2) \\ ax_0 + by_0 + cz_0 = \pm R, & (3) \\ F'_a = x + \lambda x_0 + 2\mu a = 0, & (4) \\ F'_b = y + \lambda y_0 + 2\mu b = 0, & (5) \\ F'_c = z + \lambda z_0 + 2\mu c = 0 & (6) \end{cases}$$

确定。

方程 (4)、(5)、(6) 要能解出 λ, μ ，其中 a, b, c 必须满足关系式

$$\begin{vmatrix} x & x_0 & a \\ y & y_0 & b \\ z & z_0 & c \end{vmatrix} = 0. \quad (7)$$

$$\text{记 } r_1 = \begin{vmatrix} y & y_0 \\ z & z_0 \end{vmatrix}, \quad r_2 = \begin{vmatrix} z & z_0 \\ x & x_0 \end{vmatrix}, \quad r_3 = \begin{vmatrix} x & x_0 \\ y & y_0 \end{vmatrix},$$

$$\text{则上述关系式可记为 } ar_1 + br_2 + cr_3 = 0. \quad (8)$$

由 (1)、(3)、(8) 可解得

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y & z \\ \pm R & y_0 & z_0 \\ 0 & r_2 & r_3 \\ x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & r_2 & r_3 \\ x & y & z \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}} = \frac{\pm R(zr_2 - yr_3)}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}$$

或

$$a^2 = \frac{R^2(zr_2 - yr_3)^2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2},$$

$$b^2 = \frac{R^2(xr_3 - zr_1)^2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2}, \quad c^2 = \frac{R^2(xr_2 - yr_1)^2}{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2}. \quad (9)$$

将(9)式代入(2)式, 即得

$$\begin{aligned} (r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)^2 &= R^2[(yr_3 - zr_2)^2 \\ &+ (xr_3 - zr_1)^2 + (xr_2 - yr_1)^2] \\ &= R^2[(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &- (xr_1 + yr_2 + zr_3)^2] \\ &= R^2(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)(x^2 + y^2 + z^2). \end{aligned}$$

[其中利用了 $xr_1 + yr_2 + zr_3 = 0$, 这是不难验证的.]

于是, 有

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = R^2(x^2 + y^2 + z^2). \quad (10)$$

由于原平面族无奇点, 且曲面(10)不是平面族的某一个, 因此, 曲面(10)即为包面. 所求的阴影圆锥为此锥面的内部, 即满足不等式

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \leq R^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

的空间区域 (严格说来, 还要除去球前部的区域).

解法二

显然，阴影圆锥是由通过坐标原点的球面 $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2$ 的全体切线构成的。由解析几何知，如果点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 不在二次曲面

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz \\ &\quad + 2gxz + 2hxy + 2px + 2qy + 2rz + d \\ &= \varphi(x, y, z) + 2px + 2qy + 2rz + d = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

上，则通过点 P_1 而和二次曲面(1)相切的全体切线所构成的锥面方程为

$$\begin{aligned} &[(x-x_1)F'_x(x_1, y_1, z_1) + (y-y_1) \\ &\quad \cdot F'_y(x_1, y_1, z_1) + (z-z_1)F'_z(x_1, y_1, z_1)]^2 \\ &\quad - 4\varphi(x-x_1, y-y_1, z-z_1) \\ &\quad \cdot F(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{今有 } F(x, y, z) &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \\ &\quad + (z-z_0)^2 - R^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 2(x_0x + y_0y + z_0z) \\ &\quad + (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2). \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} F'_x(0, 0, 0) &= -2x_0, \quad F'_y(0, 0, 0) = -2y_0, \\ F'_z(0, 0, 0) &= -2z_0, \end{aligned}$$

故由(2)即得阴影圆锥面的方程为

$$\begin{aligned} &(-2x_0x - 2y_0y - 2z_0z)^2 - 4(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad \cdot (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - R^2) = 0 \end{aligned}$$

或

$$(y_0^2 + z_0^2)x^2 + (x_0^2 + z_0^2)y^2 + (x_0^2 + y_0^2)z^2$$

$$\begin{aligned}
 & -2x_0y_0xy - 2y_0z_0yz - 2z_0x_0zx \\
 & -R^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0.
 \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
 & (y_0^2 + z_0^2)x_0^2 + (x_0^2 + z_0^2)y_0^2 + (x_0^2 + y_0^2)z_0^2 \\
 & - 2x_0^2y_0^2 - 2y_0^2z_0^2 - 2z_0^2x_0^2 \\
 & - R^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) = -R^2(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) < 0,
 \end{aligned}$$

故所求的阴影圆锥为此锥面的内部，即满足不等式

$$\begin{aligned}
 & (y_0^2 + z_0^2)x^2 + (z_0^2 + x_0^2)y^2 \\
 & + (x_0^2 + y_0^2)z^2 - 2x_0y_0xy - 2y_0z_0yz \\
 & - 2z_0x_0zx - R^2(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0
 \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{cc} x & y \\ x_0 & y_0 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} y & z \\ y_0 & z_0 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z & x \\ z_0 & x_0 \end{array} \right|^2 \\
 & \leq R^2(x^2 + y^2 + z^2)
 \end{aligned}$$

的空间区域（严格说来，还要除去球前部的区域）。

解法三

如图 6·33 所示，由三角形的面积公式

$$\frac{1}{2} |\vec{r}| \cdot |\vec{l}_0| \sin \alpha$$

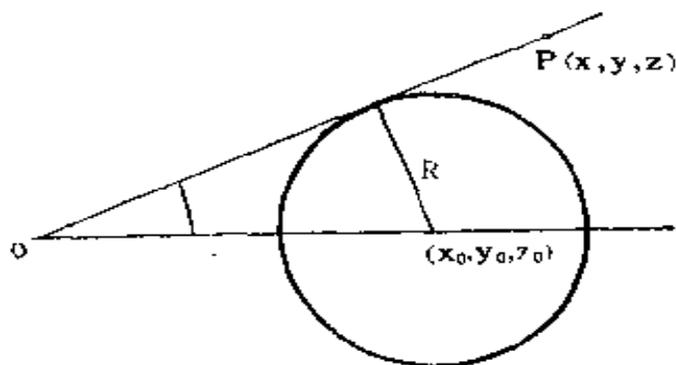


图 6·33

得到

$$|\vec{r} \times \vec{l}_0| = |\vec{r}| \cdot |\vec{l}_0| \cdot \frac{R}{|\vec{l}_0|},$$

其中 $\vec{l}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$, 而 $P(x, y, z)$ 为锥面上的任意一点. 平方之, 即得圆锥曲面的方程为

$$|\vec{r} \times \vec{l}_0|^2 = R^2 |\vec{r}|^2.$$

于是, 所求的阴影圆锥为适合不等式

$$|\vec{r} \times \vec{l}_0|^2 \leq R^2 |\vec{r}|^2,$$

即

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{cc} x & y \\ x_0 & y_0 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} y & z \\ y_0 & z_0 \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z & x \\ z_0 & x_0 \end{array} \right|^2 \\ & \leq R^2 (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned}$$

的空间区域 (严格说来, 还要除去球前部的区域).

3580. 若参变量 p 和 q 受方程

$$p^2 + q^2 = 1$$

的限制, 求平面族

$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$$

的包面.

解 解法一

引进辅助函数

$$\begin{aligned} F(x, y, z, p, q) &= z - z_0 - p(x - x_0) \\ &\quad - q(y - y_0) + \lambda(p^2 + q^2), \end{aligned}$$

则包面方程由方程组

$$\begin{cases} z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0), & (1) \\ p^2 + q^2 = 1, & (2) \\ F'_x = -(x - x_0) + 2\lambda p = 0, & (3) \\ F'_y = -(y - y_0) + 2\lambda q = 0 & (4) \end{cases}$$

确定.

(3) $\times p$ + (4) $\times q$, 得 $2\lambda = z - z_0$. 于是, 由(3), (4)得

$$p = \frac{x - x_0}{z - z_0}, \quad q = \frac{y - y_0}{z - z_0}. \quad (5)$$

将(5)式代入(1)式, 得

$$(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

由于原平面族无奇点, 且显见上述曲面不是平面, 故上述曲面即为包面.

解法二

引入新参数 θ ; 令 $p = \sin\theta$, $q = \cos\theta$.

$$\begin{cases} z - z_0 = \cos\theta \cdot (x - x_0) + \sin\theta \cdot (y - y_0), & (1) \\ \sin\theta \cdot (x - x_0) = \cos\theta \cdot (y - y_0). & (2) \end{cases}$$

于是,

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{\pm(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}, \\ \cos\theta &= \frac{\pm(x - x_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}. \end{aligned}$$

代入(1)式, 得

$$(z - z_0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2.$$

由于原平面族无奇点, 且上述曲面不是平面, 故上述曲面即为包面.

§6. 台劳公式

1° 台劳公式 若函数 $f(x, y)$ 在点 (a, b) 的某邻域内有直到 $n+1$ 阶 (连 $n+1$ 阶的在内) 的一切连续偏导函数, 则在此邻域内下面的公式成立

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^i f(a, b) + R_n(x, y), \quad (1)$$

其中

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^{n+1} f \left[a + \theta_n(x-a), b + \theta_n(y-b) \right] \quad (0 < \theta_n < 1).$$

2° 台劳级数 若函数 $f(x, y)$ 可以无穷次地微分及 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x, y) = 0$, 则此函数可表成幂级数的形状

$$f(x, y) = f(a, b) + \sum_{i+j \geq 1}^{\infty} \frac{1}{i!j!} f_{x^i y^j}^{(i+j)}(a, b) (x-a)^i (y-b)^j. \quad (2)$$

特别情形, 当 $a=b=0$ 时公式(1)和(2)分别名为马克老林公式和马克老林级数.

对于多于两个变量的函数有类似的公式.

3° 平面曲线的奇点 设在某点 $M_0(x_0, y_0)$ 可微分两次的曲线 $F(x, y) = 0$ 适合下列条件

$$F(x_0, y_0) = 0, F'_x(x_0, y_0) = 0, F'_y(x_0, y_0) = 0$$

及数

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0), B = F''_{xy}(x_0, y_0), C = F''_{yy}(x_0, y_0)$$

不全为零. 于是, 若

- (1) $AC - B^2 > 0$, 则 M_0 —孤立点;
- (2) $AC - B^2 < 0$, 则 M_0 —二重点(节);
- (3) $AC - B^2 = 0$, 则 M_0 —上升点或孤立点.

在 $A = B = C = 0$ 的情形, 奇点的种类可能更复杂. 至于不属于光滑的曲线类 $C^{(2)}$ 的曲线, 奇点还可能有更复杂的类型: 中断的点, 角点等等.

3581. 在点 $A(1, -2)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y - 6, \frac{\partial f}{\partial y} = -x - 2y - 3;$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

所有三阶偏导函数均为零, 因此, 有 $R_2(x, y) = 0$. 在点 $A(1, -2)$ 处,

$$f(1, -2) = 5, \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2.$$

于是,

$$f(x, y) = 5 + 2(x-1)^2 - (x-1) \cdot (y+2) - (y+2)^2.$$

3582. 在点 $A(1, 1, 1)$ 的邻域内根据台劳公式展开函数

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3yz, \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3xz,$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 3xy;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3z, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -3x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3y;$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3, \text{ 其余}$$

的三阶混合偏导函数均为零;

所有的四阶偏导函数均为零, 因此, $R_4(x, y, z) = 0$. 在点 $A(1, 1, 1)$ 处,

$$f(1, 1, 1) = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} = 6, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = 6,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y \partial z} = -3, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \dots = \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x} = 0. \text{ 于是,}$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= f(1, 1, 1) + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{i!} \left[(x-1) \frac{\partial}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. + (y-1) \frac{\partial}{\partial y} + (z-1) \frac{\partial}{\partial z} \right]^i f(1, 1, 1) \\ &= 3 [(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \\ &\quad - (x-1)(y-1) - (x-1)(z-1) \\ &\quad - (y-1)(z-1)] + (x-1)^3 + (y-1)^3 \\ &\quad + (z-1)^3 - 3(x-1)(y-1)(z-1). \end{aligned}$$

3583. 当从 $x=1, y=-1$ 变到 $x_1=1+h, y_1=-1+k$ 时, 求函数 $f(x, y) = x^2 y + x y^2 - 2xy$ 的增量.

解 记 $A(1, -1)$ 及 $P(1+h, -1+k)$, 则

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_A = (2xy + y^2 - 2y) \Big|_A = 1,$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_A = (x^2 + 2xy - 2x) \Big|_A = -3;$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_A = 2y \Big|_A = -2, \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_A = 2x \Big|_A = 2,$$

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_A = (2x + 2y - 2) \Big|_A = -2;$$

$$\left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_A = \left. \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right|_A = 0, \quad \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right|_A = \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right|_A = 2;$$

所有四阶偏导函数均为零, 因此, $R_3(x, y) = 0$.
于是, 按台劳公式即得

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(P) - f(A) = \sum_{i=1}^3 \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^i f(A) \\ &= (h - 3k) + (-h^2 - 2hk + k^2) + hk(h + k).\end{aligned}$$

3584. 设:

$$\begin{aligned}f(x, y, z) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 \\ &\quad + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz,\end{aligned}$$

按数 h, k 和 l 的正整数幂展开 $f(x+h, y+k, z+l)$.

$$\text{解} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2(Ax + Dy + Ez), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2D,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(By + Dx + Fz), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2B,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2F,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2(Cz + Ex + Fy), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2C, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 2E.$$

所有三阶偏导函数均为零, 因此, $R_2(x, y) = 0$.
于是, 按台劳公式即得

$$\begin{aligned}f(x+h, y+k, z+l) &= f(x, y, z) \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} + l \frac{\partial}{\partial z} \right)^i f(x, y, z) \\ &= f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + Ez) \\ &\quad + k(By + Dx + Fz) + l(Cz + Ex + Fy)] \\ &\quad + [Ah^2 + Bk^2 + Cl^2 + 2Dhk + 2Ehl + 2Fkl] \\ &= f(x, y, z) + 2[h(Ax + Dy + Ez) + k(Dx\end{aligned}$$

$$+By + Fz) + l(Ex + Fy + Cz)] + f(h, k, l).$$

3585. 写出函数

$$f(x, y) = x^y$$

在点 $A(1, 1)$ 的邻域内的展开式, 到二次项为止.

解 $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x,$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x, \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = y(y-1)(y-2)x^{y-3},$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = x^y \ln^3 x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = (2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = yx^{y-1} \ln^2 x + 2x^{y-1} \ln x.$$

于是, 按台劳公式在点 $(1, 1)$ 附近展到二次项, 得

$$x^y = 1 + (x-1) + (x-1)(y-1) + R_2 [1 + \theta(x-1), 1 + \theta(y-1)], \quad 0 < \theta < 1, \quad \text{其中余项}$$

$$\begin{aligned} R_2(x, y) &= \frac{1}{3!} \{ y(y-1)(y-2)x^{y-3} dx^3 \\ &\quad + 3[(2y-1)x^{y-2} + y(y-1)x^{y-2} \ln x] dx^2 dy \\ &\quad + 3[yx^{y-1} \ln^2 x + 2x^{y-1} \ln x] dx dy^2 + x^y \ln^3 x dy^3 \} \\ &= \frac{1}{6} x^y \left[\left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right)^3 + 3 \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy \right) \right] \end{aligned}$$

$$\cdot \left(-\frac{y}{x^2} dx^2 + \frac{2}{x} dx dy \right) + \left(\frac{2y}{x^3} dx^3 - \frac{3}{x^2} dx^2 dy \right) \Bigg],$$

$$dx = x - 1, \quad dy = y - 1.$$

3586. 根据马克老林公式展开函数

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

到四次项为止.

解 由于

$$\begin{aligned} (1+x)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3,$$

故得

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} = [1 + (-x^2 - y^2)]^{\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1}{8}(x^2 + y^2)^2. \end{aligned}$$

3587. 若 $|x|$ 和 $|y|$ 同 1 比较为很小的量, 对于下列二式

$$(a) \frac{\cos x}{\cos y}; \quad (b) \operatorname{arctg} \frac{1+x+y}{1-x+y}$$

推出准确到二次项的近似公式.

$$\text{解 } (a) \frac{\cos x}{\cos y} = \cos x \cdot (1 - \sin^2 y)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{x^2}{2} + \dots\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 y + \dots\right) \\
&\approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\sin^2 y\right) \\
&\approx \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}y^2\right) \approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(6) \quad \arctg \frac{1+x+y}{1-x+y} &= \arctg \frac{1 + \frac{x}{1+y}}{1 - \frac{x}{1+y}} \\
&= \frac{\pi}{4} + \arctg \frac{x}{1+y} \\
&= \frac{\pi}{4} + \left(\frac{x}{1+y}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+y}\right)^3 + \dots \\
&\approx \frac{\pi}{4} + x(1-y+y^2) \approx \frac{\pi}{4} + x - xy.
\end{aligned}$$

3588. 假定 x, y, z 的绝对值是很小的量, 简化下式

$$\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z.$$

解 我们简化上式到二次项.

$$\begin{aligned}
&\cos(x+y+z) - \cos x \cos y \cos z \\
&\approx 1 - \frac{1}{2}(x+y+z)^2 - \left(1 - \frac{1}{2}x^2\right) \\
&\quad \cdot \left(1 - \frac{1}{2}y^2\right) \left(1 - \frac{1}{2}z^2\right) \\
&\approx 1 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}z^2\right) \\
 & = -(xy + yz + zx).
 \end{aligned}$$

3589. 依 h 的乘幂把函数

$$F(x, y) = \frac{1}{4}[f(x+h, y) + f(x, y+h)$$

$$+ f(x-h, y) + f(x, y-h)] - f(x, y)$$

展开, 准确到 h^4 .

解 记 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$, ... 余类似,

即得

$$\begin{aligned}
 F(x, y) &= \frac{1}{4}\{[f(x+h, y) - f(x, y)] \\
 &+ [f(x, y+h) - f(x, y)] \\
 &+ [f(x-h, y) - f(x, y)] + [f(x, y-h) \\
 &- f(x, y)]\} \\
 &\approx \frac{1}{4}\left\{\left[h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right] \right. \\
 &+ \left[h\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right] \\
 &+ \left[-h\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right] \\
 &\left. + \left[-h\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{6}h^3\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} + \frac{1}{24}h^4\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\right]\right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-h \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{6} h^3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right. \\
& \left. + \frac{1}{24} h^4 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right] \Big\} \\
& = \frac{h^2}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + \frac{h^4}{48} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \right).
\end{aligned}$$

3590. 已知中心在点 $P(x, y)$ 半径为 ρ 的圆周, 设 $f(P) = f(x, y)$ 及 $P_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3$) 为已知圆周之内接正三角形的顶点, 并且 $x_1 = x + \rho, y_1 = y$. 依 ρ 的正整数幂把函数

$$F(\rho) = \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)]$$

展开准确到 ρ^2 .

解 如图 6·34 所示.

$\triangle P_1 P_2 P_3$ 之三顶点分别为

$$P_1(x + \rho, y),$$

$$P_2\left(x - \frac{\rho}{2}, y\right.$$

$$\left. + \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right),$$

$$P_3\left(x - \frac{\rho}{2}, y - \frac{\sqrt{3}}{2}\rho\right).$$

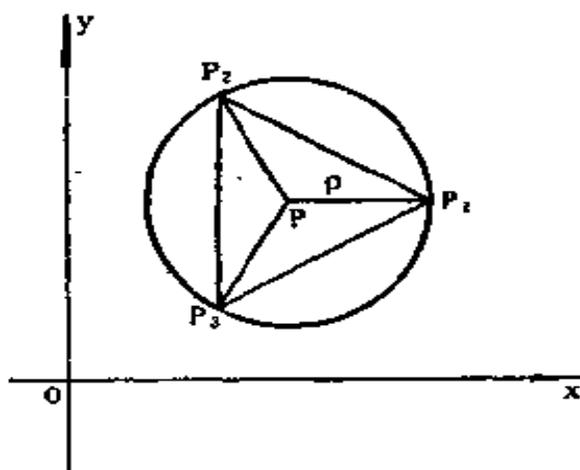


图 6·34

于是,

$$\begin{aligned}
F(\rho) &= \frac{1}{3} [f(P_1) + f(P_2) + f(P_3)] \\
&\approx \frac{1}{3} \left\{ \left[f(P) + \rho \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\rho^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right] + \left[f(P) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(-\frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{3}}{2} \rho \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\sqrt{3}\rho^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[f(P) + \left(-\frac{\rho}{2} \right) \frac{\partial f}{\partial x} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \rho \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{3\rho^2}{8} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\sqrt{3}\rho^2}{4} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \right\} \\
&= f(P) + \frac{\rho^2}{4} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right).
\end{aligned}$$

3591. 依 h 与 k 的乘幂把函数

$$\begin{aligned}
\Delta_{xy} f(x, y) &= f(x+h, y+k) - f(x+h, y) \\
&\quad - f(x, y+k) + f(x, y)
\end{aligned}$$

展开.

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad \Delta_{xy} f(x, y) &= \left[f(x, y) + h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{h^n k^{n-m}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right] \\
&\quad - \left[f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial x^n} \right] \\
&\quad - \left[f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n}{n!} \frac{\partial^n f}{\partial y^n} \right] + f(x, y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^m k^{n-m}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \\
&= hk \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{h^{m-1} k^{n-m-1}}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right].
\end{aligned}$$

3592. 依 ρ 的乘幂把函数

$$F(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi) d\varphi$$

展开.

$$\begin{aligned}
\text{解 } F(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\rho^n \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi}{m!(n-m)!} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \right] d\varphi \\
&= f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\rho^n}{m!(n-m)!} \frac{\partial^n f(x, y)}{\partial x^m \partial y^{n-m}} \\
&\quad \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

下面计算上式中的积分.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(\pi - \varphi) \sin^{n-m}(\pi - \varphi) d\varphi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(\pi + \varphi) \sin^{n-m}(\pi + \varphi) d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m(2\pi - \varphi) \sin^{n-m}(2\pi - \varphi) d\varphi \\
& = \frac{1}{2\pi} [1 + (-1)^n + (-1)^n + (-1)^{n-n}] \\
& \quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi \sin^{n-m} \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

当 m, n 中至少有一个为奇数时, 显见上述积分为零。
 当 m, n 均为偶数时, 由 2290 题的结果知:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^{2m} \varphi \sin^{2n-2m} \varphi d\varphi & = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} \varphi \sin^{2n-2m} \varphi d\varphi \\
& = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi (2m)! (2n-2m)!}{2^{2n+1} m! n! (n-m)!} = \frac{(2m)! (2n-2m)!}{2^{2n} m! n! (n-m)!}.
\end{aligned}$$

代入原式, 并注意到其中的 m, n 只能为偶数, 适当改变一下指标的编号, 即得

$$\begin{aligned}
F(\rho) & = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{\rho^{2n}}{(2m)! (2n-2m)!} \\
& \quad \cdot \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m} \partial y^{2n-2m}} \cdot \frac{(2m)! (2n-2m)!}{2^{2n} m! n! (n-m)!} \\
& = f(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \\
& \quad \cdot \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m! (n-m)!} \frac{\partial^{2n} f(x, y)}{\partial x^{2m} \partial y^{2n-2m}} \\
& = f(x, y) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^n f(x, y).
\end{aligned}$$

将下列函数展开成马克老林级数:

3593. $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n$,

解 $f(x, y) = (1+x)^m(1+y)^n = \left[1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} \cdot x^2 + \dots\right] \left[1 + ny + \frac{n(n-1)}{2!} y^2 + \dots\right]$

$$= 1 + (mx + ny) + \frac{1}{2!} [m(m-1)x^2 + 2mnxy + n(n-1)y^2] + \dots$$

($|x| < 1, |y| < 1$).

3594. $f(x, y) = \ln(1+x+y)$,

解 $f(x, y) = \ln[1+(x+y)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (x+y)^k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{k!}{m!(k-m)!} x^m y^{k-m} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^k \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{m!(k-m)!} x^m y^{k-m} \quad (1)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n-1} (m+n-1)!}{m!n!} x^m y^n. \quad (2)$$

当 $m=0, n=0$ 时, 分子出现 $(-1)_1$, 规定该项为零. 下面讨论一下收敛区间. (1) 成立, 只要求 $|x+y| < 1$ 即可. 但从(1)式到(2)式, 必需要求(1)式绝对收敛, 这样才能将各项重新排列. 不难看出(1)式级数各项取绝对值后即函数 $-\ln[1-(|x|+|y|)]$ 的展开式, 它的收敛性要求 $|x|+|y| < 1$. 这就是 $f(x, y)$ 的展

开式的收敛区域.

3595. $f(x, y) = e^x \sin y.$

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x, y) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n+1}}{m! (2n+1)!} \\ &\quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty). \end{aligned}$$

3596. $f(x, y) = e^x \cos y.$

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x, y) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^m y^{2n}}{m! (2n)!} \\ &\quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty). \end{aligned}$$

3597. $f(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y.$

$$\begin{aligned} \text{解 } \operatorname{sh} y &= \frac{e^y - e^{-y}}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{n!} \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (|y| < +\infty). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] \\ &\quad \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2m+1} y^{2n+1}}{(2m+1)!(2n+1)!}$$

($|x| < +\infty, |y| < +\infty$).

3598. $f(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y$.

解 $\operatorname{ch} y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \quad (|y| < +\infty)$.

于是,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \left[\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{2n}}{(2n)!} \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m} y^{2n}}{(2m)!(2n)!} \\ &\quad (|x| < +\infty, |y| < +\infty). \end{aligned}$$

3599. $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

解 $f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x^2 + y^2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{2n+1} (-1)^n \frac{x^{2k} y^{2(2n+1-k)}}{k!(2n+1-k)!}$$

$$= \sum_{m, n=0}^{\infty} \left(\sin \frac{n+m}{2} \pi \right) \frac{x^{2n} y^{2m}}{n! m!} \quad (x^2 + y^2 < +\infty).$$

3600. $f(x, y) = \ln(1+x) \ln(1+y)$.

解 $f(x, y) = \left[\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{x^m}{m} \right] \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{y^n}{n} \right]$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m+n} \frac{x^m y^n}{mn} \quad (|x| < 1, |y| < 1).$$

3601. 写出函数

$$f(x, y) = \int_0^1 (1+x)^{t^2} y dt$$

的马克劳林级数前面不为零的三项.

解 $(1+x)^{t^2} y = e^{t^2 y \ln(1+x)} \approx 1 + t^2 y \ln(1+x)$

$$+ \frac{1}{2!} (t^2 y \ln(1+x))^2$$

$$\approx 1 + t^2 y \left(x - \frac{x^2}{2} \right) = 1 + t^2 x y - \frac{t^2}{2} x^2 y.$$

于是,

$$f(x, y) \approx \int_0^1 \left(1 + t^2 x y - \frac{t^2}{2} x^2 y \right) dt$$

$$= 1 + \frac{1}{3} y \left(x - \frac{x^2}{2} \right).$$

3602. 按二项式 $x-1$ 和 $y+1$ 的正整数幂将函数 e^{x+y} 展开成幂级数.

解 $e^{x+y} = e^{(x-1) + (y+1)} = e^{x-1} \cdot e^{y+1}$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^m (y+1)^n}{m! n!}$$

$$(|x| < +\infty, |y| < +\infty).$$

3603. 写出函数 $f(x, y) = \frac{x}{y}$ 在点 $M(1, 1)$ 的邻域内的台劳级数展开式.

解 令 $x = 1+h$, $y = 1+k$, 则得

$$\frac{x}{y} = \frac{1+h}{1+k} = (1+h) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n k^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [1 + (x-1)] (y-1)^n$$

$$(|x| < +\infty, 0 < y < 2).$$

3604. 设 z 为由方程 $z^3 - 2xz + y = 0$ 所定义的 x 和 y 的隐函数, 当 $x=1$ 和 $y=1$ 时它的值为 $z=1$.

写出函数 z 按二项式 $x-1$ 和 $y-1$ 的升幂排列的展开式中的若干项.

解 对原方程微分一次, 得

$$3z^2 dz - 2x dz - 2z dx + dy = 0. \quad (1)$$

再微分一次, 得

$$(3z^2 - 2x) d^2 z + 6z dz^2 - 4dx dz = 0. \quad (2)$$

以 $x=1, y=1, z=1$ 代入(1), (2)两式, 得

$$dz = 2dx - dy,$$

$$d^2 z = (4dx - 6dz) dz = (4dx - 12dx + 6dy)$$

$$\cdot (2dx - dy)$$

$$= -16dx^2 + 20dxdy - 6dy^2,$$

.....

于是, 可求得在 $x=1, y=1$ 处,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -1;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -16, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 10, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6;$$

.....

从而有

$$z = 1 + 2(x-1) - (y-1) - [8(x-1)^2$$

$$-10(x-1)(y-1)+3(y-1)^2]+...$$

研究下列曲线的奇点的种类并大略地绘出这些曲线:

3605. $y^2 = ax^2 + x^3,$

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2 = 0, \\ F'_x(x, y) = 2ax + 3x^2 = 0, \\ F'_y(x, y) = -2y = 0 \end{cases}$$

得 $x = 0, y = 0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

其次, 由于

$$A = F''_{xx}(0, 0) = 2a, B = F''_{xy}(0, 0) = 0,$$

$$C = F''_{yy}(0, 0) = -2, AC - B^2 = -4a,$$

故当 $a > 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 为二重点; 当 $a < 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 为孤立点; 当 $a = 0$ 时, 原方程化为 $y^2 = x^3$, 由 3574(6) 的讨论知点 $(0, 0)$ 为尖点.

如图 6.35 所示, 点 A_1 为 $(-a, 0)$.

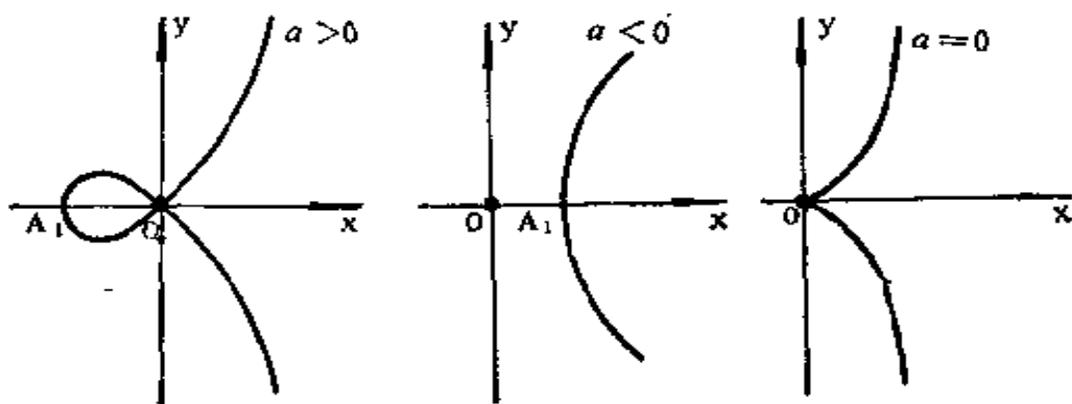


图 6.35

3606. $x^3 + y^3 - 3xy = 0.$

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0, \\ F'_x(x, y) = 3x^2 - 3y = 0, \\ F'_y(x, y) = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0,0)$ 为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=0, B=F''_{xy}(0,0)=-3, C=F''_{yy}(0,0)=0$, 且 $AC-B^2=-9<0$, 故点 $(0,0)$ 为二重点. 图象参看 370 题(6).

3607. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 + y^2 - x^4 - y^4 = 0, \\ F'_x(x, y) = 2x - 4x^3 = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y - 4y^3 = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0,0)$ 为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2, B=F''_{xy}(0,0)=0, C=F''_{yy}(0,0)=2$, 且 $AC-B^2=4>0$, 故点 $(0,0)$ 为孤立点. 图象参看 1542 题.

3608. $x^2 + y^4 = x^6$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = x^2 + y^4 - x^6 = 0, \\ F'_x(x, y) = 2x - 6x^5 = 0, \\ F'_y(x, y) = 4y^3 = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0,0)$ 为奇点.

又因 $A=F''_{xx}(0,0)=2, B=F''_{xy}(0,0)=0, C=F''_{yy}(0,0)=0$, 且 $AC-B^2=0$, 故点 $(0,0)$ 为上升点或孤立点. 本题中, 点 $(0,0)$ 为孤立点 (图 6·36). 事

实上, 将原方程改写为 $y^4 = x^6 - x^2$, 对 $(0, 0)$ 点的很小的邻域内的点 $(|x| < 1, |y| < 1)$, 左端 $y^4 \geq 0$, 右端 $x^6 - x^2 = x^2(x^4 - 1) \leq 0$, 除点 $(0, 0)$ 外没有适合方程的点, 故点 $(0, 0)$ 为孤立点.

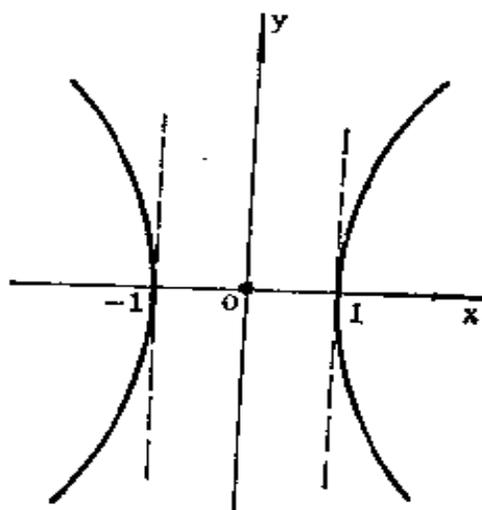


图 6.36

3609. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0, \\ F'_x(x, y) = 4x(x^2 + y^2) - 2a^2x = 0, \\ F'_y(x, y) = 4y(x^2 + y^2) + 2a^2y = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2a^2, B = F''_{xy}(0, 0) = 0, C = F''_{yy}(0, 0) = 2a^2$, 且 $AC - B^2 = -4a^4 < 0 (a \neq 0)$, 故点 $(0, 0)$ 为二重点. 图象参看 3367 题, 只须将该题中的 1 换成 a .

3610. $(y - x^2)^2 = x^5$.

解 解方程组

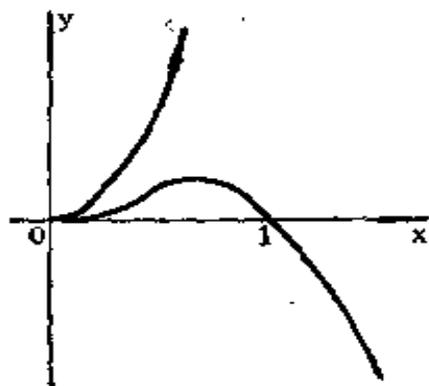
$$\begin{cases} F(x, y) = (y - x^2)^2 - x^5 = 0, \\ F'_x(x, y) = -4x(y - x^2) - 5x^4 = 0, \\ F'_y(x, y) = 2(y - x^2) = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = 0$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = 0$, 故对点 $(0, 0)$ 还需要再讨论一下. 由原方程可解出 $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$, 右边只允许 $x \geq 0$, 当 $0 < x < 1$ 时不论取“+”号还是“-”号均有 $y > 0$, 且均有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = 0,$$

故点 $(0, 0)$ 为尖点, 如图 6·37 所示.



3671. $(a+x)y^2 = (a-x)x^2$.

图 6·37

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = (a+x)y^2 - (a-x)x^2 = 0, & (1) \\ F'_x(x, y) = y^2 - 2ax + 3ax^2 = 0, & (2) \\ F'_y(x, y) = 2(a+x)y = 0. & (3) \end{cases}$$

由(3)得 $x = -a$ 或 $y = 0$.

将 $y = 0$ 代入(1)、(2), 得 $x = 0$.

将 $x = -a$ 代入(1)式, 得 $(a-x)x^2 = 0$. 若 $a \neq 0$, 则得出矛盾的结果. 若 $a = 0$, 则也得到 $x = 0$, $y = 0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2a$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2a$, 且 $AC - B^2 = -4a^2$, 故当 $a \neq 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 为二重点; 当 $a = 0$ 时, 方程转化为 $xy^2 = -x^3$, 从而曲线为 $x = 0$, 点 $(0, 0)$ 为上升点.

如图 6·38 所示, 图中点 A_1 为 $(a, 0)$

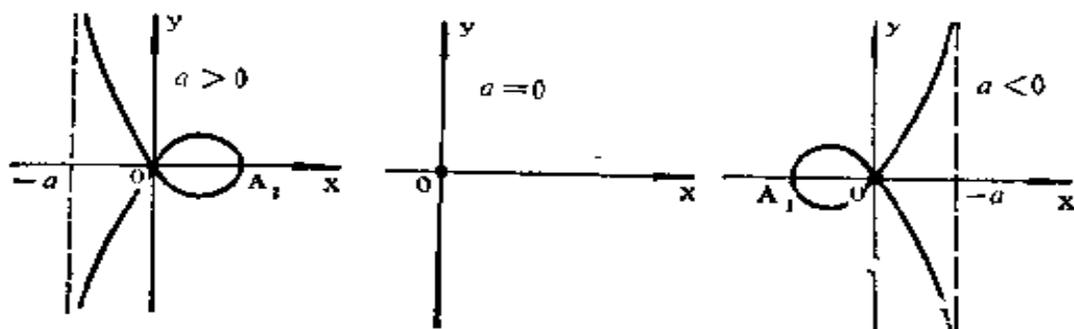


图 6·38

3612. 研究参变量 a, b, c ($a \leq b \leq c$) 的值与曲线 $y^2 = (x-a) \cdot (x-b)(x-c)$ 的形状之关系.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - (x-a)(x-b)(x-c) = 0, & (1) \\ F'_x(x, y) = -(x-a)(x-b) - (x-a) \\ \quad \cdot (x-c) - (x-b)(x-c) = 0, & (2) \\ F'_y(x, y) = 2y = 0. & (3) \end{cases}$$

由(3)得 $y=0$, 代入(1), 联立(1), (2)求解.

当 $a < b < c$ 时, (1), (2)无解. 因此无奇点, 此时曲线如图 6·39(1)所示;

当 $a = b < c$ 时, 显然(1), (2)有解 $x=a, y=0$, 由于 $A = F''_{xx}(a, 0) = -2(a-c)$, $B = F''_{xy}(a, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(a, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4(a-c) > 0$, 故点 $A_1(a, 0)$ 为孤立点, 如图 6·39(2)所示;

当 $a < b = c$ 时, 显然(1), (2)有解 $x=b, y=0$. 由于 $A = F''_{xx}(b, 0) = -2(c-a)$, $B = F''_{xy}(b, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(b, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4(c-a) < 0$, 故点 $A_2(b, 0)$ 为二重点, 如图 6·39(3)所示;

当 $a=b=c$ 时, 显然有解 $x=a, y=0$. 由于 $AC - B^2 = 0$, 此时原方程为 $y^2 = (x-a)^3$, 且由3574题(6)的结果知, 点 $A_1(a, 0)$ 为尖点, 如图6·39(4)所示.

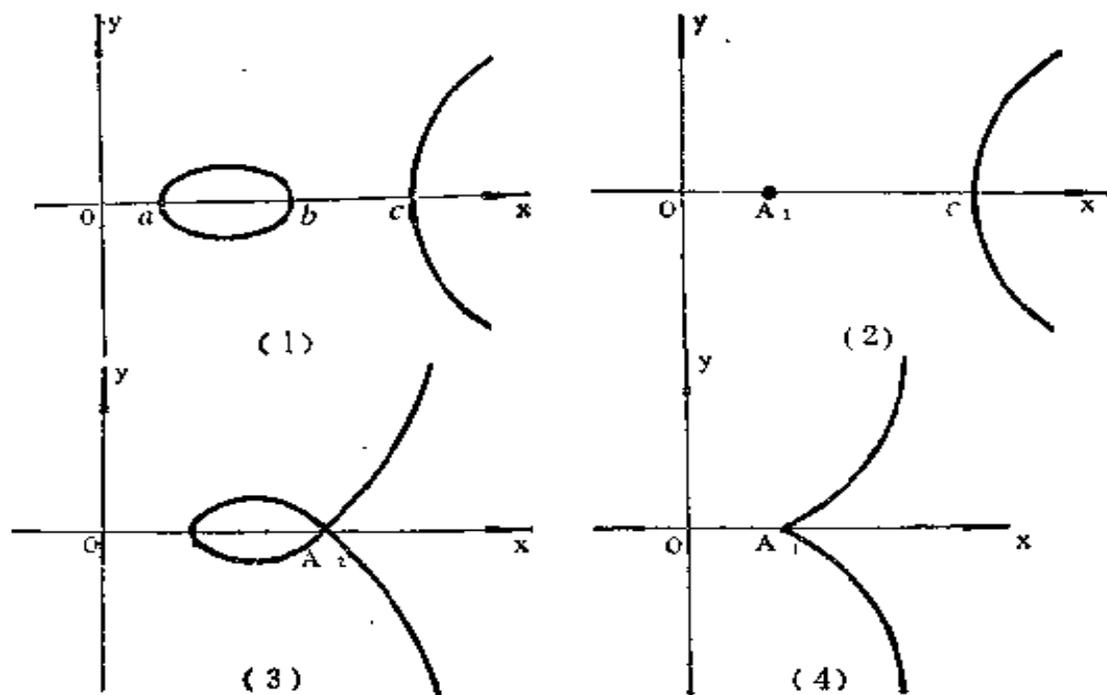


图 6·39

研究超越曲线的奇点:

3613. $y^2 = 1 - e^{-x^2}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - 1 + e^{-x^2} = 0, \\ F'_x(x, y) = -2xe^{-x^2} = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4 < 0$, 故点 $(0, 0)$ 为二重点.

3614. $y^2 = 1 - e^{-x^3}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - 1 + e^{-x^3} = 0, \\ F'_x(x, y) = -3x^2 e^{-x^3} = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x=0, y=0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = 0$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = 0$, 故对点 $(0, 0)$ 还需再讨论一下. 原式可解为 $x = -\sqrt[3]{\ln(1-y^2)} \geq 0$, 在 $(0, 0)$ 附近, 第一及第四象限各有原曲线的一支, 因此, 点 $(0, 0)$ 为尖点.

3615. $y = x \ln x$.

解 $F(x, y) = x \ln x - y$,
 $F'_x(x, y) = 1 + \ln x$, $F'_y(x, y) = -1 \neq 0$, 故无奇点. 如图 6.40 所示.

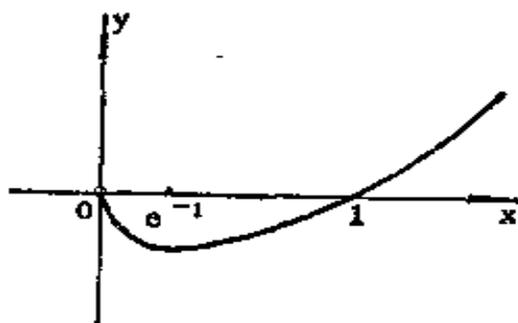


图 6.40

3616. $y = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

解 在 $x=0$ 处, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow -0} y = 0,$$

故 $x=0$ 为“可移去”的第一类不连续点, 补充函数在该点的值为零后, 即得知函数

$$y = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

在点 $x=0$ 连续. 由于 $F'_x(x, y) = 1 \neq 0$, 故无奇点.
当 $x \neq 0$ 时, 由于,

$$y' = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + 1}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} y' = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(1+z)e^z + 1}{(1+e^z)^2} = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{e^z(z+2)}{2e^z(1+e^z)}$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z+2}{2(1+e^z)} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -0} y'$$

$$= \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{(1-z)e^{-z} + 1}{(1+e^{-z})^2} = 1,$$

故点 $(0,0)$ 为角点, 如图 6.41 所示

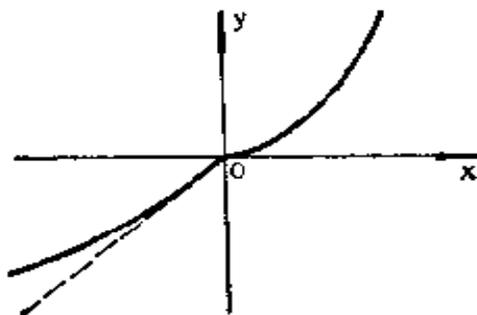


图 6.41

3617. $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin x}\right).$

解 $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 点为不连续点. 由于

$$\lim_{x \rightarrow k\pi+0} y = (-1)^k \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow k\pi-0} y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{2},$$

故点 $x = k\pi$ 为函数的第一类不连续点.

3618. $y^2 = \sin \frac{\pi}{x}.$

解 $y = \pm \sqrt{\sin \frac{\pi}{x}}$, 它在 $(\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1})$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 内无定义.

在边界点 $x = \frac{1}{2k}$ 及 $x = \frac{1}{2k-1}$, $y = 0$.

函数图象有上下两支.

设 $F(x, y) = y^2 - \sin \frac{\pi}{x}$, 则在边界点, 由于 $F'_x \neq 0$, $F'_y = 0$, 故也无奇点.

在 $(0, 0)$ 点的任何邻域内, 有无穷多个曲线的封闭分支, 这些分支没有一个过 $(0, 0)$ 点, 它不属于任何一种类型.

3619. $y^2 = \sin x^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - \sin x^2 = 0, \\ F'_x(x, y) = -2x \cos x^2 = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x = 0$, $y = 0$, 故点 $(0, 0)$ 为奇点.

又因 $A = F''_{xx}(0, 0) = -2$, $B = F''_{xy}(0, 0) = 0$, $C = F''_{yy}(0, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = -4 < 0$, 故点 $(0, 0)$ 为二重点.

3620. $y^2 = \sin^3 x$.

解 显见, 函数 y 的周期为 2π , 在 $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ 内函数有定义, 而在 $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 内无定义.

解方程组

$$\begin{cases} F(x, y) = y^2 - \sin^3 x = 0, \\ F'_x(x, y) = -3\sin^2 x \cos x = 0, \\ F'_y(x, y) = 2y = 0 \end{cases}$$

得 $x=0$, $y=0$, 故点 $(0,0)$ 为奇点.

在点 $(0,0)$ 的左侧 (指充分小的范围, 下同, 不再说明) 无曲线的点, 而在右侧的第一、第四象限分别有曲线的两枝, 因此, 点 $(0,0)$ 为尖点, 如图 6.42 所示.

由周期性可知,

点 $(k\pi, 0)$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 也为尖点.

只是当 k 是偶数时, 右侧才有曲线的两枝; 当 k 是奇数时, 左侧才有曲线的两枝.

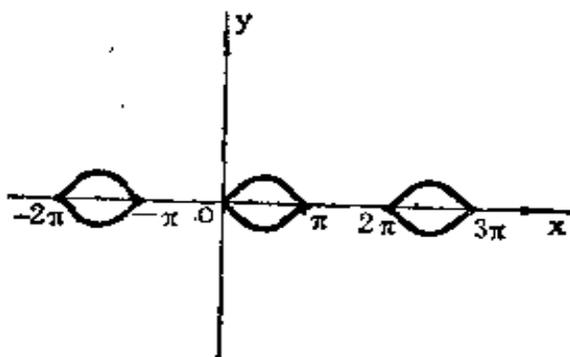


图 6.42

§7. 多变量函数的极值

1° 极值的定义 若函数 $f(P) = f(x_1, \dots, x_n)$ 于点 P_0 的邻域内有定义并且当 $0 < \rho(P_0, P) < \delta$ 时, $f(P_0) > f(P)$ 或 $f(P_0) < f(P)$, 则说, 函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极值 (相应地为极大值或极小值).*)

2° 极值的必要条件 可微分的函数 $f(P)$ 仅在静止点 P_0 , 即是说在 $df(P_0) = 0$ 的点 P_0 能达到极值. 所以, 函数 $f(P)$ 的极值点应当满足方程组 $f'_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ ($i = 1, \dots, n$).

3° 极值的充分条件 函数 $f(P)$ 于点 P_0 有:

(a) 极大值, 若 $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) < 0$,

(b) 极小值, 若 $df(P_0) = 0$, $d^2f(P_0) > 0$.

研究二次微分 $d^2f(P_0)$ 的符号可用化相应的二次式成典式的方法来进行.

特别是, 对于两个自变量 x 和 y 的函数 $f(x, y)$ 在静止点 (x_0, y_0) [$df(x_0, y_0) = 0$], $D = AC - B^2 \neq 0$ [其中 $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$] 成立时, 有:

(1) 极小值, 若 $D > 0$, $A > 0$ ($C > 0$);

(2) 极大值, 若 $D > 0$, $A < 0$ ($C < 0$);

(3) 极值不存在, 若 $D < 0$.

4° 条件极值 在关系式 $\varphi_i(P) = 0$ ($i = 1, \dots, m; m < n$)

* 编者注: 若将不等式 $f(P_0) > f(P)$ (或 $f(P_0) < f(P)$) 换为不等式 $f(P_0) \geq f(P)$ (或 $f(P_0) \leq f(P)$), 则称 $f(P)$ 在点 P_0 有弱极大值 (或弱极小值).

存在的条件下, 求函数 $f(P_0) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值的问题, 可归结为对于拉格朗日函数

$$L(P) = f(P) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(P)$$

[其中 $\lambda_i (i = 1, \dots, m)$ 为常数因子] 求普通极值的问题. 关于条件极值的存在和性质的问题, 在最简单的情况, 根据研究函数 $L(P)$ 于静止点 P_0 的二次微分 $d^2 L(P_0)$ 的符号, 并在变量 dx_1, dx_2, \dots, dx_n 由下面的关系式

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

所限制的条件下, 得到解决.

5° **绝对极值** 于有界且封闭的区域内可微分的函数 $f(P)$ 在此域内或于静止点, 或于域的边界点达到自己的最大值和最小值.

研究下列多变量函数的极值:

3621. $z = x^2 + (y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2(y-1) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 1)$. 显然 $z(0, 1) = 0$, 且当 $(x, y) \neq (0, 1)$ 时 $z > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z(P_0) = 0$ (实际是最小值).

3622. $z = x^2 - (y-1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2(y-1) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 1)$ 。由于

$A = z''_{xx}(0, 1) = 2$, $B = z''_{xy}(0, 1) = 0$, $C = z''_{yy}(0, 1) = -2$, 且 $AC - B^2 = -4 < 0$, 故极值不存在(或用该点附近的 z 值可正可负说明)。

3623. $z = (x - y + 1)^2$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2(x - y + 1) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2(x - y + 1) = 0 \end{cases}$$

得静止点分布在直线 $x - y + 1 = 0$ 上。对于此直线上的点均有 $z = 0$, 但是 $z \geq 0$ 恒成立。因此, 函数 z 在直线 $x - y + 1 = 0$ 上的各点取得弱极小值 $z = 0$ 。

3624. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 2 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(1, 0)$ 。由于

$A = z''_{xx}(1, 0) = 2$, $B = z''_{xy}(1, 0) = -1$, $C = z''_{yy}(1, 0) = 2$, 且 $AC - B^2 = 3 > 0$, 故函数 z 在点

P_0 取得极小值 $z(P_0) = -1$.

3625. $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = xy^3(12 - 3x - 2y) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y^2(18 - 3x - 4y) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(2, 3)$, 并且直线 $x = 0$ 及直线 $y = 0$ 上的点都是静止点.

不难断定在 P_0 点, $A = -162$, $B = -108$, $C = -144$, $AC - B^2 > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0) = 108$.

在直线 $x = 0$ 及 $y = 0$ 上的各点均有 $z = 0$. 先分析直线 $y = 0$ 的情况. 在直线上 $x \neq 0$ 及 $x \neq 6$ 处, $x^2(6 - x - y) \neq 0$, 在确定点的足够小的邻域内也不变号, 但是 y^3 可正可负, 因此函数 z 变号, 即在上述情况下没有极值. 当 $x = 0$ 及 $x = 6$ 类似地可判断也无极值.

其次分析直线 $x = 0$ 的情况. 在直线上 $y = 0$ 及 $y = 6$ 的点的情况类似地可判断无极值. 但当 $0 < y < 6$ 时, $y^3(6 - x - y) > 0$, 且在所讨论点的足够小的邻域内保持正号. 因此, 在足够小的邻域内, $z = x^2 y^3 \cdot (6 - x - y) \geq 0$ 也成立, 但邻域内任意近处总有 $z = 0$ 的点. 于是, 对于 $x = 0$, $0 < y < 6$ 的点函数 z 取得弱极小值 $z = 0$. 同法可判定, 对于直线 $x = 0$ 上 $y < 0$ 及 $y > 6$ 的各点处, 函数 z 取得弱极大值 $z = 0$.

3626. $z = x^3 + y^3 - 3xy.$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0,0)$ 及 $P_1(1,1)$.

不难断定, 在点 P_0 有 $A=0$, $B=-3$, $C=0$ 及 $AC-B^2=-9 < 0$, 故无极值; 而在点 P_1 有 $A=6$, $B=-3$, $C=6$ 及 $AC-B^2=27 > 0$, 故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_1)=-1$.

3627. $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$ 及 $P_2(-1,1)$.

在点 P_0 附近, 当 $x=y$ 且足够小时, 有 $z=2x^4-4x^2 < 0$; 但当 $x=-y$ 时, $z=2x^4 > 0$, 因此, 在点 P_0 无极值.

不难断定, 在点 P_1 及 P_2 均有 $A=10$, $B=-2$, $C=10$ 及 $AC-B^2=96 > 0$, 故函数 z 在点 P_1 及 P_2 取得极小值 $z=-2$.

3628. $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0).$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{50}{y^2} = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(5, 2)$. 不难断定, 在该点有 $A = \frac{4}{5}$,

$B = 1$, $C = 5$ 及 $AC - B^2 = 3 > 0$, 故函数 z 在该点取得极小值 $z(P_0) = 30$.

3629. $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ ($a > 0$, $b > 0$).

解 考虑函数 $u = z^2 = x^2 y^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$.

显然 z 的极值均为 u 的极值; 且 u 在点 (x, y) 取得的极值不为零时, z 也在点 (x, y) 取得极值; u 在点 (x, y) 取得的极值为零时, 情况复杂一些, 但对 z 也不难讨论.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{2}{a^2} x^3 y^2 = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 y \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) - \frac{2}{b^2} x^2 y^3 = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 0)$, $P_1\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $P_2\left(-\frac{a}{\sqrt{3}},$

$-\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$, $P_3\left(\frac{a}{\sqrt{3}}, -\frac{b}{\sqrt{3}}\right)$ 及 $P_4\left(-\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}\right)$.

由于 z 在点 P_0 附近变号, 所以 $z(P_0)$ 不是极值。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^2 \left(1 - \frac{6x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{6y^2}{b^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy \left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{2y^2}{b^2} \right).$$

在 P_1, P_2, P_3, P_4 各点, 得

$$A = -\frac{8}{9}b^2, \quad B = \pm \frac{4}{9}ab, \quad C = -\frac{8}{9}a^2,$$

$$AC - B^2 = \left(\frac{64}{81} - \frac{16}{81} \right) a^2 b^2 > 0,$$

故函数 u 取得正的极大值。于是, 相应地函数 z 在点

P_1 及 P_2 取得极大值 $z(P_1) = z(P_2) = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$, 而在点

P_3 及 P_4 取得极小值 $z(P_3) = z(P_4) = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ 。

3630. $z = \frac{ax + by + c}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \quad (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则

$$z(x, y) = z(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{a r \cos \varphi + b r \sin \varphi + c}{\sqrt{r^2 + 1}}.$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{a \cos \varphi + b \sin \varphi - cr}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{-ar \sin \varphi + br \cos \varphi}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} = 0. & (2) \end{cases}$$

先设 a, b 不同时为零. 由 (2) 考虑到 $r=0$ 不是解 ($r=0, \varphi$ 为任意值不满足 (1) 式), 故有 $a \sin \varphi = b \cos \varphi$. 于是,

$$\cos \varphi = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad (3)$$

显见当 $c=0$ 时无解 (因由 (1) 有 $a \cos \varphi + b \sin \varphi = 0$, 再由 (3) 得 $a=b=0$. 与 a, b 不同时为零之假定矛盾). 当 $c \neq 0$ 时,

$$r = \frac{a \cos \varphi + b \sin \varphi}{c} = \pm \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}.$$

为保证 $r > 0$, 在 $\cos \varphi$ 及 $\sin \varphi$ 前取与 c 一致的符号. 此时, 有

$$x = \frac{a}{c}, \quad y = \frac{b}{c}.$$

$$\text{由于这时 } z''_{rr} = -\frac{c(1+3r^2)}{(1+r^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$z''_{\varphi\varphi} = -\frac{cr^2}{(1+r^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad z''_{r\varphi} = 0$$

及 $z''_{rr} z''_{\varphi\varphi} - (z''_{r\varphi})^2 > 0$, 故当 $c > 0$ 时 $z''_{rr} < 0$, 函数 z 在点 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取得极大值 $z = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 当 $c < 0$ 时 $z''_{rr} > 0$, 函数 z 在点 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取得极小值 $z = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

下设 $a=b=0$. 由假定 $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ 知 $c \neq 0$.

此时解方程组(1), (2)得 $r=0$, φ 任意; 即 $x=0$, $y=0$. 由于这时 $z = \frac{c}{\sqrt{x^2+y^2+1}}$, 故显然知: 当 $c > 0$ 时 z 在点 $(0,0)$ 取极大值 $z=c$; 当 $c < 0$ 时, z 在点 $(0,0)$ 取极小值 $z=c$.

综合上述结果, 得结论: 若 $c > 0$, 则 z 在点 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取极大值 $z_{\text{极大}} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 若 $c < 0$, 则 z 在点 $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$ 取极小值 $z_{\text{极小}} = -\sqrt{a^2+b^2+c^2}$; 若 $c=0$ (由假定, 这时 $a^2+b^2 \neq 0$), 则 z 无极值.

注. 此题也可不作变量代换 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$, (极坐标), 而直接在直角坐标 x, y 下进行讨论, 即

解方程组 $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ 并计算 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 之值. 但此法计算较繁, 没有用极坐标简单.

3631. $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

点 $(0,0)$ 为偏导函数无意义的点. 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时, $z < 1$, 故 $z(0,0) = 1$ 为极大值.

3632. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 8x - 3y) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 - 2x + 2y) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 0)$ 及 $P_1(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 16x - 6y + 4),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 9e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 - 4x + 4y + \frac{2}{3}),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2 + 6x - y - 1).$$

在点 P_0 , $A=16$, $B=-6$, $C=6$ 及 $AC-B^2=60>0$,
故函数 z 取得极小值 $z(P_0)=0$; 在点 P_1 , $A=14e^{-2}$,

$B=-9e^{-2}$, $C=\frac{3}{2}e^{-2}$ 及 $AC-B=-60e^{-4}<0$, 故

无极值.

3633. $z = e^{x^2-y}(5-2x+y)$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2e^{x^2-y}(5x - 2x^2 + xy - 1) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2-y}(2x - y - 4) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(1, -2)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2e^{x^2-y}(10x^2 - 4x^3 + 2x^2y - 6x + y + 5),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{x^2-y} (3 - 2x + y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2e^{x^2-y} (2x^2 - xy - 4x + 1).$$

在点 P_0 , $A = -2e^3$, $B = 2e^3$, $C = -e^3$ 及 $AC - B^2 = -2e^6 < 0$, 故无极值.

3634. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 5e^{-(x^2 + xy + y^2)} - (5x + 7y - 25) \cdot (2x + y)e^{-(x^2 + xy + y^2)} = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 7e^{-(x^2 + xy + y^2)} - (5x + 7y - 25) \cdot (x + 2y)e^{-(x^2 + xy + y^2)} = 0. & (2) \end{cases}$$

(1) $\times 7 -$ (2) $\times 5$, 消去因子 $e^{-(x^2 + xy + y^2)}$, 得

$$3(5x + 7y - 25)(3x - y) = 0.$$

以 $5x + 7y - 25 = 0$ 代入 (1)、(2), 显然矛盾, 故必有 $5x + 7y - 25 \neq 0$, 从而 $y = 3x$. 代入 (1), 得

$$26x^2 - 25x - 1 = 0,$$

解得静止点 $P_0(1, 3)$ 及 $P_1(-\frac{1}{26}, -\frac{3}{26})$. 在点 P_0 ,

$$\begin{aligned} A &= z''_{xx}(P_0) = [z'_x(x, 3)]'_x|_{x=1} \\ &= \{e^{-(x^2 + 3x + 9)} [5 - (5x - 4)(2x + 3)]\}'_x|_{x=1} \\ &= [e^{-(x^2 + 3x + 9)}]'_x|_{x=1} \cdot [5 - (5x - 4)(2x + 3)]|_{x=1} \\ &\quad + [e^{-(x^2 + 3x + 9)}]_{x=1} \cdot [5 - (5x - 4) \\ &\quad \cdot (2x + 3)]'_x|_{x=1} \\ &= -27e^{-13}. \end{aligned}$$

同法可求得

$$B = z''_{xx}(P_0) = -36e^{-13}, C = z''_{yy}(P_0) = -51e^{-13}.$$

于是, $AC - B^2 = 81e^{-26} > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0) = e^{-13} \approx 2.26 \cdot 10^{-6}$.

同法可得函数 z 在点 P_1 取得极小值 $z(P_1) = -26e^{-\frac{1}{52}} \approx -25.51$.

3635. $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y - \frac{4}{x} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \end{cases} \quad (x > 0, y > 0)$$

得静止点 $P_0(1, 2)$. 在点 P_0 ,

$$A = 6, B = 1, C = \frac{9}{2}, AC - B^2 = 26 > 0,$$

故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z(P_0) = 7 - 10\ln 2 \approx 0.0685$.

3636. $z = \sin x + \cos y + \cos(x - y)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$).

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \sin(x - y) = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\sin y + \sin(x - y) = 0. & (2) \end{cases}$$

(1) + (2), $\cos x = \sin y$. 由于 x, y 均为锐角, 故有

$y = \frac{\pi}{2} - x$. 代入 (1), 得

$$\begin{aligned}\cos x - \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) &= \cos x + \cos 2x \\ &= 2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = 0.\end{aligned}$$

但是 $\cos\frac{x}{2} \neq 0$, 故 $\cos\frac{3x}{2} = 0$. 从而得静止点 $P_0\left(\frac{\pi}{3},$

$\frac{\pi}{6}\right)$. 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x - \cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\cos y - \cos(x-y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos(x-y),$$

故在点 P_0 , 有

$$A = -\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \quad B = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad C = -\frac{1+\sqrt{3}}{2},$$

$$AC - B^2 = \frac{1+2\sqrt{3}}{4} > 0.$$

于是, 函数 z 在点 P_0 取得极大值 $z(P_0) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

3637. $z = \sin x \sin y \sin(x+y)$ ($0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi$).

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \sin y \sin(2x+y) = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \sin(x+2y) = 0. & (2) \end{cases}$$

由 (1) 及 (2) 可得下列四个方程组:

$$\text{I: } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin y = 0. \end{cases} \quad \text{II: } \begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin(2x+y) = 0. \end{cases}$$

$$\text{III: } \begin{cases} \sin y = 0, \\ \sin(x+2y) = 0. \end{cases} \quad \text{IV: } \begin{cases} \sin(2x+y) = 0, \\ \sin(x+2y) = 0. \end{cases}$$

考虑到 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, 于是得原方程组 (1) 与 (2) 的六个解

$$P_1(0, 0), P_2(0, \pi), P_3(\pi, 0),$$

$$P_4(\pi, \pi), P_5\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right), P_6\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right).$$

由于所考虑的区域是闭正方形 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, 故点 P_1, P_2, P_3, P_4 都是此区域的边界点. 因此 P_1, P_2, P_3, P_4 不是函数 z 达极值的点 (根据极值的定义, 首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义). 由于

$$z''_{xx} = 2 \sin y \cos(2x+y), \quad z''_{yy} = \sin 2(x+y),$$

$$z''_{yy} = 2 \sin x \cos(x+2y).$$

在点 P_5 有 $AC - B^2 = (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

> 0 且 $A = -\sqrt{3} < 0$, 故函数 z 在点 P_5 取得极大值

$z(P_5) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$; 在点 P_6 有 $AC - B^2 = (\sqrt{3})(\sqrt{3})$

$-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 > 0$ 且 $A = \sqrt{3} > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取

$$\text{得极小值 } z(P_0) = -\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3638. $z = x - 2y + \ln\sqrt{x^2 + y^2} + 3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{3y}{x^2 + y^2} = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = -2 + \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{3x}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(1, 1)$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-x^2 + 6xy + y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2 - 6xy - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{-3x^2 - 2xy + 3y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

在点 P_0 有 $A = \frac{3}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, $C = -\frac{3}{2}$ 及 $AC - B^2 =$

$-\frac{5}{2} < 0$, 故无极值.

3639. $z = xy \ln(x^2 + y^2).$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y \ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = x \ln(x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0. & (2) \end{cases}$$

将 (1) 式乘以 x 减去 (2) 式乘以 y , 得

$$\frac{2xy}{x^2+y^2}(x^2-y^2)=0.$$

于是, $x=0$, $y=0$, $x=y$, $x=-y$ 为四组解, 对应地得静止点 $P_1(0,1)$, $P_2(0,-1)$, $P_3(1,0)$

$$P_4(-1,0), P_5\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right), P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right),$$

$$P_7\left(\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}\right) \text{ 及 } P_8\left(-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right).$$

代入原式, 不难看出, 函数 z 在点 P_1 、 P_2 、 P_3 及 P_4 均无极值 (邻域内函数值可正可负). 由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2xy(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

在点 P_5 及 P_6 , $A=2$, $B=0$, $C=2$ 及 $AC-B^2=4 > 0$, 故函数 z 在点 P_5 及 P_6 取得极小值 $z(P_5)=$

$$z(P_6) = -\frac{1}{2e} \approx -0.184.$$

在点 P_7 及 P_8 , $A=-2$, $B=0$, $C=-2$ 及 $AC-B^2=4 > 0$, 故函数 z 在点 P_7 及 P_8 取极大值 $z(P_7)=$

$$z(P_8) = \frac{1}{2e} \approx 0.184.$$

3640. $z = x + y + 4\sin x \sin y$.

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 1 + 4\cos x \sin y = 0, & (1) \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + 4\sin x \cos y = 0. & (2) \end{cases}$$

(2) - (1) 得 $\sin(x - y) = 0$, 故 $x - y = n\pi$;

(2) + (1) 得 $\sin(x + y) = \frac{1}{2}$, 故 $x + y = m\pi -$

$$(-1)^m \frac{\pi}{6}.$$

于是, 得静止点 $P_0(x_0, y_0)$, 其中

$$\begin{cases} x_0 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{12} + (m+n) \frac{\pi}{2}, \\ y_0 = (-1)^{m+1} \frac{\pi}{12} + (m-n) \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} AC - B^2 &= (-4\sin x_0 \sin y_0) (-4\sin x_0 \sin y_0) \\ &\quad - (4\cos x_0 \cos y_0)^2 \\ &= 16(\sin x_0 \sin y_0 - \cos x_0 \cos y_0) \\ &\quad \cdot (\sin x_0 \sin y_0 + \cos x_0 \cos y_0) \\ &= -16\cos(x_0 + y_0)\cos(x_0 - y_0) \\ &= -16\cos\left[m\pi - (-1)^m \frac{\pi}{6}\right]\cos n\pi \\ &= -16(-1)^{m+n} \cos \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

当 m 及 n 有相同的奇偶性时, $m+n$ 为偶数, $AC - B^2 < 0$, 故无极值, 当 m 及 n 有不同的奇偶性时, $m+n$

为奇数, $AC - B^2 > 0$, 故有极值, 看 A 的符号决定取得极大值还是极小值. 由于

$$A = -4 \sin x_0 \sin y_0 = 2[\cos(x_0 + y_0) - \cos(x_0 - y_0)] \\ = 2\{(-1)^m \cos \frac{\pi}{6} - (-1)^n\},$$

故当 m 为奇数及 n 为偶数时, $A < 0$, 取得极大值; 当 m 为偶数及 n 为奇数时, $A > 0$, 取得极小值. 极值为

$$z(x_0, y_0) = m\pi + \left(\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)(-1)^{m+1} + 2 \cdot (-1)^n.$$

3641. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}.$

解 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{-(x^2 + y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^{-(x^2 + y^2)}(1 - x^2 - y^2) = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_0(0, 0)$ 及 $P(x_0, y_0)$, 其中 $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

在点 P_0 有 $z = 0$, 而当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时 $z > 0$, 故函数 z 在点 P_0 取得极小值 $z = 0$.

由 1437 题知, 在满足 $x_0^2 + y_0^2 = 1$ 的点 (x_0, y_0) 的邻域内, 不论是 $x^2 + y^2 > 1$ 还是 $x^2 + y^2 < 1$, 均有

$$z(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)} < e^{-1}.$$

但是点 (x_0, y_0) 的邻域内总有 $x^2 + y^2 = 1$ 的点 (x, y) , 因此, 函数 z 在点 (x_0, y_0) 取得弱极大值 $z = e^{-1}$.

3642. $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z.$

解 $du = 2(x+1)dx + 2(y+2)dy + 2(z-3)dz.$

$$\text{令 } \frac{\partial u}{\partial x} = 2(x+1) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2(y+2) = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2(z-3) = 0, \quad \text{得静止点 } P_0(-1, -2, 3).$$

在该点由于

$$d^2u = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) \geq 0$$

(当 $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ 时),

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0) = -14$.

3643. $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

解 $du = (3x^2 + 12y)dx + (2y + 12x)dy + (2z + 2)dz$.

$$\text{令 } \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12y = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y + 12x = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z + 2 = 0, \quad \text{得静止点 } P_0(0, 0, -1) \text{ 及}$$

$$P_1(24, -144, -1).$$

$$d^2u = 6xdx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy.$$

在点 P_0 , 有

$$d^2u = 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy = 2dz^2 + 2dy(dy + 12dx),$$

当 $dz = 0$, $dy > 0$ 及 $dy + 12dx < 0$ 时, $d^2u < 0$;

而当 dx, dy 及 dz 均大于零时, $d^2u > 0$. 因此 d^2u 的符号不定, 故无极值.

在点 P_1 , 有

$$d^2u = 144dx^2 + 2dy^2 + 2dz^2 + 24dxdy$$

$$= (12dx + dy)^2 + dy^2 + 2dz^2$$

$$\geq 0 \quad (\text{当 } dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \text{ 时}),$$

故函数 u 在点 P_1 取得极小值 $u(P_1) = -6913$.

$$3644. u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad du &= \left(1 - \frac{y^2}{4x^2}\right) dx + \left(\frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2}\right) dy \\ &\quad + \left(\frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right) dz. \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ 得方程组}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0, \\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0, \\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0. \end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{y^2}{2x^3} dx^2 - \frac{y}{x^2} dx dy + \left(\frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\right) dy^2 \\ &\quad - \frac{4z}{y^2} dy dz + \left(\frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\right) dz^2. \end{aligned}$$

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} d^2u &= 4dx^2 - 4dxdy + 3dy^2 - 4dydz + 6dz^2 \\ &= (2dx - dy)^2 + dy^2 + (dy - 2dz)^2 + 2dz^2 \geq 0 \\ &\quad (\text{当 } dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \text{ 时}), \end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_0 取得极小值 $u(P_0) = 4$.

3645. $u = xy^2z^3(a - x - 2y - 3z)$ ($a > 0$).

解 $du = y^2z^3(a - 2x - 2y - 3z)dx + 2xyz^3(a - x - 3y - 3z)dy + 3xy^2z^2(a - x - 2y - 4z)dz$.

令 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, 得方程组

$$\begin{cases} y^2z^3(a - 2x - 2y - 3z) = 0 \\ 2xyz^3(a - x - 3y - 3z) = 0, \\ 3xy^2z^2(a - x - 2y - 4z) = 0. \end{cases}$$

解之得静止点 $P_0\left(\frac{a}{7}, \frac{a}{7}, \frac{a}{7}\right)$; 直线 $x = 0$, $2y + 3z = a$; 平面 $y = 0$; 平面 $z = 0$.

同 3625 题的方法, 不难确定: 直线 $x = 0$, $2y + 3z = a$ 及平面 $z = 0$ 上的点不取得极值. $y = 0$ 时, 当 $xz^3(a - x - 3z) > 0$ 取得弱极小值 $u = 0$; 当 $xz^3(a - x - 3z) < 0$ 取得弱极大值 $u = 0$; 当 $xz^3(a - x - 3z) = 0$ 不取得极值.

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} d^2u &= -\frac{2a^5}{7^5} (dx^2 + 3dy^2 + 6dz^2 + 2dxdy + \\ &6dydz + 3dxdz) = -\frac{a^5}{7^5} [(dx + 2dy + 3dz)^2 + dx^2 + \\ &2dy^2 + 3dz^2] < 0 \quad (\text{当 } dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0 \text{ 时}), \\ \text{故函数 } u \text{ 在点 } P_0 \text{ 取得极大值 } u(P_0) &= \frac{a^7}{7^7}. \end{aligned}$$

$$3646. \quad u = \frac{a^2}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{b} \quad (x > 0, y > 0, z > 0, \\ a > 0, b > 0).$$

$$\text{解} \quad du = \left(\frac{2x}{y} - \frac{a^2}{x^2} \right) dx + \left(\frac{2y}{z} - \frac{x^2}{y^2} \right) dy \\ + \left(\frac{2z}{b} - \frac{y^2}{z^2} \right) dz.$$

$$\text{令} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \text{ 得方程组}$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{y} - \frac{a^2}{x^2} = 0, \\ \frac{2y}{z} - \frac{x^2}{y^2} = 0, \\ \frac{2z}{b} - \frac{y^2}{z^2} = 0. \end{cases}$$

$$\text{解之得静止点 } P_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt[15]{16a^4b}, \frac{1}{4} \sqrt[5]{16a^4b}, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \sqrt[15]{\frac{1}{4}a^6b^7} \right).$$

$$d^2u = \frac{2a^2}{x^3} dx^2 + \frac{2}{y} dx^2 - \frac{4x}{y^2} dx dy + \frac{2}{z} dy^2 \\ + \frac{2x^2}{y^3} dy^2 - \frac{4y}{z^2} dy dz + \frac{2}{b} dz^2 + \frac{2y^2}{z^3} dz^2. \\ = \frac{2a^2}{x^3} dx^2 + \frac{2}{y} \left(dx - \frac{x}{y} dy \right)^2 + \frac{2}{z} \left(dy - \frac{y}{z} dz \right)^2 \\ + \frac{2}{b} dz^2.$$

在点 P_0 , $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $d^2u > 0$ (当 $dx^2 + dy^2 + dz^2 \neq 0$ 时), 故函数 u 在点 P_0 取得极小值

$$u(P_0) = \frac{15a^{15}}{4 \sqrt{16b}}.$$

3647. $u = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x+y+z)$

$$(0 \leq x \leq \pi; 0 \leq y \leq \pi; 0 \leq z \leq \pi).$$

解 $du = [\cos x - \cos(x+y+z)]dx$
 $+ [\cos y - \cos(x+y+z)]dy$
 $+ [\cos z - \cos(x+y+z)]dz.$

令 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, 得方程组

$$\begin{cases} \cos x - \cos(x+y+z) = 0, \\ \cos y - \cos(x+y+z) = 0, \\ \cos z - \cos(x+y+z) = 0. \end{cases}$$

注意到 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$, 解之得静止点 $P_0(0, 0, 0)$, $P_1(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 及 $P_2(\pi, \pi, \pi)$.

在点 P_1 , 有

$$\begin{aligned} d^2u &= -\sin x dx^2 - \sin y dy^2 - \sin z dz^2 \\ &\quad + \sin(x+y+z)[d(x+y+z)]^2 \\ &= -dx^2 - dy^2 - dz^2 - (dx+dy+dz)^2 < 0, \end{aligned}$$

故函数 u 在点 P_1 取得极大值 $u(P_1) = 4$.

由于 P_0 与 P_2 是所考虑区域 $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$, $0 \leq z \leq \pi$ 的边界点, 故函数在点 P_0 与 P_2 不达标值 (根据极值定义, 首先要求函数在所考虑的点的某邻域中有定义). 但如果放宽要求, 对于边界点, 仅将

其函数值与属于所考虑的区域而与此边界点很接近的点的函数值相比较，则在边界点也可引入达极值和达弱极值的概念。今对于点 P_0 及 P_2 的邻域中且属于上述区域的点 (x, y, z) ，显然有 $\sin x \geq 0$ ， $\sin y \geq 0$ ， $\sin z \geq 0$ 。又

$$\begin{aligned} \sin(x+y+z) &= \sin x \cos y \cos z - \sin x \sin y \sin z \\ &\quad + \cos x \sin y \cos z + \cos x \cos y \sin z \\ &\leq \sin x + \sin y + \sin z - \sin x \sin y \sin z, \end{aligned}$$

故 $u \geq 0$ 。而当 $x=y=0$ 时或 $x=y=\pi$ 时都恒有 $u=0$ 。因此，函数 u 在点 P_0 及 P_2 都达到弱极小值 $u(P_0)=u(P_2)=0$ （按上述边界点达极值的意义）。

3648. $u = x_1 x_2^2 \cdots x_n^n (1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n)$
 $(x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0)$ 。

解 先考虑满足 $1 - x_1 - 2x_2 - \cdots - nx_n = 0$ ， $x_1 > 0$ ， $x_2 > 0$ ， \dots ， $x_n > 0$ 的点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 。显然函数 u 在这种点不达到极值（因为，例如，若保持 x_2, x_3, \dots, x_n 不变，而将 x_1 增大任意小的值，就有 $u < 0$ ，但将 x_1 减小任意小的值，则有 $u > 0$ ），故下面只需

考察满足 $1 - \sum_{k=1}^n kx_k \neq 0$ ， $x_1 > 0$ ， \dots ， $x_n > 0$ 的点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 。

我们有

$$du = u \sum_{k=1}^n \frac{k}{x_k} dx_k - \frac{u}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} \sum_{k=1}^n k dx_k$$

$$= u \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{x_k} - \frac{k}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} \right) dx_k \right],$$

考慮到 $x_i \geq 0$ 及 $1 - \sum_{k=1}^n kx_k \neq 0$, 故有 $u \neq 0$.

解方程組

$$\frac{k}{x_k} - \frac{k}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

得靜止點 $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{2}{n^2 + n + 2} = x_0.$$

$$\begin{aligned} d^2u &= \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{x_k} - \frac{k}{1 - \sum_{k=1}^n kx_k} \right) dx_k \right] du \\ &\quad + u \left[\sum_{k=1}^n \left(-\frac{k}{x_k^2} \right) dx_k^2 + \frac{1}{\left(1 - \sum_{k=1}^n kx_k \right)^2} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(\sum_{k=1}^n k dx_k \right) \left(-\sum_{k=1}^n k dx_k \right) \right]. \end{aligned}$$

在點 P_0 , 有

$$d^2u = -\frac{u}{x_0^2} \left[\sum_{k=1}^n k dx_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n k dx_k \right)^2 \right]$$

$$= -x_0^{\frac{(n+1)}{2}-1} \left[\sum_{k=1}^n k dx_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n k dx_k \right)^2 \right]$$

$$< 0 \quad \left(\text{当 } \sum_{k=1}^n dx_k^2 \neq 0 \text{ 时} \right),$$

故函数 u 在点 P_0 取得极大值 $u(P_0) = \left(\frac{2}{n^2+n+2} \right)^{\frac{n^2+n+2}{2}}$.

3649. $u = x_1 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \cdots + \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{2}{x_n} \quad (x_i > 0, i = 1, 2, \dots, n)$.

解 设 $y_1 = x_1, y_2 = \frac{x_2}{x_1}, \dots, y_k = \frac{x_k}{x_{k-1}}, \dots, y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$,

则 $x_n = y_1 y_2 \cdots y_n, y_k > 0 (k = 1, 2, \dots, n)$ 且

$$u = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + \frac{2}{y_1 y_2 \cdots y_n}.$$

记 $A = y_1 y_2 \cdots y_n$, 则可得

$$du = \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{2}{A y_k} \right) dy_k.$$

令 $\frac{\partial u}{\partial y_k} = 0$ 得方程组

$$1 - \frac{2}{A y_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

解之得静止点 $P_0(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 其中

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 2^{\frac{1}{n+1}} = y_0.$$

在点 P_0 , 有

$$d^2u \Big|_{P=P_0} = \frac{2}{A} \sum_{k=1}^n \frac{1}{y_k^2} dy_k^2 + \frac{2}{Ay_k^2} \left(\sum_{k=1}^n dy_k \right)^2 \Big|_{P=P_0}$$

$$= \frac{1}{y_0} \left[\sum_{k=1}^n dy_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n dy_k \right)^2 \right] \geq 0$$

(当 $\sum_{k=1}^n dy_k^2 \neq 0$ 时),

故函数 u 在 P_0 点取得极小值, 也即在

$$x_1 = y_1 = 2^{\frac{1}{n+1}},$$

$$x_2 = y_2 x_1 = 2^{\frac{2}{n+1}},$$

.....

$$x_k = y_k x_{k-1} = 2^{\frac{k}{n+1}},$$

.....

$$x_n = y_n x_{n-1} = 2^{\frac{n}{n+1}}$$

处, 函数 u 取得极小值 $u = (n+1)2^{\frac{1}{n+1}}$.

3650. 惠更斯问题. 在 a 和 b 二正数间插入 n 个数 x_1, x_2, \dots, x_n , 使得分数

$$u = \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{(a+x_1)(x_1+x_2)\cdots(x_n+b)}$$

的值是最大.

解 记 $w = \frac{1}{u} = (a+x_1)\left(1+\frac{x_2}{x_1}\right)\left(1+\frac{x_3}{x_2}\right)\cdots\left(1+\frac{b}{x_n}\right)$.

设 $y_1 = \frac{x_2}{x_1}, y_2 = \frac{x_3}{x_2}, \dots, y_n = \frac{b}{x_n}$, 并记

$A = y_1 y_2 \cdots y_n$, 则有

$$x_1 = \frac{b}{y_1 y_2 \cdots y_n} = \frac{b}{A},$$

$$w = \left(a + \frac{b}{A}\right) (1 + y_1)(1 + y_2)\cdots(1 + y_n).$$

又记 $m = a + \frac{b}{A}$, 则有

$$\begin{aligned} dw &= \sum_{k=1}^n \frac{w}{1+y_k} dy_k - \frac{wb}{mA} \sum_{k=1}^n \frac{dy_k}{y_k} \\ &= w \sum_{k=1}^n \left(\frac{y_k}{1+y_k} - \frac{b}{mA} \right) \frac{dy_k}{y_k}. \end{aligned}$$

令 $\frac{\partial w}{\partial y_k} = 0$ 得方程组

$$\frac{y_k}{1+y_k} = \frac{b}{mA} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

解之得静止点 $P_0(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 其中

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_n = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} = y_0.$$

在点 P_0 , 有

$$\begin{aligned} d^2u \Big|_{P=P_0} &= w \sum_{k=1}^n d \left(\frac{y_k}{1+y_k} - \frac{b}{mA} \right) \frac{dy_k}{y_k} \Big|_{P=P_0} \\ &= w \sum_{k=1}^n d \left(\frac{y_k}{1+y_k} \right) \left(\frac{dy_k}{y_0} \right) \Big|_{P=P_0} \\ &\quad - w \sum_{k=1}^n \frac{dy_k}{y_0} \left[d \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{b} A} \right) \Big|_{P=P_0} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2} \sum_{k=1}^n dy_k^2 + \frac{w(P_0)}{y_0 \left(1 + \frac{a}{b} A\right)^2}_{P=P_0} \\
&\quad \cdot \sum_{k=1}^n \left[dy_k \left(\sum_{k=1}^n \frac{aA}{by_k} dy_k \right) \right]_{P=P_0} \\
&= \frac{w(P_0)}{y_0(1+y_0)^2} \left[\sum_{k=1}^n dy_k^2 + \left(\sum_{k=1}^n dy_k \right)^2 \right] \\
&\geq 0 \quad \left(\text{当 } \sum_{k=1}^n dy_k^2 \neq 0 \text{ 时} \right),
\end{aligned}$$

故函数 w 在点 P_0 取得极小值，从而函数 u 在

$$\begin{cases}
x_1 = \frac{b}{A} = \frac{b}{y_0^n} = \frac{b}{a} \cdot a y_0^{-n} = a y_0^{n+1} \cdot y_0^{-n} = a y_0, \\
x_2 = x_1 y_1 = a y_0^2, \\
x_3 = x_2 y_2 = a y_0^3, \\
\cdots \cdots \cdots \\
x_n = \frac{b}{y_n} = \frac{b}{a} a y_0^{-1} = a y_0^{n+1} y_0^{-1} = a y_0^n,
\end{cases}$$

即数 $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ 构成有公比 $y_0 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$ 的几何级数时，其值最大，并且 u 的最大值为

$$u = \frac{1}{a(1+y_0)^{n+1}} = \left(a^{\frac{1}{n+1}} + b^{\frac{1}{n+1}} \right)^{-(n+1)}.$$

求变量 x 和 y 的隐函数 z 的极值：

3651. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0.$

解 微分得

$$(x-1)dx+(y+1)dy+(z-2)dz=0.$$

显见,当 $x=1$, $y=-1$ 时 $dz=0$. 代入原方程可解得 $z=6$ 及 $z=-2$. 又 $z=2$ 时为不可微的. 为判断极值, 求二阶微分, 得

$$dx^2+dy^2+(z-2)d^2z+dz^2=0.$$

以 $x=1$, $y=-1$, $z=6$ 代入, 并考虑 $dz=0$, 得

$$d^2z=-\frac{1}{4}(dx^2+dy^2)<0 \quad (\text{当 } dx^2+dy^2 \neq 0 \text{ 时}),$$

故当 $x=1$, $y=-1$ 时, 隐函数 z 取得极大值 $z=6$. 同法可判断得: 当 $x=1$, $y=-1$ 时, 隐函数 z 也取得极小值, 且其值为 $z=-2$.

不难看出, $z=2$ 是球的切面平行于 Oz 轴的地方, 因此函数 z 不取得极值.

3652. $x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0.$

解 微分一次, 得

$$(2x-z+2)dx+(2y-z+2)dy+(2z-x-y+2)dz=0.$$

解方程组

$$\begin{cases} 2x-z+2=0, \\ 2y-z+2=0, \\ x^2+y^2+z^2-xz-yz+2x+2y+2z-2=0 \end{cases}$$

得 $x_1=y_1=-(3+\sqrt{6})$, $z_1=-(4+2\sqrt{6})$;
 $x_2=y_2=-(3-\sqrt{6})$, $z_2=2\sqrt{6}-4.$

再微分一次, 并注意到 $dz=0$, 即得

$$2dx^2 + 2dy^2 + (2z - x - y + 2)dz = 0.$$

在点 (x_1, y_1, z_1) , $d^2z = \frac{1}{\sqrt{6}}(dx^2 + dz^2) > 0$, 故当 $x = y = -(3 + \sqrt{6})$ 时, 取得极小值 $z = -(4 + 2\sqrt{6})$. 同法可知, 当 $x = y = -(3 - \sqrt{6})$ 时, 取得极大值 $z = 2\sqrt{6} - 4$.

对于 dz 的系数 $2z - x - y + 2 = 0$ 时代表的情况, 与上题类似也不取得极值.

3653. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

解 微分一次, 得

$$\begin{aligned} 2(x^2 + y^2 + z^2)(xdx + ydy + zdz) \\ = a^2(xdx + ydy - zdz). \end{aligned}$$

令 $dz = 0$, 得方程

$$[2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2](xdx + ydy) = 0.$$

解之, 得 $x = y = 0$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$.

以 $x = y = 0$ 代入原方程, 解得 $z = 0$. 这是隐函数的一个奇点. 把原式看作 z^2 的一个方程, 舍去增根, 可解出

$$z^2 = -(a^2 + x^2 + y^2) + \sqrt{a^4 + 3a^2(x^2 + y^2)},$$

显然 z 有正负两支在 $(0, 0, 0)$ 点相交. 因此, 不认为 z 在 $(0, 0, 0)$ 点取得极值.

以 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$ 代入原方程, 解得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{8}a^2, \quad z^2 = \frac{a^2}{8}.$$

为考虑极值, 将一次微分式改写为

$$\begin{aligned} & [2(x^2 + y^2 + z^2) - a^2](x dx + y dy) + \\ & [2(x^2 + y^2 + z^2) + a^2]z dz = 0. \end{aligned}$$

将上式再微分一次, 注意到 $dz = 0$ 及 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2}{2}$, 即得

$$a^2 z d^2 z = -2(x dx + y dy)^2,$$

故当 $x^2 + y^2 = \frac{3}{8} a^2$, $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $d^2 z \leq 0$, 函

数 z 取得弱极大值 $z = \frac{a}{2\sqrt{2}}$; 当 $x^2 + y^2 = \frac{3}{8} a^2$,

$z = -\frac{a}{2\sqrt{2}}$ 时, $d^2 z \geq 0$, 函数 z 取得弱极小值 $z =$

$$-\frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

求下列函数的条件极值点:

3654. $z = xy$, 若 $x + y = 1$.

解 设 $F(x, y) = xy + \lambda(x + y - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + \lambda = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

得 $x = y = -\lambda = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{4}$. 由于当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $y \rightarrow \mp$

∞ , 故 $z = xy \rightarrow -\infty$. 从而得知: 点 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$

为条件极值点，且 $z = \frac{1}{4}$ 为极大值。

如将 $z = xy$ 改写为 $z = y(1-y)$ ，则成为普通极值。易知极大值点为 $y = \frac{1}{2}$ ，从而 $x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，

$$z = \frac{1}{4}.$$

3655. $z = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ ，若 $x^2 + y^2 = 1$ 。

解 设 $F(x, y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ ，解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{a} + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{b} + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

可得

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2|ab|}, \quad x = \mp \frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$y = \mp \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

其中 $\varepsilon = \operatorname{sgn} ab \neq 0$ 。相应地， $z = \mp \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{|ab|}$ 。

由于函数 z 在闭圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上连续且不为常数，故必取得最大值和最小值并且最大值与最小值

不相等. 这里可疑点仅两个.

因此, 当 $x = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = -\frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时, 函数值 $z = -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ 必为最小值, 从而是极小值; 当

$x = \frac{b\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{a\varepsilon}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 时, $z = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}$ 为最大值, 从而是极大值.

3656. $z = x^2 + y^2$, 若 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

解 设 $F(x, y) = x^2 + y^2 + \lambda \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x + \frac{1}{a}\lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + \frac{1}{b}\lambda = 0, \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{cases}$$

可得

$$\lambda = -\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}, \quad x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}.$$

由于当 $x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$ 时, $z \rightarrow +\infty$, 故函数 z 必在有限处取得最小值. 这里可疑点仅一个. 因此, 当 $x = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, y = \frac{a^2b}{a^2+b^2}$ 时, 函数 z 取得极小值

$$z = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

注 如果用二阶微分判别, 则易从

$$d^2 z = 2(dx^2 + dy^2) > 0$$

(不论 dx, dy 之间有何约束条件, 此式恒成立) 可

知 $z = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$ 为极小值.

3657. $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, 若 $x^2 + y^2 = 1$.

解 设 $F(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2[(A - \lambda)x + By] = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2[Bx + (C - \lambda)y] = 0, & (2) \\ x^2 + y^2 = 1. & (3) \end{cases}$$

由 $x^2 + y^2 = 1$ 知 x, y 不全为零, 故 λ 必须满足方程

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B \\ B & C - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A + C)\lambda + (AC - B^2) = 0. \quad (4)$$

当 $(A - C)^2 + 4B^2 = 0$ 时, 所研究的函数为常数; 当 $(A - C)^2 + 4B^2 \neq 0$ 时, 方程 (4) 有两个不等的实根, 记为 λ_1 和 λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). 由方程组 (1)、(2)、(3) 可解出

$$x_{1,2} = \frac{\pm(\lambda_1 - C)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_1 - C)^2}}, y_{1,2} = \frac{\pm(\lambda_1 - A)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_1 - A)^2}},$$

$$x_{3,4} = \frac{\pm(\lambda_2 - C)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_2 - C)^2}}, y_{3,4} = \frac{\pm(\lambda_2 - A)}{\sqrt{B^2 + (\lambda_2 - A)^2}}.$$

相应地, 有

$$\begin{aligned} z(x_1, y_1) &= Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2 \\ &= (Ax_1 + By_1)x_1 + (Bx_1 + Cy_1)y_1. \end{aligned}$$

由 (1)、(2) 可解得

$$Ax_1 + By_1 = \lambda_1 x_1, \quad Bx_1 + Cy_1 = \lambda_1 y_1,$$

故得

$$z(x_1, y_1) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 y_1^2 = \lambda_1 (x_1^2 + y_1^2) = \lambda_1.$$

同理可得

$$z(x_2, y_2) = \lambda_1, \quad z(x_3, y_3) = z(x_4, y_4) = \lambda_2.$$

由于函数 z 在单位球面上连续且不为常数, 故必取得最大值和最小值并且最大值和最小值不相等. 这里可疑点仅四个 (x_i, y_i) ($i=1, 2, 3, 4$), 而且 $z(x_1, y_1) = z(x_2, y_2) = \lambda_1$, $z(x_3, y_3) = z(x_4, y_4) = \lambda_2$. 于是, 当 $x = x_{1,2}$, $y = y_{1,2}$ 时, 函数 z 取得最大值 $z = \lambda_1$, 因而也是极大值; 当 $x = x_{3,4}$, $y = y_{3,4}$ 时, 函数 z 取得最小值 $z = \lambda_2$, 因而也是极小值.

3658. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$, 若 $x - y = \frac{\pi}{4}$.

解 设 $F(x, y) = \cos^2 x + \cos^2 y + \lambda(x - y - \frac{\pi}{4})$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = -\sin 2x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -\sin 2y - \lambda = 0, \\ x - y = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

可得

$$x_k = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad y_k = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

相应地, 当 k 为偶数时, $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; 当 k 为奇数时, $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$.

由于所给连续函数 z 必在任意有限区域内取得最大值和最小值, 而且 z 又是关于 x, y 的周期(周期为 π)函数, 故当 k 为偶数时, 函数 z 在点 (x_k, y_k) 取得最大值 $z = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$, 从而是极大值; 当 k 为奇数时, 函数 z 在点 (x_k, y_k) 取得最小值 $z = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, 从而是极小值.

3659. $u = x - 2y + 2z$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

解 设 $F(x, y, z) = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

可得

$$x = \pm \frac{1}{3}, \quad y = \mp \frac{2}{3}, \quad z = \pm \frac{2}{3}.$$

相应地, $u = \pm 3$.

由于所给函数在闭球面上连续且不为常数, 故必取得最大值及最小值并且最大值与最小值不相等. 这里可疑点仅两个, 于是, 当 $x = \frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$, $z = \frac{2}{3}$ 时, 函数 u 取得最大值 $u = 3$, 因而也是极大值; 当 $x = -\frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = -\frac{2}{3}$ 时, 函数 u 取得最小值 $u = -3$, 因而也是极小值.

3660. $u = x^m y^n z^p$, 若 $x + y + z = a$ ($m > 0$, $n > 0$, $p > 0$, $a > 0$)*).

解 设 $w = \ln u = m \ln x + n \ln y + p \ln z$.

$$F(x, y, z) = w - \frac{1}{\lambda}(x + y + z - a).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{m}{x} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{n}{y} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{p}{z} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ x + y + z = a \end{cases}$$

*). 编者注: 应加上条件 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

可得

$$x = \frac{am}{m+n+p}, \quad y = \frac{an}{m+n+p}, \quad z = \frac{ap}{m+n+p}.$$

$$\text{相应地, } u = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}.$$

连续函数 w 定义在平面 $x+y+z=a$ 于第一卦限内的部分, 边界由三条直线

$$\begin{cases} x+y=a, & \begin{cases} y+z=a, \\ x=0, \end{cases} \\ z=0, & \\ \begin{cases} z+x=a, \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

组成. 当点 P 趋于边界上的点时, 显然有 $w \rightarrow -\infty$. 因此, 函数 w 在区域内取得最大值. 由于可疑点仅

$$\text{一个, 故当 } x = \frac{am}{m+n+p}, \quad y = \frac{an}{m+n+p}$$

$$z = \frac{ap}{m+n+p} \text{ 时, 函数 } u \text{ 取得最大值}$$

$$u = \frac{a^{m+n+p} m^m n^n p^p}{(m+n+p)^{m+n+p}}, \text{ 因而也是极大值.}$$

$$3661. \quad u = x^2 + y^2 + z^2, \text{ 若 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c > 0).$$

$$\text{解 设 } F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right.$$

$\left. - 1 \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

可得

$$x = \pm a, y = z = 0; \quad x = z = 0, y = \pm b;$$

$$x = y = 0, z = \pm c.$$

相应地, 有

$u(\pm a, 0, 0) = a^2$, $u(0, \pm b, 0) = b^2$, $u(0, 0, \pm c) = c^2$. 由于 $a > b > c > 0$, 故连续函数 u 在点 $(\pm a, 0, 0)$ 取得最大值 a^2 , 因而也是极大值; 在点 $(0, 0, \pm c)$ 取得最小值 c^2 , 因而也是极小值.

在点 $(0, \pm b, 0)$ 处, 对应的 $\lambda = -b^2$, 且

$$\begin{aligned} d^2F &= 2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) dx^2 + 2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) dy^2 \\ &\quad + 2\left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right) dz^2 \\ &= 2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) dx^2 + 2\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right) dz^2. \end{aligned}$$

把 x, z 当自变量, y 看成由条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 所确定的 x 和 z 的函数. 在点 $(0, \pm b, 0)$, 有 $d^2u = d^2F$,

而 $1 - \frac{b^2}{a^2} > 0$, $1 - \frac{b^2}{c^2} < 0$. 因此, d^2u 的符号不定,

从而函数 u 在点 $(0, \pm b, 0)$ 不取得极值.

3662. $u = xy^2z^3$, 若 $x + 2y + 3z = a$ ($x > 0, y > 0, z > 0$, $a > 0$).

解 设 $w = \ln u = \ln x + 2 \ln y + 3 \ln z$,

$$F(x, y, z) = w - \frac{1}{\lambda}(x + 2y + 3z - a).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{2}{\lambda} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{3}{z} - \frac{3}{\lambda} = 0, \\ x + 2y + 3z = a \end{cases}$$

可得

$$x = y = z = \frac{a}{6}.$$

类似3660题的讨论可知, 函数 u 当 $x = y = z = \frac{a}{6}$ 时取

得极大值 $u = \left(\frac{a}{6}\right)^6$.

3663. $u = xyz$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

解 设 $F(x, y, z) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x + y + z)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz + 2\lambda y + \mu = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu = 0, & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, & (4) \\ x + y + z = 0. & (5) \end{cases}$$

(1)-(2), (2)-(3), 得

$$\begin{cases} (x-y)(2\lambda-z) = 0, & (6) \\ (y-z)(2\lambda-x) = 0. & (7) \end{cases}$$

由(6), 若 $x-y=0$, 代入(5)得 $z=-2x$. 再代入(4), 解得静止点 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ 和

$$P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

如果 $x-y \neq 0$, 则 $z=2\lambda$. 由(7), 若 $y-z=0$,

类似上面解法可得静止点 $P_3\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

和 $P_4\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; 若 $y-z \neq 0$, 则

$x=2\lambda$, 故 $x=z$, 类似上面解法又可得静止点 $P_5\left(\frac{1}{\sqrt{6}},$

$-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ 和 $P_6\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$.

相应地, 有

$$u(P_1) = u(P_3) = u(P_5) = -\frac{1}{3\sqrt{6}},$$

$$u(P_2) = u(P_4) = u(P_6) = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

类似前面各题的讨论可知, 函数 u 在点 P_1, P_3 及 P_5 取得极小值 $u = -\frac{1}{3\sqrt{6}}$; 在点 P_2, P_4 及 P_6 取得极

大值 $u = \frac{1}{3\sqrt{6}}$.

3664. $u = \sin x \sin y \sin z$, 若 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$
 $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

解 由 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 及 $x > 0, y > 0, z > 0$ 不难得出

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < z < \frac{\pi}{2}.$$

设 $w = \ln u = \ln \sin x + \ln \sin y + \ln \sin z$,

$$F(x, y, z) = w + \lambda \left(x + y + z - \frac{\pi}{2} \right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \operatorname{ctg} x + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \operatorname{ctg} y + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = \operatorname{ctg} z + \lambda = 0, \\ x + y + z = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

并注意到点 $P(x, y, z)$ 在第一卦限, 即得静止点 P_0 .

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right).$$

类似3660题的讨论, 当点 (x, y, z) 趋于平面 $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ 在第一卦限部分的边界时, $u \rightarrow 0$; 而在边界内部 $u > 0$. 因此, 函数 u 在边界内部取得最大值, 故在点 P_0 取得极大值 $u(P_0) = \frac{1}{8}$.

3665. $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$ ($a > b > c > 0$, $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

解 设 $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + \mu(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2\left(\frac{1}{a^2} - \lambda\right)x + \mu \cos \alpha = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2\left(\frac{1}{b^2} - \lambda\right)y + \mu \cos \beta = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = 2\left(\frac{1}{c^2} - \lambda\right)z + \mu \cos \gamma = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0, & (5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. & (6) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x, y, z , 然后相加, 并注意到(4)、(5)两式, 即得

$$\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = u(x, y, z). \quad (7)$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 然后相加, 并注意到(5)、(6)两式, 即得

$$\mu = -2\left(\frac{x\cos\alpha}{a^2} + \frac{y\cos\beta}{b^2} + \frac{z\cos\gamma}{c^2}\right). \quad (8)$$

将(8)式代入(1)、(2)、(3), 得

$$\begin{cases} \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} - \lambda\right)x - \frac{\cos\alpha\cos\beta}{b^2}y - \frac{\cos\alpha\cos\gamma}{c^2}z = 0, \\ -\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}x + \left(\frac{\sin^2\beta}{b^2} - \lambda\right)y - \frac{\cos\beta\cos\gamma}{c^2}z = 0, \\ -\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{a^2}x - \frac{\cos\beta\cos\gamma}{b^2}y + \left(\frac{\sin^2\gamma}{c^2} - \lambda\right)z = 0. \end{cases} \quad (9)$$

要 $\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}$ 为方程组(9)的非零解, 必须有

$$\begin{vmatrix} \sin^2\alpha - a^2\lambda & -\cos\alpha\cos\beta & -\cos\alpha\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\beta & \sin^2\beta - b^2\lambda & -\cos\beta\cos\gamma \\ -\cos\alpha\cos\gamma & -\cos\beta\cos\gamma & \sin^2\gamma - c^2\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

展开计算可得

$$\lambda \left[\lambda^2 - \left(\frac{\sin^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2} + \frac{\sin^2\gamma}{c^2} \right) \lambda + \left(\frac{\cos^2\alpha}{b^2c^2} + \frac{\cos^2\beta}{c^2a^2} + \frac{\cos^2\gamma}{a^2b^2} \right) \right] = 0. \quad (10)$$

由(7)知 $\lambda \neq 0$, 且不难验证(10)式在消去 λ 后得到

的二次方程有两个不等的实根 $\lambda_1 < \lambda_2$.

固定 $\lambda = \lambda_1$, 代入方程组(9), 可得到关于 (x, y, z) 有一个自由度的一个解系, 再代入方程(4), 可得对应于 $\lambda = \lambda_1$ 的两个静止点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$. 由(7)知, 对应的 $u(P_1) = u(P_2) = \lambda_1$. 同理可求得对应于 $\lambda = \lambda_2$ 的两个静止点 $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 和 $P_4(x_4, y_4, z_4)$, 且有 $u(P_3) = u(P_4) = \lambda_2$.

P_1, P_2, P_3, P_4 为满足方程组(1)~(5)的一切解所对应的点. 类似前面各题的讨论可知, 函数 u 在点 P_1 及 P_2 取得极小值 λ_1 , 而在点 P_3 及 P_4 取得极大值 λ_2 .

3666† $u = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$, 若 $Ax + By + Cz = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\frac{\xi}{\cos \alpha} = \frac{\eta}{\cos \beta} = \frac{\zeta}{\cos \gamma}$,

其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$.

解 设 $F(x, y, z) = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 + \lambda(Ax + By + Cz) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$.

记 $\xi = \rho \cos \alpha, \eta = \rho \cos \beta, \zeta = \rho \cos \gamma, \rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x - \rho \cos \alpha) + \lambda A + 2\mu x = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y - \rho \cos \beta) + \lambda B + 2\mu y = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z - \rho \cos \gamma) + \lambda C + 2\mu z = 0, & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, & (4) \\ Ax + By + Cz = 0, & (5) \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1. & (6) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 A 、 B 、 C ，然后相加，并注意到(5)式，即得

$$-2\rho(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) + \lambda(A^2 + B^2 + C^2) = 0,$$

$$\lambda = \frac{2\rho(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)}{A^2 + B^2 + C^2}. \quad (7)$$

再将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x 、 y 、 z ，然后相加，并注意到(4)式和(5)式，即得

$$2(1+\mu)R^2 = 2\rho(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma). \quad (8)$$

又将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 $\cos\alpha$ 、 $\cos\beta$ 、 $\cos\gamma$ ，然后相加，并注意到(6)式，即得

$$\begin{aligned} & 2(1+\mu)(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) \\ &= 2\rho - \lambda(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma) \\ &= 2\rho \left[1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2} \right]. \quad (9) \end{aligned}$$

由(8)、(9)可得

$$\begin{aligned} (1+\mu)^2 R^2 &= (1+\mu)\rho(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) \\ &= \rho^2 \left[1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2} \right]. \end{aligned}$$

即

$$1+\mu = \pm \frac{\rho}{R} \sqrt{1 - \frac{(A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (10)$$

由(1)、(2)、(3)可得

$$\begin{aligned} x &= \frac{2\rho\cos\alpha - \lambda A}{2(1+\mu)}, \quad y = \frac{2\rho\cos\beta - \lambda B}{2(1+\mu)}, \\ z &= \frac{2\rho\cos\gamma - \lambda C}{2(1+\mu)}. \end{aligned}$$

把(7)式和(10)式代入上式, 即可得 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2, z_2)$, 其中 P_1 对应于(10)式取正号, 而 P_2 对应于(10)式取负号. 下面求 $u(P_1)$ 和 $u(P_2)$. 由(9)、(10)可得

$$\begin{aligned} & x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \\ &= \pm R \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} u(P_1) &= (x_1 - \rho \cos \alpha)^2 + (y_1 - \rho \cos \beta)^2 \\ &\quad + (z_1 - \rho \cos \gamma)^2 \\ &= (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2\rho(x_1 \cos \alpha + y_1 \cos \beta \\ &\quad + z_1 \cos \gamma) + \rho^2 \\ &= R^2 + \rho^2 - 2\rho R \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} u(P_2) &= R^2 + \rho^2 + 2\rho R \\ &\quad \cdot \sqrt{1 - \frac{(A \cos \alpha + B \cos \beta + C \cos \gamma)^2}{A^2 + B^2 + C^2}}. \end{aligned}$$

类似以前各题的讨论可知: $u(P_2)$ 为极大值, $u(P_1)$ 为极小值.

3667. $u = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$, 若 $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} = 1$

($a_i > 0$; $i = 1, 2, \cdots, n$).

解 设 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 + \lambda \left(\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} - 1 \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i + \frac{\lambda}{a_i} = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{a_i} = 1 \end{cases}$$

可得静止点 $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$, 其中

$$x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1} \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

由于 $d^2u = d^2F = 2 \sum_{i=1}^n dx_i^2 > 0$ (它不受约束条件的

限制), 故当 $x_i = \frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1}$ 时, 函数 u 取得极小值

$$u = \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{a_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{a_j^2} \right)^{-1} \right]^2 = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} \right)^{-1}.$$

3668. $u = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p$ ($p > 1$), 若 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ ($a > 0$).

解 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^p + x_2^p + \dots + x_n^p + \lambda(x_1 + x_2 + \dots + x_n - a)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = px_i^{p-1} + \lambda = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n x_i = a \end{cases}$$

得 $x_i = \frac{a}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 由于

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} = \begin{cases} p(p-1)x_i^{p-2}, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

故当 $x_i = \frac{a}{n}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 时,

$$d^2F = p(p-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{a}{n}\right)^{p-2} dx_i^2 > 0 \quad \left(\text{当 } \sum_{i=1}^n dx_i^2 \neq 0 \text{ 时}\right),$$

它不受约束条件的限制, 故函数 u 取得极小值 $u = \frac{a^p}{n^{p-1}}$.

这里应该指出的是, 对于一般的实数 p , 应限定 $x_i > 0$.

3669. $u = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n}$, 若 $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n = 1$ ($\alpha_i > 0, \beta_i > 0; i=1, 2, \dots, n$)*).

解 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x_n} + \lambda(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{\alpha_i}{x_i^2} + \lambda\beta_i = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n \beta_i x_i = 1 \end{cases}$$

得 $x_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{j=1}^n \sqrt{\alpha_j \beta_j}\right)^{-1}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 由于

$$d^2F = 2 \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i^3} dx_i^2 > 0,$$

* 编者注: 本题应加条件 $x_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

故当 $x_i = \sqrt{\frac{\alpha_i}{\beta_i}} \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i \beta_i} \right)^{-1}$ 时, 函数 u 取得极小值

$$u = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{\alpha_i \beta_i} \right)^2.$$

3670. $u = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$, 若 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$ ($a > 0$, $\alpha_i > 1$, $i = 1, 2, \dots, n$)^{*}).

解 设 $w = \ln u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i$,

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= w - \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\alpha_i \ln x_i - \frac{x_i}{\lambda} \right) + \frac{a}{\lambda}. \end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} - \frac{1}{\lambda} = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n x_i = a \end{cases}$$

得 $x_i = \frac{a\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 由于

$$d^2w = - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{x_i^2} dx_i^2 < 0 \quad \left(\text{当 } \sum_{i=1}^n dx_i^2 \neq 0 \text{ 时} \right)$$

不论 dx_i 之间有什么约束条件恒成立, 故函数 w 当

$x_i = \frac{a\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}$ ($i=1, 2, \dots, n$) 时取得极大值,

^{*} 编者注: 本题应加条件 $x_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$).

即函数 u 当 $x_i = \frac{a\alpha_i}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$ 时取得极大值

$$u = \left(\frac{a}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} \cdot \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \dots \alpha_n^{\alpha_n}.$$

3671. 若 $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$, 求二次型 $u = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 的极值.

解 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = u - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 - 1)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_1} = (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, & (1) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, & (2) \\ \dots\dots\dots \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_n} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, & (n) \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1. & (n+1) \end{cases}$$

前 n 个方程要有非零解, 必须矩阵 (a_{ij}) 的特征方程 $|A - \lambda E| = 0$ 有解, 其中 A 为以 a_{ij} 为元素的实对称矩阵, E 为单位矩阵. 由线性代数中关于欧氏空间的理论知, 此特征方程必有 n 个实根, 即有 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ 满足 $|A - \lambda E| = 0$. 对于任一根 λ_k , 代入方程 (1)~(n), 可求得 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的一个解空间, 解空间的维数, 等于 λ_k 的重数. 解空间中的单位元素即方程组 (1)~(n+1) 的根. 当 λ_k 是单重根时, 解空

间是一维的，单位元素只有两个。当 λ_k 是多重根时，对应 λ_k 的单位元素就有无穷多个了。

对于 λ_k 的解 (x_1, x_2, \dots, x_n) ，显然满足方程组 (1)~(n+1)。因此，有 $\sum_{i=1}^n a_{ij}x_j = \lambda_k x_i$ ($i=1, 2, \dots, n$)。从而得

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_k x_i^2 = \lambda_k \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_k. \end{aligned}$$

由于函数 u 在 n 维球面 $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ 上连续，故必取得最大值和最小值。于是，对应于 λ_1 和 λ_n 的解，分别使函数 u 取得最大值 λ_1 和最小值 λ_n ，因而也是 u 的极大值和极小值，或是 u 的弱极大值和弱极小值，视 λ_1 和 λ_n 的重数而定（多重时为弱极值）。由线性代数中把 d^2F 化标准型的方法，可证：对于不等于 λ_1 和 λ_n 的 λ_k ，二次型不取得极值。

3672. 若 $n \geq 1$ 及 $x \geq 0$, $y \geq 0$, 证明不等式

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n.$$

证 考虑函数 $z = \frac{x^n + y^n}{2}$ 在条件 $x+y=a$ ($a>0, x \geq 0, y \geq 0$) 下的极值问题。设

$$F(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n) + \lambda(x+y-a).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{n}{2} x^{n-1} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{n}{2} y^{n-1} + \lambda = 0, \\ x + y = a \end{cases}$$

可得 $x = y = \frac{a}{2}$.

将点 $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ 与边界点 $(0, a)$ 、 $(a, 0)$ 的函数值进行比较 (注意到 $n \geq 1$):

$$z(0, a) = z(a, 0) = \frac{a^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n = z\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) \quad (n > 1),$$

即知函数 z 当 $x + y = a$ 时的最小值为 $\left(\frac{a}{2}\right)^n$. 从而有

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

(当 $x + y = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ 时). (1)

下面我们证明

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n \quad (\text{当 } x \geq 0, y \geq 0 \text{ 时}). \quad (2)$$

当 $x = y = 0$ 时, 不等式(2)显然成立; 当 $x \geq 0$, $y \geq 0$ 且 x, y 不同时为零时, 令 $x + y = a$, 则 $a > 0$. 于是, 由不等式(1)即得

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{a}{2}\right)^n = \left(\frac{x + y}{2}\right)^n.$$

由此可知, 不等式(2)成立. 证毕.

3673. 证明和尔塞不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

($a_i \geq 0, x_i \geq 0, i=1, 2, \dots, n; k > 1, \frac{1}{k} + \frac{1}{k'} = 1$).

证 我们首先证明函数

$$u = \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$$

在条件 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$ ($A > 0$) 下的最小值是 A . 为此,

对 n 用数学归纳法.

当 $n=1$ 时, 显然有

$$(a_1^k)^{\frac{1}{k}} (x_1^{k'})^{\frac{1}{k'}} = a_1 x_1 = A.$$

设当 $n=m$ 时, 命题为真, 故对任意 m 个数 $a_1,$

a_2, \dots, a_m ($a_i \geq 0$), 当 $\sum_{i=1}^m a_i x_i = A$ ($x_1 \geq 0, \dots, x_m \geq 0$) 时, 必有

$$A \leq \left(\sum_{i=1}^m a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^m x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}.$$

我们证明当 $n=m+1$ 时命题也真. 设 $\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A,$

$u = a \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}}$, 其中 $a = \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k \right)^{\frac{1}{k}}$, 求 u 的最小

值. 令

$$F(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = u(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \\ - \lambda \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i - A \right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\alpha^{\frac{1}{k}}}{k'} \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}-1} (k' x_i^{k'-1}) - \lambda a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A \end{cases} \quad (i=1, 2, \dots, m+1),$$

可得

$$\frac{x_i^{k'-1}}{a_i} = \frac{\lambda}{\alpha^{\frac{1}{k}}} \left(\sum_{i=1}^{m+1} x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k}} = \mu^{k'-1} \quad (i=1, 2, \dots, m+1).$$

(这里引入了记号 μ)，即

$$x_i = (a_i \mu^{k'-1})^{\frac{1}{k'-1}} = a_i^{\frac{1}{k'-1}} \mu = \mu a_i^{k-1},$$

从而有

$$\mu \sum_{i=1}^{m+1} a_i a_i^{k-1} = \mu \sum_{i=1}^{m+1} a_i^k = \mu a = A,$$

$$\mu = \frac{A}{a}.$$

于是，解得满足极值必要条件的唯一解

$$x_i^0 = \frac{A}{a} a_i^{k-1} \quad (i=1, 2, \dots, m+1).$$

对应的函数值为

$$\begin{aligned} u_0 &= u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m+1}^0) = \alpha^{\frac{1}{k}} \left[\sum_{i=1}^{m+1} \left(\frac{A}{a} a_i^{k-1} \right)^{k'} \right]^{\frac{1}{k'}} \\ &= \alpha^{\frac{1}{k}} \frac{A}{a} \left[\sum_{i=1}^{m+1} a_i^{(k-1)k'} \right]^{\frac{1}{k'}} = \alpha^{\frac{1}{k}-1} A \left(\sum_{i=1}^{m+1} a_i^k \right)^{\frac{1}{k'}} \\ &= A \alpha^{\frac{1}{k}-1} \alpha^{\frac{1}{k'}} = A. \end{aligned}$$

所研究的区域 $\sum_{i=1}^{m+1} a_i x_i = A, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, m+1)$

是 $m+1$ 维空间中一个 m 维平面在第一卦限的部份，其边界由 $m+1$ 个 $m-1$ 维平面(之一部分)所组成：

$x_i = 0, \sum_{j=1}^{m+1} a_j x_j = A (a_j \geq 0, x_j \geq 0; j=1, 2, \dots,$

$m+1)$ 。在这些边界面上，求

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) \\ &= u(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_{m+1}) \\ &= \alpha^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j^{k'} + \sum_{j=i+1}^{m+1} x_j^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \end{aligned}$$

的最小值变为求 m 个变量的最小值。以估计 $x_{m+1} = 0$,

$\sum_{i=1}^m a_i x_i = A$ 的最小值为例。根据归纳法假设，注意到

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m+1} a_i^k \geq \sum_{i=1}^m a_i^k, \text{ 即有}$$

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, \dots, x_m, 0) &= \alpha^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^m x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^m a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left(\sum_{i=1}^m x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \geq \sum_{i=1}^m a_i x_i = A. \end{aligned}$$

因此， u 在边界面上的最小值不小于 A 。由此可知， u 在区域上的最小值为 $u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{m+1}^0) = A$ ，故命题当 $n = m+1$ 时为真。于是，由归纳法可知

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \geq A,$$

当 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A, x_i \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$ 时。(1)

下面我们证明和尔塞不等式

$$\sum_{i=1}^n a_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \quad (a_i \geq 0, x_i \geq 0) \quad (2)$$

成立. 事实上, 若 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$, 则(2)式显然成立;

若 $\sum_{i=1}^n a_i x_i > 0$, 令 $\sum_{i=1}^n a_i x_i = A$, 则 $A > 0$. 于是, 根

$$\text{据不等式(1)知} \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right)^{\frac{1}{k}} \left(\sum_{i=1}^n x_i^{k'} \right)^{\frac{1}{k'}} \geq A = \sum_{i=1}^n a_i x_i,$$

故不等式(2)成立. 证毕.

注. 和尔塞(Hölder)不等式是一个重要而常用的不等式, 而且还可推广到一般的形式, 证明方法也很多. 例如, 可参看 G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya 合著的名著 "Inequalities" (Second Edition, 1952), Chapter I, 2.7-2.8.

3674. 对于 n 阶行列式 $A = |a_{ij}|$ 证明哈达马不等式

$$A^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right).$$

证 证法一

为区别起见, 以下用 A 表矩阵 (a_{ij}) , $|A|$ 表行列式 $|a_{ij}|$. 考虑函数 $u = |A| = |a_{ij}|$ 在条件 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 下的极值问题. 其中 $S_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

由于上述 n 个条件限制下的 n^2 元点集是有界闭集, 故连续函数 u 必在其上取得最大值和最小值. 下面我们求函数 u 满足条件极值的必要条件. 设

$$F = u - \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - S_i \right).$$

由于函数 u 是多项式. 当按第 i 行展开时, 有

$$u = |A| = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} - 2\lambda_i a_{ij} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

得 $a_{ij} = \frac{A_{ij}}{2\lambda_i}$. 当 $i \neq k$ 时, 有

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij} a_{kj}}{2\lambda_i} = \frac{1}{2\lambda_i} \sum_{j=1}^n A_{ij} a_{kj} = 0,$$

故当函数 u 满足极值的必要条件时, 行列式不同的两行所对应的向量必直交. 若以 A' 表示 A 的转置矩阵, 则由行列式的乘法得

$$u^2 = |A'| \cdot |A| = \begin{vmatrix} S_1 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n S_i.$$

因此, 函数 u 满足极值的必要条件时, 必有

$$u = \pm \sqrt{\prod_{i=1}^n S_i}.$$

由于显然函数 u 在条件 $\sum_{i=1}^n a_{ij}^2 = S_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 下不恒为常数, 故

$$u_{max} = \sqrt{\prod_{i=1}^n S_i}, \quad u_{min} = -\sqrt{\prod_{i=1}^n S_i}.$$

从而

$$|A|^2 \leq \prod_{i=1}^n S_i,$$

$$\text{当 } \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = S_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \text{ 时,} \quad (1)$$

下面我们证明

$$|A|^2 \leq \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right). \quad (2)$$

若至少有一个 i , 使 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 0$, 则 $a_{ij} = 0$ ($j=1, 2, \dots, n$). 从而 $|A| = 0$, 于是不等式(2)显然成立.

若对一切 i ($i=1, 2, \dots, n$), 都有 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \neq 0$. 令

$S_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}^2$, 则 $S_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$). 于是, 根据不等式(1)即得

$$|A|^2 \leq \prod_{i=1}^n S_i = \prod_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right),$$

故不等式(2)成立. 证毕.

证法二

如将原题归一化, 则也可获证. 设

$$\bar{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (i, j=1, 2, \dots, n),$$

则有

$$\sum_{j=1}^n \bar{a}_{ij}^2 = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

从而原命题就可转化为证明不等式

$$|A| \leq 1,$$

其中 $\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 = 1 (i=1, 2, \dots, n)$, $A = (a_{ij})$, $|A| = |a_{ij}|$.

设 $F = |A| + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}^2 - 1 \right)$. 解方程组

$$\frac{\partial F}{\partial a_{ij}} = A_{ij} + 2\lambda_i a_{ij} = 0,$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式 ($i, j=1, 2, \dots, n$). 于上式两端乘以 a_{ij} , 并对 $j=1, 2, \dots, n$ 求和, 即得

$$|A| + 2\lambda_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

从而有

$$\lambda_i = -\frac{|A|}{2} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

也即

$$A_{ij} = a_{ij} |A| \quad (i, j=1, 2, \dots, n),$$

故得

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}|A| & \dots & a_{1n}|A| \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}|A| & \dots & a_{nn}|A| \end{vmatrix},$$

上式左端的行列式叫做 $|A|$ 的附属行列式, 记为 $|A^*|$. 由线性代数知识可知, 当 $|A|=0$ 时, $|A^*|=0$. 当 $|A|$

$$\neq 0 \text{ 时, } |A||A^*| = \begin{vmatrix} |A| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |A| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |A| \end{vmatrix} = |A|^n, \text{ 故有}$$

$|A^*| = |A|^{n-1}$. 于是,

$$|A|^{n-1} = |A|^{n+1}.$$

由于 $|A|$ 的极值必须满足上式, 故不难推知 $|A|_{\max} =$

1, $|A|_{\min} = -1$. 从而得知, 当 $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ ($i=1,$

2, ..., n) 时, 恒有

$$|A|^2 \leq 1 \text{ 或 } |A| \leq 1.$$

求下列函数在指定域内的上确界(sup)和下确界(inf):

3675. $z = x - 2y - 3$, 若 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$.

解 以 D 表区域 $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq x + y \leq 1$, 它是一个有界闭区域(为一闭三角形), 故连续函数 z 在其上必有最大值和最小值. 由于 z 是 x, y 的线性函数, 故不存在静止点, 因此, 最大值与最小值都在 D 的边界上达到. D 的边界为三条直线段: $y = 0$ ($0 \leq x \leq 1$), $x = 0$ ($0 \leq y \leq 1$), $x + y = 1$ ($0 \leq x \leq 1$); 在其上 z 分别变成一元函数: $z = x - 3$ ($0 \leq x \leq 1$), $z = -2y - 3$ ($0 \leq y \leq 1$), $z = 3x - 5$ ($0 \leq x \leq 1$). 由于这些函数都是一元线性函数, 故也无静止点, 其最大值与最小值必在此三线段的端点(即点 $(0, 0)$, 点 $(1, 0)$, 点 $(0, 1)$)达到. 由此可知, z 在 D 上的最大值与最小值必在此三点 $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ 中达到.

由于

$$z(0, 0) = -3, \quad z(1, 0) = -2, \quad z(0, 1) = -5,$$

故

$$\sup z = -2, \quad \inf z = -5.$$

3676. $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y$, 若 $x^2 + y^2 \leq 25$.

解 考虑函数 z 在区域 $x^2 + y^2 < 25$ 内的静止点:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 12 = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + 16 = 0. \end{cases}$$

在区域内无解, 故连续函数 z 的最大值与最小值必在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上达到.

考虑函数 z 在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上的条件极值. 设 $F(x, y) = z - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 12 - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y + 16 - 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

可得静止点 $P_1(3, -4)$ 及 $P_2(-3, 4)$. 由于

$$z(3, -4) = -75, \quad z(-3, 4) = 125,$$

故得

$$\sup z = 125, \quad \inf z = -75.$$

3677. $z = x^2 - xy + y^2$, 若 $|x| + |y| \leq 1$.

解 求函数 z 在区域 $|x| + |y| < 1$ 内的静止点:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - x = 0, \end{cases}$$

解得静止点 $P_0(0, 0)$. 相应地, $z(P_0) = 0$.

再在边界: $x \geq 0, y \geq 0, x+y=1$ 上求静止点. 设 $F_1 = x^2 - xy + y^2 - \lambda(x+y-1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x - y - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y - x - \lambda = 0, \\ x + y = 1 \end{cases}$$

得静止点 $P_1(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. 相应地, $z(P_1) = \frac{1}{4}$.

同法可在另外三条边界线: $x \geq 0, y \leq 0, x - y = 1$ 上; $x \leq 0, y \geq 0, x - y = -1$ 上; $x \leq 0, y \leq 0, x + y = -1$ 上分别求得静止点 $P_2(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $P_3(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 及 $P_4(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. 相应地, $z(P_2) = z(P_3) = \frac{3}{4}, z(P_4) = \frac{1}{4}$.

最后, 在上述四条边界线的端点 $P_5(1, 0), P_6(0, 1), P_7(-1, 0)$ 及 $P_8(0, -1)$ 上求得函数值:

$$z(P_5) = z(P_6) = z(P_7) = z(P_8) = 1.$$

比较 $z(P_i)$ ($i=0, 1, 2, \dots, 8$), 即得

$$\sup z = 1, \quad \inf z = 0.$$

3678. $u = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, 若 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 100$.

解 容易求得函数 u 在区域 $x^2 + y^2 + z^2 < 100$ 内的静止点为 $P_0(0, 0, 0)$, 而在边界 $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ 上的静止点为 $P_1(10, 0, 0), P_2(-10, 0, 0), P_3(0, 10, 0),$

$P_4(0, -10, 0)$, $P_5(0, 0, 10)$ 及 $P_6(0, 0, -10)$. 相应地, $u(P_0) = 0$, $u(P_1) = u(P_2) = 100$, $u(P_3) = u(P_4) = 200$, $u(P_5) = u(P_6) = 300$. 于是,

$$\sup u = 300, \quad \inf u = 0.$$

3679. $u = x + y + z$, 若 $x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.

解 所讨论的立体区域由曲面 $x^2 + y^2 = z$ ($0 \leq z \leq 1$) 和平面 $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ 所围成, 两个曲面的交线为 $x^2 + y^2 = z = 1$.

显见在立体区域内部无静止点. 在边界面 $z = 1$, $x^2 + y^2 \leq 1$ 的内部, $u(x, y, 1) = x + y + 1$ 也无静止点. 在边界面 $x^2 + y^2 = z$ ($0 \leq z \leq 1$) 上, 有

$$u = x + y + x^2 + y^2 \quad (x^2 + y^2 \leq 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 1 + 2x = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + 2y = 0 \end{cases}$$

得静止点 $P_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. 相应地, $u(P_1) = -\frac{1}{2}$.

在边界线 $x^2 + y^2 = z = 1$ 上, 设

$$F(x, y) = x + y + 1 + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

得静止点 $P_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ 及 $P_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. 相应地, $u(P_2)=1+\sqrt{2}$, $u(P_3)=1-\sqrt{2}$. 于是,

$$\sup u = 1 + \sqrt{2}, \inf u = -\frac{1}{2}.$$

3680. 求函数

$$u = (x + y + z)e^{-(x+2y+3z)}$$

在域 $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ 内的下确界 (inf) 与上确界 (sup).

解 函数 u 在区域 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 上是连续函数, 因此, 把区域扩大包括边界时, 上、下确界不变, 下面就扩大后的区域加以讨论.

显然当 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ 时 $u \geq 0$, 且 $u(0, 0, 0) = 0$, 故 $\inf u = 0$.

在区域内部, 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-(x+2y+3z)} [1 - (x+y+z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-(x+2y+3z)} [1 - 2(x+y+z)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{-(x+2y+3z)} [1 - 3(x+y+z)],$$

而 $e^{-(x+2y+3z)} \neq 0$, 故函数 u 在域内无静止点.

又因

$$\begin{aligned} u &= (x+y+z)e^{-(x+2y+3z)} = (x+y+z)e^{-(x+y+z)} \\ &\cdot e^{-(y+2z)} \leq (x+y+z)e^{-(x+y+z)} \rightarrow 0 \quad [(x+y+z) \rightarrow \\ &+\infty], \end{aligned}$$

故函数 u 的最大值必在有限的边界上达到. 考虑界面:

$$x=0; u(0, y, z) = (y+z)e^{-(2y+3z)}, y \geq 0, z \geq 0.$$

$$y=0; u(x, 0, z) = (x+z)e^{-(x+3z)}, x \geq 0, z \geq 0.$$

$$z=0; u(x, y, 0) = (x+y)e^{-(x+2y)}, x \geq 0, y \geq 0.$$

同样可证明, 这些界面上无静止点.

最后考虑边界线: $x=0, y=0, z \geq 0,$

$$u(0, 0, z) = ze^{-3z}$$

可解得静止点 $P_1(0, 0, \frac{1}{3})$. 相应地, $u(P_1) = \frac{1}{3}e^{-1}$.

同法在边界线: $x=0, z=0, y \geq 0$ 上可解得静止

点 $P_2(0, \frac{1}{2}, 0)$; 在边界线: $y=0, z=0, x \geq 0$

上可解得静止点 $P_3(1, 0, 0)$. 相应地, $u(P_2) = \frac{1}{2}e^{-1}$,

$u(P_3) = e^{-1}$. 至于边界线的一端为原点, 另一端伸向无穷远, 均已讨论过. 于是,

$$\sup u = e^{-1}.$$

3681. 证明: 函数 $z = (1+e^y)\cos x - ye^y$ 有无穷多个极大值而无一极小值.

证 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = -(1+e^y)\sin x = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial y} = e^y(\cos x - 1 - y) = 0 \end{cases}$$

得 $x = k\pi, y = (-1)^k - 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

由于

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -(1+e^y)\cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -e^y \sin x,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^y(\cos x - 2 - y),$$

故在点 $(2m\pi, 0)$ ($m=0, \pm 1, \dots$), $A=-2, B=0, C=-1$ 及 $AC-B^2=2 > 0$, 此时函数 z 取得极大值; 而在点 $((2m+1)\pi, -2)$ ($m=0, \pm 1, \dots$), $A=1+e^{-2}, B=0, C=-e^{-2}$ 及 $AC-B^2=-e^{-2}-e^{-4} < 0$, 此时函数 z 无极值.

3682. 函数 $f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 有极小值的充分条件是否为此函数在沿着过 M_0 点的每一条直线上有极小值呢?

解 研究函数

$$f(x, y) = (x - y^2)(2x - y^2).$$

对于每一条通过原点的直线: $y=kx$ ($-\infty < x < +\infty$) 均有

$$\begin{aligned} f(x, kx) &= (x - k^2x^2)(2x - k^2x^2) \\ &= x^2(1 - k^2x)(2 - k^2x), \end{aligned}$$

当 $0 < |x| < \frac{1}{k^2}$ 时, $f(x, kx) > 0$. 但是 $f(0, 0) = 0$, 因此, 函数 $f(x, y)$ 在直线 $y=kx$ 上在原点取得极小值零.

对于通过原点的另一条直线: $x=0$, 有 $f(0, y) = y^4$, 故在原点也取得极小值零.

因此, 函数 $f(x, y)$ 在一切通过原点的直线上均有极小值. 但是,

$$f(a, \sqrt{1.5a}) = -0.25a^2 < 0 \quad (a > 0),$$

因此, 函数 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 点不取得极小值.

此例说明: 尽管 $f(x, y)$ 在沿着过点 M_0 的每一条直线上在 M_0 均有极小值, 但却不能保证 $f(x, y)$ 作为二元函数在点 M_0 一定有极小值.

3683. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的倒数的和为最小.

解 按题设, 我们应求函数 $u = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$ 在条件 $a = \prod_{i=1}^n x_i$

或 $\ln a = \sum_{i=1}^n \ln x_i$ ($a > 0, x_i > 0$) 下的极值. 设 $F(x_1,$

$x_2, \dots, x_n) = u + \lambda \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i - \ln a \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = -\frac{1}{x_i^2} + \frac{\lambda}{x_i} = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ a = \prod_{i=1}^n x_i \end{cases}$$

可得 $x_i = \frac{1}{\lambda}$ ($i=1, 2, \dots, n$). 从而解得

$$x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_n^0 = a^{\frac{1}{n}}, u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = na^{-\frac{1}{n}}.$$

当点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 趋向于边界时, 至少有一个 $x_i \rightarrow 0$, 即 $\frac{1}{x_i} \rightarrow +\infty$, 而 $u > \frac{1}{x_i}$, 故 $u \rightarrow +\infty$.

因此, 函数 u 必在区域内部取得最小值. 于是, 将正数 a 分为 n 个相等的正的因数 $a^{\frac{1}{n}}$ 时, 其倒数和 $na^{-\frac{1}{n}}$ 最小.

3684. 分解已知正数 a 为 n 个相加数, 使得它们的平方和为最小.

解 考虑函数 $u = \sum_{i=1}^n x_i^2$ 在条件 $a = \sum_{i=1}^n x_i$ ($a > 0$) 下的极值. 设 $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = u + \lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i - a \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = 2x_i + \lambda = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \\ \sum_{i=1}^n x_i = a \end{cases}$$

得 $x_1^0 = x_2^0 = \dots = x_n^0 = \frac{a}{n}$, $u(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \frac{a^2}{n}$.

当 n 个相加数中有若干个相加数 $\rightarrow \pm \infty$ 时, 平方和 $\rightarrow +\infty$. 因此, 函数 u 必在有限区域内取得最小值. 于是, 将正数 a 分解为 n 个相等的相加数 $\frac{a}{n}$ 时, 其平方和 $\frac{a^2}{n}$ 最小.

3685. 分解已知正数 a 为 n 个正的因数, 使得它们的已知正乘幂的和为最小.

解 考虑函数 $u = \sum_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ ($\alpha_i > 0$) 在条件 $\ln a = \sum_{i=1}^n \ln x_i$ ($a > 0, x_i > 0$) 下的极值. 设 $F = u - \lambda \left(\sum_{i=1}^n \ln x_i - \ln a \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \alpha_i x_i^{\alpha_i - 1} - \frac{\lambda}{x_i} = 0 & (i=1, 2, \dots, n), \quad (1) \\ \sum_{i=1}^n \ln x_i = \ln a. & (2) \end{cases}$$

由 (1) 得 $x_i = \left(\frac{\lambda}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{\alpha_i}}$. 代入 (2), 得

$$\ln a + \sum_{i=1}^n \frac{\ln \alpha_i}{\alpha_i} = \ln \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}.$$

令 $\beta = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}$, 则有

$$\lambda = a^{\frac{1}{\beta}} \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\beta \alpha_i}} = \left(a \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\beta}},$$

$$x_i^0 = \frac{\left(a \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\beta}} \frac{1}{\alpha_i}}{\frac{1}{\alpha_i}} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

$$u = \sum_{i=1}^n \frac{\lambda}{\alpha_i} = \beta \lambda = \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i} \right) \left(a \prod_{i=1}^n \alpha_i^{\frac{1}{\alpha_i}} \right)^{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\alpha_i}}}.$$

显然, 函数 u 在区域内部达到最小值. 于是, 所求得的 u 即为最小值.

3686. 已知在平面上的 n 个质点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, \dots , $P_n(x_n, y_n)$, 其质量分别为 m_1, m_2, \dots, m_n .

$P(x, y)$ 点在怎样的位置, 这一体系对于此点的转动惯量为最小?

解 设 $f(x, y) = \sum_{i=1}^n m_i [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]$. 解方

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \sum_{i=1}^n m_i (x - x_i) = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \sum_{i=1}^n m_i (y - y_i) = 0 \end{cases}$$

得

$$x_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_0 = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

其中 $M = \sum_{i=1}^n m_i$.

当 $x \rightarrow \infty$ 或 $y \rightarrow \infty$ 时, 显然 $f \rightarrow +\infty$. 因此, 点 $P(x_0, y_0)$ 即为所求.

3687. 已知容积为 V 的开顶长方浴盆, 当其尺寸怎样时, 有最小的表面积?

解 设浴盆长、宽、高分别为 x 、 y 、 h , 则考虑函数 $S = 2(x+y)h + xy$ 在条件 $V = xyh$ ($x > 0$, $y > 0$, $h > 0$) 下的极值.

设 $F(x, y, h) = S - \lambda(xyh - V)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y + 2h - \lambda y h = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2h - \lambda x h = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial h} = 2(x+y) - \lambda xy = 0, & (3) \\ xyh = V. \end{cases}$$

(1), (2), (3) 可改写为

$$\frac{1}{h} + \frac{2}{y} = \lambda = \frac{1}{h} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x} + \frac{2}{y},$$

故有

$$x_0 = y_0 = 2h_0 = \sqrt[3]{2V}, \quad h_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}.$$

从实际问题的常识可以断定,一定在某一处达到最小.

因此,当长宽均为 $\sqrt[3]{2V}$,高为 $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ 时,浴盆的表面积最小,且最小表面积为 $S = 3\sqrt[3]{4V^2}$.

从数学上来考虑,应讨论 x, y, h 趋于边界的情况.当 x, y, h 中有任一个趋于零,例如, $h \rightarrow +0$,则由 $V = xyh$ 即可断定 $xy \rightarrow +\infty$.但是, $S > xy$,故 $S \rightarrow +\infty$.当 x, y, h 中有任一个趋于 $+\infty$ 时,一定引起至少有另一个趋于零.重复上面的讨论可知 $S \rightarrow +\infty$.因此,连续函数 S 必在区域内部取得最小值.

3688. 横断面为半圆形的圆柱形的张口浴盆,其表面积等于 S ,当其尺寸怎样时,此盆有最大的容积?

解 设圆柱半径为 r ,高为 h ,则考虑函数 $V = \frac{1}{2}\pi r^2 h$ 在条件 $S = \pi(r^2 + rh)$ ($r > 0, h > 0$)下的极值.为简单起见,忽略系数 $\frac{1}{2}\pi$.设 $F = r^2 h - \lambda(r^2 + rh - \frac{S}{\pi})$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial r} = 2rh - \lambda(2r + h) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial h} = r^2 - \lambda r = 0, \\ r^2 + rh = \frac{S}{\pi} \end{cases}$$

得

$$r_0 = \sqrt{\frac{S}{3\pi}}, \quad h_0 = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}},$$

$$\text{从而有 } V_0 = \frac{1}{2} \pi r_0^2 h_0 = \sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}.$$

由实际情况知, V 一定达到最大体积. 因此, 当 $h_0 = 2r_0 = 2\sqrt{\frac{S}{3\pi}}$ 时, 体积 $V_0 = \sqrt{\frac{S^3}{27\pi^3}}$ 最大.

从数学角度看, 由 $r^2 + rh = \frac{S}{\pi}$ 知 r^2 和 rh 恒有界.

当 $r \rightarrow +0$ 或 $h \rightarrow +0$ 时必有 $V \rightarrow 0$. 当 $h \rightarrow +\infty$ 时, 由 rh 有界可推出 $r \rightarrow +0$. 因而 $V \rightarrow 0$ (显然不可能 $r \rightarrow +\infty$). 于是, 体积 V 必在区域内部达到最大值.

3689. 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上求出一点, 这点到 n 个已知点 $M_i(x_i, y_i, z_i) (i=1, 2, \dots, n)$ 距离的平方和为最小.

解 考虑函数 $u = \sum_{i=1}^n [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2]$ 在条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下的极值. 设 $F(x, y, z) = u - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2 \left[\sum_{i=1}^n (x-x_i) - \lambda x \right] = 2 \left[(n-\lambda)x - \sum_{i=1}^n x_i \right] = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2 \left[(n-\lambda)y - \sum_{i=1}^n y_i \right] = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2 \left[(n-\lambda)z - \sum_{i=1}^n z_i \right] = 0, & (3) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. & (4) \end{cases}$$

由 (1), (2), (3) 得

$$x = \frac{1}{n-\lambda} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y = \frac{1}{n-\lambda} \sum_{i=1}^n y_i, \quad z = \frac{1}{n-\lambda} \sum_{i=1}^n z_i,$$

代入 (4), 得

$$(n-\lambda)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2 = N^2$$

($N > 0$). 于是, 得

$$x' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i, \quad z' = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i$$

及

$$x'' = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i, \quad y'' = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n y_i, \quad z'' = -\frac{1}{N} \sum_{i=1}^n z_i.$$

从而,

$$\begin{aligned} u(x', y', z') &= \sum_{i=1}^n \left[(x' - x_i)^2 + (y' - y_i)^2 + (z' - z_i)^2 \right] \\ &= n(x'^2 + y'^2 + z'^2) - 2x' \sum_{i=1}^n x_i - 2y' \sum_{i=1}^n y_i \\ &\quad - 2z' \sum_{i=1}^n z_i + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &= n - \frac{2}{N} \left[\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n z_i \right)^2 \right] \\ &\quad + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &= n - 2N + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2). \end{aligned}$$

同法可求得

$$\begin{aligned} u(x'', y'', z'') &= n + 2N + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \\ &\geq u(x', y', z'). \end{aligned}$$

由于函数 u 在闭球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上连续，故必取得最大值及最小值。于是，当 $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$ 时， u 最小（同时也证明了当 $x = x''$, $y = y''$, $z = z''$ 时， u 最大）。

3690. 由直圆柱及以直圆锥作顶构成一个体。当已知体的全表面积等于 Q 时，求它的尺寸大小，使得体的体积为最大。

解 设圆柱部分的底半径为 R ，高为 h ；圆锥部分的母线与底面的夹角为 α ，则有 $\pi R^2 + 2\pi Rh + \frac{\pi R^2}{\cos \alpha} = Q$ （常数）（ $R > 0$, $h > 0$, $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ ）。考虑函数 $V(\alpha, h, R) = \pi R^2 h + \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg} \alpha$ 在上述条件下的极值。设

$$F(\alpha, h, R) = 3R^2 h + R^3 \operatorname{tg} \alpha - \lambda \left(R^2 + 2Rh + \frac{R^2}{\cos \alpha} - \frac{Q}{\pi} \right).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{R^3}{\cos^2 \alpha} - \frac{\lambda R^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial h} = 3R^2 - 2R\lambda = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial R} = 6Rh + 3R^2 \operatorname{tg} \alpha - \left(2R + 2h + \frac{2R}{\cos \alpha} \right) \lambda = 0, & (3) \\ R^2 + 2Rh + \frac{R^2}{\cos \alpha} = \frac{Q}{\pi}. & (4) \end{cases}$$

由(2)得 $\lambda = \frac{3}{2}R$. 代入(1), 得 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. 由于 $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$, 故由 $\sin\alpha = \frac{2}{3}$ 得 $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. 代入(3), 得

$$6Rh + \frac{6}{\sqrt{5}}R^2 = 3R^2 + 3Rh + \frac{9}{\sqrt{5}}R^2,$$

即

$$Rh = R^2 + \frac{R^2}{\sqrt{5}} \text{ 或 } h = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)R.$$

代入(4), 得

$$R^2 + \left(2 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)R^2 + \frac{3}{\sqrt{5}}R^2 = \frac{Q}{\pi}.$$

于是,

$$R = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4} \sqrt{\frac{Q}{\pi}}.$$

相应地, 有

$$\begin{aligned} V_0 &= \pi R^2 h + \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^3 \\ &= \left(1 + \frac{5}{3\sqrt{5}}\right)\pi R^2 \cdot R = \frac{3 + \sqrt{5}}{3} \pi \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{4} \frac{Q}{\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4} \sqrt{\frac{Q}{\pi}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}. \end{aligned}$$

现在讨论边界情况. 由(4)知 R^2 , Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$

均为正的有界量.

(i) 当 $R \rightarrow +0$ 时, 由 Rh 及 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知

$$V = \pi(Rh)R + \frac{\pi}{3}\left(\frac{R^2}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha \cdot R \rightarrow 0.$$

(ii) 当 $h \rightarrow +0$ (所研究的体退化为圆锥) 时, 需要求当圆锥全表面积 $\pi R^2 + \frac{\pi R^2}{\cos\alpha} = Q$ (常数) 时圆锥体积 $V = \frac{1}{3}\pi R^3 \operatorname{tg}\alpha$ 的最大值. 用 l 表圆锥的斜

$$\text{高, 即 } l = \frac{R}{\cos\alpha}, R \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{R^2}{\cos^2\alpha} - R^2} = \sqrt{l^2 - R^2}.$$

于是, $l = \frac{Q - \pi R^2}{\pi R}$, $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \sqrt{l^2 - R^2}$, 故

$$V^2 = \frac{1}{9} QR^2(Q - 2\pi R^2) \quad (0 < R < \sqrt{\frac{Q}{\pi}}).$$

由此易知 V^2 (从而 V) 当 $R^2 = \frac{Q}{4\pi}$ (即 $R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Q}{\pi}}$) 时达最大值, 并且最大体积 $V_1 = \frac{1}{6\sqrt{2}}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}$.

不难验证 $V_1 < V_0$.

(iii) 当 $h \rightarrow +\infty$ 时, 由 Rh 有界知 $R \rightarrow +0$. 由(i)知 $V \rightarrow 0$.

(iv) 当 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 时, 由 $\frac{R^2}{\cos\alpha}$ 有界可知 $R \rightarrow +0$, 由(i)知 $V \rightarrow 0$.

(v) 当 $\alpha \rightarrow +0$ (所研究的体退化为圆柱) 时, 可以求得达到最大体积的尺寸为 $h = 2R$ 及 $Q = \sqrt[3]{54\pi}V_2^{\frac{2}{3}}$ (参看 1563 题), 即

$$V_2 = \sqrt{\frac{Q^3}{54\pi}} = \frac{\sqrt{6}}{18}\sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

不难证明 $V_2 \leq V_0$.

综上所述, 我们得到当 $R = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4} \sqrt{\frac{Q}{\pi}}$,
 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$ 时, 所研究的体积 V 达到最大值

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{12} \sqrt{\frac{Q^3}{\pi}}.$$

3691. 一个体, 其体积等于 V , 形为直角平行直六面体, 上底及下底为正的四面锥. 当角锥的侧面对它们的底成怎样的倾角, 体的全表面积为最小?

解 设长方体两底(正方形)边长为 a , 高为 h , 棱锥侧面与底面的夹角为 α , 则 $V = a^2 h + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha$. 考虑函数 $S = 4ah + \frac{2a^2}{\cos \alpha}$ 在上述条件下的极值. 设 $F =$

$S - \lambda \left(a^2 h + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha - V \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 4h + \frac{4a}{\cos \alpha} - 2\lambda a h - \lambda a^2 \operatorname{tg} \alpha = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial h} = 4a - \lambda a^2 = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{2a^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - \frac{\lambda a^3}{3 \cos^2 \alpha} = 0, & (3) \\ a^2 h + \frac{1}{3} a^3 \operatorname{tg} \alpha = V. & (4) \end{cases}$$

由(2), (3)可得 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$. 同3690题进一步可求出 a 和 h .

类似3687题的讨论, 当 $a \rightarrow +0$, $a \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow +\infty$, $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 等情况均能证明 $S \rightarrow +\infty$. 对于边

界为 $\alpha = 0$ 及 $h = 0$ 这两种退化情况，类似 3690 题，可证明此时的全表面积比 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$ 时的全表面积为大。于是，当 $\alpha = \arcsin \frac{2}{3}$ 时，体的全表面积最小。

3692. 已知矩形的周长为 $2p$ ，将它绕其一边旋转而构成一体积，求所得体积为最大的那个矩形。

解 设矩形的边长为 x 及 y ，则考虑函数 $V = \pi y^2 x$ 在条件 $x + y = p$ 下的极值。设 $F = V - \lambda(x + y - p)$ 。解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \pi y^2 - \lambda = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2\pi xy - \lambda = 0, \\ x + y = p \end{cases}$$

得 $x = \frac{p}{3}$ ， $y = \frac{2p}{3}$ 。

由于在边界上，一边为零，一边为 p ，推出 $V = 0$ 。

于是，当矩形的两边分别为 $\frac{p}{3}$ 及 $\frac{2p}{3}$ 时，旋转体的体积最大。

3693. 已知三角形的周长为 $2p$ ，求出这样的三角形，当它绕着自己的一边旋转所构成的体积最大。

解 如图 6.43 所示，以 AC 为轴旋转，取参数：高 h 及二角 α, β 。考虑函数

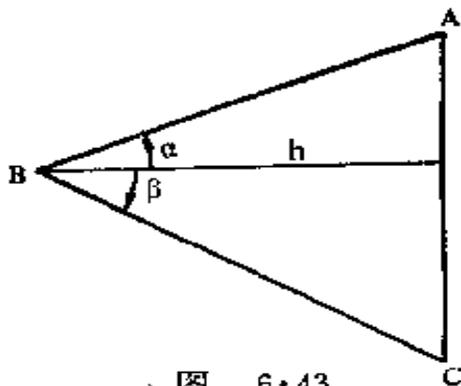


图 6.43

$$V = \frac{1}{3} \pi h^3 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)$$

在条件 $\frac{h}{\cos \alpha} + \frac{h}{\cos \beta} + h(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) = 2p$ 下的极值. 为

计算简单起见, 略去常数 $\frac{1}{3} \pi$. 设 $F = h^3 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \lambda \left(\frac{h}{\cos \alpha} + \frac{h}{\cos \beta} + h \operatorname{tg} \alpha + h \operatorname{tg} \beta - 2p \right)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = 3h^2 (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) - \lambda \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \right) = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{h^3}{\cos^2 \alpha} - \lambda h \left(\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\cos^2 \alpha} \right) = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{h^3}{\cos^2 \beta} - \lambda h \left(\frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{\cos^2 \beta} \right) = 0, & (3) \\ h \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{\cos \beta} + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta \right) = 2p. & (4) \end{cases}$$

由 (2) 及 (3) 得 $\alpha = \beta$ 及 $\lambda = \frac{h^2}{1 + \sin \alpha} = \frac{h^2}{1 + \sin \beta}$.

代入 (1) 式, 得 $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{1}{3}$. 于是, $h \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{3 \cos \alpha}$, 代入 (4) 式, 即得 $\frac{h}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} p$. 从而, 得三边分别为

$$AB = BC = \frac{3}{4} p, \quad AC = 2h \operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{2}.$$

讨论边界情况. 当 $h \rightarrow +0$ 或 $h \rightarrow p$ 时, 显然有

$V \rightarrow 0$. 对于二角 α 及 β 必有大小限制: $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$,
 $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$ (注意 α, β 的方向规定不同), 当 $\alpha \rightarrow +0$
 或 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 或 $\beta \rightarrow -\alpha$ 时, 同样均有 $V \rightarrow 0$. 于是,
 当三角形的三边长分别为 $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ 及 $\frac{3p}{4}$, 并绕长为 $\frac{p}{2}$
 的边旋转时, 所得的体积最大.

3694. 在半径为 R 的半球内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设此长方体的一个底面与半球所在的底面重合, 另外四个顶点在半球球面上, 且半球面在直角坐标系下的方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0.$$

又设长方体的长、宽、高分别为 $2x$ 、 $2y$ 及 z ($x > 0$,
 $y > 0, z > 0$). 考虑函数 $V = 4xyz$ 在上述条件下的极值. 设 $F = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - R^2)$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda x = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda y = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$$

可得 $x = y = z = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

由于在边界上(即 $x \rightarrow +0$ 或 $y \rightarrow +0$ 或 $z \rightarrow +0$ 时)显然 $V \rightarrow 0$, 故当直角平行六面体的长、宽、高为 $\frac{2R}{\sqrt{3}}$, $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ 及 $\frac{R}{\sqrt{3}}$ 时, 其体积最大.

3695. 在已知的直圆锥内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 不妨设直圆锥的底面半径为 R , 高为 H , 且长方体的一个面与直圆锥的底面重合, 两个边长为 $2x$ 和 $2y$, 四个顶点在直圆锥面上, 高为 z . 过直圆锥的高和长方体底面的对角

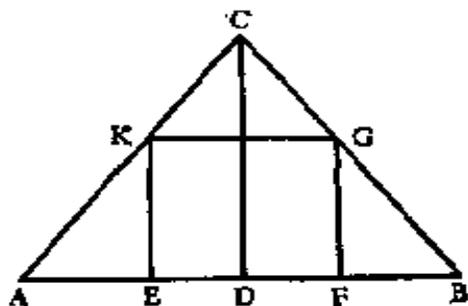


图 6.44

线作一截面, 如图6.44所示, 则 $CD=H$, $EK=FG=z$, $AD=R$, $DE=\sqrt{x^2+y^2}$, $(H-z)R=H \cdot \sqrt{x^2+y^2}$ (R 、 H 为常数). 考虑函数 $V=4xyz$ 在上述条件下的极值 ($x>0$, $y>0$, $z>0$). 为计算简单计, 略去常数4. 设

$$F = xyz - \lambda[H\sqrt{x^2+y^2} - (H-z)R].$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz - \frac{\lambda H x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = xz - \frac{\lambda H y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = xy - \lambda R = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (H-z)R = H\sqrt{x^2+y^2}. & (4) \end{cases}$$

由(1)、(2)得 $x=y$, 代入(3), 得 $x=y=\sqrt{\lambda R}$.

又由(1)可得 $z = \frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}}$. 将 x, y, z 代入(4)得

$$H - \frac{\lambda H}{\sqrt{2\lambda R}} = \frac{H}{R} \sqrt{2\lambda R},$$

解之得 $\lambda = \frac{2}{9}R$, 从而有

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{3}R, z = \frac{1}{3}H; V = \frac{\sqrt{2}}{36} R^2 H.$$

显然, 在所论区域的边界上 (即 $x \rightarrow +0$ 或 $y \rightarrow +0$ 或 $z \rightarrow +0$ 时), 有 $V \rightarrow 0$, 故当直角平行六面体的高等于 $\frac{1}{3}$ 圆锥的高时, 其体积最大.

3696. 在椭球

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

内嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 此直角平行六面体的对称中心为原点. 设其一个顶点为 (x, y, z) , 则按题意, 我们应考虑函数 $V =$

$8xyz$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ($x > 0, y > 0,$

$z > 0$) 下的极值. 为计算简单计, 略去常数 8. 设 F

$= xyz - \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right)$. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz - 2\lambda \cdot \frac{x}{a^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz - 2\lambda \cdot \frac{y}{b^2} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy - 2\lambda \cdot \frac{z}{c^2} = 0, \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

得 $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$, $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$, 这时 $V = \frac{8}{3\sqrt{3}} \cdot abc > 0$.

现在讨论边界情况. 当 $x \rightarrow a - 0$, $y \rightarrow b - 0$, $z \rightarrow c - 0$ 中有任一个成立时, 则另两个变量必皆趋于零; 又若 x, y, z 中有一个趋于零时, 则体积 V 趋于零. 总之, 在边界上, 恒有 $V \rightarrow 0$. 于是, 具有最大体积的直角平行六面体的长、宽、高分别为 $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$.

3697. 直圆锥的母线 l 与底平面成倾角 α . 试在此直圆锥中嵌入具最大全表面积的直角平行六面体.

解 设圆锥的底半径为 R , 高为 H , 则有 $R = l \cos \alpha$, $H = l \sin \alpha$, $\frac{H}{R} = \operatorname{tg} \alpha$. 内接长方体的放置方法与 3695 题相同. 设底面的两边分别为 $2d \cos \theta$ 和 $2d \sin \theta$, 高为 h , 则 $0 < d < R$, $0 < h < H$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, 且 h ,

d 由条件 $\frac{H-h}{H} = \frac{d}{R}$ 约束, 此条件可改写为

$$d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h = H = l \sin \alpha.$$

所求的全表面积为

$$S = 4(d^2 \sin 2\theta + dh \sin \theta + dh \cos \theta).$$

(i) 固定 d 和 h , 考虑 $S = S(\theta)$ 的变化情况. 由一元函数极值求法, 不难断定, 仅有 $S'(\frac{\pi}{4}) = 0$.

$S(\theta)$ 在 $\frac{\pi}{4}$ 处达到最大值 $S = 4(d^2 + \sqrt{2}dh)$, 即底面为正方形时, S 才取得最大值. 因此, 原问题可化为在条件 $d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h = l \sin \alpha$ ($d > 0, h > 0$) 下, 求函数 $S = 4(d^2 + \sqrt{2}dh)$ 的极值.

(ii) 此问题的边界值: 当 $d \rightarrow +0$ (此时 $h \rightarrow H - 0$) 时, 显然 $S \rightarrow 0$; 而当 $h \rightarrow +0$ (这时 $d \rightarrow R - 0$) 时, $S \rightarrow 4R^2$. 在后一种情况下, 全表面积退化为上、下两个正方形面积之和.

(iii) 在区域内部, 设

$$F = 4(d^2 + \sqrt{2}dh) - \lambda(d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h - l \sin \alpha).$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial d} = 8d + 4\sqrt{2}h - \lambda \operatorname{tg} \alpha = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial h} = 4\sqrt{2}d - \lambda = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} d \cdot \operatorname{tg} \alpha + h = l \sin \alpha. & (3) \end{cases}$$

由 (2) 得 $\lambda = 4\sqrt{2}d$, 代入 (1), 得

$$h = (\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2})d. \quad (4)$$

由 $h > 0$ 及 $d > 0$ 知, 当 $\operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{2}$ 时, 方程组在所研究的区域内无解. 此时, S 的最大值必在边界上达到, 即在 $h \rightarrow +0$ 时达到 $4R^2$. 当 $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{2}$ 时, 将 (4) 式代入 (3) 式, 可得

$$d = \frac{l \sin \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}, \quad h = l \sin \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}.$$

此时

$$S = 4(d^2 + \sqrt{2}dh) = \frac{2l^2 \sin^2 \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1} = \frac{2R^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1}.$$

由于 $(\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2})^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha - 2(\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1) > 0$, 故 $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1} > 2$. 从而, $S > 4R^2$, 即在该点的值大于边界上的值. 因此, 它为最大值. 于是, 当 $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{2}$, 长方体底面为正方形, 边长为 $2d \sin \frac{\pi}{4} = \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1}$, 高 $h = l \sin \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}{2 \operatorname{tg} \alpha - \sqrt{2}}$ 时, 全表面积为最大.

3698. 在椭圆抛物面 $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z = c$ 的一段中嵌入有最大体积的直角平行六面体.

解 设长方体的长、宽、高为 $2x$, $2y$ 及 $h = c - z$, 则按题设考虑函数 $V = 4xyh = 4xy(c - z)$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ ($x > 0$, $y > 0$, $0 < z < c$) 下的极值. 为计算简单起见, 作 F 时略去常数 4. 令 $F = xy(c - z) - \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z}{c})$.

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = y(c-z) - 2\lambda \cdot \frac{x}{a^2} = 0, & (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = x(c-z) - 2\lambda \cdot \frac{y}{b^2} = 0, & (2) \\ \frac{\partial F}{\partial z} = -xy + \frac{\lambda}{c} = 0, & (3) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}. & (4) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x 、 y 、 $(c-z)$,

比较即得 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{c-z}{2c}$. 代入(4)式, 可得

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}, \quad z = \frac{c}{2}, \quad h = c - z = \frac{c}{2}.$$

由于边界上 V 趋于零, 故长方体的最大值必在区域内达到. 于是, 当平行六面体的尺寸为 a 、 b 及 $\frac{c}{2}$ 时, 其体积最大.

3699. 求点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离.

解 按题设, 我们应求函数

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$

在条件 $Ax + By + Cz + D = 0$ 下的极值. 设

$$F(x, y, z) = r^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D),$$

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2(x-x_0) + \lambda A = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial y} = 2(y-y_0) + \lambda B = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial z} = 2(z-z_0) + \lambda C = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0. & (4) \end{cases}$$

由 (1), (2), (3) 可得

$$x = x_0 - \frac{1}{2}\lambda A, \quad y = y_0 - \frac{1}{2}\lambda B, \quad z = z_0 - \frac{1}{2}\lambda C. \quad (5)$$

代入 (4), 得

$$\lambda = \frac{2(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)}{A^2 + B^2 + C^2}, \quad (6)$$

将 (5), (6) 代入 $r^2 = (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2$ 中, 得

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

当 x, y, z 中有任一个趋于无穷时, r 趋于无穷. 因此, 在区域内 r 必取最小值.

于是, 点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 至平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的最短距离为

$$r = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3700. 求空间二直线

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$$

和

$$\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$

之间的最短距离。

解 显然，当两直线不平行时，直线上一点趋于无穷远处时，与另一直线上各点的距离，都趋于无穷。因此，不平行两直线的最短距离必在有限处达到。

为了书写简洁，我们采用向量的表达形式。用 $\vec{r}_1(t) = \vec{l}_1 t + \vec{r}_{10}$ 表示直线 $\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}$, (1)

$\vec{r}_2(s) = \vec{l}_2 s + \vec{r}_{20}$ 表示直线 $\frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$, (2)

其中 t, s 为参数, $\vec{l}_1 = \{m_1, n_1, p_1\}$, $\vec{l}_2 = \{m_2, n_2, p_2\}$,
 $\vec{r}_{10} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{r}_{20} = \{x_2, y_2, z_2\}$ 。

又记

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_{10} - \vec{r}_{20} = \{x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2\}.$$

始端在直线 (2) 上，终端在直线 (1) 上的向量为：

$$\begin{aligned}\vec{u}(t, s) &= (\vec{l}_1 t + \vec{r}_{10}) - (\vec{l}_2 s + \vec{r}_{20}) \\ &= \vec{l}_1 t - \vec{l}_2 s + \vec{r}_0.\end{aligned}\quad (3)$$

本题即求 $|\vec{u}(t, s)|$ 的最小值，它必在有限的 t, s 上取得。令

$$\begin{aligned}w &= |\vec{u}(t, s)|^2 = |\vec{l}_1 t - \vec{l}_2 s + \vec{r}_0|^2 \\ &= l_1^2 t^2 + l_2^2 s^2 + r_0^2 - 2(\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)st + 2(\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0)t \\ &\quad - 2(\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0)s,\end{aligned}$$

其中 $l_1^2 = \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_1$, $l_2^2 = \vec{l}_2 \cdot \vec{l}_2$, $r_0^2 = \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0$ 。

w 取得极值的必要条件为

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 2(l_1^2 t - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) s + (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0)) = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 2(l_2^2 s - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) t - (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0)) = 0.$$

由此可解得唯一的静止点 (t_0, s_0) :

$$t_0 = -\frac{l_2^2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0) - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0)}{l_1^2 l_2^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2},$$

$$s_0 = \frac{l_1^2 (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0) - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0)}{l_1^2 l_2^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2}.$$

于是 $|\vec{u}(t_0, s_0)|$ 即为所求的最短距离. 下面计算 $|\vec{u}(t_0,$

$s_0)|$. 令 $\Delta = \sqrt{l_1^2 l_2^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2}$, 显然有

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= |\vec{l}_1|^2 \cdot |\vec{l}_2|^2 - [|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2| \cos(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2})]^2 \\ &= |\vec{l}_1|^2 \cdot |\vec{l}_2|^2 \sin^2(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}) = |\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|^2, \end{aligned}$$

即

$$\Delta = |\vec{l}_1 \times \vec{l}_2|.$$

将 t_0 及 s_0 代入 (3) 式, 得

$$\begin{aligned} \vec{u}(t_0, s_0) &= -\frac{1}{\Delta^2} (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0) [l_2^2 \vec{l}_1 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) \vec{l}_2] \\ &\quad - \frac{1}{\Delta^2} (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0) [l_1^2 \vec{l}_2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) \vec{l}_1] + \vec{r}_0. \end{aligned}$$

通过计算, 不难得出

$$\begin{aligned} \vec{u}(t_0, s_0) \cdot \vec{l}_1 &= -\frac{1}{\Delta^2} (\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_0) [l_2^2 l_1^2 - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2)^2] - \frac{1}{\Delta^2} \\ &\cdot (\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_0) [l_1^2 (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) - (\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2) l_1^2] + (\vec{r}_0 \cdot \vec{l}_1) = 0, \end{aligned}$$

$$\vec{u}(t_0, s_0) \cdot \vec{l}_2 = 0.$$

因此, 得知

$$\vec{u}(t_0, s_0) \parallel \vec{l}_1 \times \vec{l}_2.$$

$$\text{令 } \vec{n}_0 = \frac{\vec{l}_1 \times \vec{l}_2}{\Delta}, \text{ 则 } |\vec{n}_0| = 1,$$

$$\begin{aligned} |\vec{u}(t_0, s_0)| &= |\vec{u}(t_0, s_0) \cdot \vec{n}_0| = \frac{|\vec{r}_0 \cdot (\vec{l}_1 \times \vec{l}_2)|}{\Delta} \\ &= \pm \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\Delta = \sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & p_1 \\ n_2 & p_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & m_1 \\ p_2 & m_2 \end{vmatrix}^2},$$

且正负号的选取保证所得结果为正值。

2701. 求抛物线 $y = x^2$ 和直线 $x - y - 2 = 0$ 之间的最短距离。

解 设 (x_1, y_1) 为抛物线 $y = x^2$ 上任一点, (x_2, y_2) 为直线 $x - y - 2 = 0$ 上的任一点。按题意, 我们应求函数

$$r^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

在条件 $y_1 - x_1^2 = 0$ 及 $x_2 - y_2 - 2 = 0$ 下的极值。显然, 由几何知, 当两点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 至少有一伸向无穷时, r 也必趋于无穷大, 故 r 的最小值必在有限处达到。

设 $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = r^2 + \lambda_1(y_1 - x_1^2) + \lambda_2(x_2 - y_2 - 2)$

- 2).

解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = -2(x_2 - x_1) - 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2 - x_1) + \lambda_2 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y_1} = -2(y_2 - y_1) + \lambda_1 = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y_2} = 2(y_2 - y_1) - \lambda_2 = 0, \\ y_1 = x_1^2, \\ x_2 - y_2 - 2 = 0. \end{cases}$$

得唯一的一组解 $x_1 = \frac{1}{2}$, $y_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{11}{8}$, $y_2 = -\frac{5}{8}$.

于是, 所求的最短距离为

$$r_0 = \sqrt{\left(\frac{11}{8} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{8} - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{7}{8}\sqrt{2}.$$

3702. 求有心二次曲线

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

的半轴.

解 设 (x_0, y_0) 为二次曲线 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 上的点, 则 $(-x_0, -y_0)$ 也为该曲线上的点. 因此, 原点 $(0, 0)$ 即为曲线的中心. 按题意, 应求函数 $u = x^2 + y^2$ 在条件 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ 下的极值. 设 $F = x^2 + y^2 - \lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1)$.

解方程组

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = (\lambda A - 1)x + \lambda B y = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda B x + (\lambda C - 1)y = 0, \\ Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1. \end{cases}$$

要方程组有非零解, λ 必须满足二次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A - 1 & \lambda B \\ \lambda B & \lambda C - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

由题设知二次曲线为有心的, 因此 $AC^2 - B^2 \neq 0$.

由方程 (1) 可求得两根 λ_1 和 λ_2 ($\lambda_1 \geq \lambda_2$). 将 λ 的值代入方程组, 求得对应于 λ_1 的解 (x_1, y_1) 及对应于 λ_2 的解 (x_2, y_2) . 相应地, 有

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= x_1^2 + y_1^2 = x_1[\lambda_1(Ax_1 + By_1)] \\ &\quad + y_1[\lambda_1(Bx_1 + Cy_1)] \\ &= \lambda_1(Ax_1^2 + 2Bx_1y_1 + Cy_1^2) = \lambda_1, \end{aligned}$$

同理 $u(x_2, y_2) = x_2^2 + y_2^2 = \lambda_2$.

(i) 当 $AC - B^2 > 0$ 且 $A + C > 0$ (或 $A > 0$) 时, 由 (1) 解得

$$\lambda_i = \frac{(A+C) \pm \sqrt{(A+C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2(AC - B^2)} > 0,$$

即有 $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$. 显然 u 的最大值及最小值必在区域内达到. 因此, λ_1 及 λ_2 分别为 u 的最大值及最小值. 此时, 所对应的曲线为椭圆, 长、短半轴的平方分别为 λ_1 及 λ_2 . 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ ($A = C, B = 0$) 时为圆.

当 $A+C < 0$ (或 $A < 0$) 时, 两根 λ_i 均为负, 相应曲线无轨迹.

(ii) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. 此时只有一个极值 λ_1 . 对应的曲线为双曲线, λ_1 为实半轴的平方 (λ_2 表面上无意义, 但实质上为虚半轴的平方), 其中特别是 $B = 0$ 时, 曲线退化为一对相交直线.

3703. 求有心二次曲面

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1$$

的半轴.

解 同上题可知, 曲面的中心为 $(0, 0, 0)$. 按题意, 达到曲面半轴的点 (x, y, z) 一定是函数 $u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1$$

下的静止点 (但不一定是极值点. 例如, 椭球面的中间轴所在的点). 设

$$F = u - \lambda(Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz - 1).$$

解方程组

$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = (\lambda A - 1)x + \lambda D y + \lambda F z = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda D x + (\lambda B - 1)y + \lambda E z = 0, \\ -\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = \lambda F x + \lambda E y + (\lambda C - 1)z = 0, \\ Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz = 1. \end{cases}$$

上述方程组要有非零解, λ 必须满足三次方程

$$\begin{vmatrix} \lambda A - 1 & \lambda D & \lambda F \\ \lambda D & \lambda B - 1 & \lambda E \\ \lambda F & \lambda E & \lambda C - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

设三根为 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$. 对应于此三根可求出满足方程组的静止点. 与3702题相同, 可证明在这些静止点处 $u(x, y, z)$ 的值恰为 $\lambda_i (i=1, 2, 3)$, 即 λ_i 为曲面半轴的平方 (严格地说, 当 $\lambda_i < 0$ 时不能认为它是半轴的平方).

与二次曲线的情况类似, 根据 λ_i 的正负可讨论曲面半轴的虚、实等问题, 这对熟悉二次曲面分类的读者无实质性的困难, 因此省略掉这些烦琐的讨论.

3704. 求用平面

$$Ax + By + Cz = 0$$

与圆柱

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

相交所成椭圆的面积.

解 我们只要确定所得椭圆的长短半轴 \bar{a} 及 \bar{b} , 即可按公式 $S = \pi \bar{a} \bar{b}$ 求得椭圆的面积.

注意到原点 $(0, 0, 0)$ 在原椭圆柱面的中心轴上, 且截平面 $Ax + By + Cz = 0$ 又通过它. 因此, 原点是截线椭圆的中心, 从而长短半轴 \bar{a} 及 \bar{b} 的平方 \bar{a}^2 及 \bar{b}^2 , 分别为函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件 $Ax + By + Cz = 0$ 及 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 下的最大值和最小值. 设

$$F = u + 2\lambda(Ax + By + Cz) - \mu\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right).$$

于是,达到最大值、最小值的点的坐标必须满足方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \left(1 - \frac{\mu}{a^2}\right)x + \lambda A = 0, & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \left(1 - \frac{\mu}{b^2}\right)y + \lambda B = 0, & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = z + \lambda C = 0, & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = 0, & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. & (5) \end{cases}$$

将(1)、(2)、(3)三式分别乘以 x 、 y 、 z 后,然后相加,得 $x^2 + y^2 + z^2 = \mu$,即从方程组可解得

$u(x, y, z) = \mu$. 由(1)、(2)、(3)、(4)知,若要 x, y, z 及 λ 不全为零, μ 必须满足下列方程(同时 μ 只要满足下列方程,静止点 (x, y, z) 也一定有解):

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\mu}{a^2} & 0 & 0 & A \\ 0 & 1 - \frac{\mu}{b^2} & 0 & B \\ 0 & 0 & 1 & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开后,得

$$\begin{aligned} \frac{C^2}{a^2 b^2} \mu^2 - \left(\frac{B^2}{a^2} + \frac{A^2}{b^2} + \frac{C^2}{a^2} + \frac{C^2}{b^2} \right) \mu \\ + (A^2 + B^2 + C^2) = 0. \end{aligned}$$

此方程有两正根，显然即为最大值及最小值 \bar{a}^2 、 \bar{b}^2 ，由韦达定理知

$$\frac{\bar{a}^2 \bar{b}^2}{a^2 b^2} = \frac{a^2 b^2 (A^2 + B^2 + C^2)}{C^2},$$

故椭圆面积 $\pi \bar{a} \bar{b} = \frac{\pi ab \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|}$ ($C \neq 0$)。

当 $C=0$ 时，平面 $Ax + By = 0$ 过 Oz 轴，显然得不到椭圆截面。

3705. 求用平面

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0$$

(其中 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$)与椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

相截所成截面的面积。

解 截面为一椭圆。与3704题一样，我们只要先考虑函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在条件

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0 \text{ 及 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

下的极值 ($a > 0$, $b > 0$, $c > 0$)。设

$$F = u + 2\lambda_1(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) - \lambda_2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right).$$

解方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} = \left(1 - \frac{\lambda_2}{a^2}\right)x + \lambda_1 \cos \alpha = 0, \quad (1) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial y} = \left(1 - \frac{\lambda_2}{b^2}\right)y + \lambda_1 \cos \beta = 0, \quad (2) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial z} = \left(1 - \frac{\lambda_2}{c^2}\right)z + \lambda_1 \cos \gamma = 0, \quad (3) \\ x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = 0, \quad (4) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5) \end{array} \right.$$

将(1), (2), (3)三式分别乘以 x, y, z ,然后相加,即得

$$u = x^2 + y^2 + z^2 = \lambda_2.$$

由(1)、(2)、(3)、(4)知,若要 x, y, z 及 λ_1 不全为零, λ_2 必须满足下列方程

$$\begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda_2}{a^2} & 0 & 0 & \cos \alpha \\ 0 & 1 - \frac{\lambda_2}{b^2} & 0 & \cos \beta \\ 0 & 0 & 1 - \frac{\lambda_2}{c^2} & \cos \gamma \\ \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

展开整理得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{c^2 a^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \right) \lambda_2^2 - \left(\frac{\cos^2 \alpha}{b^2} + \frac{\cos^2 \alpha}{c^2} \right. \\ & \left. + \frac{\cos^2 \beta}{c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{b^2} \right) \lambda_2 + 1 = 0. \end{aligned}$$

此方程有两正根，显然即为椭圆的长短半轴的平方 \bar{a}^2 、 \bar{b}^2 。由韦达定理知

$$\frac{\bar{a}^2 \bar{b}^2}{\bar{a} \bar{b}} = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}.$$

于是，所求椭圆的面积为

$$S = \pi \bar{a} \bar{b} = \frac{\pi abc}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma}}.$$

3706. 根据费耳马原则，从 A 点射出而达于 B 点的光线，沿着需要最短时间的曲线传播。

假定点 A 和点 B 位于以平面所分开的不同的光介质中，并且光传播的速度在第一介质中等于 v_1 ，而在第二介质中等于 v_2 ，推出光的折射定律。

解 如图 6.45 所示，光线从 A 点射出，沿着折线 AMB 到达 B 点。由 A 、 B 作垂直于 l 的直线 AC 及 BD ，并与直线 l 交于 C 点及 D 点。设 $AC = a$ ， $BD = b$ ， $CD = d$ 。选择角度 α, β 为变量，则

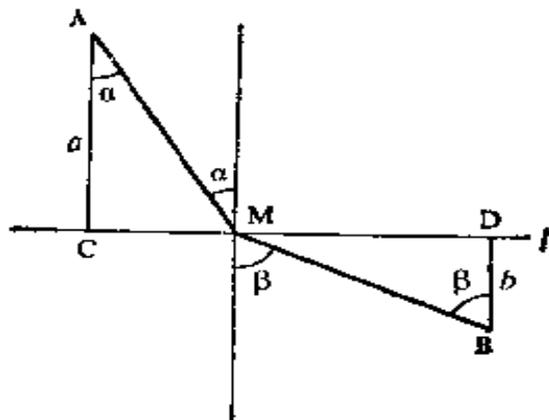


图 6.45

$$AM = \frac{a}{\cos \alpha}, \quad BM = \frac{b}{\cos \beta},$$

$$CM = a \operatorname{tg} \alpha, \quad MD = b \operatorname{tg} \beta.$$

于是，我们的问题就是求函数

$$f(\alpha, \beta) = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta}$$

在条件 $a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta = d$ 下的最小值, 其中 $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi}{2}$ (当 M 在 C 与 D 之间时, $\alpha > 0$, $\beta > 0$; 当 M 在 C 点的左边时, $\alpha < 0$, $\beta > 0$; 当 M 在点 D 的右边时, $\alpha > 0$, $\beta < 0$)。显然 $f(\alpha, \beta)$ 是连续函数; 又当 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$ 时 (这时点 M 从右边伸向无穷远, $\beta \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0$), 显然 $f(\alpha, \beta) \rightarrow +\infty$; 当 $\alpha \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 0$ 时 (这时点 M 从左边伸向无穷远, $\beta \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0$), 显然也有 $f(\alpha, \beta) \rightarrow +\infty$ 。由此可知 $f(\alpha, \beta)$ 在有限处达到最小值, 此处必为静止点。设

$$F = \frac{a}{v_1 \cos \alpha} + \frac{b}{v_2 \cos \beta} - \lambda(a \operatorname{tg} \alpha + b \operatorname{tg} \beta - d).$$

注意到由

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{v_1 \cos^2 \alpha} - \frac{\lambda a}{\cos^2 \alpha} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{b \sin \beta}{v_2 \cos^2 \beta} - \frac{\lambda b}{\cos^2 \beta} = 0, \end{cases}$$

即得

$$\frac{\sin \alpha}{v_1} = \lambda, \quad \frac{\sin \beta}{v_2} = \lambda.$$

于是, 在静止点必满足

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}.$$

由此可知，光的传播路径必满足上面的关系。这就是著名的光线折射定律。此时，由点 A 到点 B 的光线传播所需要的时间最短。

3707. 当投射角怎样时，光线的折射（即投射线与出射线之间的角）为最小？

（此光线经过棱镜的折射角为 α ，折射系数为 n ）。求出此最小的折射。

解 如图6·46所示， ABC 为棱镜， $\angle BAC = \alpha$ 为棱镜顶角（即

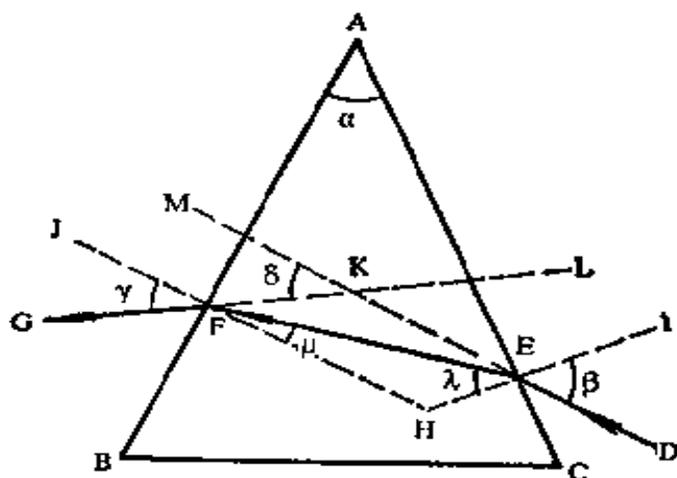


图 6·46

棱镜的折射角)， DE 为入射光线，折射后从 F 点折射出棱镜，射出线为 FG 。 IH 和 JH 分别为入射点和射出点的法线，它们相交于 H ($IH \perp AC$, $JH \perp AB$)。入射线 DE 的延长线 DM 与射出线的反向延长线 FL 交于 K 。令 $\angle DEI = \beta$, $\angle GFJ = \gamma$, $\angle GKM = \delta$, $\angle HEF = \lambda$, $\angle EFH = \mu$ 。

按题意即问，当 β 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 之间的一定范围内变化时， δ 何时达到极小值。这本是一元函数的极值问题，然因牵涉的变量关系太多，因此把它看作多元函数的条件极值问题。

由折射定律（3706题）可知：

$$\sin\beta = n\sin\lambda, \quad (1)$$

$$\sin\gamma = n\sin\mu. \quad (2)$$

由几何关系不难求出 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda$ 及 μ 之间的关系:

$$\lambda + \mu = \alpha, \quad (3)$$

$$\delta = \beta + \gamma - \alpha. \quad (4)$$

由于 α 为常数, 故从(1)、(2)、(3)、(4)四式中消去 λ, μ 及 γ 就得到 δ 作为 β 的函数. 令

$$F(\beta, \gamma, \lambda, \mu) = \beta + \gamma - \alpha + k_1(\sin\beta - n\sin\lambda) \\ + k_2(n\sin\mu - \sin\gamma) + k_3(\lambda + \mu - \alpha).$$

静止点适合下列方程组

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \beta} = 1 + k_1 \cos\beta = 0, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \gamma} = 1 - k_2 \cos\gamma = 0, \end{array} \right. \quad (6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \lambda} = -k_1 n \cos\lambda + k_3 = 0, \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial \mu} = k_2 n \cos\mu + k_3 = 0. \end{array} \right. \quad (8)$$

由(7)、(8)消去 k_3 , 得 $k_1 \cos\lambda = -k_2 \cos\mu$. (9)

由(5)、(6)得 $k_1 = -\frac{1}{\cos\beta}$, $k_2 = \frac{1}{\cos\gamma}$. 代入(9),

两边平方, 即得

$$\frac{\cos^2\lambda}{\cos^2\beta} = \frac{\cos^2\mu}{\cos^2\gamma} \text{ 或 } \frac{1 - \sin^2\lambda}{1 - \sin^2\beta} = \frac{1 - \sin^2\mu}{1 - \sin^2\gamma}. \quad (10)$$

将(1)、(2)代入(10), 得

$$\frac{1 - \sin^2\lambda}{1 - n^2 \sin^2\lambda} = \frac{1 - \sin^2\mu}{1 - n^2 \sin^2\mu},$$

整理后得

$$(n^2 - 1)(\sin^2 \lambda - \sin^2 \mu) = 0.$$

由于 $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$, 故 $\sin \lambda = \sin \mu$ 或 $\lambda = \mu$.

代入(3), 得 $\lambda = \mu = \frac{\alpha}{2}$. 从而 $\beta = \gamma = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right)$.

于是,

$$\delta = \beta + \gamma - \alpha = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha.$$

所求得的 β 即为唯一的静止点.

根据物理知识, 作为本题所讨论的对象: 顶角较小的分光棱镜, 在区域内确实存在着最小的折射. 于是, 当入射角

$$\beta = \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

时, 则

$$\delta = 2 \arcsin\left(n \sin \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha$$

应为最小折射. 至于作其它用途的各种棱镜, 光线的折射路径不仅与顶角有关, 而且大都与整个棱镜的构造有关, 这已不属于本题所考虑的对象, 因而也不再对它们进行讨论.

3708. 变量 x 和 y 满足线性方程式

$$y = ax + b,$$

它的系数需要确定. 由于一系列的等精确测定的结果, 对于量 x 和 y 得到值 x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

利用最小二乘方的方法, 求系数 a 和 b 的最可靠数值.

解 根据最小二乘方的方法, 系数 a 和 b 的最可靠数

值是这样的：对于它们，误差的平方和

$$M = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

为最小。因此，上述问题可以通过求方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \frac{\partial M}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

的解来解决。记

$$[x, y] = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad [x, x] = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

$$[x, 1] = \sum_{i=1}^n x_i, \quad [y, 1] = \sum_{i=1}^n y_i,$$

则上述方程组化为

$$\begin{cases} a[x, x] + b[x, 1] = [x, y], \\ a[x, 1] + bn = [y, 1]. \end{cases}$$

系数行列式

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} [x, x] & [x, 1] \\ [x, 1] & n \end{vmatrix} = n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \\ &= (n-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{i < j} (x_i - x_j)^2. \end{aligned}$$

当 $\Delta \neq 0$ 时，方程组有唯一的一组解，且

$$a = \frac{\begin{vmatrix} [x, y] & [x, 1] \\ [y, 1] & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x, x] & [x, 1] \\ [x, 1] & n \end{vmatrix}} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)}{\sum_{i < j} (x_i - x_j)^2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} [x, x] & [x, y] \\ [x, 1] & [y, 1] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} [x, x] & [x, 1] \\ [x, 1] & n \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)}{\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2}$$

显然, 此时 M 为最小. 因此, 上述 a 和 b 即为所求.

3709. 在平面上已知 n 个点 $M_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, \dots, n$).

直线 $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ 在怎样的位置时, 已知点与此直线的偏差的平方和为最小?

解 已知点与直线的偏差平方和

$$M(\alpha, p) = \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p)^2.$$

记

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$\overline{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad \overline{y^2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^2,$$

则所求直线的参数 α 和 p 应满足方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial \alpha} &= 2 \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p) (y_i \cos \alpha - x_i \sin \alpha) \\ &= 2 \sum_{i=1}^n [x_i y_i \cos 2\alpha + (y_i^2 - x_i^2) \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ &\quad - y_i p \cos \alpha + x_i p \sin \alpha] \\ &= n[2 \overline{xy} \cos 2\alpha + (\overline{y^2} - \overline{x^2}) \sin 2\alpha - 2p(\overline{y} \cos \alpha \\ &\quad - \overline{x} \sin \alpha)] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial p} &= -2 \sum_{i=1}^n (x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - p) \\ &= -2n(\bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha - p) = 0.\end{aligned}\quad (2)$$

由(2)式, 解得

$$p = \bar{x} \cos \alpha + \bar{y} \sin \alpha.\quad (3)$$

将(3)式代入(1)式, 即可解出

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2(\bar{x} \cdot \bar{y} - \bar{x}\bar{y})}{[\bar{x}^2 - (\bar{x})^2][\bar{y}^2 - (\bar{y})^2]}.\quad (4)$$

在 $(0, 2\pi)$ 范围内, (4)式的解 α 共有四个:

$$\alpha_0; \alpha_0 + \frac{\pi}{2}; \alpha_0 + \pi; \alpha_0 + \frac{3\pi}{2};$$

其中 $0 \leq \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$. 将这四个解代入(3)式可以求出 p .

根据习惯, 取 $p \geq 0$, 故上述四个 α 只有两个满足 $p \geq 0$ 的要求**, 记为 $\alpha_1, p_1; \alpha_2, p_2$. 这样就得到两条互相垂直的直线:

$$\begin{cases} x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0, & (5) \\ x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0. & (6) \end{cases}$$

显然, $M(\alpha, p)$ 一定在 p 为有限值的点上取得最小值. 因此, 只要比较 $M(\alpha_1, p_1)$ 和 $M(\alpha_2, p_2)$ 的值, M 较小的那条直线即为所求***).

*) 当(4)式分母为零而分子不为零时, 解为 $2\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$. 当分子分母同时为零时, 有无穷

多个解, 即任意一条过 n 个点的重心的直线均使 $M(\alpha,$

p)为最小, 具体的讨论不进行了.

**) 也可能同时有一对或两对 α 使 $p=0$, 但此时代表的直线仍只有互相垂直的两条, 只是直线方程(5)或(6)有两种不同的表示法而已.

***) 特殊情况下也可能有 $M(\alpha_1, p_1) = M(\alpha_2, p_2)$, 此时使 M 取得最小值的直线有两条.

3710. 在区间(1,3)内用线性函数 $ax+b$, 来近似地代替函数 x^2 , 使得绝对偏差

$$\Delta = \sup |x^2 - (ax+b)| \quad (1 \leq x \leq 3)$$

为最小.

解 考虑函数

$$u(a, b) = \Delta^2 = \sup_{1 \leq x \leq 3} [x^2 - (ax+b)]^2,$$

$$f(x, a, b) = x^2 - (ax+b).$$

由于 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - a$, 故当固定 a, b 时, $f(x, a, b)$ 只在

$x = \frac{a}{2}$ 处达到极值 $f(\frac{a}{2}, a, b)$. 当限制 $1 \leq x \leq 3$ 时,

只有当 $2 < a < 6$ 时, $f(x, a, b)$ 才可能在 $1 < x < 3$ 内部达到极值. 于是,

$$u(a, b) = \begin{cases} \max\{f^2(1, a, b), f^2(3, a, b)\}, \\ f^2(\frac{a}{2}, a, b)\}, & 2 < a < 6; \\ \max\{f^2(1, a, b), f^2(3, a, b)\}, & a \leq 2 \text{ 或 } a \geq 6. \end{cases}$$

从上式得知, 对一切 (a, b) 均有 $u(a, b) \geq 0$.

设从上式已解出平面区域 Ω_1, Ω_2 及 Ω_3 , 使得

$$u(a, b) = \begin{cases} f^2(1, a, b) = (1 - a - b)^2, & (a, b) \in \Omega_1; \\ f^2(3, a, b) = (9 - 3a - b)^2, & (a, b) \in \Omega_2; \\ f^2\left(\frac{a}{2}, a, b\right) = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2, & (a, b) \in \Omega_3, \\ & 2 \leq a \leq 6. \end{cases}$$

由于 $u(a, b) \geq 0$ ，不难看出 $u(a, b)$ 在区域 Ω_i ($i=1, 2, 3$) 内部均无静止点。再看区域边界的状况，以 Ω_1 及 Ω_3 的边界为例，根据 $u(a, b)$ 的连续性，即知在边界上有 $u(a, b) = (1 - a - b)^2$ ，且满足条件

$$(1 - a - b)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2.$$

下面我们求满足条件极值的必要条件的点。设

$$F(a, b) = (1 - a - b)^2 + \lambda \left[(1 - a - b)^2 - \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2 \right],$$

则

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = -2(1 + \lambda)(1 - a - b) - \lambda a \left(\frac{a^2}{4} + b\right), \\ \frac{\partial F}{\partial b} = -2(1 + \lambda)(1 - a - b) - 2\lambda \left(\frac{a^2}{4} + b\right). \end{cases}$$

使 $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$ ， $\frac{\partial F}{\partial b} = 0$ 且满足条件 $1 - a - b \neq 0$ ， $\frac{a^2}{4} + b \neq 0$ 的点没有。

同法可证：在 Ω_1, Ω_2 及 Ω_2, Ω_3 的边界上也无静止点。但是， $u(a, b)$ 一定在区域内达到最小值。因此，只能在 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 的边界交点上取得最小值，即在满足方程

$$(1 - a - b)^2 = (9 - 3a - b)^2 = \left(\frac{a^2}{4} + b\right)^2 \quad (1)$$

的点 (a, b) 上取得最小值, 方程(1)可转化为下面四组方程

$$\begin{cases} 1-a-b=9-3a-b=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (2) \\ 1-a-b=9-3a-b=\frac{a^2}{4}+b, & (3) \\ 1-a-b=-\left(9-3a-b\right)=-\left(\frac{a^2}{4}+b\right), & (4) \\ 1-a-b=-\left(9-3a-b\right)=\frac{a^2}{4}+b. & (5) \end{cases}$$

方程组(2)无解.

方程组(3)的解为 $a=4, b=-\frac{7}{2}$. 对应的 $\Delta=\frac{1}{2}$.

方程组(4)的解为 $a=2, b=1$. 对应的 $\Delta=2$.

方程组(5)的解为 $a=6, b=-7$. 对应的 $\Delta=2$.

综上所述, 可知: 在区间 $(1, 3)$ 内, 用线性函数 $4x - \frac{7}{2}$ 来近似地代替函数 x^2 , 即可使绝对偏差 Δ 为最小, 且 $\Delta_{\min} = \frac{1}{2}$.

第七章 带参数的积分

§ 1. 带参数的常义积分

1° 积分的连续性 若函数 $f(x, y)$ 于有界的域 R ($a \leq x \leq A$; $b \leq y \leq B$) 内有定义并且是连续的, 则

$$F(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

是在闭区间 $b \leq y \leq B$ 上的连续函数.

2° 积分符号下的微分法 若除在 1° 中所已指明的条件之外, 并且偏导函数 $f'_y(x, y)$ 在区域 R 内连续, 则当 $b < y < B$ 时 莱布尼兹公式

$$\frac{d}{dy} \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A f'_y(x, y) dx$$

为真.

在更普遍的情况下, 当积分的限为参数 y 的可微分函数 $\varphi(y)$ 和 $\psi(y)$ 并且当 $b < y < B$ 时 $a \leq \varphi(y) \leq A$, $a \leq \psi(y) \leq A$, 有:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y) dx \\ &= f[\psi(y), y] \psi'(y) - f[\varphi(y), y] \varphi'(y) \\ &+ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y) dx \quad (b < y < B). \end{aligned}$$

3° 积分符号下的积分法 在 1° 的条件下有

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

3711. 证明: 不连续函数 $f(x, y) = \operatorname{sgn}(x - y)$ 的积分

$$F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$$

为连续函数. 作出函数 $u = F(y)$ 的图形.

证 当 $-\infty < y < 0$ 时,

$$F(y) = \int_0^1 1 \cdot dx = 1;$$

当 $0 \leq y \leq 1$ 时,

$$F(y) = \int_0^y (-1) dx + \int_y^1 1 \cdot dx = 1 - 2y;$$

当 $1 < y < +\infty$ 时,

$$F(y) = \int_0^1 (-1) dx = -1.$$

由于

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(y) = \lim_{y \rightarrow +0} (1 - 2y) = 1, \quad \lim_{y \rightarrow -0} F(y) = 1$$

且 $F(0) = 1$, 即有

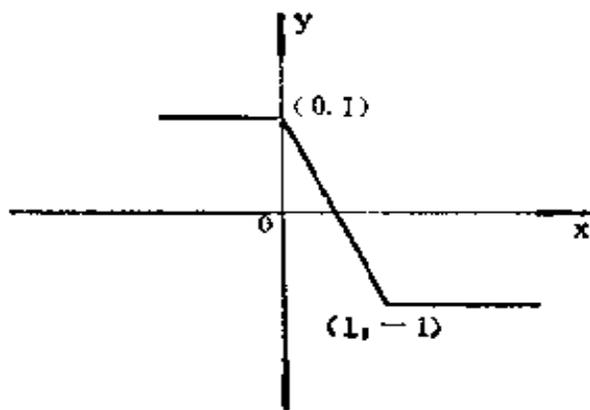


图 7.1

$$F(+0) = F(-0) = F(0),$$

故 $u = F(y)$ 当 $y = 0$ 时为连续的.

同法可证 $u = F(y)$ 当 $y = 1$ 时为连续的. 当 $y \neq 0, y \neq 1$ 时, $u = F(y)$ 显然连续. 于是, $u = F(y)$ 在整个 Oy 轴上均为连续的. 如图 7·1 所示.

3712. 研究函数

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y f(x)}{x^2 + y^2} dx$$

的连续性, 其中 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上是正的连续函数.

解 当 $y \neq 0$ 时, 被积函数是连续的. 因此, $F(y)$ 为连续函数.

当 $y = 0$ 时, 显然有 $F(0) = 0$.

当 $y > 0$ 时, 设 m 为 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值, 则 $m > 0$. 由于

$$F(y) \geq m \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} dx = m \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y}$$

及

$$\lim_{y \rightarrow +0} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y} = \frac{\pi}{2},$$

故有

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(y) \geq \frac{m\pi}{2} > 0.$$

于是, $F(y)$ 当 $y = 0$ 时不连续.

3713. 求:

$$(a) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2};$$

$$(b) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx;$$

$$(B) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx;$$

$$(r) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}.$$

解 (a) 因 $\frac{1}{1+x^2+\alpha^2}$, α , $1+\alpha$ 都是连续函数,

故含参变量 α 的积分 $F(\alpha) = \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2}$ 是

α 在 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上的连续函数, 因此

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{1+\alpha} \frac{dx}{1+x^2+\alpha^2} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = F(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \arctg x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

(b) 同样, $F(\alpha) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx$ 是 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上的连续函数, 因此

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+\alpha^2} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = F(0) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2} dx \end{aligned}$$

$$= 2 \int_0^1 x dx = 1.$$

(B) 同样, $F(\alpha) = \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx$ 是 $-\infty < \alpha < +\infty$ 上的连续函数, 故

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_0^2 x^2 \cos \alpha x dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} F(\alpha) = F(0) = \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

(C) 考虑二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1 + (1 + xy)^{\frac{1}{y}}}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, \\ & 0 < y \leq 1 \text{ 时;} \\ \frac{1}{1 + e^x}, & \text{当 } 0 \leq x \leq 1, y = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由 $\lim_{u \rightarrow +0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$ 易知 $f(x, y)$ 是 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y$

≤ 1 上的连续函数. 从而积分 $F(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ 是 $0 \leq y \leq 1$ 上的连续函数, 因此

$$\lim_{y \rightarrow +0} F(y) = F(0),$$

从而更有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{dx}{1 + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = F(0) = \int_0^1 f(x, 0) dx \\
&= \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = \ln \frac{e^x}{1+e^x} \Big|_0^1 = \ln \frac{2e}{1+e}.
\end{aligned}$$

3714. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, A]$ 上连续. 证明

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt = f(x) - f(a)$$

($a < x < A$).

证 由于 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上连续, 故在 $[a, A]$ 上存在原函数. 于是,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} \int_a^x [f(t+h) - f(t)] dt \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{1}{h} [F(x+h) - F(a+h) - F(x) + F(a)] \\
&= \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} \\
&= F'(x) - F'(a) = f(x) - f(a).
\end{aligned}$$

3715. 在下式中可否于积分符号下完成极限运算

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx ?$$

解 不能. 事实上,

$$\begin{aligned}
\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} dx &= \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} \Big|_0^1 \right) \\
&= \lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{y^2}} \right) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

而

$$\int_0^1 \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x}{y^2} e^{-\frac{x^2}{y^2}} \right) dx = \int_0^1 0 \cdot dx = 0.$$

3716. 当 $y = 0$ 时, 可否根据莱布尼兹法则计算函数

$$F(y) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx$$

的导数?

解 不能. 事实上, 我们有: 当 $y \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx \\ &= x \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &\quad - \int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + y^2} dx \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - \int_0^1 \left(1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right) dx \\ &= \ln \sqrt{1 + y^2} - 1 + y \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

又有

$$F(0) = \int_0^1 \ln x dx = x \ln x \Big|_0^1 - \int_0^1 dx = -1.$$

由此可知

$$F'_+(0) = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{F(y) - F(0)}{y}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{y \rightarrow +0} \left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right] \\
&= \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F'_-(0) &= \lim_{y \rightarrow -0} \frac{F(y) - F(0)}{y} \\
&= \lim_{y \rightarrow -0} \left[\frac{\ln(1+y^2)}{2y} + \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \right] \\
&= -\frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

故 $F'(0)$ 不存在.

另一方面, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} \\
&= \frac{y}{x^2 + y^2} \Big|_{y=0} \equiv 0,
\end{aligned}$$

故

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx = 0.$$

由此可知, 当 $y = 0$ 时不能在积分号下求导数, 就是求右导数或求左导数也不行, 因为

$$\begin{aligned}
F'_+(0) &= \frac{\pi}{2} \neq 0 \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F'_-(0) &= -\frac{\pi}{2} \neq 0 \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{x^2 + y^2} \right) \Big|_{y=0} dx.
 \end{aligned}$$

3717. 若

$$F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2} dy,$$

计算 $F'(x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解 } F'(x) &= \frac{d}{dx} (x^2) \cdot e^{-xy^2} \Big|_{y=x^2} \\
 &\quad - \frac{dx}{dx} \cdot e^{-xy^2} \Big|_{y=x} \\
 &\quad + \int_x^{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (e^{-xy^2}) dy \\
 &= 2xe^{-x^5} - e^{-x^3} - \int_x^{x^2} y^2 e^{-xy^2} dy.
 \end{aligned}$$

3718. 设:

$$(a) F(a) = \int_{\sin a}^{\cos a} e^{a\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$(b) F(a) = \int_{a+a}^{b+a} \frac{\sin ax}{x} dx;$$

$$(c) F(a) = \int_0^a \frac{\ln(1+ax)}{x} dx;$$

$$(d) F(a) = \int_0^a f(x+a, x-a) dx;$$

$$(A) F(a) = \int_0^{\alpha^2} dx \int_{x-a}^{x+a} \sin(x^2 + y^2 - a^2) dy,$$

求 $F'(a)$.

$$\text{解 (a) } F'(a) = -\sin a \cdot e^{\alpha \sin a} - \cos a \cdot e^{\alpha \cos a} \\ + \int_{\sin a}^{\cos a} \sqrt{1-x^2} e^{\alpha \sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$(6) F'(a) = \frac{\sin a(b+a)}{b+a} - \frac{\sin a(a+a)}{a+a} \\ + \int_{a+a}^{b+a} \cos ax dx \\ = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+a}\right) \sin a(b+a) \\ - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+a}\right) \sin a(a+a).$$

$$(B) F'(a) = \frac{1}{a} \ln(1+a^2) + \int_0^a \frac{1}{1+ax} dx \\ = \frac{2}{a} \ln(1+a^2).$$

(r) 设 $u=x+a$, $v=x-a$, 则

$$F(a) = \int_0^a f(u, v) dx.$$

于是,

$$F'(a) = f(2a, 0) + \int_0^a (f'_u(u, v) - f'_v(u, v)) dx \\ = f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^a [f'_u(u, v) + f'_v(u, v)] dx \\
& = f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx \\
& \quad - \int_0^a \frac{d}{dx} f(u, v) dx \\
& = f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx \\
& \quad - f(x + a, x - a) \Big|_{x=0}^{x=a} \\
& = f(2a, 0) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx \\
& \quad - [f(2a, 0) - f(a, -a)] \\
& = f(a, -a) + 2 \int_0^a f'_u(u, v) dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{H}) \quad F'(a) &= 2a \int_{a^2 - a}^{a^2 + a} \sin(a^4 + y^2 - a^2) dy \\
&+ \int_0^{a^2} \left[\frac{\partial}{\partial a} \int_{x-a}^{x+a} \sin(x^2 + y^2 - a^2) dy \right] dx \\
&= 2a \int_{a^2 - a}^{a^2 + a} \sin(a^4 + y^2 - a^2) dy \\
&+ \int_0^{a^2} \left\{ \sin[x^2 + (x + a)^2 - a^2] \right. \\
&\quad \left. - \sin[x^2 + (x - a)^2 - a^2] \right\} \cdot (-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x-a}^{x+a} (-2\alpha) \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy \} dx \\
& = 2\alpha \int_{a^2-a}^{a^2+a} \sin(\alpha^4 + y^2 - \alpha^2) dy \\
& + \int_0^{a^2} \{ \sin(2x^2 + 2\alpha x) + \sin(2x^2 - 2\alpha x) \\
& + \int_{x-a}^{x+a} (-2\alpha) \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy \} dx \\
& = 2\alpha \int_{a^2-a}^{a^2+a} \sin(\alpha^4 + y^2 - \alpha^2) dy \\
& + 2 \int_0^{a^2} \sin 2x^2 \cos 2\alpha x dx \\
& - 2\alpha \int_0^{a^2} dx \int_{x-a}^{x+a} \cos(x^2 + y^2 - \alpha^2) dy.
\end{aligned}$$

3719. 若

$$F(x) = \int_0^x (x+y)f(y)dy,$$

其中 $f(x)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

$$\text{解 } F'(x) = 2xf(x) + \int_0^x f(y)dy,$$

$$\begin{aligned}
F''(x) &= 2f(x) + 2xf'(x) + f(x) \\
&= 3f(x) + 2xf'(x).
\end{aligned}$$

3720. 设:

$$F(x) = \int_a^b f(y)|x-y|dy,$$

其中 $a < b$ 及 $f(y)$ 为可微分的函数, 求 $F''(x)$.

解 当 $x \in (a, b)$ 时, 由于

$$F(x) = \int_a^x (x-y)f(y)dy + \int_x^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \int_a^x (x-y)f(y)dy \\ &\quad - \frac{d}{dx} \int_x^b (y-x)f(y)dy \\ &= \int_a^x \frac{\partial}{\partial x} [(x-y)f(y)]dy \\ &\quad - \int_x^b \frac{\partial}{\partial x} [(y-x)f(y)]dy \\ &= \int_a^x f(y)dy + \int_x^b f(y)dy, \end{aligned}$$

$$F''(x) = f(x) + f(x) = 2f(x).$$

当 $x \in (a, b)$ 时, 例如 $x \leq a$, 则

$$F(x) = \int_a^b (y-x)f(y)dy,$$

故有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} [(y-x)f(y)]dy \\ &= - \int_a^b f(y)dy, \end{aligned}$$

$$F''(x) = 0;$$

同理, 对于 $x \geq b$ 也可得 $F''(x) = 0$. 总之,

$$F''(x) = \begin{cases} 2f(x), & \text{当 } x \in (a, b); \\ 0, & \text{当 } x \notin (a, b). \end{cases}$$

3721. 设:

$$F(x) = \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta \quad (h > 0),$$

其中 $f(x)$ 为连续函数, 求 $F''(x)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } F(x) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_0^h f(x + \xi + \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h d\xi \int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u) du. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{1}{h^2} \int_0^h \left[\frac{\partial}{\partial x} \int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(u) du \right] d\xi \\ &= \frac{1}{h^2} \int_0^h [f(x + \xi + h) - f(x + \xi)] d\xi \\ &= \frac{1}{h^2} \left[\int_{x+h}^{x+2h} f(u) du - \int_x^{x+h} f(u) du \right], \\ F''(x) &= \frac{1}{h^2} [f(x + 2h) - f(x + h) - f(x + h) \\ &\quad + f(x)] \\ &= \frac{1}{h^2} [f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)]. \end{aligned}$$

3722. 设:

$$F(x) = \int_0^x f(t)(x-t)^{n-1} dt,$$

求 $F^{(n)}(x)$.

$$\begin{aligned}\text{解 } F'(x) &= \int_0^x \frac{\partial}{\partial x} [f(t)(x-t)^{n-1}] dt \\ &= (n-1) \int_0^x f(t)(x-t)^{n-2} dt,\end{aligned}$$

$$F''(x) = (n-1)(n-2) \int_0^x f(t)(x-t)^{n-3} dt,$$

.....

$$F^{(n-1)}(x) = (n-1)! \int_0^x f(t) dt,$$

最后得

$$F^{(n)}(x) = (n-1)! f(x).$$

3723. 在区间 $1 \leq x \leq 3$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似地代替函数 $f(x)=x^2$, 使得

$$\int_1^3 (a+bx-x^2)^2 dx = \min.$$

解 设 $F(a, b) = \int_1^3 (a+bx-x^2)^2 dx$, 则由于 $F(a, b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数, 并且易知当 $r = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow +\infty$ 时, $F(a, b) \rightarrow +\infty$, 故 $F(a, b)$ 必在有限处取得最小值. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 2 \int_1^3 (a+bx-x^2) dx = 4a+8b-\frac{52}{3} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \int_1^3 x(a+bx-x^2) dx = 8a+\frac{52}{3}b-40 = 0 \end{cases}$$

得唯一的一组解 $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$.

于是, 当 $a = -\frac{11}{3}$, $b = 4$ 时 $F(a, b)$ 达最小

值, 即所求的线性函数为 $4x - \frac{11}{3}$.

3724. 依条件: 函数 $a+bx$ 及 $\sqrt{1+x^2}$ 在已知区间 $[0, 1]$ 上的平均平方差为最小, 求近似公式

$$\sqrt{1+x^2} \approx a+bx \quad (0 \leq x \leq 1).$$

解 按题设, 即在区间 $0 \leq x \leq 1$ 上用线性函数 $a+bx$ 近似代替函数 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, 使得

$$\int_0^1 (a+bx - \sqrt{1+x^2})^2 dx = \min.$$

设 $F(a, b) = \int_0^1 (a+bx - \sqrt{1+x^2})^2 dx$, 则 $F(a, b)$ 是 a 和 b 的二元连续函数, 并且易知当 $r = \sqrt{a^2+b^2} \rightarrow +\infty$ 时, $F(a, b) \rightarrow +\infty$, 故 $F(a, b)$ 必在有限处取得最小值. 解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 2 \int_0^1 (a+bx - \sqrt{1+x^2}) dx \\ \quad = 2a + b - [\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})] = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \int_0^1 x (a+bx - \sqrt{1+x^2}) dx \\ \quad = a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1) = 0 \end{cases}$$

得唯一的一组解 $a \approx 0.934$, $b \approx 0.427$.

于是, 当 $a \approx 0.934$, $b \approx 0.427$ 时, $F(a, b)$ 为最小值, 即所求的近似公式为

$$\sqrt{1+x^2} \approx 0.934 + 0.427x \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3725. 求完全椭圆积分

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

及

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \quad (0 < k < 1)$$

的导函数并以函数 $E(k)$ 和 $F(k)$ 来表示它们.

证明 $E(k)$ 满足微分方程式

$$E''(k) + \frac{1}{k} E'(k) + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad E'(k) &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2 \sin^2 \varphi) - 1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &= \frac{1}{k} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right] \\ &= \frac{E(k) - F(k)}{k}. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
F'(k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \\
&= -\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-k^2 \sin^2 \varphi) - 1}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \\
&= -\frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \\
&\quad + \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

我们易证

$$\begin{aligned}
(1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} &= \frac{1}{1-k^2} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad - \frac{k^2}{1-k^2} \frac{d}{d\varphi} [\sin \varphi \cos \varphi (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}}],
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{3}{2}} d\varphi \\
&= \frac{1}{1-k^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} d\varphi.
\end{aligned}$$

于是,

$$F'(k) = -\frac{F(k)}{k} + \frac{E(k)}{k(1-k^2)}. \quad (2)$$

由 (1) 式, 对 k 再求导数, 并注意到 (2) 式, 即

得

$$\begin{aligned} E''(k) &= \frac{[E'(k) - F'(k)]k - [E(k) - F(k)]}{k^2} \\ &= \frac{\left[\frac{E(k) - F(k)}{k} + \frac{F(k)}{k} - \frac{E(k)}{k(1-k^2)} \right]k - kE'(k)}{k^2} \\ &= -\frac{E(k)}{1-k^2} - \frac{E'(k)}{k}, \end{aligned}$$

即

$$E''(k) + \frac{F'(k)}{k} + \frac{E(k)}{1-k^2} = 0.$$

3726. 证明：足指数 n 为整数的贝塞尔函数

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi$$

满足贝塞尔方程式

$$x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0.$$

$$\text{证 } J_n'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin \varphi \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi,$$

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cdot \cos(n\varphi - x \sin \varphi) d\varphi.$$

于是,

$$\begin{aligned} &x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(x^2 \sin^2 \varphi + n^2 - x^2) \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \\ &\quad - x \sin \varphi \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi)] d\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [(n^2 - x^2 \cos^2 \varphi) \cos(n\varphi - x \sin \varphi) \\
&\quad - x \sin \varphi \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi)] d\varphi \\
&= -\frac{1}{\pi} (n + x \cos \varphi) \cdot \sin(n\varphi - x \sin \varphi) \Big|_0^{\pi} = 0,
\end{aligned}$$

本题获证。

3727. 设:

$$I(a) = \int_0^a \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{a-x}},$$

其中函数 $\varphi(x)$ 及其导函数 $\varphi'(x)$ 在闭区间 $0 \leq x \leq a$ 上连续。

证明: 当 $0 < a < a$ 时有

$$I'(a) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{a}} + \int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{a-x}} dx.$$

证 当 $x=a$ 时, 一般说来被积函数变成无穷, 所以我们不能直接在积分号下求导数. 设 $x=at$, 则此积分变成以下形式

$$I(a) = \sqrt{a} \int_0^1 \frac{\varphi(at)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

由于 $\frac{1}{\sqrt{1-t}}$ 在 $[0, 1]$ 上绝对可积, 故可利用积分号下求导数的公式. 于是,

$$I'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^1 \frac{\varphi(at)}{\sqrt{1-t}} dt$$

$$+ \sqrt{a} \int_0^1 \frac{t \varphi'(at)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

再将 $x=at$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \frac{1}{2\alpha} \int_0^a \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^a \frac{x \varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx. \end{aligned} \quad (1)$$

利用分部积分法可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\alpha} \int_0^a \frac{\varphi(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \varphi(0) + \frac{2}{\alpha} \int_0^a \sqrt{\alpha-x} \varphi'(x) dx. \end{aligned} \quad (2)$$

另一方面, 又有

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{x \varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx \\ &= - \int_0^a \sqrt{\alpha-x} \varphi'(x) dx \\ &\quad + \alpha \int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

将 (2) 式及 (3) 式代入 (1) 式, 最后得

$$I'(\alpha) = \frac{\varphi(0)}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^a \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\alpha-x}} dx.$$

3728. 设有函数

$$u(x) = \int_0^1 K(x, y) v(y) dy,$$

其中

$$K(x, y) = \begin{cases} x(1-y), & \text{若 } x \leq y, \\ y(1-x), & \text{若 } x > y, \end{cases}$$

及 $v(y)$ 都是连续的. 证明已知函数满足方程式

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

证 由题设得

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^x y(1-x)v(y)dy \\ &\quad + \int_x^1 x(1-y)v(y)dy. \end{aligned}$$

于是, 求导数即得

$$\begin{aligned} u'(x) &= x(1-x)v(x) - \int_0^x yv(y)dy \\ &\quad - x(1-x)v(x) + \int_x^1 (1-y)v(y)dy \\ &= - \int_0^x yv(y)dy + \int_x^1 (1-y)v(y)dy, \end{aligned}$$

$$u''(x) = -xv(x) - (1-x)v(x) = -v(x),$$

所以, 函数 $u(x)$ 满足方程

$$u''(x) = -v(x) \quad (0 \leq x \leq 1).$$

3729. 设:

$$F(x, y) = \int_y^{xy} (x-yz)f(z)dz,$$

其中 $f(z)$ 为可微分的函数, 求 $F''_{xy}(x, y)$.

解 $F'_x(x, y) = y(x - xy^2)f(xy) + \int_{\frac{x}{y}}^{xy} f(z)dz,$

$$\begin{aligned} F''_{xy}(x, y) &= (x - xy^2)f'(xy) \\ &\quad + y \cdot (-2xy)f(xy) \\ &\quad + y(x - xy^2)f'(xy) \cdot x \\ &\quad + xf(xy) + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right) \\ &= x(2 - 3y^2)f(xy) \\ &\quad + x^2y(1 - y^2)f'(xy) \\ &\quad + \frac{x}{y^2}f\left(\frac{x}{y}\right). \end{aligned}$$

3730. 设 $f(x)$ 为可微分两次的函数及 $F(x)$ 为可微分的函数. 证明: 函数

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}[f(x - at) + f(x + at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(z)dz \end{aligned}$$

满足弦振动的方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件: $u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = F(x)$.

证 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}[-af'(x - at) + af'(x + at)]$

$$+ \frac{1}{2}F(x + at) + \frac{1}{2}F(x - at),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{2} [a^2 f''(x-at) + a^2 f''(x+at)] \\ &\quad + \frac{a}{2} F'(x+at) - \frac{a}{2} F'(x-at). \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} [f'(x-at) + f'(x+at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} F(x+at) - \frac{1}{2a} F(x-at),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} [f''(x-at) + f''(x+at)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} F'(x+at) - \frac{1}{2a} F'(x-at). \quad (2)\end{aligned}$$

比较 (1) 式及 (2) 式, 即得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

此外, 还有

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= \frac{1}{2} [f(x-0 \cdot t) + f(x+0 \cdot t)] \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_{x-0 \cdot t}^{x+0 \cdot t} F(z) dz = f(x), \\ u'_t(x, 0) &= \frac{1}{2} [-a f'(x) + a f'(x)] \\ &\quad + \frac{1}{2} F(x) + \frac{1}{2} F(x) = F(x).\end{aligned}$$

本题获证.

3731. 证明: 若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, l]$ 上连续及当 $0 \leq \xi \leq l$ 时 $(x-\xi)^2 + y^2 + z^2 \neq 0$, 则函数

$$u(x, y, z) = \int_0^l \frac{f(\xi) d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2 + z^2}}$$

满足拉普拉斯方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

证 利用积分号下的求导法则, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= - \int_0^l \frac{2(x-\xi)f(\xi)d\xi}{2[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \int_0^l \frac{(x-\xi)f(\xi)d\xi}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \int_0^l \frac{f(\xi) \cdot [2(x-\xi)^2 - y^2 - z^2]}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi. \quad (1) \end{aligned}$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \int_0^l \frac{f(\xi) \cdot [-(x-\xi)^2 + 2y^2 - z^2]}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi, \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \int_0^l \frac{f(\xi) \cdot [-(x-\xi)^2 - y^2 + 2z^2]}{[(x-\xi)^2 + y^2 + z^2]^{\frac{5}{2}}} d\xi. \quad (3)$$

将 (1)、(2)、(3) 三式相加, 即证得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

应用对参数的微分法，计算下列积分：

$$3732. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

解 将 b 视为常数， a 视为参变量。令

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx.$$

先设 $a > 0$ ， $b > 0$ 。我们有

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a \sin^2 x}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} dx,$$

$$\text{若 } a=b, \text{ 有 } I'(b) = \frac{2}{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2b}.$$

若 $a \neq b$ ，则作代换 $t = \operatorname{tg} x$ ，得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(t^2+1) \left(t^2 + \frac{b^2}{a^2}\right)} \\ &= \frac{2}{a} \left(\frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} t \right. \\ &\quad \left. - \frac{b^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{a}{b} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{at}{b} \right) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{a+b}. \end{aligned}$$

因此

$$I'(a) = \frac{\pi}{a+b} \quad (0 < a < +\infty).$$

积分之，得

$$I(a) = \pi \ln(a+b) + C \quad (0 < a < +\infty),$$

其中 C 为某常数. 令 $a=b$, 得

$$I(b) = \pi \ln 2b + C,$$

而 $I(b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln b^2 dx = \pi \ln b$, 代入, 解之, 得

$$C = \pi \ln \frac{1}{2}. \text{ 于是,}$$

$$\begin{aligned} I(a) &= \pi \ln(a+b) + \pi \ln \frac{1}{2} \\ &= \pi \ln \frac{a+b}{2} \quad (0 < a < +\infty). \end{aligned}$$

若 $a < 0$ 或 $b < 0$, 则可化为 $a > 0$ 且 $b > 0$ 的情形, 得

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(|a|^2 \sin^2 x + |b|^2 \cos^2 x) dx \\ &= I(|a|) = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}. \end{aligned}$$

于是, 不论 a, b 是正是负, 在任何情形, 均有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x) dx = \pi \ln \frac{|a| + |b|}{2}.$$

$$3733. \int_0^{\pi} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx.$$

解 设 $I(a) = \int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx$. 当 $|a| < 1$ 时, 由于 $1 - 2a \cos x + a^2 \geq 1 - 2|a| + a^2 = (1 - |a|)^2 > 0$, 故 $\ln(1 - 2a \cos x + a^2)$ 为连续函数且具有连续导数, 从而可在积分号下求导数. 将 $I(a)$ 对 a 求导数, 得

$$\begin{aligned}
 I'(a) &= \int_0^\pi \frac{-2 \cos x + 2a}{1 - 2a \cos x + a^2} dx \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^\pi \left(1 + \frac{a^2 - 1}{1 - 2a \cos x + a^2} \right) dx \\
 &= \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a} \int_0^\pi \frac{dx}{(1 + a^2) - 2a \cos x} \\
 &= \frac{\pi}{a} - \frac{1 - a^2}{a(1 + a^2)} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \left(\frac{-2a}{1 + a^2} \right) \cos x} \\
 &= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} *) \\
 &= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a} \cdot \frac{\pi}{2} = 0.
 \end{aligned}$$

于是, 当 $|a| < 1$ 时, $I(a) = C$ (常数). 但是, $I(0) = 0$, 故 $C = 0$. 从而 $I(a) = 0$.

当 $|a| > 1$ 时, 令 $b = \frac{1}{a}$, 则 $|b| < 1$, 并有

$$I(b) = 0.$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned}
 I(a) &= \int_0^\pi \ln \left(\frac{b^2 - 2b \cos x + 1}{b^2} \right) dx \\
 &= I(b) - 2\pi \ln |b| \\
 &= -2\pi \ln |b| = 2\pi \ln |a|.
 \end{aligned}$$

当 $|a| = 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 I(1) &= \int_0^\pi \ln 2 (1 - \cos x) dx \\
 &= \int_0^\pi \left(\ln 4 + 2 \ln \sin \frac{x}{2} \right) dx \\
 &= 2\pi \ln 2 + 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t dt \\
 &= 2\pi \ln 2 + 4 \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right)^{**}) \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

同法可求得 $I(-1) = 0$.

综上所述, 故知

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2a \cos x + a^2) dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } |a| \leq 1; \\ 2\pi \ln |a|, & \text{当 } |a| > 1. \end{cases}$$

*) 利用2028题(a)的结果.

***) 利用2353题(a)的结果.

3734. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} dx.$

解. 令 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x, a) dx$, 其中 $f(x, a) = \frac{\arctg(a \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}$. 本来 $f(x, a)$ 在 $x=0$ 和 $x = \frac{\pi}{2}$ 时

无定义, 但因 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x, a) = a$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} f(x, a) = 0$,

故若补充定义 $f(0, a) = a, f(\frac{\pi}{2}, a) = 0$, 则 $f(x, a)$

为 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty$ 上的连续函数.

又当 $0 < x < \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} f'_x(x, a) &= \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{\operatorname{tg} x}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \frac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}. \end{aligned}$$

而按规定 $f(0, a) = a, f(\frac{\pi}{2}, a) = 0$, 故

$$f'_x(0, a) = 1, \quad f'_x(\frac{\pi}{2}, a) = 0.$$

由此可知

$$f'_a(x, a) = \begin{cases} \frac{1}{1 + a^2 \operatorname{tg}^2 x}, & \text{当 } 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, -\infty < a < \\ & +\infty \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x = \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty \text{ 时.} \end{cases}$$

显然 $f_0(x, a)$ 在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 < a < +\infty$ 上连续,

在 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $-\infty < a < 0$ 上也连续 (注意, 在点

$x = \frac{\pi}{2}$, $a = 0$ 不连续), 故由积分号下求导数法则知

$$I'(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x}$$

($0 < a < +\infty$ 或 $-\infty < a < 0$).

作代换 $\operatorname{tg} x = t$, 得 (当 $a^2 \neq 1$ 时)

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+a^2 t^2)} \\ &= \frac{1}{1-a^2} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{a^2}{a^2 t^2 + 1} \right) dt \\ &= \frac{\pi}{2(1+|a|)}. \end{aligned}$$

若 $a^2 = 1$, 则

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 x} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2x) \, dx = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

总之, 有

$$I'(a) = \frac{\pi}{2(1+|a|)}$$

($0 < a < +\infty$ 或 $-\infty < a < 0$),

积分之, 得

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \ln(1+a) + C_1 \quad (0 < a < +\infty),$$

$$I(a) = -\frac{\pi}{2} \ln(1-a) + C_2 \quad (-\infty < a < 0),$$

其中 C_1, C_2 是两个常数. 由于上面已述 $f(x, a)$ 在

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, -\infty < a < +\infty$ 上连续, 故 $I(a)$ 在 $-\infty <$

$a < +\infty$ 上连续, 因此 $\lim_{a \rightarrow 0+0} I(a) = \lim_{a \rightarrow 0-0} I(a) = I(0)$;

但 $I(0) = 0$, $\lim_{a \rightarrow 0+0} I(a) = C_1$, $\lim_{a \rightarrow 0-0} I(a) = C_2$,

故 $C_1 = C_2 = 0$. 于是, 最后得

$$I(a) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} a \ln(1+|a|) \quad (-\infty < a < +\infty).$$

3735. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \quad (|a| < 1).$

解 解法一

设 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x}$. 由于

$$\frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} = \frac{1-a^2 \cos^2 x}{1-2a \cos x + a^2 \cos^2 x}$$

$$\geq \frac{1-a^2}{1+2|a|+a^2}$$

$$= \frac{1-a^2}{(1+|a|)^2} > 0,$$

故 $\ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x}$ 为连续函数. 又由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{\cos x} \cdot \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+at) - \ln(1-at)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{a}{1+at} - \frac{-a}{1-at}}{1} = 2a, \end{aligned}$$

今补充被积函数在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的值为 $2a$, 即易知被积函数为连续函数, 且它对 a 有连续导数, 从而可在积分号下求导数, 得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+a \cos x} + \frac{1}{1-a \cos x} \right) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \left[\arctg \left(\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \arctg \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2} *} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}, \end{aligned}$$

从而 $I(a) = \pi \arcsin a + C$ ($|a| < 1$). 又 $I(0) = 0$, 故 $C = 0$.

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \pi \arcsin a \quad (|a| < 1).$$

*) 利用2028题(a)的结果.

解法二

把被积函数表成下述积分形式

$$\frac{1}{\cos x} \cdot \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} = 2a \int_0^1 \frac{dy}{1-a^2 y^2 \cos^2 x}.$$

注意, 此式当 $x = \frac{\pi}{2}$ 时也成立, 此时左端应理解为其极限值

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0} \frac{1}{\cos x} \cdot \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} = 2a.$$

于是, 当 $a \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} \\ &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^1 \frac{dy}{1-a^2 y^2 \cos^2 x} \\ &= 2a \int_0^1 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 y^2 \cos^2 x} \\ &= 2a \int_0^1 \frac{\pi}{2 \sqrt{1-a^2 y^2}} dy \quad (**) \\ &= \pi a \cdot \frac{1}{a} \arcsin ay \Big|_0^1 = \pi \arcsin a; \end{aligned}$$

当 $a = 0$ 时, 原积分显然为零. 因此,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a \cos x}{1-a \cos x} \cdot \frac{dx}{\cos x} = \pi \operatorname{arc} \sin a \quad (|a| < 1).$$

**) 利用 2028 题(a) 的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-a^2 y^2 \cos^2 x} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{1+ay \cos x} + \frac{1}{1-ay \cos x} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-a^2 y^2}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1-ay}{1+ay}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1+ay}{1-ay}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{1-a^2 y^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2 \sqrt{1-a^2 y^2}}. \end{aligned}$$

3736. 利用公式

$$\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} = \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2},$$

计算积分 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

解 $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 \frac{dy}{1+x^2 y^2}.$$

由于函数 $\frac{1}{1+x^2 y^2}$ 在 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上连

续, 且 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $[0, 1]$ 上绝对可积, 故上述积分号可交换

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

作代换 $x = \cos t$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}(1+x^2y^2)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+y^2\cos^2 t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+y^2}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

于是, 由 (1) 式及 (2) 式即得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \int_0^1 \frac{\pi dy}{2\sqrt{1+y^2}} = \frac{\pi}{2} \ln(y + \sqrt{1+y^2}) \Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

3737. 应用积分符号下的积分法, 计算积分

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 首先注意, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} = 0,$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^b - x^a}{\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{bx^{b-1} - ax^{a-1}}{x^{-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-0} (bx^b - ax^a) = b - a, \end{aligned}$$

故 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ 不是广义积分, 并且, 如果补充定义被积函数在 $x=0$ 时的值为 0, 在 $x=1$ 时的值为 $b-a$, 则可理解为 $[0, 1]$ 上连续函数的积分. 由于

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy \quad (0 \leq x \leq 1)$$

(注意, $x=0$ 时左端规定为 0, $x=1$ 时左端规定为 $b-a$), 而函数 x^y 在 $0 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b$ 上连续 (不妨设 $a < b$), 故有

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx \\ &= \int_a^b \frac{dy}{1+y} = \ln \frac{1+b}{1+a}. \end{aligned}$$

3738. 计算积分:

$$(a) \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx;$$

$$(b) \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 (a) 不妨设 $a < b$.

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) dx \int_a^b x^y dy \\ &= \int_a^b dy \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx, \end{aligned}$$

这里, 当 $x=0$ 时, $\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$ 理解为零, 从而

$\sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y$ 在 $0 \leq x \leq 1$, $a \leq y \leq b$ 上连续, 故可

应用积分号下的积分法交换积分次序.

作代换 $x=e^{-t}$, 可得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(y+1)t} \sin t dt \\ &= \frac{1}{1+(1+y)^2} [- (y+1) \sin t \\ & \quad - \cos t] e^{-(y+1)t} \Big|_0^{+\infty} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1+(1+y)^2}.$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sin\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_a^b \frac{dy}{1+(1+y)^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1+y) \Big|_a^b \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1+b) - \operatorname{arc} \operatorname{tg}(1+a) \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{b-a}{1+(1+b)(1+a)}. \end{aligned}$$

(6) 同(a)并利用1828题的结果易得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \\ &= \int_a^b dy \int_0^1 \cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) x^y dx \\ &= \int_a^b \frac{1+y}{1+(1+y)^2} dy = \frac{1}{2} \ln[1+(1+y)^2] \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}. \end{aligned}$$

*) 利用1829题的结果.

3739. 设 $F(k)$ 和 $E(k)$ 为完全椭圆积分 (参阅问题3725). 证明公式

$$(a) \int_0^k F(k) k dk = E(k) - k^2 F(k);$$

$$(6) \int_0^k E(k)k dk = \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)],$$

其中 $k_1^2 = 1 - k^2$.

证 (a) 利用3725题的结果, 可得

$$\begin{aligned} & [E(k) - k_1^2 F(k)]' \\ &= E'(k) + 2k F(k) - (1 - k^2)F'(k) \\ &= \frac{E(k) - F(k)}{k} + 2k F(k) \\ &\quad - (1 - k^2) \left[\frac{E(k)}{k(1 - k^2)} - \frac{F(k)}{k} \right] \\ &= k F(k). \end{aligned}$$

于是,

$$E(k) - k_1^2 F(k) = \int_0^k k F(k) dk + C,$$

其中 C 为常数. 但当 $k=0$ 时, 上式左端为 $E(0) - F(0) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$, 而右端等于 C , 故 $C=0$. 最后证得

$$\int_0^k k F(k) dk = E(k) - k_1^2 F(k).$$

(6) 由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}[(1+k^2)E(k) - k_1^2 F(k)]' \\ &= \frac{1}{3}[2k E(k) + (1+k^2)E'(k) + 2k F(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(1-k^2)F'(k)] \\
&= \frac{1}{3} \left\{ 2k E(k) + (1+k^2) \cdot \frac{E(k) - F(k)}{k} \right. \\
&\quad \left. + 2k F(k) - (1-k^2) \cdot \left[\frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{F(k)}{k} \right] \right\} \\
&= k E(k),
\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{3} [(1+k^2)E(k) - k^2 F(k)] = \int_0^k k E(k) dk + C,$$

以 $k=0$ 代入上式, 得 $C=0$. 于是, 最后证得

$$\int_0^k k E(k) dk = \frac{1}{3} [(1+k^2)E(k) - k^2 F(k)].$$

3740. 证明公式

$$\int_0^x x J_0(x) dx = x J_1(x),$$

其中 $J_0(x)$ 及 $J_1(x)$ 为足指数是 0 与 1 的贝塞耳函数
(参阅问题 3726) .

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad \int_0^x u J_0(u) du &= \frac{1}{\pi} \int_0^x u du \int_0^\pi \cos(-u \sin \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x u du \int_0^\pi [\cos(\varphi - u \sin \varphi) \cos \varphi \\
&\quad + \sin(\varphi - u \sin \varphi) \sin \varphi] d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi u \cos(\varphi - u \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi u \sin(\varphi - u \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d(u \sin \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x d\varphi \int_0^x u \sin(\varphi - u \sin \varphi) d(u \sin \varphi - \varphi) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d(u \sin \varphi - \varphi) \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x d\varphi \int_0^x u d \cos(\varphi - u \sin \varphi) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x x \cos(\varphi - x \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^x d\varphi \int_0^x \cos(\varphi - u \sin \varphi) du \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^x x \cos(\varphi - x \sin \varphi) d\varphi \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^x du \int_0^\pi \cos(\varphi - u \sin \varphi) d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^x x \cos(\varphi - x \sin \varphi) d\varphi = x J_1(x),
\end{aligned}$$

上述各式中的被积函数显然为 u 及 φ 的二元连续函数，因此，交换积分顺序是合理的。本题获证。

§ 2. 带参数的广义积分. 积分的一致收敛性

1° 一致收敛性的定义 若对于任何的 $\varepsilon > 0$, 都存在有数 $B = B(\varepsilon)$, 使得在 $b \geq B$ 的条件下有

$$\left| \int_b^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (y_1 < y < y_2),$$

则称广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (1)$$

(其中函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$ 内是连续的) 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛.

积分 (1) 的一致收敛与形状如下的一切级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y) dx \quad (2)$$

(其中 $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$)

的一致收敛等价.

若积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 中一致收敛, 则在这个区间内它是参数 y 的连续函数.

2° 哥西判别法则 积分 (1) 在区间 (y_1, y_2) 内一致收敛的充分而且必要的条件为, 对于任何的 $\varepsilon > 0$ 便存在有数 $B = B(\varepsilon)$, 使得只要是 $b' > B$ 及 $b'' > B$ 则

$$\text{当 } y_1 < y < y_2 \text{ 时 } \left| \int_{b'}^{b''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon.$$

3° 外尔什特拉斯判别法 对于积分 (1) 一致收敛的

充分条件为, 与参数 y 无关的强函数 $F(x)$ 存在, 使得

$$(1) \text{ 当 } a \leq x < +\infty \text{ 时 } |f(x, y)| \leq F(x)$$

及

$$(2) \int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty.$$

4° 对于不连续函数的广义积分有类似的定理.

求积分的收敛域:

$$3741. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx.$$

解 当 $a \geq 0$ 时,

$$\frac{e^{-ax}}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2},$$

故原积分收敛.

当 $a < 0$ 时, 原积分显然发散. 于是, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}}{1+x^2} dx \text{ 的收敛域为 } a \geq 0 \text{ 的一切 } a \text{ 值.}$$

$$3742. \int_x^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p + x^q} dx.$$

解 首先注意

$$\left(\frac{x}{x^p + x^q} \right)' = \frac{(1-p)x^p + (1-q)x^q}{(x^p + x^q)^2}.$$

若 $\max(p, q) > 1$, 则显然当 x 充分大时, $\left(-\frac{x}{x^p+x^q}\right)' < 0$, 从而当 x 充分大时函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 是递减的, 并且很明显, 这时

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^p+x^q} = 0.$$

又因 $\left| \int_x^A \cos x dx \right| = |\sin A| \leq 1$ (对任何 $A > \pi$),

故知 $\int_x^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p+x^q} dx$ 收敛.

若 $\max(p, q) \leq 1$, 则恒有 $\left(\frac{x}{x^p+x^q}\right)' \geq 0$,

故函数 $\frac{x}{x^p+x^q}$ 在 $x \geq \pi$ 上是递增的, 于是, 对于任何正整数 n , 有

$$\begin{aligned} & \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{x \cos x}{x^p+x^q} dx \\ & \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{x}{x^p+x^q} dx \\ & \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{\pi^p+\pi^q} \cdot \frac{\pi}{4} \\ & = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{8(\pi^p+\pi^q)} = \text{常数} > 0, \end{aligned}$$

故不满足柯西收敛准则, 因此积分 $\int_x^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^p+x^q} dx$

发散.

$$3743. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx.$$

解 若 $q = 0$, 则由于积分 $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$ 仅当 $p > 1$ 时收敛, 而积分 $\int_0^A \frac{1}{x^p} dx$ 仅当 $p < 1$ 时收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 1}{x^p} dx$ 对于任何的 p 值及 $q = 0$ 发散.

若 $q \neq 0$, 则积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x^q}{x^p} dx = \int_0^{+\infty} x^{-p} \sin x^q dx,$$

利用 2380 题的结果即知: 当 $\left| \frac{1-p}{q} \right| < 1$ 时, 原积分收敛.

$$3744. \int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}.$$

解 考虑积分

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{|\ln x|^p} &= \int_0^1 \frac{dx}{\ln^p\left(\frac{1}{x}\right)} \\ &= \int_0^1 \ln^{-p}\left(\frac{1}{x}\right) dx, \end{aligned}$$

利用 2362 题的结果即知: 它当 $-p > -1$ 或 $p < 1$ 时收敛.

再考虑积分

$$\int_1^2 \frac{dx}{|\ln x|^p} = \int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}.$$

由于

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+0} (x-1)^p \cdot \frac{1}{\ln^p x} &= \left[\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{\ln x} \right]^p \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x^{-1}} \right]^p = 1, \end{aligned}$$

故积分 $\int_1^2 \frac{dx}{\ln^p x}$ 与积分 $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^p}$ 具有相同的敛散性，而后者显然当 $p < 1$ 时收敛， $p \geq 1$ 时发散，从而前者亦然。

于是，仅当 $p < 1$ 时，积分

$$\int_0^2 \frac{dx}{|\ln x|^p}$$

收敛。

$$3745. \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx.$$

$$\text{解 } \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx = \int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x} \cdot \sqrt[n]{1+x}} dx.$$

由于当 $0 \leq x \leq 1$ 时，对于任意的 n ， $\sqrt[n]{1+x}$ 与

$\frac{1}{\sqrt[n]{1-x}}$ 都是单调有界函数，故原积分与积分

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}} dx$$

同敛散. 对此积分作代换 $t = \frac{1}{1-x}$, 则得

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x}} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^{2-\frac{1}{n}}} dt.$$

易知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^a} dt$ 仅当 $a > 0$ 时收敛. 事实上, 当 $a > 0$ 时它显然收敛. 当 $a = 0$ 时它显然发散. 当 $a < 0$ 时, 令 $\beta = -a$ ($\beta > 0$), 则对于正整数 n 有

$$\begin{aligned} & \int_{2n\pi}^{2n\pi + \frac{\pi}{4}} t^\beta \cos t dt \\ & \geq (2n\pi)^\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\pi}{4} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty), \end{aligned}$$

故积分 $\int_1^{+\infty} t^\beta \cos t dt$ 发散.

于是, 积分

$$\int_0^1 \frac{\cos \frac{1}{1-x}}{\sqrt[n]{1-x^2}} dx$$

仅当 $2 - \frac{1}{n} > 0$ 时收敛, 即仅当 $n < 0$ 或 $n > \frac{1}{2}$ 时收敛.

$$3746. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx \quad (p > 0).$$

解 因为

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{x^{p-1} + \frac{\sin x}{x}} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{当 } p > 1 \text{ 时;} \\ \frac{1}{2}, & \text{当 } p = 1 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } 0 < p < 1 \text{ 时,} \end{cases} \end{aligned}$$

故 $x = 0$ 不是积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ 的瑕点, 因此,

只要讨论积分 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p + \sin x} dx$ ($p > 0$) 的敛散性.

由于

$$\frac{\sin x}{x^p + \sin x} = \frac{\sin x}{x^p} - \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)},$$

而 $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p} dx$ 收敛 (当 $p > 0$ 时), 故只要讨论

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} dx$$

的敛散性. 但当 $p > 0$, $x \geq 2$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x^p(x^p + 1)} - \frac{\cos 2x}{x^p(x^p + 1)} \right] \\ &= \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + 1)} \leq \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p + \sin x)} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p-1)} \leq \frac{1}{x^p(x^p-1)}.$$

而易知 $\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^p(x^p+1)} dx$ 恒收敛 (当 $p > 0$ 时), 积

分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p+1)}$ 当 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 时发散, 积分

$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x^p-1)}$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 故积分

$\int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^p(x^p+\sin x)} dx$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, 当 $0 < p$

$\leq \frac{1}{2}$ 时发散. 由此可知, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p+\sin x} dx$

($p > 0$) 仅当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛.

利用与级数比较的方法研究下列积分的收敛性:

3747. $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx.$

解 设 $a > 0$. 我们证明: 对任何数列

$$0 = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots \quad (a_n \rightarrow +\infty),$$

级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 都收敛. 事实上, 有

$$\begin{aligned} & \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx \\ &= \frac{\sin x}{x+a} \Big|_{a_n}^{a_{n+1}} + \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\sin x}{(x+a)^2} dx, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \sum_{n=m}^{m+p-1} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx \\ &= \frac{\sin a_{m+p}}{a_{m+p}+a} - \frac{\sin a_m}{a_m+a} + \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{\sin x}{(x+a)^2} dx, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=m}^{m+p-1} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx \right| \\ & \leq \frac{1}{a_{m+p}+a} + \frac{1}{a_m+a} + \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{dx}{(x+a)^2} \\ &= \frac{1}{a_{m+p}+a} + \frac{1}{a_m+a} + \left(\frac{1}{a_m+a} - \frac{1}{a_{m+p}+a} \right) \\ &= \frac{2}{a_m+a}, \end{aligned}$$

由此可知, 满足柯西收敛准则, 从而级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 收敛, 因此, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 收敛。

若 $a=0$, 显然瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x} dx$ 发散, 故广

义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 发散。

下设 $a < 0$. 若 $a = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$),

则

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx \\
&= \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x+a} dx + \int_{(n+1)\pi}^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx \\
&= \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\cos x}{x+a} dx + (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t+\frac{\pi}{2}} dt.
\end{aligned}$$

由上所证，右端第二个积分收敛；又由于

$$\lim_{x \rightarrow (n+\frac{1}{2})\pi} \frac{\cos x}{x+a} = (-1)^{n+1},$$

故右端第一个积分收敛（它不是广义积分，补充定义被积函数在 $x = (n + \frac{1}{2})\pi$ 时的值为 $(-1)^{n+1}$ 后即为

连续函数的积分）；从而，此时积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 收敛。

若 $a < 0$ 但 $a \neq -(n + \frac{1}{2})\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$)，此时 $\cos(-a) \neq 0$ 。由连续性，可取 $\delta > 0$ ，使当 $-a \leq x \leq -a + \delta$ 时 $\cos x$ 保持定号且

$$|\cos x| \geq \frac{1}{2} |\cos(-a)|.$$

于是，

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{\cos x}{x+a} dx \right| \\
& \geq \frac{1}{2} |\cos(-a)| \cdot \int_{-a}^{-a+\delta} \frac{dx}{x+a} = +\infty.
\end{aligned}$$

由此可知，瑕积分 $\int_{-a}^{-a+b} \frac{\cos x}{x+a} dx$ 发散。从而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx \text{ 更是发散。}$$

综上所述，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x+a} dx$$

仅当 $a > 0$ 及 $a = -\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)

时收敛。

3748. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \quad (n > 0)$.

解 由于被积函数非负，故只要考虑化为一种特殊的（正项）级数即可。我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \\ & \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} . \end{aligned}$$

又积分

$$0 \leq \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{k\pi dx}{1 + [(k-1)\pi]^n \sin^2 x}, \\
& \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{(k-1)\pi dx}{1 + [(k+1)\pi]^n \sin^2 x} \\
& \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1 + x^n \sin^2 x} \\
& \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{(k+1)\pi dx}{1 + [(k-1)\pi]^n \sin^2 x},
\end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
& \int_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} \\
& = \frac{-1}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{1+a^2}} \right) \Big|_{(k-1)\pi + \frac{\pi}{4}}^{k\pi - \frac{\pi}{4}} \\
& = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \leftarrow \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \cdot \frac{\pi}{4} \\
& = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}, \\
& \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1 + a^2 \sin^2 x} \\
& = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arc\,tg} (\sqrt{1+a^2} \operatorname{tg} x) \Big|_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \\
& = \frac{2}{\sqrt{1+a^2}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{1+a^2}.
\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\pi}{4} < \arctg \sqrt{1+a^2} < \frac{\pi}{2},$$

从而

$$\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}} < \int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2 x} < \frac{\pi}{\sqrt{1+a^2}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} 0 &< \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} \\ &< \frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}, \\ &\frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}} \\ &< \int_{k\pi-\frac{\pi}{4}}^{k\pi+\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x} < \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}. \end{aligned}$$

由于当 $n > 4$ 时, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi^2}{2\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 及

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)\pi^2}{\sqrt{1+[(k-1)\pi]^n}}$ 收敛; 而当 $n \leq 4$ 时, 级数

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\pi^2}{2\sqrt{1+[(k+1)\pi]^n}}$ 发散, 故级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{(k-1)\pi+\frac{\pi}{4}}^{k\pi-\frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

当 $n > 4$ 时收敛, 而级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi - \frac{\pi}{4}}^{k\pi + \frac{\pi}{4}} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

仅当 $n \geq 4$ 时收敛.

因此, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^n \sin^2 x}$$

仅当 $n \geq 4$ 时收敛.

3749.
$$\int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}.$$

解 由于被积函数非负, 故只要考虑化为一种特殊的 (正项) 级数即可. 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{dx}{(x+n\pi)^p \sqrt[3]{\sin^2 x}}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p \pi^p} \\ & \leq \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^p \sqrt[3]{\sin^2 x}} \\ & \leq \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p \pi^p}. \end{aligned}$$

易证积分

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

收敛，且级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

当 $p > 1$ 时收敛；当 $p \leq 1$ 时发散。因此，原积分仅当 $p > 1$ 时收敛。

3750. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx.$

解 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx. \end{aligned}$$

易知右端第一个积分 ($x=0$ 可能是瑕点) 当 $n < 2$ 时收敛, 当 $n \geq 2$ 时发散. 下面研究右端第二个积分. 先设 $n > -1$. 对任何数列

$$1 = a_0 < a_1 < \dots < a_k < \dots \quad (a_k \rightarrow +\infty),$$

$$\begin{aligned} & \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ &= - \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{d[\cos(x+x^2)]}{x^n(1+2x)} \\ &= - \frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)} \Big|_{a_k}^{a_{k+1}} \end{aligned}$$

$$- \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{[2(n+1)x+n] \cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx,$$

故

$$\begin{aligned} & \sum_{k=m}^{m+p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ &= - \frac{\cos(x+x^2)}{x^n(1+2x)} \Big|_{a_m}^{a_{m+p}} \\ &= \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{[2(n+1)x+n] \cos(x+x^2)}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=m}^{m+p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2a_m^{n+1}} + \frac{1}{2a_{m+p}^{n+1}} + \int_{a_m}^{a_{m+p}} \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx. \end{aligned}$$

易知积分 $\int_1^{+\infty} \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2} dx$ 收敛 (因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{n+2} \cdot \frac{2(n+1)x+|n|}{x^{n+1}(1+2x)^2} = \frac{n+1}{2} > 0,$$

$n+2 > 1$) .

由此可知, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 必存在 N , 使当 $n > N$ 时, 对 $p=1, 2, 3, \dots$, 均有

$$\left| \sum_{k=m}^{m+p-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \right| < \varepsilon.$$

于是, 根据柯西收敛准则, 级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$$

收敛, 从而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$ 收敛.

再设 $n \leq -1$. 令 ξ_k 和 η_k 分别表方程 $x^2+x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}$ 和 $x^2+x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 的 (唯一) 正根, 其中 $k=1, 2, 3, \dots$; 即令

$$\xi_k = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+\pi} - 1),$$

$$\eta_k = \frac{1}{2}(\sqrt{1+8k\pi+2\pi} - 1).$$

于是 $\eta_k > \xi_k \rightarrow +\infty$ (当 $k \rightarrow \infty$ 时). 我们有 (注意 $-n \geq 1$)

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_k}^{\eta_k} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\xi_k}^{\eta_k} x^{-n} dx \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\xi_k}^{\eta_k} x dx \\ & \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \xi_k (\eta_k - \xi_k) \\ & = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{1+8k\pi+\pi} - 1}{\sqrt{1+8k\pi+2\pi} + \sqrt{1+8k\pi+\pi}} \\ & \rightarrow \frac{\pi}{8\sqrt{2}} \quad (\text{当 } k \rightarrow \infty \text{ 时}). \end{aligned}$$

由此可知, 此时积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$ 发散.

综上所述，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+x^2)}{x^n} dx$$

仅当 $-1 < n < 2$ 时收敛。

3751. 在肯定的意义上表达出来，甚么是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在已知区间 (y_1, y_2) 内不一致收敛？

解 若对于某个正数 ε_0 ，不论 B 取得多大，恒存在 $b_0 \geq B$ 以及 $y_0 \in (y_1, y_2)$ (b_0 与 y_0 都依赖于 B)，使得

$$\left| \int_{b_0}^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \geq \varepsilon_0,$$

则 $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在区间 (y_1, y_2) 内不一致收敛。

3752. 证明：若 1) 积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx$$

收敛，2) 函数 $\varphi(x, y)$ 有界并关于 x 是单调的，则积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) \varphi(x, y) dx$$

一致收敛（在对应的域内）。

证 设 $|\varphi(x, y)| \leq L$ ，则由题设 1) 知：对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，总存在数 $B = B(\varepsilon)$ ，使当 $A' > A > B$ 时，就

有不等式

$$\left| \int_A^{A'} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}. \quad (1)$$

由积分第二中值定理知：存在 $\xi \in (A, A')$ ，使有下述等式

$$\begin{aligned} & \int_A^{A'} f(x)\varphi(x, y)dx \\ &= \varphi(A+0, y) \cdot \int_A^{\xi} f(x)dx \\ & \quad + \varphi(A'-0, y) \cdot \int_{\xi}^{A'} f(x)dx. \end{aligned} \quad (2)$$

由 (1) 式，得

$$\left| \int_A^{\xi} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}, \quad \left| \int_{\xi}^{A'} f(x)dx \right| < \frac{\varepsilon}{2L}.$$

于是，由 (2) 式，可得

$$\begin{aligned} & \left| \int_A^{A'} f(x)\varphi(x, y)dx \right| \\ & \leq L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} + L \cdot \frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\varphi(x, y)dx$ 在对应的 y 域内一致收敛。

3753. 证明：一致收敛的积分

$$I = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \quad (0 < y < 1)$$

不能以与参数无关的收敛积分为强函数.

证 任给 $\varepsilon > 0$. 取 $A_0 > 1$ 充分大, 使

$$\int_{A_0 - \frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon.$$

下证: 当 $A > A_0$ 时, 对一切 $0 < y < 1$, 均有

$$\int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx < \varepsilon.$$

事实上, 当 $\frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}} \leq y < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx &< \int_A^{+\infty} e^{-\left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \\ &= \int_{A - \frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-u^2} du \leq \int_{A - \frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &< \int_{A_0 - \frac{\sqrt{x}}{\varepsilon}}^{+\infty} e^{-u^2} du < \varepsilon; \end{aligned}$$

当 $0 < y < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$ 时,

$$\begin{aligned} \int_A^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx &< \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{y}} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{1}{y}}^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx \\
& = \int_0^{1-\frac{1}{y}} e^{-\frac{1}{y^2} t^2} dt + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} t^2} dt \\
& < 2 \int_0^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{y^2}} dt = 2y \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \\
& = 2y \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

由此可知, 积分 $\int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} dx$ 在 $0 < y < 1$ 上一致收敛.

最后证明, 不存在这样的函数 $\varphi(x)$ ($x \geq 1$), 使

$$\begin{aligned}
0 < e^{-\frac{1}{y^2} \left(x - \frac{1}{y}\right)^2} \leq \varphi(x) \\
(x \geq 1, 0 < y < 1), \quad (1)
\end{aligned}$$

并且 $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ 收敛. 用反证法. 假定有这样的函数

$\varphi(x)$ 存在, 则由 $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ 的收敛性可知, 必

存在点 $x_0 > 1$ 使 $\varphi(x_0) < 1$. 于是, 令 $y_0 = \frac{1}{x_0}$,

则 $0 < y_0 < 1$ 且

$$e^{-\frac{1}{y_0^2} \left(x_0 - \frac{1}{y_0}\right)^2} = 1 > \varphi(x_0),$$

此显然与 (1) 式矛盾. 由此可知, 一致收敛的积分

I 的被积函数不能以与参数 y 无关的具收敛积分的函数为强函数。证毕。

3754. 证明：积分

$$I = \int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx$$

1) 在任何区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 内一致收敛；2) 在区间 $0 \leq \alpha \leq b$ 内非一致收敛。

证 显然，积分 I 对于每一个定值 $a \geq 0$ 是收敛的。

事实上，当 $a = 0$ 时， $\int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx = 0$ ；当 $a > 0$

时， $\int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx = -e^{-ax} \Big|_0^{+\infty} = 1$ 。

1) 如果 $0 < a \leq \alpha \leq b$ ，则由于

$$0 < \int_A^{+\infty} a e^{-ax} dx = e^{-aA} \leq e^{-aA},$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$ ，可以找到不依赖于 a 的数

$A_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{1}{\varepsilon}$ ，使当 $A > A_0$ 时，就有

$$\int_A^{+\infty} a e^{-ax} dx < e^{-aA_0} = \varepsilon.$$

于是，在区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 上积分 I 一致收敛。

2) 如果 $0 \leq \alpha \leq b$ ，则不存在这样的数 A_0 。事实上，取 $0 < \varepsilon < 1$ 就办不到。由于当 $a \rightarrow +0$ 时， $e^{-Aa} \rightarrow 1$ ，故对于足够小的 a 值， e^{-Aa} 就比任意一个小于 1 的数 ε 为大。因此，在区间 $0 \leq \alpha \leq b$ 上，积

分 I 对 α 的收敛是不一致的。

3755. 证明迪里黑里积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

1) 在每一个不含数值 $\alpha=0$ 的闭区间 $[a, b]$ 上一致收敛, 2) 在含数值 $\alpha=0$ 的每一个闭区间 $[a, b]$ 上非一致收敛。

证 不失一般性, 我们只考虑 α 的正值。

1) 由于积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}$$

是收敛的, 故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在数 A_0 , 使当 $A > A_0$ 时, 恒有

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz \right| < \varepsilon.$$

当 $\alpha > 0$ 时, 由于

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{A\alpha}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz,$$

故取 $A > \frac{A_0}{\alpha}$, 对于 $\alpha \geq a > 0$, 就有

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx \right| < \varepsilon.$$

于是, 在区间 $0 < a \leq \alpha \leq b$ 上, 积分 I 是一致收敛的。

2) 对于任何的 $A > 0$, 当 $\alpha \rightarrow +0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_A^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx \\ &= \int_{Aa}^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin z}{z} dz = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

因此, 当 $a > 0$ 且充分小时, 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\sin ax}{x} dx > \frac{\pi}{4}.$$

于是, 在区间 $0 \leq a \leq b$ ($b > 0$) 上, 积分 I 不一致收敛.

研究下列积分在所指定区间内的一致收敛性:

3756. $\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx \quad (0 < a_0 \leq a < +\infty).$

解 由于当 $0 < a_0 \leq a < +\infty$ 时,

$$|e^{-ax} \sin x| \leq e^{-a_0 x},$$

且积分 $\int_0^{+\infty} e^{-a_0 x} dx = \frac{1}{a_0}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin x dx$$

在区间 $0 < a_0 \leq a < +\infty$ 上一致收敛.

3757. $\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx \quad (a \leq a \leq b).$

解 当 $a \leq a \leq b$ 且 $x \geq 1$ 时,

$$0 < x^a e^{-x} \leq x^b e^{-x}.$$

由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot x^b e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{b+2}}{e^x} = 0,$$

故积分 $\int_1^{+\infty} x^b e^{-x} dx$ 收敛. 从而积分

$$\int_1^{+\infty} x^a e^{-x} dx$$

在区间 $a \leq a \leq b$ 上一致收敛.

$$3758. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx \quad (-\infty < a < +\infty).$$

解 由于 $\left| \frac{\cos ax}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ 收敛, 故积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$$

在 $-\infty < a < +\infty$ 上一致收敛.

$$3759. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)^2+1} \quad (0 \leq a < +\infty).$$

解 由于 $0 < \frac{1}{(x+a)^2+1} \leq \frac{1}{1+x^2}$ ($0 \leq a < +\infty$),

且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)^2+1}$$

在 $0 \leq a < +\infty$ 上一致收敛.

3760. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \quad (0 \leq a < +\infty).$

解 首先注意, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} = 1,$$

故 $x=0$ 不是瑕点.

证法一

由于 $\left| \int_0^A \sin x dx \right| = |1 - \cos A| \leq 2$, 而当 $0 \leq a < +\infty$ 时, 函数 $\frac{e^{-ax}}{x}$ 在 $x > 0$ 关于 x 递减, 并且当 $x \rightarrow +\infty$ 时它关于 a ($0 \leq a < +\infty$) 一致趋于零 (因为 $0 \leq a < +\infty$, $x > 0$ 时, $0 < \frac{e^{-ax}}{x} \leq \frac{1}{x}$), 故由

迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$ 在 $0 \leq a < +\infty$ 上一致收敛.

证法二

由积分学第二中值定理知: 当 $A' > A > 0$ 时,

$$\left| \int_A^{A'} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \right| = \left| \frac{1}{A} \int_A^{\xi} e^{-ax} \sin x dx \right|,$$

其中 $A \leq \xi \leq A'$. 我们知道 $e^{-ax} \sin x$ 的原函数是

$$F_a(x) = -\frac{\alpha \sin x + \cos x}{1 + \alpha^2} e^{-ax},$$

显然, 当 $\alpha \geq 0$, $x > 0$ 时,

$$|F_a(x)| \leq \frac{\alpha+1}{1+\alpha^2} \leq \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{1+\alpha^2} < 2,$$

故当 $A' > A > 0$, $0 \leq \alpha < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_A^{A'} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{A} (F_a(\xi) - F_a(A)) \right| < \frac{4}{A}. \end{aligned}$$

由此, 利用一致收敛的哥西收敛准则, 即知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} e^{-ax} dx$$

在 $0 \leq \alpha < +\infty$ 上一致收敛. 证毕.

3761. $\int_1^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos x}{x^p} dx$ ($0 \leq \alpha < +\infty$), 其中 $p > 0$ 是常数.

解 由于

$$\left| \int_1^A \cos x dx \right| = |\sin A - \sin 1| \leq 2,$$

而当 $0 \leq \alpha < +\infty$ 时, 函数 $\frac{e^{-ax}}{x^p}$ 在 $x \geq 1$ 关于 x 递减且当 $x \rightarrow +\infty$ 时关于 α ($0 \leq \alpha < +\infty$) 一致趋于零 (因为 $0 \leq \alpha < +\infty$, $x \geq 1$ 时, $0 < \frac{e^{-ax}}{x^p} \leq \frac{1}{x^p}$),

故由迪里黑里判别法即知 $\int_1^{+\infty} e^{-ax} \frac{\cos x}{x^p} dx$ 在 $0 \leq \alpha < +\infty$ 上一致收敛.

注意, 也可仿3760题证法二, 利用积分学第二中

值定理来证明。

$$3762. \int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

解 此积分是收敛的。事实上，当 $\alpha = 0$ 时，积分为零；当 $\alpha > 0$ 时，设 $\sqrt{\alpha} x = t$ ，则得

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是，此积分却不一致收敛。事实上，对于任何的 $A > 0$ ，由于

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha} e^{-\alpha x^2} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\sqrt{\alpha} A}^{+\infty} e^{-t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \end{aligned}$$

故对于 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ，必存在 $\alpha_0 > 0$ ，使有

$$\int_A^{+\infty} \sqrt{\alpha_0} e^{-\alpha_0 x^2} dx > \varepsilon_0,$$

即此积分不是一致收敛的。

$$3763. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx, \quad (a) \quad a < a < b;$$

$$(b) \quad -\infty < a < +\infty.$$

解 显然，对任何固定的 a ，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 都收敛，并且（作代换 $x-a=t$ ）

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

(a) 取正数 R 充分大, 使 $-R < a < b < R$. 显然, 当 $|x| \geq R$ 时, 对一切 $a < \alpha < b$, 有

$$0 < e^{-(x-a)^2} < e^{-(|x|-R)^2},$$

显然积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|x|-R)^2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-(x-R)^2} dx$

收敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 对 $a < \alpha < b$ 一致收敛.

(6) 对任何 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_A^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{A-a}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}, \end{aligned}$$

故当 α 充分大时, $\int_A^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; 由此

可知 $\int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $-\infty < a < +\infty$ 上非一致收敛,

当然 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$ 在 $-\infty < a < +\infty$ 上更非一致收敛.

$$3764. \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy \quad (-\infty < x < +\infty).$$

解 此积分对任一固定的 x 值, 显然是收敛的, 且当 $x > 0$ 时,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x dy = \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

但是, 它对 $-\infty < x < +\infty$ 却不是一致收敛的, 事实上, 对于任何的 $A > 0$, 当 $x > 0$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_A^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin x \, dy \\ &= \frac{\sin x}{x} e^{-x^2} \cdot \int_{Ax}^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (x \rightarrow +0), \end{aligned}$$

由此可知积分不一致收敛.

3765. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx \quad (p \geq 0).$

解 由2380题易知积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$$

收敛, 又 $\frac{1}{1+x^p} \quad (p \geq 0)$ 在 $x \geq 0$ 上对 x 单调递减且一致有界:

$$0 < \frac{1}{1+x^p} \leq 1 \quad (p \geq 0, x \geq 0),$$

故由亚伯耳判别法知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{1+x^p} dx$$

对 $p \geq 0$ 一致收敛.

3766. $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx, \quad (\text{a}) \quad p \geq p_0 > 0;$

(6) $p > 0$ ($q > -1$) .

解 首先注意, $x = 0$ 和 $x = 1$ 都可能是瑕点. 作代换 $x = e^{-t}$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx &= - \int_{+\infty}^0 e^{-(p-1)t} t^q e^{-t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt, \end{aligned}$$

右端的积分当 $p > 0$ ($q > -1$) 时是收敛的*, 从而左端的积分此时也收敛. 更由于 ($\varepsilon, \varepsilon' > 0$ 很小)

$$\int_{\varepsilon}^{1-\varepsilon'} x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx = \int_{\ln \frac{1}{1-\varepsilon'}}^{\ln \frac{1}{\varepsilon}} e^{-pt} t^q dt,$$

故 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$ 的一致收敛性等价于 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt$ 的一致收敛性.

(a) 当 $p \geq p_0 > 0$ 时, 由于

$$0 < e^{-pt} t^q \leq e^{-p_0 t} t^q \quad (0 < t < +\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-p_0 t} t^q dt$ 收敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^q dt$ 一致收敛 (对于 $p \geq p_0 > 0$). 从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^q \frac{1}{x} dx$ 当 $p \geq p_0 > 0$ 时一致收敛.

(6) 对任何 $A > 0$, $p > 0$, 作代换 $pt = s$, 则

$$\int_A^{+\infty} e^{-pt} t^q dt = \frac{1}{p^{q+1}} \int_{pA}^{+\infty} s^q e^{-s} ds,$$

由于 $q > -1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} s^q e^{-s} ds$ 收敛, 且显然

$$0 < \int_0^{+\infty} s^2 e^{-s} ds < +\infty,$$

于是, 有

$$\lim_{p \rightarrow +0} \int_A^{+\infty} e^{-pt} t^2 dt = +\infty,$$

由此即知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} t^2 dt$ 在 $p > 0$ 上非一致收敛.

从而原积分 $\int_0^1 x^{p-1} \ln^2 \frac{1}{x} dx$ 当 $p > 0$ 时非一致收敛.

*) 利用2361题的结果 (在其中作代换 $pt=s$).

$$3767. \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (0 \leq n < +\infty).$$

解 注意, $x=1$ 是瑕点. 由于当 $0 \leq x < 1$ 时, 有

$$0 \leq \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 \leq n < +\infty),$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$ 收敛, 故由

外氏判别法知积分 $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 当 $0 \leq n < +\infty$ 时一致收敛.

$$3768. \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} \quad (0 < n < 2).$$

解 作代换 $\frac{1}{x} = t$, 则

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n} = \int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t dt,$$

并且, 很明显, $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^n}$ 的一致收敛相当于

$\int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t dt$ 的一致收敛. 显然, 当 $n < 2$ 时, 积分

$\int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t dt$ 是收敛的. 下证: 当 $0 < n < 2$ 时,

它不一致收敛. 事实上, 当 $0 < n < 2$ 时, 对任何正整数 m , 有

$$\begin{aligned} \int_{2m\pi + \frac{\pi}{4}}^{2m\pi + \frac{\pi}{2}} t^{n-2} \sin t dt &> \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{2m\pi + \frac{\pi}{4}}^{2m\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t^{2-n}} \\ &> \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{2-n}}. \end{aligned}$$

由于 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{2-n}} = 1$, 故当 n 在 $0 < n < 2$

内且与 2 充分接近时, 必有 $\frac{1}{\left(2m\pi + \frac{\pi}{2}\right)^{2-n}} > \frac{1}{2}$. 于

是, 这时

$$\int_{2m\pi + \frac{\pi}{4}}^{2m\pi + \frac{\pi}{2}} t^{n-2} \sin t dt > \frac{\sqrt{2}\pi}{16} = \text{常数} > 0,$$

故 $\int_1^{+\infty} t^{n-2} \sin t dt$ 在 $0 < n < 2$ 上非一致收敛.

$$3769. \int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \quad \left(|\alpha| < \frac{1}{2}\right).$$

解 首先注意 $x=1$, $x=2$ 是瑕点; $x=0$ 可能是瑕点. 将积分分成在 $(0, 1)$ 及 $(1, 2)$ 上的两个积分.

当 $0 < x < 1$ 且 $|\alpha| < \frac{1}{2}$ 时,

$$\left| \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \right| < \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{2}{3}}},$$

当 $1 < x < 2$ 且 $|\alpha| < \frac{1}{2}$ 时,

$$\left| \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} \right| < \frac{\sqrt{2}}{(x-1)^{\frac{1}{2}}(x-2)^{\frac{2}{3}}}.$$

易知上述两个不等式右端的函数分别在区间 $(0, 1)$ 及 $(1, 2)$ 上的积分收敛, 故由外氏判别法知积分

$$\int_0^2 \frac{x^\alpha}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}} dx$$

对 $|\alpha| < \frac{1}{2}$ 一致收敛.

$$3770. \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx \\ &= \int_0^\alpha \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx + \int_\alpha^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx. \end{aligned}$$

对于积分 $\int_0^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx$, 由于

$$\begin{aligned} \left| \int_{a-\eta}^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx \right| &\leq \int_{a-\eta}^a \frac{dx}{\sqrt{\alpha-x}} \\ &= 2\sqrt{\eta}, \end{aligned}$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 只要取 $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$, 即有

$$\left| \int_{a-\eta}^a \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{\alpha-x}} dx \right| < \varepsilon.$$

因此, 对 $0 \leq \alpha \leq 1$ 它是一致收敛的.

对于积分 $\int_a^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx$, 由于

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx \right| &\leq \int_a^{a+\eta} \frac{dx}{\sqrt{x-\alpha}} \\ &= 2\sqrt{\eta}, \end{aligned}$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 只要取 $0 < \eta < \frac{\varepsilon^2}{4}$, 即有

$$\left| \int_a^{a+\eta} \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{x-\alpha}} dx \right| < \varepsilon.$$

因此, 对 $0 \leq \alpha \leq 1$ 它是一致收敛的.

于是, 积分

$$\int_0^1 \frac{\sin \alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}} dx$$

对 $0 \leq \alpha \leq 1$ 一致收敛.

3771. 若积分在参数的已知值的某邻域内一致收敛, 则称此积分对参数的已知值一致收敛. 证明积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2}$$

在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛, 而在 $\alpha = 0$ 非一致收敛.

证 设 α_0 为任一不为零的数, 不妨设 $\alpha_0 > 0$. 今取 $\delta > 0$, 使 $\alpha_0 - \delta > 0$. 下面证明积分 I 在 $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ 内一致收敛. 事实上, 当 $\alpha \in (\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ 时, 由于

$$0 < \frac{\alpha}{1 + \alpha^2 x^2} < \frac{\alpha_0 + \delta}{1 + (\alpha_0 - \delta)^2 x^2},$$

且积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha_0 + \delta}{1 + (\alpha_0 - \delta)^2 x^2} dx$$

收敛, 故由外氏判别法知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2}$$

在 $(\alpha_0 - \delta, \alpha_0 + \delta)$ 内一致收敛, 从而在 α_0 点一致收敛. 由 α_0 的任意性知积分 I 在每一个 $\alpha \neq 0$ 的值一致收敛.

其次, 我们证明积分 I 在 $\alpha = 0$ 非一致收敛. 事实上, 对原点的任何邻域 $(-\delta, \delta)$ 均有下述结果: 对任何的 $A > 0$, 有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2} = \int_{\alpha A}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (\alpha > 0).$$

由于

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_{\alpha A}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2},$$

故取 $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$, 在 $(-\delta, \delta)$ 中必存在某一个 $\alpha_0 > 0$,

使有

$$\left| \int_{\alpha_0 A}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \right| > \varepsilon_0,$$

即

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{\alpha_0 dx}{1+\alpha_0^2 x^2} \right| > \varepsilon_0.$$

因此, 积分 I 在 $\alpha = 0$ 点的任一邻域 $(-\delta, \delta)$ 内非一致收敛, 从而积分 I 在 $\alpha = 0$ 时非一致收敛.

3772. 在下式中

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$$

把极限移到积分符号内合理吗?

解 不合理. 事实上, 由3754题2)的结果知, 积分

$\int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx$ 对 $0 \leq \alpha \leq b$ ($b > 0$) 的收敛并非一致,

故一般不能应用积分符号与极限符号的交换定理. 对于本题, 实际上也不能交换, 这是由于

$$\int_0^{+\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +0} a e^{-ax} \right) dx = 0,$$

而

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx = \lim_{a \rightarrow +0} \left(-e^{-ax} \right) \Big|_0^{+\infty} = 1,$$

故得

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} a e^{-ax} dx \neq \int_0^{+\infty} \left(\lim_{a \rightarrow +0} a e^{-ax} \right) dx.$$

3773. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内可积分, 证明公式

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

证 容许有有限个瑕点. 为叙述简单起见, 例如, 设只有一个瑕点 $x=0$. 已知积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛且被积函数中不含有 a , 故它关于 a 一致收敛. 又因函数 e^{-ax} 对于固定的 $0 \leq a \leq 1$, 关于 x ($x > 0$) 是递减的, 并且一致有界: $0 < e^{-ax} \leq 1$ ($0 \leq a \leq 1, x > 0$), 故根据亚贝尔判别法知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx$ 在 $0 \leq a \leq 1$ 上一致收敛. 于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 可取 $\eta > 0$, $A_0 > 0$ ($\eta < A_0$), 使

$$\left| \int_0^\eta e^{-ax} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{5},$$

$$\left| \int_{A_0}^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx \right| < \frac{\varepsilon}{5} \quad (0 \leq a \leq 1).$$

由于 $f(x)$ 在 $(\eta, A_0]$ 上常义可积, 故有界, 即存在常数

M_0 , 使 $|f(x)| \leq M_0$ ($\eta \leq x \leq A_0$)。再根据二元函数 e^{-ax} 在 $0 \leq a \leq 1$, $\eta \leq x \leq A_0$ 上的一致连续性知, 必存在 $\delta > 0$ ($\delta < 1$), 使当 $0 < a < \delta$ 时, 对一切 $\eta \leq x \leq A_0$, 皆有

$$0 \leq 1 - e^{-ax} < \frac{\varepsilon}{5 A_0 M_0}.$$

于是, 当 $0 < a < \delta$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx - \int_0^{+\infty} f(x) dx \right| \\ &= \left| \int_{\eta}^{A_0} (e^{-ax} - 1) f(x) dx + \int_{A_0}^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx \right. \\ & \quad \left. - \int_{A_0}^{+\infty} f(x) dx + \int_0^{\eta} e^{-ax} f(x) dx - \int_0^{\eta} f(x) dx \right| \\ & \leq M_0 A_0 \cdot \frac{\varepsilon}{5 A_0 M_0} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{a \rightarrow +0} \int_0^{+\infty} e^{-ax} f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx.$$

3774. 若 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内绝对可积分, 证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx dx = 0.$$

证 由 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内的绝对可积性可知: 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $A > 0$, 使有

$$\int_A^{+\infty} |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \left| \int_0^A f(x) \sin nx \, dx \right| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

先设 $f(x)$ 在 $[0, A)$ 中无瑕点. 我们在 $[0, A)$ 中插入分点 $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{m-1} < t_m = A$, 并设 $f(x)$ 在 $(t_{k-1}, t_k]$ 上的下确界为 m_k , 则有

$$\begin{aligned} \int_0^A f(x) \sin nx \, dx &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(x) \sin nx \, dx \\ &= \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(x) - m_k] \sin nx \, dx \\ &\quad + \sum_{k=1}^m m_k \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sin nx \, dx, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^A f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^m w_k \Delta t_k + \sum_{k=1}^m |m_k| \cdot \frac{|\cos nt_{k-1} - \cos nt_k|}{n} \\ & \leq \sum_{k=1}^m w_k \Delta t_k + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^m |m_k|, \end{aligned}$$

其中 w_k 为 $f(x)$ 在区间 $(t_{k-1}, t_k]$ 上的振幅, $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

由于 $f(x)$ 在 $[0, A)$ 上可积, 故可取某一分法, 使有

$$\left| \sum_{k=1}^n w_k \Delta t_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

对于这样固定的分法, $\sum_{k=1}^m |m_k|$ 为一定值, 因而存在 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\frac{2}{n} \sum_{k=1}^m |m_k| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 对于上述所选取的 N , 当 $n > N$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \left| \int_0^A f(x) \sin nx \, dx \right| + \left| \int_A^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \sum_{k=1}^n w_k \Delta t_k + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^m |m_k| + \int_A^{+\infty} |f(x)| \, dx \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

其次, 设 $f(x)$ 在区间 $(0, A)$ 中有瑕点. 为简便起见, 不妨设只有一个瑕点, 且为 0 . 于是, 对于任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使有

$$\int_0^\eta |f(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{3}.$$

但是, $f(x)$ 在 $[\eta, A]$ 上无瑕点, 故应用上述结果可知存在 N , 使当 $n > N$ 时, 恒有

$$\left| \int_{\eta}^A f(x) \sin nx \, dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $n > N$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \leq \int_0^{\eta} |f(x)| \, dx + \left| \int_{\eta}^A f(x) \sin nx \, dx \right| \\ & \quad + \int_A^{+\infty} |f(x)| \, dx \\ & < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

总之, 当 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内绝对可积, 不论 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有无瑕点, 均可证得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} f(x) \sin nx \, dx = 0.$$

3775. 证明: 若 (1) 在每一个有穷区间 (a, b) 内 $f(x, y) \rightarrow f(x, y_0)$; (2) $|f(x, y)| \leq F(x)$, 其中

$$\int_a^{+\infty} F(x) \, dx < +\infty, \text{ 则}$$

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx.$$

证 条件(1)表示当 $y \rightarrow y_0$ 时, 当 x 在任何有穷区间 (a, b) 上, $f(x, y)$ 都一致趋于 $f(x, y_0)$. 于是, 有

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f(x, y_0) dx$$

(对任何 $b > a$).

又在不等式 $|f(x, y)| \leq F(x)$ 中令 $y \rightarrow y_0$ (任意固定 x), 得 $|f(x, y_0)| \leq F(x)$, 故 $\int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx$ 收敛.

任给 $\varepsilon > 0$. 由于 $\int_a^{+\infty} F(x) dx < +\infty$, 故可取定某 $b > a$, 使 $\int_b^{+\infty} F(x) dx < \frac{\varepsilon}{3}$. 对此 b , 又可取 $\delta > 0$, 使当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 恒有

$$\left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是, 当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx \right| \\ & \leq \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| \\ & \quad + \int_b^{+\infty} |f(x, y)| dx + \int_b^{+\infty} |f(x, y_0)| dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &< \frac{\varepsilon}{3} + \int_a^{+\infty} F(x) dx + \int_b^{+\infty} F(x) dx \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned} &\lim_{y \rightarrow y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \int_a^{+\infty} f(x, y_0) dx = \int_a^{+\infty} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

证毕.

注. 本题中应假定: 对任何 $b > a$, $f(x, y)$ 关于 x 在 (a, b) 上可积.

3776. 利用积分符号与极限号互换, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} \right] dx.$$

解 先证积分符号与极限号能互换. 事实上, (1) 函数 $\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n}$ 在 $0 \leq x \leq A$ 上连续 (任何 $A > 0$),

故它在 $(0, A)$ 上可积; (2) 又 $\left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n}$ 在 $(0, A)$ 上关于 n 为单调减小的, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-n} = e^{-x^2}$$

为连续函数, 故按狄尼定理, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 函数

$(1 + \frac{x^2}{n})^{-n}$ 在 $[0, A]$ 上一致趋向于 e^{-x^2} ; (3) 由

于 $0 < (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} \leq \frac{1}{1+x^2}$ ($n = 1, 2, \dots$), 且

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < +\infty, \text{ 故积分 } \int_0^{+\infty} (1 + \frac{x^2}{n})^{-n} dx$$

关于 n 一致收敛. 因此, 我们可以应用积分符号与极限号的互换定理^{*}), 从而得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + \frac{x^2}{n})^n}.$$

而

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1 + \frac{x^2}{n})^n} &= \sqrt{n} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} \\ &= \sqrt{n} I_n, \end{aligned}$$

又由于

$$\begin{aligned} I_{n-1} &= \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n-1}} \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^{n-1}} \Big|_0^{+\infty} + 2(n-1) \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^n} dt \\ &= 2(n-1) I_{n-1} - 2(n-1) I_n, \end{aligned}$$

故得

$$I_n = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

又因 $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}$, 将上式递推即得

$$I_n = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-2)} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi \sqrt{n}}{2}.$$

根据瓦里斯公式, 我们有

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n)!!]^2}{(2n+1)[(2n-1)!!]^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[(2n-2)!!]^2}{(2n-1)[(2n-3)!!]^2}. \end{aligned}$$

最后得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx &= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!! \sqrt{n}}{(2n-2)!!} \\ &= \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)!! \sqrt{2n-1}}{(2n-2)!!} \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{n}{2n-1}} \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 480目定理 I.

3777. 证明: 积分

$$F(a) = \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx$$

是参数 a 的连续函数.

$$\begin{aligned}
 \text{证 } F(a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(x-a)^2} dx = \int_{-a}^{+\infty} e^{-x^2} dx, \\
 &= \int_{-a}^0 e^{-x^2} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\
 &= \int_0^a e^{-x^2} dx + \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
 \end{aligned}$$

由变上限积分的性质可知积分 $\int_0^a e^{-x^2} dx$ 是 a ($-\infty < a < +\infty$) 的连续函数, 故 $F(a)$ 也是 a ($-\infty < a < +\infty$) 的连续函数.

3778. 求函数

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{x} dx$$

的不连续点. 作出函数 $y = F(a)$ 的图形.

解 当 $1 - a^2 > 0$ 即 $|a| < 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1-a^2)x}{(1-a^2)x} d[(1-a^2)x] \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

当 $1 - a^2 < 0$ 即 $|a| > 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 F(a) &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(a^2-1)x}{(a^2-1)x} d[(a^2-1)x] \\
 &= - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

当 $1-a^2=0$
 即 $|a|=1$ 时,
 $F(a)=0$.
 于是, $a=\pm 1$ 为
 $F(a)$ 的不连续
 点. 如图 7·2
 所示.

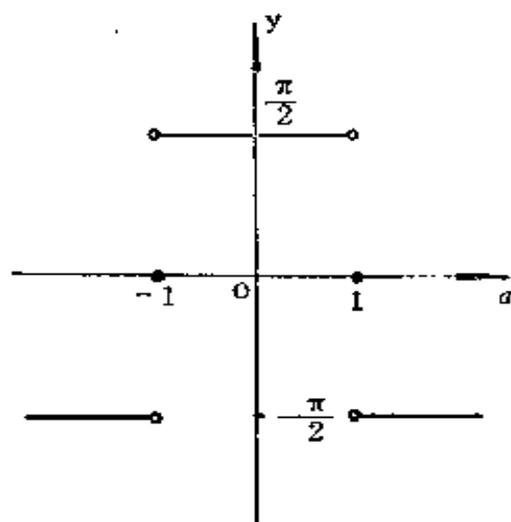


图 7·2

研究下列函数在
 所指定区间内的
 连续性:

3779. $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$ 当 $a > 2$.

解 对于积分 $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$. 由于当 $x \geq 1$ 时,

$$0 < \frac{x}{2+x^a} < \frac{x}{x^a} \leq \frac{1}{x^{a_0-1}},$$

其中 $a \geq a_0 > 2$, 且积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{a_0-1}}$$

收敛, 故积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$$

对 $a \geq a_0$ 一致收敛, 从而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{2+x^a}$$

对 $a \geq a_0$ 一致收敛. 因此, $F(a)$ 当 $a \geq a_0$ 时连续.
 由于 $a_0 > 2$ 的任意性, 故知 $F(a)$ 当 $a > 2$ 时连续.

$$3780. \quad F(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx \text{ 当 } a > 0.$$

解 对于任何 $A > 1$, 均有

$$\left| \int_1^A \cos x \, dx \right| \leq 2.$$

而函数 $\frac{1}{x^a}$ 在 $x \geq 1$, $a > 0$ 时关于 x 单调递减, 且由

$$0 < \frac{1}{x^a} \leq \frac{1}{x^{a_0}} \quad (x \geq 1, a \geq a_0 > 0)$$

知: 当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{x^a}$ 在 $a \geq a_0$ 时一致趋于零. 因此, 由迪里黑里判别法知积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^a} dx$$

对 $a \geq a_0 > 0$ 一致收敛. 于是, 函数 $F(a)$ 当 $a \geq a_0$ 时连续. 由于 $a_0 > 0$ 的任意性, 故知 $F(a)$ 当 $a > 0$ 时连续.

$$3781. \quad F(a) = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx \text{ 当 } 0 < a < 2.$$

$$\text{解 } F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^a (\pi-x)^a} dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x^{\alpha} (\pi-x)^{\alpha}} dx \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{\alpha} (\pi-x)^{\alpha}} dx \\
& \quad - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\sin(\pi-t)}{(\pi-t)^{\alpha} t^{\alpha}} dt \\
& = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{\alpha} (\pi-x)^{\alpha}} dx.
\end{aligned}$$

由于当 $0 < \eta < 1$, $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1 < 2$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\eta} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha} (\pi-x)^{\alpha}} dx \\
& \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha} \int_0^{\eta} \frac{dx}{x^{\alpha-1}} \leq \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0} \int_0^{\eta} \frac{dx}{x^{\alpha_1-1}} \\
& = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\alpha_0} \frac{1}{2-\alpha_1} \cdot \eta^{2-\alpha_1},
\end{aligned}$$

故对于任给的 $\varepsilon > 0$, 当 $0 < \eta < \delta = \min \left\{ 1, \right.$

$\left. (2-\alpha_1) \frac{1}{2-\alpha_1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{\alpha_0}{2-\alpha_1}} \varepsilon^{\frac{1}{2-\alpha_1}} \right\}$ 时, 对一切 $\alpha_0 \leq$

$\alpha \leq \alpha_1$ 皆有

$$\left| \int_0^{\eta} \frac{\sin x}{x^{\alpha} (\pi-x)^{\alpha}} dx \right| \leq \int_0^{\eta} \frac{|\sin x|}{x^{\alpha} (\pi-x)^{\alpha}} dx < \varepsilon.$$

因此, 瑕积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x^{\alpha} (\pi-x)^{\alpha}} dx$ 当 $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时

一致收敛. 从而 $F(a)$ 在 $a_0 \leq a \leq a_1$ 上连续. 由 $0 < a_0 < a_1 < 2$ 的任意性即知 $F(a)$ 在 $0 < a < 2$ 上连续.

$$3782. \quad F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a} dx \quad \text{当 } 0 < a < 1.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad F(a) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a} dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^a t} dt. \end{aligned}$$

当 $0 < a \leq a_0 < 1$ 时,

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^a t} dt \leq e^{-n\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{\sin^{a_0} t} dt.$$

显然, 积分

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\sin^{a_0} t} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin^{a_0} t},$$

且 $\lim_{t \rightarrow 0} t^{a_0} \cdot \frac{1}{\sin^{a_0} t} = 1$, 故它是收敛的. 而级数

$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi}$ 为公比等于 $e^{-\pi} < 1$ 的几何级数, 它也收敛.

于是, 由外氏判别法知级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{e^{-(n\pi+t)}}{\sin^{a_0} t} dt.$$

对 $0 < a \leq a_0$ 一致收敛. 从而, 注意到被积函数是正的, 即知积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{|\sin x|^a} dx$$

对 $0 < a \leq a_0$ 一致收敛. 因此, $F(a)$ 在 $0 < a \leq a_0$ 上连续. 由 $a_0 < 1$ 的任意性知 $F(a)$ 当 $0 < a < 1$ 时连续.

$$3783. \quad F(a) = \int_0^{+\infty} a e^{-x a^2} dx \quad \text{当 } -\infty < a < +\infty.$$

解 当 $a \neq 0$ 时,

$$F(a) = -\frac{1}{a} e^{-x a^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{a},$$

显然它是连续的.

当 $a = 0$ 时,

$$F(0) = \int_0^{+\infty} 0 \cdot e^{-0} dx = 0.$$

于是, 显见 $F(a)$ 当 $a = 0$ 时不连续.

§ 3. 广义积分中的变量代换. 广义积分号下 微分法及积分法

1° 对参数的微分法 若 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x < +\infty$, $y_1 < y < y_2$ 内是连续的并对参数 y 可微分;

2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 收敛; 3) $\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$ 于区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 则当 $y_1 < y < y_2$ 时

$$\frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx$$

(莱布尼兹法则).

2° 对参数积分的公式 若 1) 函数 $f(x, y)$ 当 $x \geq a$ 及 $y_1 \leq y \leq y_2$ 时是连续的; 2) $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ 在有穷的区间 (y_1, y_2) 内一致收敛, 则

$$\begin{aligned} & \int_{y_1}^{y_2} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \\ &= \int_a^{+\infty} dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy. \end{aligned} \quad (1)$$

若 $f(x, y) \geq 0$, 则公式 (1) 在假定等式 (1) 的一端有意义时, 对于无穷的区间 (y_1, y_2) 也正确.

3784. 利用公式

$$\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0).$$

计算积分

$$I = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx, \text{ 其中 } m \text{ 为自然数.}$$

解 $\frac{dx^{n-1}}{dn} = x^{n-1} \ln x$ ($n > 0$ 为任意实数). 积分

$$\int_0^1 x^{n-1} \ln x dx \quad (1)$$

对于 $n \geq n_0 > 0$ 为一致收敛. 事实上, 当 $0 < x \leq 1$, $n \geq n_0 > 0$ 时,

$$|x^{n-1} \ln x| \leq -x^{n_0-1} \ln x,$$

而积分 $\int_0^1 x^{n_0-1} \ln x dx$ 显然收敛^{*}). 因此, 由外氏

判别法即知积分 (1) 对 $n \geq n_0 > 0$ 一致收敛。于是, 积分

$$\int_0^1 x^{n-1} dx$$

对参数 $n \geq n_0$ 求导数时, 积分号与导数符号可交换, 即

$$\begin{aligned} \frac{d}{dn} \int_0^1 x^{n-1} dx &= \int_0^1 \frac{dx^{n-1}}{dn} dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} \ln x dx. \end{aligned}$$

由 $n_0 > 0$ 的任意性知, 上式对任意 $n > 0$ 均成立。

同理对 n 逐次求导数, 也可在积分号下求导数, 即

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dn^2} \int_0^1 x^{n-1} dx &= \int_0^1 \frac{d}{dn} (x^{n-1} \ln x) dx \\ &= \int_0^1 x^{n-1} \ln^2 x dx, \end{aligned}$$

.....

由数学归纳法, 可得

$$\frac{d^m}{dn^m} \int_0^1 x^{n-1} dx = \int_0^1 x^{n-1} \ln^m x dx.$$

但是, $\int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{1}{n}$ ($n > 0$), 故有

$$\frac{d^m}{dx^m} \int_0^1 x^{n-1} dx = \frac{(-1)^m m!}{n^{m+1}}.$$

从而得

$$\int_0^1 x^{m-1} \ln^n x dx = -\frac{(-1)^n m!}{n^{m+1}}.$$

*) 利用2362题的结果.

3785. 利用公式

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}} \quad (a>0),$$

计算积分

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}, \text{ 其中 } n \text{ 为自然数.}$$

解 $-\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{x^2+a} \right) = -\frac{1}{(x^2+a)^2}$. 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2} \quad (1)$$

对 $a \geq a_0 > 0$ 一致收敛. 事实上, 当 $x \geq 0, a \geq a_0 > 0$ 时,

$$\frac{1}{(x^2+a)^2} \leq \frac{1}{(x^2+a_0)^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a_0)^2}$ 显然收敛. 因此, 由外氏判别法知积分 (1) 当 $a \geq a_0 > 0$ 时一致收敛. 于是, 利用莱布尼兹法则, 即得

$$\frac{d}{da} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{x^2+a} \right) dx$$

$$= - \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^2}.$$

由 $a_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $a > 0$ 均成立.

同理对积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a}$ 逐次求导数, 得

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = (-1)^n n! \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a)^{n+1}}.$$

但是,

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} &= \frac{d}{da} \left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{da^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} &= \frac{d}{da} \left(-\frac{\pi}{2^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^3}} \right) \\ &= \frac{1 \cdot 3\pi}{2^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^5}}, \end{aligned}$$

.....

由数学归纳法, 可得

$$\frac{d^n}{da^n} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+a} = \frac{(2n-1)!!\pi}{2^{n+1}} (-1)^n \cdot a^{-(n+\frac{1}{2})},$$

最后得

$$I = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} a^{-(n+\frac{1}{2})}.$$

3786. 证明迪里黑里积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

当 $\alpha \neq 0$ 时有导函数，但不能利用莱布尼兹法则来求它。

证 当 $\alpha > 0$ 时，令 $\alpha x = y$ ，得

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \frac{\pi}{2}.$$

当 $\alpha < 0$ 时， $I(\alpha) = -I(-\alpha) = -\frac{\pi}{2}$ ，于是，

当 $\alpha \neq 0$ 时， $I'(\alpha) = 0$ 。

但是，如果利用莱布尼兹法则来求，即得错误的结果。事实上，积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \cos \alpha x dx$$

发散，而 $I'(\alpha) = 0$ ($\alpha \neq 0$) 存在，因此，本题不能应用莱布尼兹法则求 $I'(\alpha)$ 。

3787. 证明：函数

$$F(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$$

在区域 $-\infty < \alpha < +\infty$ 内连续并且可微分的。

证 设 α_0 为 $(-\infty, +\infty)$ 内任意一点。记 $M = \max(|\alpha_0 - 1|, |\alpha_0 + 1|)$ ，则当 $x > M$ ， $\alpha \in (\alpha_0 - 1, \alpha_0 + 1)$ 时，恒有

$$\left| \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \right| \leq \frac{1}{1+(x-M)^2},$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \right] \right| = \left| \frac{2(x+\alpha)\cos x}{[1+(x+\alpha)^2]^2} \right|$$

$$\leq \frac{2}{1+(x-M)^2}.$$

由于积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(x-M)^2}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} dx$$

及 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\cos x}{1+(x+\alpha)^2} \right] dx$

在 (α_0-1, α_0+1) 内一致收敛, 从而 $F(\alpha)$ 在 (α_0-1, α_0+1) 内连续且可微分, 且可在积分号下求导数. 由 α_0 的任意性, 即知 $F(\alpha)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且可微分.

3788. 从等式

$$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-xy} dy$$

出发, 计算积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 不妨设 $a \leq b$. 注意到 e^{-xy} 在域: $x \geq 0, a \leq y \leq b$ 上连续. 又积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 对 $a \leq y \leq b$ 是一致收敛的. 事实上, 当 $x \geq 0, a \leq y \leq b$ 时,

$$0 < e^{-xy} \leq e^{-ax}.$$

但积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$ 收敛. 故积分 $\int_0^{+\infty} e^{-xy} dx$ 是一致收敛的. 于是, 利用对参数的积分公式, 即得

$$\int_0^{+\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \int_a^b dy \int_0^{+\infty} e^{-xy} dx.$$

上式左端为 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$, 右端为 $\int_a^b \frac{dy}{y} = \ln \frac{b}{a}$. 从而得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0).$$

3789. 证明傅茹兰公式

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= f(0) \ln \frac{b}{a} \quad (a > 0, b > 0), \end{aligned}$$

式中 $f(x)$ 为连续函数及积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 对任何的 $A > 0$ 都有意义.

证 对任何的 $A > 0$, 有

$$\begin{aligned} & \int_A^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx \\ &= \int_A^{+\infty} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_A^{+\infty} \frac{f(bx)}{x} dx \\ &= \int_{Aa}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt - \int_{Ab}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{Aa}^{Ab} \frac{f(t)}{t} dt = f(\xi) \int_{Aa}^{Ab} \frac{dt}{t} \\
 &= f(\xi) \ln \frac{b}{a} \quad (Aa < \xi < Ab) .
 \end{aligned}$$

当 $A \rightarrow +\infty$ 时, $\xi \rightarrow +\infty$. 由 $f(x)$ 在 $x = +\infty$ 点的连续性, 即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(+\infty) \ln \frac{b}{a} .$$

利用傅茹兰公式, 计算积分:

$$3790. \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0) .$$

解 由于 $\cos x$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且对任何 $A > 0$, 积分 $\int_A^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ 存在, 故由傅茹兰公式, 有

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x} dx \\
 &= \cos 0 \cdot \ln \frac{b}{a} = \ln \frac{b}{a} .
 \end{aligned}$$

$$3791. \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0) .$$

解 同3790题, 由于 $\sin 0 = 0$, 故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax - \sin bx}{x} dx = 0 .$$

$$3792. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx \quad (a > 0, b > 0).$$

解 令 $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, 则 $f(x)$ 在 $0 \leq x < +\infty$ 上连续.

由于 $f(x) > 0$ 且 (利用洛比塔法则)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{x^{-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1, \end{aligned}$$

故对任何 $A > 0$, 积分 $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$ 都收敛. 因此由傅茹兰公式, 有

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} ax\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} bx\right)}{x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

故

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} ax - \operatorname{arctg} bx}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a}{b}.$$

利用对参数的微分法计算下列积分:

$$3793. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (a > 0, \beta > 0).$$

解 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-2\alpha x e^{-\alpha x^2} + 2\beta x e^{-\beta x^2}}{1} = 0, \end{aligned}$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 又由于

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^{\alpha x^2}} - \frac{x}{e^{\beta x^2}} \right) = 0, \end{aligned}$$

故对任何 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx$ 都收敛. 今将 $\beta > 0$ 固定, 而把所求积分视为含参变量 α ($\alpha > 0$) 的积分, 即令

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \quad (\alpha > 0).$$

而

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx. \end{aligned}$$

下证右端积分在 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时一致收敛. 事实上, 当 $\alpha \geq \alpha_0$, $0 \leq x < +\infty$ 时, $0 \leq x e^{-\alpha x^2} \leq x e^{-\alpha_0 x^2}$, 而积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha_0 x^2} dx = \frac{1}{2\alpha_0}$ 收敛, 故积分

$\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx$ 在 $a \geq a_0$ 时一致收敛. 因此, 当 $a \geq a_0$ 时, 可在积分号下对参数求导数:

$$I'(a) = - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx = -\frac{1}{2a},$$

由 $a_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $a > 0$ 皆成立. 积分之, 得

$$I(a) = -\frac{1}{2} \ln a + C \quad (0 < a < +\infty),$$

其中 C 为待定的常数. 在此式中令 $a = \beta$, 并注意到

$$I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\beta x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = 0, \text{ 即得}$$

$$0 = I(\beta) = -\frac{1}{2} \ln \beta + C,$$

由此知 $C = \frac{1}{2} \ln \beta$. 于是,

$$I(a) = -\frac{1}{2} \ln a + \frac{1}{2} \ln \beta = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{a} \quad (a > 0),$$

即

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{a} \quad (a > 0, \beta > 0).$$

注. 本题中, 实际应考察积分 $I(a) = \int_0^{+\infty} f(x, a) dx$,

$$\text{其中 } f(x, a) = \begin{cases} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x}, & \text{当 } 0 < x < +\infty \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

易知 $f(x, \alpha)$ 是 $0 \leq x < +\infty$, $0 < \alpha < +\infty$ 上的连续函数 ($\beta > 0$ 固定)。我们证明:

$f'_\alpha(x, \alpha) = -x e^{-\alpha x^2}$ ($0 \leq x < +\infty, 0 < \alpha < +\infty$)。事实上, 当 $0 < x < +\infty$ 时, 此式显然成立。由于 $f(0, \alpha) \equiv 0$ ($0 < \alpha < +\infty$), 故 $f'_\alpha(0, \alpha) = 0$ ($0 < \alpha < +\infty$)。因此, 上式当 $x = 0$ 时也成立。 $f'_\alpha(x, \alpha)$ 显然是 $0 \leq x < +\infty, 0 < \alpha < +\infty$ 上的连续函数。

在以下许多题中, 我们都应作此理解, 但不必写出 $f(x, \alpha)$ 。函数 $\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}$ 就代表 $f(x, \alpha)$

($x = 0$ 时规定其函数值为其极限值 0), 而公式

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \right) = -x e^{-\alpha x^2}$$

当 $x = 0$ 时也成立 (如上述)。这样, 才严格符合莱布尼兹法则 (积分号下求导数) 的条件。

另外, 本题若利用逐次积分来作可更简单一些。今作如下: 易知 (不妨设 $\alpha < \beta$)

$$\frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} = \int_\alpha^\beta x e^{-y x^2} dy,$$

而积分 $\int_0^{+\infty} x e^{-y x^2} dx$ 当 $\alpha \leq y \leq \beta$ 时一致收敛 (因为 $0 \leq x e^{-y x^2} \leq x e^{-\alpha x^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} x e^{-\alpha x^2} dx$ 收敛),

故可交换积分次序, 得

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} dx \int_{\alpha}^{\beta} x e^{-yx^2} dy \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} dy \cdot \int_0^{+\infty} x e^{-yx^2} dx \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{2y} = \frac{1}{2} \ln \frac{\beta}{\alpha}.
\end{aligned}$$

3794. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$

解 由于

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\alpha e^{-\alpha x} + \beta e^{-\beta x}}{1} = \beta - \alpha,
\end{aligned}$$

故 $x=0$ 不是瑕点, 又由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 = 0,$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx$ 收敛 ($\alpha > 0, \beta > 0$).

同样, 将 $\beta > 0$ 固定, 考虑含参变量 α 的积分:

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \quad (\alpha > 0),$$

由于

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \\
&= -2 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx \\
&= -2 \ln \frac{\alpha+\beta}{2\alpha} \quad (a > 0).
\end{aligned}$$

而当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$, $1 \leq x < +\infty$ 时,

$$\left| \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} \right| \leq \frac{2e^{-\alpha_0 x}}{x},$$

且 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha_0 x}}{x} dx$ 收敛 (因为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\alpha_0 x}}{x} = 0$),

故 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时一致收敛,

从而 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时一致收敛

(注意, 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-2\alpha x} - e^{-(\alpha+\beta)x}}{x} = \beta - \alpha$, 故 $x=0$

不是瑕点). 因此, 根据莱布尼兹法则, 当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时可在积分号下求导数:

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \\
&= -2 \ln \frac{\alpha+\beta}{2\alpha}.
\end{aligned}$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $\alpha > 0$ 皆成立.

积分之，并注意到

$$\int \ln \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} d\alpha = \alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} + \beta \ln(\alpha + \beta) + C,$$

即得

$$I(\alpha) = -2\alpha \ln \frac{\alpha + \beta}{2\alpha} - 2\beta \ln(\alpha + \beta) + C_1,$$

其中 C_1 是待定常数。令 $\alpha = \beta$ ，则由于 $I(\beta) = 0$ ，得

$$0 = -2\beta \ln \frac{2\beta}{2\beta} - 2\beta \ln 2\beta + C_1,$$

故 $C_1 = 2\beta \ln 2\beta$ 。于是，得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \ln \left(\frac{2\alpha}{\alpha + \beta} \right)^{2\alpha} - 2\beta \ln(\alpha + \beta) + 2\beta \ln 2\beta \\ &= \ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2\alpha + 2\beta}}, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \right)^2 dx \\ &= \ln \frac{(2\alpha)^{2\alpha} (2\beta)^{2\beta}}{(\alpha + \beta)^{2\alpha + 2\beta}} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

*) 利用3788题的结果。

$$3795. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

解 当 $m = 0$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx = 0,$$

故下设 $m \neq 0$ 。由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx = 0,$$

故 $x = 0$ 不是瑕点，从而被积函数在域： $0 \leq x < +\infty$ 及 $\alpha > 0, \beta > 0$ 内连续（ $x = 0$ 时的函数值理解为极限值）。又由于

$$\left| \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \right| \leq \frac{e^{-\alpha x} + e^{-\beta x}}{x} \quad (x > 0),$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} + e^{-\beta x}}{x} \, dx$ 收敛，故积分

$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx$ 收敛，从而积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx$$

收敛。当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时，积分

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \, dx \end{aligned}$$

是一致收敛的。事实上，

$$|e^{-\alpha x} \sin mx| \leq e^{-\alpha_0 x} \quad (x \geq 0),$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} \, dx = \frac{1}{\alpha_0}$ 收敛。于是，对于积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx$$

当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时可应用莱布尼兹法则, 得

$$I'(\alpha) = - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin mx \, dx = - \frac{m}{\alpha^2 + m^2} \quad *)$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $\alpha > 0$ 均成立. 从而

$$I(\alpha) = - \int \frac{m}{\alpha^2 + m^2} d\alpha = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{m} + C,$$

其中 C 是待定常数. 令 $\alpha = \beta$, 则得

$$I(\beta) = 0 = - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m} + C,$$

故 $C = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m}$. 最后得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx \, dx \\ &= \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\beta}{m} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{m} \quad (m \neq 0). \end{aligned}$$

*) 利用1829题的结果.

$$3796. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

解 同3795题, 我们可证明: 当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时, 对积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx$$

可应用莱布尼兹法则，得

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \right) dx \\ &= - \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos mx \, dx = - \frac{a}{a^2 + m^2} \quad *) \end{aligned}$$

由 $a_0 > 0$ 的任意性知，上式对一切 $a > 0$ 均成立。
从而

$$I(a) = - \int \frac{a \, da}{a^2 + m^2} = - \frac{1}{2} \ln(a^2 + m^2) + C,$$

其中 C 是待定常数。令 $a = \beta$ ，则得

$$I(\beta) = 0 = - \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2) + C,$$

故 $C = \frac{1}{2} \ln(\beta^2 + m^2)$ 。最后得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-\beta x}}{x} \cos mx \, dx \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{\beta^2 + m^2}{a^2 + m^2} \quad (a > 0, \beta > 0). \end{aligned}$$

*) 利用1828题的结果。

计算下列积分：

$$3797. \int_0^1 \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1).$$

解 由于

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1 - \alpha^2 x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{2a^2x}{1-a^2x^2}}{2x} = -a^2,$$

故 $x=0$ 不是瑕点. 从而被积函数在域: $0 \leq x < 1$ 及 $|a| \leq 1$ 内连续 ($x=0$ 时的函数值理解为极限值). 又由于当 $|a| \leq 1$ 时,

$$\left| \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \right| \leq -\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \quad (0 < x < 1),$$

而积分 $\int_0^1 -\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$ 收敛 (因为 $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{3}{2}}$

$$\cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 1-0} (1-x)^{\frac{1}{6}} \cdot \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1+x}} = 0),$$

故积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$$

对 $|a| \leq 1$ 一致收敛. 从而为 a 的连续函数 ($-1 \leq a \leq 1$). 另一方面, 易知积分

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{\partial}{\partial a} \left[\frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= -2a \int_0^1 \frac{dx}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

对 $|a| \leq a_0 < 1$ 一致收敛. 事实上,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{-2a}{(1-a^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \right| \\ & \leq \frac{2}{1-a_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (0 \leq x < 1), \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ 收敛。于是，对积分

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx$$

当 $|\alpha| \leq \alpha_0$ 时可应用莱布尼兹法则，得

$$I'(\alpha) = -2\alpha \int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2 x^2) \sqrt{1-x^2}}.$$

由 $\alpha_0 < 1$ 的任意性知，上式对一切 $|\alpha| < 1$ 均成立。

先求不定积分

$$I_1 = \int \frac{dx}{(1-\alpha^2 x^2) \sqrt{1-x^2}}.$$

作代换 $x = \sin t$ ，易得

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dt}{1-\alpha^2 \sin^2 t} \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{dt}{1-\alpha \sin t} + \int \frac{dt}{1+\alpha \sin t} \right). \end{aligned}$$

再对右端两个积分作代换 $u = \operatorname{tg} \frac{t}{2}$ ，可得

$$\begin{aligned} &\int \frac{dt}{1-\alpha \sin t} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} - \alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right) + C_1, \\ &\int \frac{dt}{1+\alpha \sin t} \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + a}{\sqrt{1-a^2}} \right) + C_2.$$

从而

$$\begin{aligned} I'(a) &= 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-a \sin t} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+a \sin t} \right) dt \\ &= -\frac{2a}{\sqrt{1-a^2}} \left[\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} - a}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{t}{2} + a}{\sqrt{1-a^2}} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi a}{\sqrt{1-a^2}} \quad (|a| < 1). \end{aligned}$$

两端积分, 得

$$\begin{aligned} I(a) &= -\pi \int \frac{a da}{\sqrt{1-a^2}} \\ &= \pi \sqrt{1-a^2} + C \quad (|a| < 1), \end{aligned}$$

其中 C 是待定常数. 令 $a=0$, 得

$$I(0) = 0 = \pi + C,$$

故 $C = -\pi$, 从而

$$I(a) = -\pi (1 - \sqrt{1-a^2}) \quad (|a| < 1).$$

在此式两端令 $a \rightarrow 1 - 0$ 及 $a \rightarrow -1 + 0$ 取极限, 并注意到 $I(a)$ 在 $-1 \leq a \leq 1$ 上的连续性, 即得

$$I(1) = I(-1) = -\pi.$$

于是, 当 $|\alpha| \leq 1$ 时,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1-x^2}} dx = -\pi(1-\sqrt{1-\alpha^2}).$$

3798. $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (|\alpha| \leq 1).$

解 同3797题, 我们可以证明:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

当 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 时连续, 且当 $|\alpha| \leq \alpha_0 < 1$ 时可应用莱布尼兹法则. 于是,

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{-2\alpha x^2}{(1-\alpha^2 x^2) \sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \frac{(1-\alpha^2 x^2) - 1}{(1-\alpha^2 x^2) \sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\quad - \frac{2}{\alpha} \int_0^1 \frac{dx}{(1-\alpha^2 x^2) \sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{1-\alpha^2}} \\ &= \frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (|\alpha| \leq \alpha_0, \alpha \neq 0). \end{aligned}$$

由 $\alpha_0 < 1$ 的任意性知, 上式对一切 $0 < |\alpha| < 1$ 均成立. 积分得

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int \left(\frac{\pi}{\alpha} - \frac{\pi}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} \right) d\alpha \\ &= \pi \ln |\alpha| + \pi \ln \left| \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} \right| + C \\ &= \pi \ln (1+\sqrt{1-\alpha^2}) + C, \end{aligned}$$

其中 $|\alpha| < 1$, $\alpha \neq 0$, C 为待定常数. 令 $\alpha \rightarrow 0$, 并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha = 0$ 的连续性, 即得

$$I(0) = 0 = \pi \ln 2 + C,$$

故 $C = -\pi \ln 2$, 从而得

$$I(\alpha) = \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2} \quad (|\alpha| < 1).$$

在上式中令 $\alpha \rightarrow 1-0$ 及 $\alpha \rightarrow -1+0$, 并注意到 $I(\alpha)$ 在 $-1 \leq \alpha \leq 1$ 上的连续性, 即知上式当 $\alpha = \pm 1$ 时也成立, 即

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2 x^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \pi \ln \frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2} \quad (|\alpha| \leq 1). \end{aligned}$$

3799. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx.$

解 设 $I(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx$. 显然有 $I(0) = 0$.

当 $\alpha > 0$ 时, 由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \cdot \frac{\operatorname{arc\,tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{\pi}{2}$, 故

$I(\alpha)$ 收敛. 其次, 易知积分

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \right) dx \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1 + \alpha^2 x^2) \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} \end{aligned}$$

对 $\alpha \geq 0$ 一致收敛. 事实上, 当 $\alpha \geq 0$, $0 \leq t < 1$ 时, 有

$$\left| \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}},$$

且 $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$ 收敛. 于是, 可应用莱布尼兹法则, 得

$$\begin{aligned} I'(\alpha) &= \int_1^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{arc\,tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} \\ &= \int_0^1 \frac{(t^2 + \alpha^2) - \alpha^2}{\sqrt{1 - t^2}(t^2 + \alpha^2)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha^2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(t^2+\alpha^2)} \\
&= \frac{\pi}{2} - \alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2\alpha\sqrt{\alpha^2+1}} \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha\pi}{2\sqrt{1+\alpha^2}} \quad (\alpha \geq 0).
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
I(\alpha) &= \frac{\pi}{2} \alpha - \frac{\pi}{2} \int \frac{\alpha d\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\
&= \frac{\pi}{2} \alpha - \frac{\pi}{2} \sqrt{1+\alpha^2} + C \quad (\alpha \geq 0),
\end{aligned}$$

其中 C 为待定常数. 令 $\alpha=0$, 得

$$I(0) = 0 = -\frac{\pi}{2} + C,$$

故 $C = \frac{\pi}{2}$. 于是, 当 $\alpha \geq 0$ 时,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\pi}{2} (1+\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}).$$

当 $\alpha < 0$ 时,

$$\begin{aligned}
& \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \\
&= - \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} (-\alpha)x}{x^2 \sqrt{x^2-1}} dx \\
&= -\frac{\pi}{2} (1-\alpha - \sqrt{1+\alpha^2}).
\end{aligned}$$

于是, 当 $-\infty < a < +\infty$ 时,

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc\,tg} ax}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} dx \\ &= \frac{\pi}{2} (1 + |a| - \sqrt{1 + a^2}) \operatorname{sgn} a. \end{aligned}$$

3800. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx.$

解 我们首先计算积分

$$I_\beta(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$$

($\alpha \geq 0$ 是参数, $\beta > 0$ 固定).

首先注意, 此积分当 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ ($\alpha_1 > 0$ 为任何有限数) 时一致收敛. 事实上, 当 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} \\ &\leq \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} \quad (0 \leq x < +\infty), \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$ 收敛 (因为易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\ln(1 + \alpha_1^2 x^2)}{\beta^2 + x^2} = 0).$$

于是, $I_\beta(\alpha)$ 是 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 上的连续函数. 由 $\alpha_1 > 0$ 的任意性知, $I_\beta(\alpha)$ 当 $0 \leq \alpha < +\infty$ 时连续.

其次, 易证积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\ln(1+\alpha^2 x^2)}{\beta^2+x^2} \right] dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2 x^2)} dx = \frac{\pi}{\alpha\beta+1}$$

当 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时是一致收敛的. 事实上, 此时

$$0 \leq \frac{2\alpha x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha^2 x^2)}$$

$$\leq \frac{2\alpha_1 x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2 x^2)} \quad (0 \leq x < +\infty),$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2\alpha_1 x^2}{(\beta^2+x^2)(1+\alpha_0^2 x^2)} dx$ 收敛. 于是,

根据莱布尼兹法则, 当 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ 时, 可在积分号下求导数, 得

$$I'_\beta(\alpha) = \frac{\pi}{\alpha\beta+1}.$$

由 α_1 与 α_0 的任意性知, 上式对一切 $0 < \alpha < +\infty$ 均成立. 两端积分, 得

$$I_\beta(\alpha) = \frac{\pi}{\beta} \ln(1+\alpha\beta) + C \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

其中 C 是某常数. 在此式中令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I_\beta(\alpha)$ 在 $0 \leq \alpha < +\infty$ 上连续, 得

$$0 = I_\beta(0) = 0 + C,$$

故 $C = 0$. 因此

$$I_\beta(\alpha) = \frac{\pi}{\beta} \ln(1+\alpha\beta) \quad (0 \leq \alpha < +\infty).$$

对于所求积分，只要作适当变形即得。当 $\alpha > 0$ ， $\beta > 0$ 时，有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 \ln \alpha + \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} x^2\right)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= 2 \ln \alpha \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\beta^2 + x^2} \\ & \quad + \int_0^{+\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\alpha^2} x^2\right)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= \frac{\pi \ln \alpha}{\beta} + \frac{\pi}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\pi}{\beta} \ln(\alpha + \beta). \end{aligned}$$

此式当 $\alpha = 0$ 时也成立，只要在两端令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限即可。这是因为积分 $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$

($\beta > 0$ 固定) 当 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时一致收敛 (易知

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$ 与 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx$ 当 $0 \leq \alpha$

$\leq \frac{1}{2}$ 时都一致收敛，事实上，

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} \right| \\ & \leq -\frac{2 \ln x}{\beta^2 + x^2} \left(0 < x \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

而 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\beta^2 + x^2} dx$ 收敛,

$$0 \leq \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} \leq \frac{\ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right)}{\beta^2 + x^2} \quad \left(\frac{1}{2} \leq x < +\infty, 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}\right),$$

而 $\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{4} + x^2\right)}{\beta^2 + x^2} dx$ 收敛, 故 $J(\alpha)$ 在点 $\alpha=0$ (右) 连续.

对于任意的 α 与 β ($\beta \neq 0$), 有

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{\beta^2 + x^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\ln(|\alpha|^2 + x^2)}{|\beta|^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{|\beta|} \ln(|\alpha| + |\beta|). \end{aligned}$$

注意, 当 $\beta=0$ 时上式不成立, 右端无意义, 左端的积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\alpha^2 + x^2)}{x^2} dx$ 易知是发散的.

3801. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} dx.$

解 先设 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. 显然 $x=0$ 不是瑕点, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} = \alpha\beta.$$

由于当 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时,

$$\left| \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} \right|$$

$$< \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{x^2} \quad (1 \leq x < +\infty),$$

而积分 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 故积分

$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} dx$ 在 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时一

致收敛, 从而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} dx$ 也

在 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 时一致收敛. 因此, 函数

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} dx$$

是 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ 上的二元连续函数. 再考察两个积分

$$J(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha x \cdot \operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x^2} \right) dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx,$$

$$K(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \right] dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)}.$$

由于当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0, \beta \geq 0$ 时 $\left| \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} \right| < \frac{\pi}{2}$

• $\frac{1}{x(1+\alpha_0^2 x^2)}$ ($1 \leq x < +\infty$), 而积分

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\alpha_0^2 x^2)}$ 收敛, 故积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx$

当 $a \geq a_0, \beta \geq 0$ 时一致收敛, 从而积分

$\int_0^{+\infty} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx$ 当 $a \geq a_0, \beta \geq 0$ 时也一致收敛

(因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} = \beta$, 故 $x=0$ 不是瑕点).

因此, $J(a, \beta)$ 当 $a \geq a_0, \beta \geq 0$ 时连续, 并且此时 $J(a, \beta)$ 可在积分号下对 a 求导数, 得

$$J'_a(a, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctg \beta x}{x(1+\alpha^2 x^2)} dx = J(a, \beta). \quad (1)$$

由 $a_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $a > 0, \beta \geq 0$ 成立; 并且 $J(a, \beta)$ 是 $a > 0, \beta \geq 0$ 上的二元连续函数.

其次, 由于当 $\beta \geq \beta_0 > 0, a > 0$ 时,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} \\ &\leq \frac{1}{1+\beta_0^2 x^2} \quad (0 \leq x < +\infty). \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\beta_0^2 x^2}$ 收敛, 故积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)}$$

当 $\beta \geq \beta_0$, $\alpha > 0$ 时一致收敛. 因此, $K(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha > 0$, $\beta \geq \beta_0$ 上的连续函数, 并且(1)式中的积分当 $\beta \geq \beta_0$ ($\alpha > 0$) 时可在积分号下对 β 求导数, 得

$$\begin{aligned}
 I'_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) &= J'_\beta(\alpha, \beta) \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+\alpha^2x^2)(1+\beta^2x^2)} \\
 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\alpha^2x^2} \\
 &\quad - \frac{\beta^2}{\alpha^2-\beta^2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\beta^2x^2} \\
 &= \frac{\alpha\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)} - \frac{\beta\pi}{2(\alpha^2-\beta^2)} \\
 &= \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)},
 \end{aligned}$$

由 $\beta_0 > 0$ 的任意性知, 对任何 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 均有

$$I'_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) = J'_\beta(\alpha, \beta) = \frac{\pi}{2(\alpha+\beta)}. \quad (2)$$

(注意, 在推导此式时应设 $\alpha \neq \beta$, 因为推导过程中分母内有 $\alpha^2 - \beta^2$. 但由于 $K(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 上的连续函数, 故通过取极限即知(2)式当 $\alpha = \beta$ 时也成立). 在(2)式中固定 $\alpha > 0$, 对 β 积分, 得

$$\begin{aligned}
 I'_2(\alpha, \beta) &= J(\alpha, \beta) \\
 &= \frac{\pi}{2} \ln(\alpha + \beta) + C(\alpha) \quad (0 < \beta < +\infty),
 \end{aligned}$$

其中 $C(\alpha)$ 是依赖于 α 的常数. 在此式中令 $\beta \rightarrow +0$, 并注意到 $J(\alpha, \beta)$ 在 $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ 上连续, 得

$$0 = J(a, 0) = \lim_{\beta \rightarrow +0} J(a, \beta) = \frac{\pi}{2} \ln a + C(a),$$

故

$$C(a) = -\frac{\pi}{2} \ln a.$$

因此,

$$I'_2(a, \beta) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{a+\beta}{a} \quad (a > 0, \beta > 0).$$

再固定 $\beta > 0$, 对 a 积分 (右端利用分部积分法); 得

$$\begin{aligned} I(a, \beta) &= \frac{\pi}{2} a \ln \frac{a+\beta}{a} \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \beta \ln(a+\beta) + C^*(\beta), \end{aligned}$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数, 在此式中令 $a \rightarrow +0$, 并注意到 $I(a, \beta)$ 在 $a \geq 0, \beta \geq 0$ 上连续, 得

$$\begin{aligned} 0 = I(0, \beta) &= \lim_{a \rightarrow +0} I(a, \beta) \\ &= \frac{\pi}{2} \beta \ln \beta + C^*(\beta), \end{aligned}$$

故

$$C^*(\beta) = -\frac{\pi}{2} \beta \ln \beta,$$

于是,

$$I(a, \beta) = \frac{\pi}{2} \ln \frac{(a+\beta)^{a+\beta}}{a^a \beta^b} \quad (a > 0, \beta > 0).$$

显然, 对于任何 α 与 β , 有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} \alpha x \cdot \operatorname{arctg} \beta x}{x^2} dx = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\alpha\beta) \cdot \frac{\pi}{2} \ln \frac{(|\alpha| + |\beta|)^{|\alpha|+|\beta|}}{|\alpha|^{|\alpha|} \cdot |\beta|^{|\beta|}}, & \text{当 } \alpha\beta \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \alpha\beta = 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

3802. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx.$

解 先设 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$. 首先, 注意, $x=0$ 不是瑕点, 因为

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} = \alpha^2 \beta^2.$$

由于当 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} \\ &\leq \frac{\ln(1+\alpha_1^2 x^2) \ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^4}, \end{aligned}$$

而 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha_1^2 x^2) \ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^4} dx$ 收敛 (因为

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \frac{\ln(1+\alpha_1^2 x^2) \ln(1+\beta_1^2 x^2)}{x^4} = 0),$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha^2 x^2) \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^4} dx$ 当 $0 \leq \alpha$

$\leq \alpha_1, 0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时一致收敛. 因此, 函数

$$I(\alpha, \beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx \quad (1)$$

是 $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上的二元连续函数. 由 $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$ 的任意性知, $I(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ 上的二元连续函数. 再考察两个积分

$$\begin{aligned} J(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[\frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha^2 x^2)} dx, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} K(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\frac{2\alpha \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha^2 x^2)} \right] dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{4\alpha\beta}{(1 + \alpha^2 x^2)(1 + \beta^2 x^2)} dx \\ &= \frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha + \beta} \quad (\alpha > 0, \beta > 0). \end{aligned} \quad (3)$$

由于当 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{2\alpha \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha^2 x^2)} \\ &\leq \frac{2\alpha_1 \ln(1 + \beta_1^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha_0^2 x^2)} \quad (0 < x < +\infty), \end{aligned}$$

而易知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{2\alpha_1 \ln(1 + \beta_1^2 x^2)}{x^2(1 + \alpha_0^2 x^2)} dx$ 收敛, 故 (2)

式中的积分在 $0 < \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上一致收敛. 由此可知 $J(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1$, $0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上的连续函数, 并且在其上 (1) 中的积分可在积分号

下对 α 求导数, 得

$$\begin{aligned} I'_\alpha(\alpha, \beta) &= \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \ln(1+\beta^2 x^2)}{x^2(1+\alpha^2 x^2)} dx \\ &= J(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (4)$$

由 $\alpha_1 > \alpha_0 > 0$ 及 $\beta_1 > 0$ 的任意性知, $J(\alpha, \beta)$ 是 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 上的连续函数, 并且 (4) 式对一切 $\alpha > 0, \beta \geq 0$ 都成立.

其次, 当 $0 < \alpha \leq \alpha_1, 0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ 时, 恒有

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} \\ &\leq \frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2 x^2} \quad (0 < x < +\infty), \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{4\alpha_1\beta_1}{1+\beta_0^2 x^2} dx$ 收敛, 故 (3) 式中的积分在 $0 < \alpha \leq \alpha_1, 0 < \beta_0 \leq \beta \leq \beta_1$ 上一致收敛. 于是, 在其上 (2) 式中的积分可在积分号下对 β 求导数, 得

$$\begin{aligned} I''_{\alpha\beta}(\alpha, \beta) &= J'_\beta(\alpha, \beta) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{4\alpha\beta}{(1+\alpha^2 x^2)(1+\beta^2 x^2)} dx \\ &= \frac{2\pi\alpha\beta}{\alpha+\beta}. \end{aligned} \quad (5)$$

由 $\alpha_1 > 0, \beta_1 > \beta_0 > 0$ 的任意性知, (5) 式对一切 $\alpha > 0, \beta > 0$ 都成立. (5) 式两端对 β 积分之 ($\alpha > 0$ 固定), 得

$$\begin{aligned}
 I_0(a, \beta) &= J(a, \beta) \\
 &= 2\pi a\beta - 2\pi a^2 \ln(a + \beta) + C(a) \\
 &\quad (0 < \beta < +\infty),
 \end{aligned}$$

其中 $C(a)$ 是依赖于 a 的常数。在此式中令 $\beta \rightarrow +0$ ，取极限，并注意到 $J(a, \beta)$ 在 $a > 0, \beta \geq 0$ 上连续，得

$$\begin{aligned}
 0 &= J(a, 0) = \lim_{\beta \rightarrow +0} J(a, \beta) \\
 &= -2\pi a^2 \ln a + C(a),
 \end{aligned}$$

故

$$C(a) = 2\pi a^2 \ln a.$$

因此，

$$\begin{aligned}
 I_0^*(a, \beta) &= 2\pi a\beta - 2\pi a^2 \ln(a + \beta) + 2\pi a^2 \ln a \\
 &\quad (a > 0, \beta > 0).
 \end{aligned}$$

两端再对 a 积分 ($\beta > 0$ 固定)，得

$$\begin{aligned}
 I(a, \beta) &= \pi a^2 \beta - \frac{2}{3} \pi a^3 \ln(a + \beta) \\
 &\quad + \frac{2\pi}{9} (a + \beta)^3 - \pi a^2 \beta \\
 &\quad - \frac{2}{3} \pi \beta^3 \ln(a + \beta) + \frac{2}{3} \pi a^3 \ln a \\
 &\quad - \frac{2\pi}{9} a^3 + C^*(\beta) \quad (0 < a < +\infty),
 \end{aligned}$$

其中 $C^*(\beta)$ 是依赖于 β 的常数。在此式两端令 $a \rightarrow +0$ 取极限，并注意到 $I(a, \beta)$ 在 $a \geq 0, \beta \geq 0$ 上连续，得

$$\begin{aligned}
0 = I(0, \beta) &= \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha, \beta) \\
&= \frac{2\pi}{9} \beta^3 - \frac{2}{3} \pi \beta^3 \ln \beta + C^*(\beta),
\end{aligned}$$

故

$$C^*(\beta) = -\frac{2}{9} \pi \beta^3 + \frac{2}{3} \pi \beta^3 \ln \beta.$$

于是

$$\begin{aligned}
I(\alpha, \beta) &= -\frac{2}{3} \pi (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta) \\
&\quad + \frac{2\pi}{9} (\alpha + \beta)^3 - \frac{2\pi}{9} \alpha^3 \\
&\quad - \frac{2}{9} \pi \beta^3 + \frac{2}{3} \pi (\alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta) \\
&= \frac{2\pi}{3} [-\alpha\beta(\alpha + \beta) + \alpha^3 \ln \alpha + \beta^3 \ln \beta \\
&\quad - (\alpha^3 + \beta^3) \ln(\alpha + \beta)] \quad (\alpha > 0, \beta > 0).
\end{aligned}$$

因此, 对任意的 α, β 有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1 + \alpha^2 x^2) \ln(1 + \beta^2 x^2)}{x^4} dx \\
&= \begin{cases} \frac{2\pi}{3} [|\alpha\beta|(|\alpha| + |\beta|) + |\alpha|^3 \ln|\alpha| \\ \quad + |\beta|^3 \ln|\beta| - (|\alpha|^3 + |\beta|^3) \ln(|\alpha| \\ \quad + |\beta|)], & \text{当 } \alpha\beta \neq 0 \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } \alpha\beta = 0 \text{ 时.} \end{cases}
\end{aligned}$$

3803. 从公式

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} x e^{-x^2 y^2} dy$$

出发, 计算尤拉-普阿桑积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx.$$

解 在积分

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

中令 $x=ut$, 其中 u 为任意正数, 即得

$$I = u \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} dt.$$

在上式两端乘以 $e^{-u^2} du$, 再对 u 从 0 到 $+\infty$ 积分, 得

$$I^2 = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \int_0^{+\infty} u e^{-u^2 t^2} dt. \quad (1)$$

由于被积函数 $u e^{-(1+t^2)u^2}$ 是非负连续函数, 并且积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du = \frac{1}{2(1+t^2)}$$

及

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u dt = e^{-u^2} \cdot I$$

分别对于 t 及 u 是连续的, 积分互换后的逐次积分显然存在. 于是, (1) 式中的积分顺序可以互换^{*}, 并且

有

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

由于 $I > 0$, 故

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

*) 参看菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第二卷 483目定理 V 的系理。

利用尤拉-普阿桑积分, 求下列积分之值:

3804. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)^{**})$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+2bx+c)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}[(ax+b)^2+ac-b^2]} dx \\ &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{a}(ax+b)^2} dx \\ &= e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}}.
\end{aligned}$$

*) 只要假定 $a > 0$, 条件 $ac - b^2 > 0$ 可去掉.

3805. $\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx$
 $(a > 0, ac - b^2 > 0)$ *).

解 设 $\frac{1}{\sqrt{a}}(ax + b) = t$, 则 $x = \frac{\sqrt{a}t - b}{a}$. 代入
得

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2-ac}{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{a_1}{a} t^2 + \frac{2(ab_1 - a_1 b)}{a\sqrt{a}} t \right. \\
&\quad \left. + \frac{a_1 b^2 - 2abb_1 + c_1}{a^2} \right] e^{-t^2} dt.
\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} t d(e^{-t^2}) \\
&= -\frac{1}{2} t e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = 0
\end{aligned}$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi},$$

故得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} (a_1 x^2 + 2b_1 x + c_1) e^{-(ax^2 + 2bx + c)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}} \left[\frac{a_1}{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{a_1 b^2 - 2abb_1}{a^2} + c_1 \right) \sqrt{\pi} \right] \\ &= \frac{(a + 2b^2)a_1 - 4abb_1 + 2a^2c_1}{2a^2} \\ & \quad \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2 - ac}{a}}. \end{aligned}$$

*) 只要假定 $a > 0$, 条件 $ac - b^2 > 0$ 可去掉.

3806. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx \quad (a > 0).$

解 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \operatorname{ch} bx dx$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} (e^{bx} + e^{-bx}) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 - bx)} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2 + bx)} dx \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad *) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

*) 利用3804题的结果.

$$3807. \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx \quad (a > 0).$$

解 由于积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

故利用2355题的结果, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx \\ &= e^{2a} \int_0^{+\infty} e^{-\left(x + \frac{a}{x}\right)^2} dx \\ &= e^{2a} \int_0^{+\infty} e^{-(x^2 + 4a)} dx \\ &= e^{-2a} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}. \end{aligned}$$

$$3808. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

解 由分部积分法知

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \\ &= - \int_0^{+\infty} (e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}) d\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x} \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad - 2 \int_0^{+\infty} (\alpha e^{-ax^2} - \beta e^{-\beta x^2}) dx \\
&= -2 \int_0^{+\infty} \sqrt{a} e^{-(\sqrt{a}x)^2} d(\sqrt{a}x) \\
&\quad + 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{\beta} e^{-(\sqrt{\beta}x)^2} d(\sqrt{\beta}x) \\
&= -2\sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 2\sqrt{\beta} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{a}).
\end{aligned}$$

3809. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \quad (a > 0)$.

解 令 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$. 由于 $e^{-ax^2} \cos bx$

与 $\frac{\partial}{\partial b}(e^{-ax^2} \cos bx) = -x e^{-ax^2} \sin bx$ 都是 $x \geq 0$,

$-\infty < b < +\infty$ 上的连续函数, 并且此时

$$|e^{-ax^2} \cos bx| \leq e^{-ax^2},$$

$$|x e^{-ax^2} \sin bx| \leq x e^{-ax^2},$$

而积分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx$ 都收敛, 故积

分 $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx$ 与 $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx$ 都在

$-\infty < b < +\infty$ 上一致收敛, 从而可在积分号下求导

数, 得

$$I'(b) = - \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx$$

($-\infty < b < +\infty$).

利用分部积分法, 得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx \, dx \\ &= -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} \\ & \quad + \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx \, dx \\ &= \frac{b}{2a} I(b), \end{aligned}$$

$$\text{故 } I'(b) = -\frac{b}{2a} I(b) \quad (-\infty < b < +\infty).$$

于是,

$$\int \frac{I'(b)}{I(b)} \, db = -\frac{1}{2a} \int b \, db,$$

即

$$\ln I(b) = -\frac{b^2}{4a} + C \quad (-\infty < b < +\infty),$$

其中 C 是待定常数, 也即

$$I(b) = C_1 e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (-\infty < b < +\infty),$$

其中 C_1 也是待定常数. 但

$$\begin{aligned}
 I(0) &= \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}},
 \end{aligned}$$

代入, 得 $C_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$. 于是, 最后得

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \\
 &= I(b) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad (-\infty < b < +\infty).
 \end{aligned}$$

3810. $\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx \quad (a > 0)$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad &\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} \sin bx dx \\
 &= -\frac{1}{2a} \int_0^{+\infty} \sin bx d(e^{-ax^2}) \\
 &= -\frac{1}{2a} e^{-ax^2} \sin bx \Big|_0^{+\infty} \\
 &\quad + \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \\
 &= \frac{b}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \\
 &= \frac{b}{4a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}} \quad *)
 \end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

3811. $\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx$ (n 为自然数) .

解 由3809题得

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}. \quad (1)$$

积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial^k}{\partial b^k} (e^{-x^2} \cos 2bx) \, dx$

$$= 2^k \int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} \cos \left(2bx + \frac{k\pi}{2} \right) \, dx, \quad (2)$$

而 $\left| x^k e^{-x^2} \cos \left(2bx + \frac{k\pi}{2} \right) \right| \leq x^k e^{-x^2} \quad (x \geq 0)$.

但是积分 $\int_0^{+\infty} x^k e^{-x^2} \, dx$ 对于任意的自然数 k 均收敛, 故积分 (2) 当 $-\infty < b < +\infty$ 时一致收敛. 因此, (1) 式的左端可在积分号下求任意次导数, 从而可得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{2n}}{\partial b^{2n}} (e^{-x^2} \cos 2bx) \, dx \\ &= \int_0^{+\infty} 2^{2n} x^{2n} e^{-x^2} \cos(2bx + n\pi) \, dx \\ &= 2^{2n} (-1)^n \int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2}), \end{aligned}$$

即

$$\int_0^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} \cos 2bx \, dx$$

$$= (-1)^n \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n+1}} \frac{d^{2n}}{db^{2n}} (e^{-b^2}).$$

3812. 从积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx$$

出发, 计算迪里黑里积分

$$D(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx.$$

解 先设 $\beta > 0$. 将 β 固定, α 视为参变量. 仿 3760 题的证法, 可知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \, dx$ 当 $\alpha \geq 0$ 时一致收敛, 从而 $I(\alpha)$ 是 $\alpha \geq 0$ 上的连续函数 (注意, 上述积分中 $x=0$ 不是瑕点, 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} = \beta$). 由于

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} \right) dx$$

$$= - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx = - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

易知积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sin \beta x \, dx$ 当 $\alpha \geq \alpha_0 > 0$ 时一致收敛 (因为此时 $|e^{-\alpha x} \sin \beta x| \leq e^{-\alpha_0 x}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x} \, dx$

收敛), 故知当 $\alpha \geq \alpha_0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 可在积分号下求导数, 得

$$I'(\alpha) = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $0 < \alpha < +\infty$ 皆成立. 两端对 α 积分, 得

$$I(\alpha) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\beta} + C \quad (0 < \alpha < +\infty), \quad (1)$$

其中 C 是某常数. 由 $|\sin u| \leq |u|$ 知

$$|I(\alpha)| \leq \beta \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{\beta}{\alpha} \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

由此可知 $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} I(\alpha) = 0$. 在 (1) 式两端令 $\alpha \rightarrow +\infty$

取极限, 得 $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, 故 $C = \frac{\pi}{2}$. 于是,

$$I(\alpha) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\pi}{2} \quad (0 < \alpha < +\infty). \quad (2)$$

在 (2) 式两端令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I(\alpha)$ 当 $\alpha \geq 0$ 时连续, 即得

$$D(\beta) = I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

当 $\beta < 0$ 时, $D(\beta) = -D(-\beta) = -\frac{\pi}{2}$. 又显然有

$D(0) = 0$. 综上所述, 有

$$D(\beta) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \beta.$$

利用迪里黑里和傅茹兰积分, 求下列积分之值:

$$3813. \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} dx \quad (a > 0).$$

解 令 $I(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$. 首先注意到 $x=0$ 不是瑕点, 因为

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-2axe^{-ax^2} + \beta \sin \beta x}{2x} = \frac{\beta^2}{2} - a. \end{aligned}$$

由于

$$\left| \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} \right| \leq \frac{2}{x^2} \quad (x > 0),$$

而 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 故 $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$ 在 $-\infty$

$< \beta < +\infty$ 上一致收敛, 从而 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} dx$

也在 $-\infty < \beta < +\infty$ 上一致收敛. 于是, $I(\beta)$ 是 $-\infty < \beta < +\infty$ 上的连续函数. 下设 $\beta > 0$. 由于

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 在 $\beta \geq \beta_0 > 0$ 上一致收敛

(因为当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $\frac{1}{x}$ 单调递减趋于零, 而

$$\left| \int_0^A \sin \beta x dx \right| = \left| \frac{1 - \cos \beta A}{\beta} \right| \leq \frac{2}{\beta_0}, \text{ 故由迪里}$$

黑里判别法知 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ 当 $\beta \geq \beta_0$ 时一致收敛)。于是, 当 $\beta \geq \beta_0$ 时, 可在积分号下求导数, 得

$$I'(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (*) \quad (1)$$

由 $\beta_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $\beta > 0$ 皆成立。于是

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2} \beta + C \quad (0 < \beta < +\infty), \quad (2)$$

其中 C 是某常数。在 (2) 式两端令 $\beta \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I(\beta)$ 在 $-\infty < \beta < +\infty$ 上的连续性, 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - 1}{x^2} dx = I(0) = \lim_{\beta \rightarrow +0} I(\beta) = C. \quad (3)$$

极据3808题结果知

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \\ &= \sqrt{\pi} (\sqrt{\beta} - \sqrt{a}) \quad (a > 0, \beta > 0). \end{aligned} \quad (4)$$

令 $J(\beta) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx \quad (a > 0)$, 仿上

面之证，易知 $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-\beta x^2}}{x^2} dx$ 当 $\beta \geq 0$ 时一致收敛，故 $J(\beta)$ 是 $\beta \geq 0$ 上的连续函数，于是，在 (4) 式两端令 $\beta \rightarrow +0$ 取极限，得

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - 1}{x^2} dx = J(0)$$

$$= \lim_{\beta \rightarrow +0} J(\beta) = -\sqrt{\pi a} \quad (a > 0),$$

以此代入 (3) 式，得 $C = -\sqrt{\pi a}$ 。于是，

$$I(\beta) = \frac{\pi}{2} \beta - \sqrt{\pi a} \quad (0 \leq \beta < +\infty).$$

当 $\beta < 0$ 时， $I(\beta) = I(-\beta) = \frac{\pi}{2} (-\beta) - \sqrt{\pi a}$ 。

总之，得

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - \cos \beta x}{x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} |\beta| - \sqrt{\pi a} \quad (a > 0). \end{aligned}$$

*) 利用 3812 题的结果。

$$3814. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x}{x} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \right| \quad *)$$

*) 利用3790题的结果.

$$3815. \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x \cos \beta x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\alpha + \beta)x - \sin(\beta - \alpha)x}{x} dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{若 } |\alpha| < |\beta| \quad *); \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha, & \text{若 } |\alpha| = |\beta| \quad **); \\ \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha, & \text{若 } |\alpha| > |\beta| \quad ***). \end{cases} \end{aligned}$$

*) 利用3791题的结果.

***) 及 ***) 利用3812题的结果.

$$3816. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx$$

解 由于 $\sin 3\alpha x = 3 \sin \alpha x - 4 \sin^3 \alpha x$, 故

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{3 \sin \alpha x - \sin 3\alpha x}{4x} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \right) \quad *) = \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha. \end{aligned}$$

*) 利用3812题的结果.

$$3817. \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx.$$

解 令 $I(a) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx$. 先设 $a \geq 0$.

显然 $x=0$ 不是瑕点, 因为 $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 = a^2$.

而由于 $\left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 \leq \frac{1}{x^2}$, 又 $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ 收敛, 故

$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx$ 在 $a \geq 0$ 上一致收敛, 从而

$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx$ 在 $a \geq 0$ 时一致收敛. 因此, $I(a)$

是 $a \geq 0$ 上的连续函数.

又因

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\sin ax}{x} \right)^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

而积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx$ 当 $a \geq a_0 > 0$ 时一致收敛

(参看3813题的解题过程), 故当 $a \geq a_0$ 时可在积分号下求导数, 得

$$I'(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2ax}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (1)$$

由 $\alpha_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $\alpha > 0$ 皆成立. 两端积分, 得

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\alpha - C \quad (0 < \alpha < +\infty),$$

其中 C 是某常数. 在上式两端令 $\alpha \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到 $I(\alpha)$ 在 $\alpha \geq 0$ 时的连续性知

$$0 = I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} I(\alpha) = C,$$

于是 $I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\alpha$ ($0 \leq \alpha < +\infty$). 当 $\alpha < 0$ 时, 显

然, $I(\alpha) = I(-\alpha) = \frac{\pi}{2}(-\alpha)$, 故对于任何 α , 有

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^2 dx = I(\alpha) = \frac{\pi}{2} |\alpha|.$$

3818. $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)^3 dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \sin^3 \alpha x \, d\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= -\frac{1}{2x^2} \sin^3 \alpha x \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{3\alpha \sin^2 \alpha x \cos \alpha x}{x^2} dx \\ &= \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \alpha x \cos \alpha x}{x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \sin^2 \alpha x \cos \alpha x d\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{3\alpha}{2x} \sin^2 \alpha x \cos \alpha x \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha x \cos^2 \alpha x - \alpha \sin^3 \alpha x}{x^2} dx \\
&= \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{2\alpha \sin \alpha x}{x} dx \\
&\quad - \frac{3\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{3\alpha \sin^3 \alpha x}{x} dx \\
&= 3\alpha^2 \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha - \frac{9}{2} \alpha^2 \cdot \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \alpha \quad *) \\
&= \frac{3\pi}{8} \alpha^2 \operatorname{sgn} \alpha = \frac{3\pi}{8} \alpha |\alpha|.
\end{aligned}$$

*) 利用3816题的结果.

3819. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx.$

解 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 x}{x^2} dx$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{x} \sin^4 x \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{4 \sin^3 x \cos x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{(3 \sin x - \sin 3x) \cos x}{x} dx \\
&= \frac{3}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 4x}{x} dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x} dx \\
 & = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

3820. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx.$

解 由于 $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$, 故

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x - \sin^4 \beta x}{x} dx \\
 & = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 4 \alpha x - \cos 4 \beta x}{x} dx \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2 \alpha x - \cos 2 \beta x}{x} dx \\
 & = \frac{1}{8} \ln \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| \\
 & = \frac{3}{8} \ln \left| \frac{\alpha}{\beta} \right| \quad (\alpha \neq 0, \beta \neq 0).
 \end{aligned}$$

注 若 $\alpha = \beta = 0$, 显然积分为零; 若 $\alpha = 0 (\beta \neq 0)$ 或 $\beta = 0 (\alpha \neq 0)$, 易知积分发散.

3821. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx.$

解 作代换 $x = \sqrt{t}$, 则有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{4}.$$

$$3822. \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax \sin \beta x}{x^2} dx \quad (k \geq 0, a > 0, \beta > 0).$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax \sin \beta x}{x^2} dx \\ &= -\frac{1}{x} e^{-kx} \sin ax \sin \beta x \Big|_0^{+\infty} \\ &+ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \{ -ke^{-kx} \sin ax \sin \beta x \\ &+ e^{-kx} (a \sin \beta x \cos ax + \beta \sin ax \cos \beta x) \} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{a \sin \beta x \cos ax + \beta \sin ax \cos \beta x}{x} dx \\ &- k \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin ax \sin \beta x}{x} dx. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{a \sin \beta x \cos ax}{x} dx \\ &= \frac{a}{2} \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin(a+\beta)x - \sin(a-\beta)x}{x} dx \\ &= \frac{a}{2} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+\beta}{k} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a-\beta}{k} \right)^{*),} \\ & \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\beta \sin ax \cos \beta x}{x} dx \\ &= \frac{\beta}{2} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a+\beta}{k} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{a-\beta}{k} \right), \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{[(e^{-kx}-1)+1] \cdot [\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]}{2x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-kx} - 1) \frac{\cos(\alpha-\beta)x}{x} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (e^{-kx} - 1) \frac{\cos(\alpha+\beta)x}{x} dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x}{x} dx \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(\alpha-\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2 + k^2} \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2 + k^2}^{**}) + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \right| \\
&= \frac{1}{4} \ln \frac{(\alpha+\beta)^2 + k^2}{(\alpha-\beta)^2 + k^2},
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} e^{-kx} \frac{\sin \alpha x \sin \beta x}{x^2} dx \\
&= \frac{\alpha+\beta}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{k} - \frac{\alpha-\beta}{2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{k} \\
&\quad + \frac{k}{4} \ln \frac{(\alpha-\beta)^2 + k^2}{(\alpha+\beta)^2 + k^2}.
\end{aligned}$$

*) 利用3812题的结果.

***) 易知3796题的结果当 $\alpha > 0$, $\beta = 0$ 时也成立.

3823. 对于不同的 x 值, 求迪里黑里间断乘数

$$D(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda \cos \lambda x \frac{d\lambda}{\lambda},$$

作出函数 $y = D(x)$ 的图形.

解 $D(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(1+x)\lambda + \sin(1-x)\lambda}{\lambda} d\lambda.$

当 $|x| < 1$ 时, $1+x > 0$ 及 $1-x > 0$, 利用3812题的结果, 即得 $D(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1$;

当 $|x| = 1$ 时, $1+x$ 及 $1-x$ 中总有一个为零, 一个为正值, 即得 $D(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$;

当 $|x| > 1$ 时, $(1+x)(1-x) < 0$, 即得 $D(x) = 0$.
如图7.3所示.

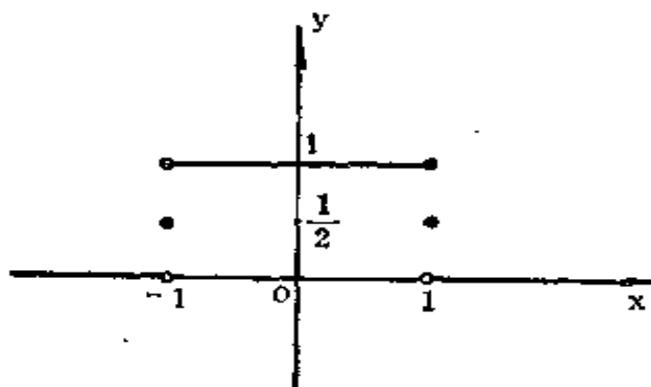


图 7.3

3824. 计算积分:

(a) $V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx;$

$$(6) V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解 (a) } V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x+b} dx &= V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a(t-b)}{t} dt \\ &= V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at \cos ab}{t} dt \\ &\quad - V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos at \sin ab}{t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin at}{t} \cos ab dt = \pi \operatorname{sgn} a \cos ab. \end{aligned}$$

类似地, 可求得

$$(6) V.P. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{x+b} dx = \pi \operatorname{sgn} a \sin ab.$$

3825. 利用公式

$$\frac{1}{1+x^2} = \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy,$$

计算拉普拉斯积分

$$L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

解 $L = \int_0^{+\infty} \cos ax dx \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy$. 由于被积函数 $\cos ax e^{-y(1+x^2)}$ 是 $0 \leq x < +\infty$, $0 \leq y < +\infty$ 上的连续函数, 并且绝对值的积分

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} |e^{-y(1+x^2)} \cos ax| dx \\
& \leq \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} dx \\
& = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy = \sqrt{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \\
& = \frac{\pi}{2} < +\infty,
\end{aligned}$$

故原逐次积分可交换积分顺序, 得

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{+\infty} e^{-y} dy \int_0^{+\infty} e^{-yx^2} \cos ax dx \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-y} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{y}} e^{-\frac{a^2}{4y}} dy \quad *) \\
&= \int_0^{+\infty} \sqrt{\pi} e^{-\left[t^2 + \frac{1}{t^2} \left(\frac{|a|}{2}\right)^2\right]} dt \\
&= \sqrt{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2 \cdot \frac{|a|}{2}} \quad **) = \frac{\pi}{2} e^{-|a|}.
\end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果.

**) 利用3807题的结果.

3826. 计算积分

$$L_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx.$$

解 由于 $\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\cos ax}{1+x^2} \right) = -\frac{x \sin ax}{1+x^2}$, 故我们

考虑积分 $L = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$. 由于 $\left| \frac{\cos ax}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{1+x^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ 收敛, 故 $\int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$ 当 $-\infty < a < +\infty$ 时一致收敛. 又由于当 $a \geq a_0 > 0$ 时,

$$\left| \int_0^A \sin ax dx \right| = \left| \frac{1 - \cos aA}{a} \right| \leq \frac{2}{a_0},$$

而 $\frac{x}{1+x^2}$ 当 $x > 1$ 时递减, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时趋于零;

于是, 由迪里黑里判别法知积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx$ 当 $a \geq a_0$ 时一致收敛. 因此, 当 $a \geq a_0$ 时可在积分号下求导数, 得

$$\frac{dL}{da} = -L_1. \quad (1)$$

由 $a_0 > 0$ 的任意性知, (1) 式对一切 $a > 0$ 成立. 由3825题知 当 $a > 0$ 时 $L = \frac{\pi}{2} e^{-a}$. 于是, 由 (1) 式知

$$L_1 = -\frac{dL}{da} = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad (a > 0).$$

显然, 当 $a < 0$ 时,

$$L_1 = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin(-a)x}{1+x^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^a;$$

而当 $\alpha = 0$ 时, $L_1 = 0$. 综上所述, 有

$$L_1 = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}.$$

计算积分:

$$3827. \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} e^{-2} \quad *) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

*) 利用3825题的结果.

$$3828. \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos \alpha x}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x \cos \alpha x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} e^{-|\alpha|} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x \cos \alpha x}{1+x^2} \Big|_0^{+\infty} \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \alpha x \sin \alpha x}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{2} e^{-|a|} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx \\
&\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{\pi}{2} e^{-|a|} - \frac{\pi}{4} e^{-|a|} + \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \alpha \cdot e^{-|a|} \quad *) \\
&= \frac{\pi}{4} (1 + |\alpha|) e^{-|a|}.
\end{aligned}$$

*) 利用3825题与3826题的结果。

$$3829. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2 + 2bx + c} dx \quad (a > 0, ac - b^2 > 0).$$

$$\text{解 } ax^2 + 2bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} \right]. \quad \text{令}$$

$$m = \frac{\sqrt{ac - b^2}}{a}, \quad t = \frac{1}{m} \left(x + \frac{b}{a} \right) \quad (m > 0),$$

$$\text{则 } ax^2 + 2bx + c = am^2(t^2 + 1),$$

$$\cos \alpha x = \cos \alpha \left(mt - \frac{b}{a} \right)$$

$$= \cos \alpha mt \cos \frac{ba}{a} + \sin \alpha mt \sin \frac{ba}{a}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{ax^2 + 2bx + c} dx \\
&= \frac{1}{am} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha mt \cos \frac{ba}{a}}{1+t^2} dt
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{am} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin am t \sin \frac{ba}{a}}{1+t^2} dt.$$

由于 $\left| \frac{\cos am t}{1+t^2} \right| \leq \frac{1}{1+t^2}$, 而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$ 收

敛, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos am t}{1+t^2} dt$ 收敛. 同理, 积分

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin am t}{1+t^2} dt$ 收敛. 又由于 $\frac{\cos am t}{1+t^2}$ 为偶函

数, $\frac{\sin am t}{1+t^2}$ 为奇函数, 故

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos am t}{1+t^2} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\cos am t}{1+t^2} dt = \pi e^{-m|a|} \quad *) \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin am t}{1+t^2} dt = 0.$$

从而得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{ax^2+2bx+c} dx &= \frac{1}{am} \cos \frac{ba}{a} \cdot \pi e^{-m|a|} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}} \cos \frac{ba}{a} e^{-\frac{|a|\sqrt{ac-b^2}}{a}}. \end{aligned}$$

*) 利用3825题的结果.

3830. 利用公式

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy \quad (x > 0),$$

计算傅伦涅耳积分

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$$

及

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx.$$

解 在积分

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-xy^2} dy$$

的两端乘以 $\sin x$, 再在 $0 < x_0 \leq x \leq x_1$ 上积分, 则得

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} dx \int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy^2} dy. \end{aligned}$$

由于 $|\sin x \cdot e^{-xy^2}| \leq e^{-x_0 y^2}$, 而 $\int_0^{+\infty} e^{-x_0 y^2} dy$ 收

敛, 故积分 $\int_0^{+\infty} \sin x \cdot e^{-xy^2} dy$ 对 $x_0 \leq x \leq x_1$ 一致收

敛, 从而可进行积分顺序的互换, 得

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dy \int_{x_0}^{x_1} \sin x \cdot e^{-xy^2} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[-\frac{e^{-xy^2}(y^2 \sin x + \cos x)}{1+y^4} \right] \Big|_{x_0}^{x_1} dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_0 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy \\
&\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_0 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_0 y^2}}{1+y^4} dy \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy.
\end{aligned}$$

上述等式右端的诸积分分别对 $0 \leq x_0 < +\infty$, $0 \leq x_1 < +\infty$ 都是一致收敛的 (事实上, $e^{-x_0 y^2} \leq 1$, $e^{-x_1 y^2} \leq 1$, 且积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y^2}{1+y^4} dy$ 及 $\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4}$ 均收敛). 于是, 它们分别都是 x_0, x_1 ($0 \leq x_0 < +\infty, 0 \leq x_1 < +\infty$) 的连续函数. 从而让 $x_0 \rightarrow +0$, 可在积分号下取极限, 得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{x_1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^4} \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x_1 \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-x_1 y^2}}{1+y^2} dy \\
&\quad - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos x_1 \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x_1 y^2}}{1+y^4} dy.
\end{aligned}$$

由于上式右端的后两个积分均不超过积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x_1 y^2} dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}},$$

且 $\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{\pi}{x_1}} = 0$, 故令 $x_1 \rightarrow +\infty$, 即得

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

最后得

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

同法可得

$$\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

求下列积分之值:

3831. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \quad (a \neq 0).$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(ax^2 + 2bx + c) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin a \left[\left(x + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} \right] dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin \left(at^2 + \frac{ac - b^2}{a} \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos \frac{ac-b^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin at^2 dt \\
&\quad + \sin \frac{ac-b^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos at^2 dt \\
&= \operatorname{sgn} a \cdot \cos \frac{ac-b^2}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin y^2 dy \\
&\quad + \sin \frac{ac-b^2}{a} \cdot \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos y^2 dy \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2|a|}} \left(\operatorname{sgn} a \cdot \cos \frac{ac-b^2}{a} \right. \\
&\quad \left. + \sin \frac{ac-b^2}{a} \right) *) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{|a|}} \sin \left(\frac{ac-b^2}{a} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} a \right).
\end{aligned}$$

*) 利用3830题的结果.

3832. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx,$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad &\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x^2 \cdot \cos 2ax dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\sin(x^2 + 2ax) + \sin(x^2 - 2ax)] dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a^2 \right) + \sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a^2 \right) \right] *) \\
&= \sqrt{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{4} - a^2 \right) = \sqrt{\pi} \cos \left(\frac{\pi}{4} + a^2 \right).
\end{aligned}$$

*) 利用3831题的结果.

$$3833. \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax \, dx.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x^2 \cdot \cos 2ax \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(x^2 + 2ax) + \cos(x^2 - 2ax)] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sin\left(x^2 + 2ax + \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \sin\left(x^2 - 2ax + \frac{\pi}{2}\right) \right] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} - a^2 + \frac{\pi}{4}\right) \quad *) \\ &= \sqrt{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4} + a^2\right). \end{aligned}$$

*) 利用3831题的结果.

3834. 证明公式:

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{\pi}{2a} \sin aa \quad (a \geq 0),$$

$$2) \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{a^2 - x^2} \, dx = -\frac{\pi}{2} \cos aa \quad (a > 0),$$

这里 $a \neq 0$, 积分应了解为在哥西意义上的主值.

$$\text{证} \quad 1) \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{a^2 - x^2} \, dx$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{a+\eta}^A \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right] \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{\cos \alpha x}{a-x} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{a-\eta} \frac{\cos \alpha x}{a+x} dx + \int_{a+\eta}^A \frac{\cos \alpha x}{a-x} dx \right. \\
&\quad \left. + \int_{a+\eta}^A \frac{\cos \alpha x}{a+x} dx \right] \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[- \int_a^\eta \frac{\cos \alpha(a-t)}{t} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_a^{2a-\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right. \\
&\quad \left. - \int_\eta^{A-a} \frac{\cos \alpha(t+a)}{t} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{2a+\eta}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right] \\
&= \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_\eta^{A-a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{2a+\eta}^{2a-\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\eta}^{A-a} \frac{\cos \alpha(t+a)}{t} dt \Big] \\
= & \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_{\eta}^{A-a} \frac{\cos \alpha(t-a) - \cos \alpha(t+a)}{t} dt \right. \\
& + \int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
& \left. - \int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \right] \\
= & \frac{1}{2a} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{\eta}^{A-a} \frac{2 \sin \alpha t \sin \alpha a}{t} dt \\
& + \frac{1}{2a} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{A-a}^{A+a} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
& - \frac{1}{2a} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\cos \alpha(t-a)}{t} dt \\
= & \frac{\sin \alpha a}{a} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt = \frac{\pi}{2a} \sin \alpha a \quad *)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2) \quad & \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx \\
= & \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right. \\
& \left. + \int_{a+\eta}^A \frac{x \sin \alpha x}{a^2 - x^2} dx \right] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_0^{a-\eta} \frac{\sin \alpha x}{x-a} dx \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{a-\eta} \frac{\sin \alpha x}{x+a} dx + \int_{a+\eta}^A \frac{\sin \alpha x}{x-a} dx \\
& + \int_{a+\eta}^A \frac{\sin \alpha x}{x+a} dx \Big] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_{-a}^{-\eta} \frac{\sin \alpha(t+a)}{t} dt \right. \\
& + \int_a^{2a-\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& + \int_{\eta}^{A-a} \frac{\sin \alpha(t+a)}{t} dt \\
& \left. + \int_{2a+\eta}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \right] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_{\eta}^a \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \right. \\
& + \int_a^{2a-\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& + \int_{\eta}^{A-a} \frac{\sin \alpha(t+a)}{t} dt \\
& \left. + \int_{2a+\eta}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \right] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \left[\int_{\eta}^{A-a} \frac{\sin \alpha(t-a) + \sin \alpha(t+a)}{t} dt \right. \\
& \left. + \int_{A-a}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{2a+\eta}^{2a-\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \Big] \\
= & -\frac{1}{2} \lim_{\substack{\eta \rightarrow +0 \\ A \rightarrow +\infty}} \int_{A-a}^{A+a} \frac{2 \sin \alpha t \cos \alpha a}{t} dt \\
& -\frac{1}{2} \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{A-a}^{A+a} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
& +\frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow +0} \int_{2a-\eta}^{2a+\eta} \frac{\sin \alpha(t-a)}{t} dt \\
= & -\cos \alpha a \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha t}{t} dt \\
= & -\frac{\pi}{2} \cos \alpha a \quad *)
\end{aligned}$$

*) 利用3812题的结果.

编者注: 原题 1) 应加上条件 $\alpha \geq 0$. 当 $\alpha < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{a^2 - x^2} dx \\
= & \int_0^{+\infty} \frac{\cos(-\alpha)x}{a^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{2a} \sin \alpha(-\alpha) \\
= & -\frac{\pi}{2a} \sin \alpha a.
\end{aligned}$$

原题 2) 应加上条件 $\alpha > 0$. 当 $\alpha = 0$ 时等式显然不成立(左端等于 0, 右端等于 $-\frac{\pi}{2}$); 当 $\alpha < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{a^2 - x^2} dx \\
&= - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(-a)x}{a^2 - x^2} dx \\
&= - \left[-\frac{\pi}{2} \cos a(-a) \right] = \frac{\pi}{2} \cos a\alpha.
\end{aligned}$$

3835. 对于函数 $f(t)$, 求 拉普拉斯变换

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0).$$

设:

(a) $f(t) = t^n$ (n 为自然数); (б) $f(t) = \sqrt{t}$;

(B) $f(t) = e^{at}$; (Г) $f(t) = t e^{-at}$;

(Д) $f(t) = \cos t$; (e) $f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}$;

(ж) $f(t) = \sin \alpha \sqrt{t}$.

解 (a) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{p} e^{-pt} t^n \Big|_0^{+\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt \\
&= \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{n-1} dt \\
&\stackrel{n-1 \text{ 次}}{=} \dots = \frac{n!}{p^n} \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{n!}{p^{n+1}}.
\end{aligned}$$

(б) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sqrt{t} dt$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{p} e^{-pt} \sqrt{t} \Big|_0^{+\infty} \\
&\quad + \frac{1}{2p} \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{dt}{\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{p} \int_0^{+\infty} e^{-pu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}.
\end{aligned}$$

$$(R) F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-p)t} dt.$$

当 $p > \alpha$ 时, $F(p) = \frac{1}{p-\alpha}$; 当 $p \leq \alpha$ 时, 积分发散.

$$\begin{aligned}
(R) F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} t e^{-\alpha t} dt \\
&= \int_0^{+\infty} t e^{-(p+\alpha)t} dt \\
&= \frac{1}{(p+\alpha)^2} \quad (p+\alpha > 0) \quad *).
\end{aligned}$$

*) 利用本题 (a) 的结果: $n=1$.

$$\begin{aligned}
(R) F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos t dt \\
&= \frac{-p \cos t + \sin t}{p^2 + 1} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{p}{p^2 + 1}.
\end{aligned}$$

$$(e) F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$$

由于 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{1-e^{-t}}{t} = 1$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-t}}{t} = 0$, 故函数 $\frac{1-e^{-t}}{t}$ 有界:

$$0 < \frac{1-e^{-t}}{t} \leq M = \text{常数} \quad (0 < t < +\infty).$$

由此可知, 当 $p > 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty} e^{-pt} \frac{1-e^{-t}}{t} dt$ 收敛, 并且

$$\begin{aligned} 0 < F(p) &\leq M \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \frac{M}{p} \quad (0 < p < +\infty). \end{aligned} \quad (1)$$

再考虑积分

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial p} \left(e^{-pt} \frac{1-e^{-t}}{t} \right) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} (e^{-t} - 1) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(p+1)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\ &= \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \quad (p > 0), \end{aligned}$$

它对 $p \geq p_0 > 0$ 是一致收敛的. 因此, 当 $p \geq p_0$ 时, 可对函数 $F(p)$ 应用莱布尼兹法则, 得

$$F'(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p} \quad (\text{当 } p \geq p_0 \text{ 时}).$$

由 $p_0 > 0$ 的任意性知, 上式对一切 $p > 0$ 均成立. 两端积分, 得

$$F(p) = \ln \frac{p+1}{p} + C \quad (0 < p < +\infty), \quad (2)$$

其中 C 是某常数. 由 (1) 式知

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} F(p) = 0.$$

于是, 在 (2) 式两端令 $p \rightarrow +\infty$, 取极限, 得 $C = 0$. 由此可知

$$F(p) = \ln \frac{p+1}{p} = \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right).$$

$$\begin{aligned} (\text{K}) \quad F(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} \sin a \sqrt{t} dt \\ &= 2 \int_0^{+\infty} u e^{-pu^2} \sin au du \\ &= \frac{a\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} e^{-\frac{a^2}{4p}} \quad * \end{aligned}$$

* 利用 3810 题的结果.

3836. 证明公式 (李普希兹积分)

$$\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (a > 0),$$

其中 $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi) d\varphi$ 为阶指数是 0 的贝塞耳函数 (参阅 3726 题).

证 $\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-at} dt \int_0^\pi \cos(bt \sin \varphi) d\varphi. \text{ 由于积分} \\
&\int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt \sin \varphi) dt \text{ 对 } 0 \leq \varphi \leq \pi \text{ 是一致收敛的,} \\
&\text{故可交换积分顺序, 得} \\
&\int_0^{+\infty} e^{-at} J_0(bt) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-at} \cos(bt \sin \varphi) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{-a \cos(bt \cos \varphi) + b \sin \varphi \cdot \sin(bt \sin \varphi)}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} e^{-at} \Big|_0^{+\infty} \right) d\varphi \\
&= \frac{a}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{a^2 + b^2 \sin^2 \varphi} \\
&= \frac{2a}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d(\operatorname{tg} \varphi)}{(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi + a^2} \\
&= \frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(a^2 + b^2)t^2 + a^2} \\
&= \frac{2a}{\pi} \cdot \frac{1}{a \sqrt{a^2 + b^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2 + b^2} t}{a} \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}.
\end{aligned}$$

3837. 求外耳什特拉斯变换

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} f(y) dy.$$

设:

$$(a) f(y) = 1;$$

$$(b) f(y) = y^2;$$

$$(B) f(y) = e^{2ay},$$

$$(r) f(y) = \cos ay.$$

$$\begin{aligned} \text{解 (a) } F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} y^2 dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} (x+u)^2 du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u^2 du \\ &\quad + \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u du \\ &\quad + \frac{x^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u^2 du \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2} du = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} u d(e^{-u^2}) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}} u e^{-u^2} \Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2},$$

及

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} u \, du = 0,$$

故得

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{2x^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = x^2 + \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{(B)} \quad F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} e^{2ay} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2 + 2ay} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2 + 2ax} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y-x-a)^2} \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{a^2 + 2ax} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= e^{a^2 + 2ax}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(r)} \quad F(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \cos ay \, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos a(x+u) \, du \\ &= \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \cos au \, du \\ &\quad - \frac{\sin ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \sin au \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos ax}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{2} \sqrt{\pi} e^{-\frac{a^2}{4}} - 0 \\
 &= e^{-\frac{a^2}{4}} \cos ax.
 \end{aligned}$$

*) 利用3809题的结果:

3838. 契贝协夫-厄耳米特多项式由公式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n=0, 1, 2, \dots)$$

而定义, 证明

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{若 } m \neq n, \\ 2^n n! \sqrt{\pi}, & \text{若 } m = n. \end{cases}
 \end{aligned}$$

证 由1231题的结果知, $H_n(x)$ 为一个 n 次多项式, 且 x^n 的系数为 2^n . 不妨设 $m \leq n$, 则

$$\begin{aligned}
 &\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n H_m(x) \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) dx \\
 &= (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) d \left[\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) \right] \\
 &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (e^{-x^2}) dx \\
 &= \dots = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(m)}(x) \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (e^{-x^2}) dx
 \end{aligned}$$

$$= \dots = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx.$$

当 $m < n$ 时, $H_m^{(n)}(x) = 0$, 故

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) H_n(x) e^{-x^2} dx = 0,$$

当 $m = n$ 时, $H_n^{(n)}(x) = 2^n n!$, 故

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= 2^n n! \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

3839. 计算在概率论中有重要意义的积分

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2}} d\xi \\ & \quad (\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0). \end{aligned}$$

解 注意到

$$\begin{aligned} & \frac{\xi^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x-\xi)^2}{2\sigma_2^2} \\ &= \frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2} [(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\xi^2 - 2\sigma_1^2 x\xi + \sigma_1^2 x^2], \end{aligned}$$

并令

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, & b &= -\frac{\sigma_1^2 x}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \\ c &= \frac{\sigma_1^2 x^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}, \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(a\xi^2+2b\xi+c)} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{ac-b^2}{a}} \quad *).\end{aligned}$$

将 a, b, c 的表达式代入上式, 并令 $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, 化简整理得

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

*) 利用3804题的结果.

3840. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内连续且绝对可积分*). 证明: 积分

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$$

满足热传导方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初值条件

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x).$$

证 当 $t > 0$, $-\infty < x < +\infty$ 时,

$$\left| f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right| \leq |f(\xi)|, \text{ 而 } \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi$$

$< +\infty$, 故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$ 在 $t > 0$,

$-\infty < x < +\infty$ 上一致收敛, 从而 $u(x, t)$ 是 $t \geq 0$,
 $-\infty < x < +\infty$ 上的连续函数. 考虑积分

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \left(f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} d\xi, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{\xi-x}{2a^2t} d\xi, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \right) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[-\frac{1}{2a^2t} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(\xi-x)^2}{4a^4t^2} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (3)$$

先考察 (1) 式中的积分:

由于对 $|x| \leq x_0$, $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ (x_0, t_0, t_1 任意固定), 当 $|\xi| > x_0$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \left| f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} \right| \\ & \leq |f(\xi)| \cdot e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}} \cdot \frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2}, \end{aligned}$$

而

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} e^{-\frac{(|\xi|-x_0)^2}{4a^2t_1}} \cdot \frac{(|\xi|+x_0)^2}{4a^2t_0^2} = 0,$$

故当 $|\xi| > x_0$ 时, 有

$$\left| f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \cdot \frac{(\xi-x)^2}{4a^2t^2} \right| \leq M |f(\xi)|,$$

其中 M 是某常数. 于是, 根据 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi < +\infty$, 由外氏判别法知, (1) 式中的积分在 $|x| \leq x_0$, $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ 上一致收敛.

同理可证, (2) 式中的积分和 (3) 式中的积分都在 $|x| \leq x_0$, $0 < t_0 \leq t \leq t_1$ 上一致收敛. 于是, 在其上可应用莱布尼兹法则在积分号下求导数, 得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4at\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t} - 1 \right] d\xi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \frac{\xi-x}{2a^2t} d\xi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{4a^3t\sqrt{\pi t}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} \left[\frac{(\xi-x)^2}{2a^2t} - 1 \right] d\xi. \quad (6)$$

由 x_0, t_0, t_1 的任意性知, (4)、(5)、(6) 三式对一切 $-\infty < x < +\infty, t > 0$ 都成立. 根据 (4) 式及 (6) 式, 即得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (-\infty < x < +\infty, t > 0).$$

下面证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (7)$$

任意固定 x , 易知 ($t > 0$, 作变量代换 $u = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}}$)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\ &= 2a\sqrt{t} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = 2a\sqrt{\pi t}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & u(x, t) - f(x) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} [f(\xi) - f(x)] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi. \end{aligned}$$

任给 $\varepsilon > 0$. 根据 $f(x)$ 在点 x 的连续性, 可取某 $\delta > 0$, 使当 $|\xi - x| \leq \delta$ 时, 恒有 $|f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$.

我们有

$$\begin{aligned} & u(x, t) - f(x) \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int_{-\infty}^{x-\delta} + \int_{x-\delta}^{x+\delta} + \int_{x+\delta}^{+\infty} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{x+\delta}^{+\infty} [f(\xi) - f(x)] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\
& = I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

下面分别估计 I_1 , I_2 与 I_3 . 我们有

$$\begin{aligned}
|I_2| &= \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} [f(\xi) \right. \\
&\quad \left. - f(x)] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x-\delta}^{x+\delta} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right) = \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}
|I_3| &= \left| \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x+\delta}^{+\infty} [f(\xi) \right. \\
&\quad \left. - f(x)] e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \right| \\
&\leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}} \int_{x+\delta}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi \\
&\quad + \frac{|f(x)|}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{x+\delta}^{+\infty} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi \\
&\leq \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\delta^2}{4a^2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi
\end{aligned}$$

$$+ \frac{|f(x)|}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\lambda}{2\alpha\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-u^2} du,$$

由此可知 $\lim_{t \rightarrow +0} I_3 = 0$. 同理可证 $\lim_{t \rightarrow +0} I_1 = 0$. 于是, 存在 $\eta > 0$, 使当 $0 < t < \eta$ 时, 恒有

$$|I_3| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_1| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

由此, 当 $0 < t < \eta$ 时, 恒有

$$|u(x, t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

故 (7) 式成立. 证毕.

*) 编者注: 本题原书把 $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 误写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \text{ 另外, 原书只假定 } f(x) \text{ 在}$$

$(-\infty, +\infty)$ 上绝对可积, 这是不够的. 应加上假定 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续. 否则, 结论

$$\lim_{t \rightarrow +0} u(x, t) = f(x)$$

就可能不成立了. 例如, 令

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x = 0 \text{ 时;} \\ 0, & \text{当 } x \neq 0 \text{ 时,} \end{cases}$$

则显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 绝对可积. 这时

$$u(x, t) \equiv 0 \quad (t > 0, -\infty < x < +\infty),$$

故 $\lim_{t \rightarrow +0} u(0, t) = 0 \neq 1 = f(0)$.

原
书
缺
页

709-740

第六章 多变量函数的微分法

§1. 多变量函数的极限. 连续性

1° 多变量函数的极限 设函数 $f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在以 P_0 为聚点的集合 E 上有定义. 若对于任何的 $\varepsilon > 0$ 存在有 $\delta = \delta(\varepsilon, P_0) > 0$, 使得只要 $P \in E$ 及 $0 < \rho(P, P_0) < \delta$ (其中 $\rho(P, P_0)$ 为 P 和 P_0 二点间的距离), 则

$$|f(P) - A| < \varepsilon,$$

我们就说

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A.$$

2° 连续性 若

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0),$$

则称函数 $f(P)$ 于 P_0 点是连续的.

若函数 $f(P)$ 于已知域内的每一点连续, 则称函数 $f(P)$ 于此域内是连续的.

3° 一致连续性 若对于每一个 $\varepsilon > 0$ 都存在有仅与 ε 有关的 $\delta > 0$, 使得对于域 G 中的任何点 P', P'' , 只要是

$$\rho(P', P'') < \delta,$$

便有不等式

$$|f(P') - f(P'')| < \varepsilon$$

成立, 则称函数 $f(P)$ 于域 G 内是一致连续的.

于有界闭域内的连续函数于此域内是一致连续的。

确定并绘出下列函数存在的域：

3136. $u = x + \sqrt{y}$.

解 存在域为半平面，

$$y \geq 0,$$

如图 6.1 阴影部分所示，包括整个 Ox 轴在内。

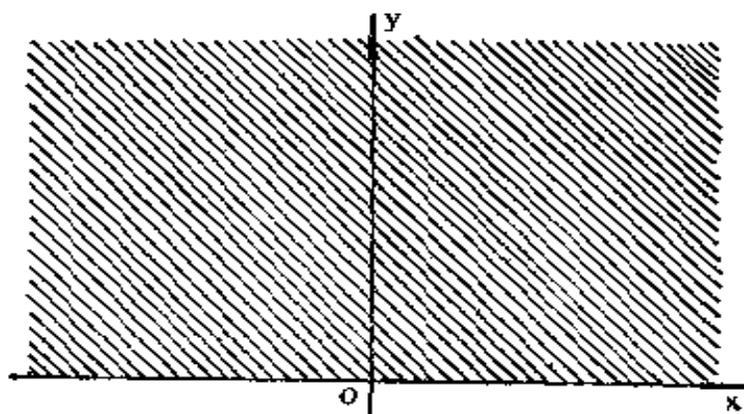


图 6.1

3137. $u = \sqrt{1-x^2}$
 $+ \sqrt{y^2-1}$.

解 存在域为满足不
等式

$$|x| \leq 1, |y| \geq 1$$

的点集，如图 6.2 阴
影部分所示，包括边
界（粗实线）在内。

3138. $u = \sqrt{1-x^2-y^2}$.

解 存在域为圆

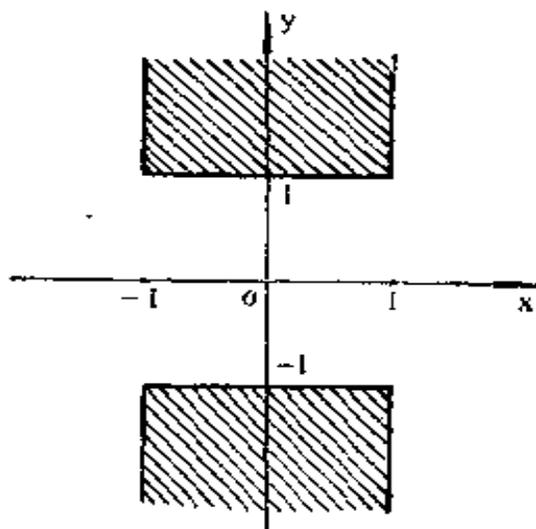


图 6.2

$$x^2 + y^2 \leq 1,$$

如图 6.3 阴影部分所示, 包括圆周在内.

$$3139. \quad u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$x^2 + y^2 > 1$$

的点集, 即圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的外面, 如图 6.4 所示, 不包括圆周 (虚线) 在内.

$$3140. \quad u = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$$

的点集, 如图 6.5 所示的环, 包括边界在内.

$$3141. \quad u = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

解 存在域为满足不等式

$$x \leq x^2 + y^2 < 2x$$

的点集. 由 $x^2 + y^2$

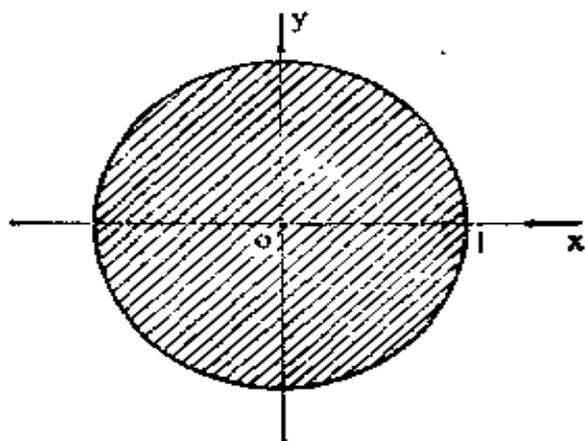


图 6.3

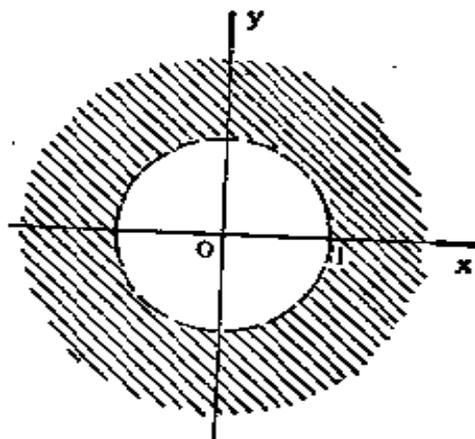


图 6.4

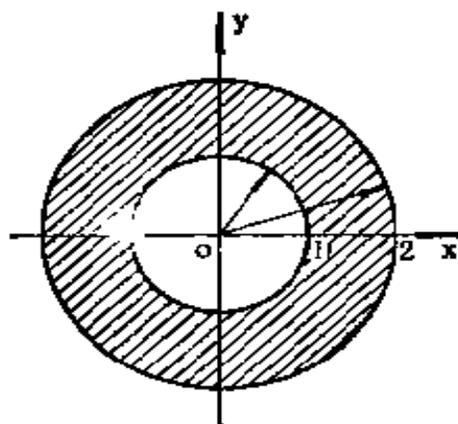


图 6.5

$\geq x$ 得出

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

由 $x^2 + y^2 < 2x$ 得出

$$(x-1)^2 + y^2 < 1,$$

两者组成一月形，如图 6.6 阴影部分所示。

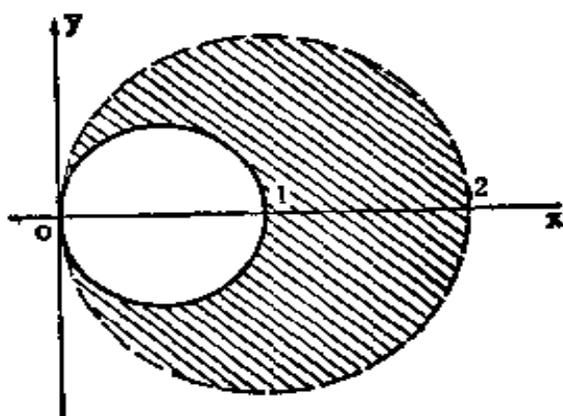


图 6.6

3142. $u = \sqrt{1 - (x^2 + y)^2}$.

解 存在域为满足不等式

$$-1 \leq x^2 + y \leq 1$$

的点集，如图 6.7 阴影部分所示，包括边界在内。

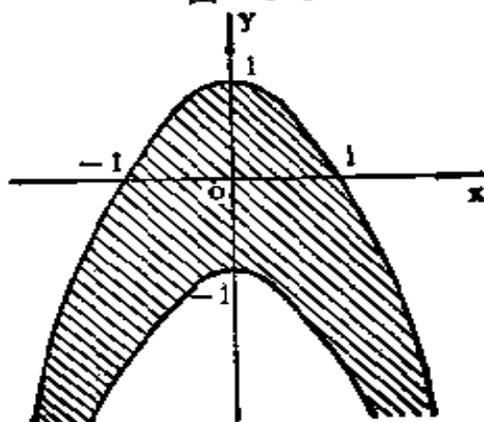


图 6.7

3143. $u = \ln(-x - y)$.

解 存在域为半平面

$$x + y < 0,$$

如图 6.8 阴影部分所示，不包括直线 $x + y = 0$ 在内。

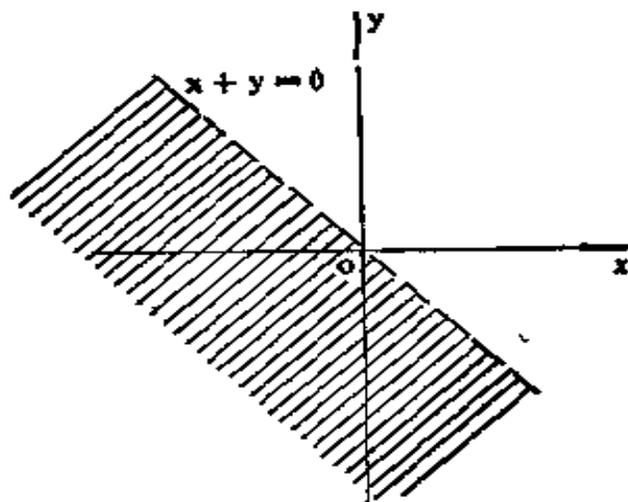


图 6.8

3144. $u = \arcsin \frac{y}{x}$.

解 存在域为满足

不等式

$$\left| \frac{y}{x} \right| \leq 1$$

或 $|y| \leq |x|$ ($x \neq 0$)
 的点集, 这是一对对顶的直角, 如图 6·9 阴影部分所示, 不包括原点在内。

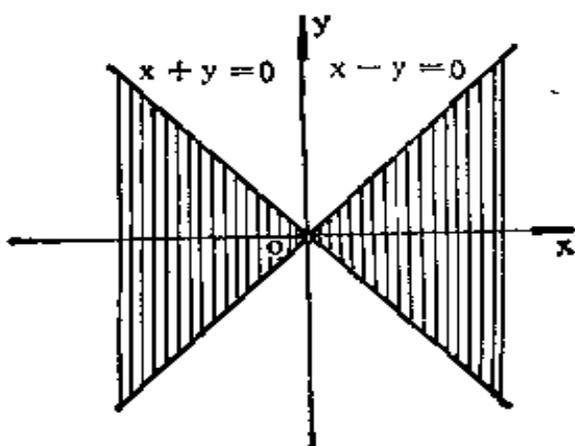


图 6·9

3145. $u = \arccos \frac{x}{x+y}$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$$

的点集. 由 $\left| \frac{x}{x+y} \right| \leq 1$ 得 $|x| \leq |x+y|$ ($x \neq -y$),
 即 $x^2 \leq x^2 + 2xy + y^2$ 或 $y(y+2x) \geq 0$, 也即

$$\begin{cases} y \geq 0, \\ y \geq -2x, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y \leq 0, \\ y \leq -2x. \end{cases}$$

但 x, y 不能同时为零. 这是由直线: $y = 0$ 和 $y = -2x$ 所围成的一对对顶的角, 如图 6·10 阴影部分所示, 包括边界在内, 但不包括公共顶点 $O(0,0)$ 在内。

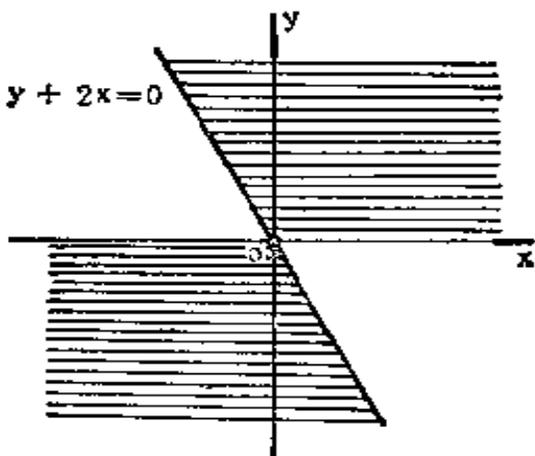


图 6·10

3146. $u = \arcsin \frac{x}{y^2} + \arcsin(1 - y).$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{x}{y^2} \right| \leq 1 \text{ 及 } |1 - y| \leq 1 \quad (y \neq 0)$$

的点集, 即

$$\begin{cases} y^2 \geq x, \\ 0 < y \leq 2 \end{cases} \text{ 和}$$

$$\begin{cases} y^2 \geq -x, \\ 0 < y \leq 2. \end{cases}$$

这是由抛物线:

$$y^2 = x, \quad y^2 = -x$$

和直线 $y = 2$ 所围成的曲边三角形, 如图 6·11 阴影部分所示, 不包括原点在內.

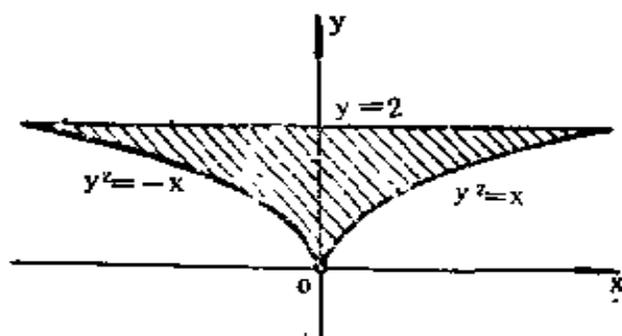


图 6·11

3147. $u = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}.$

解 存在域为满足不等式

$$\sin(x^2 + y^2) \geq 0$$

$$\text{或 } 2k\pi \leq x^2 + y^2$$

$$\leq (2k + 1)\pi \quad (k$$

$= 0, 1, 2, \dots)$ 的点集, 如图 6·12 所示的同心环族.

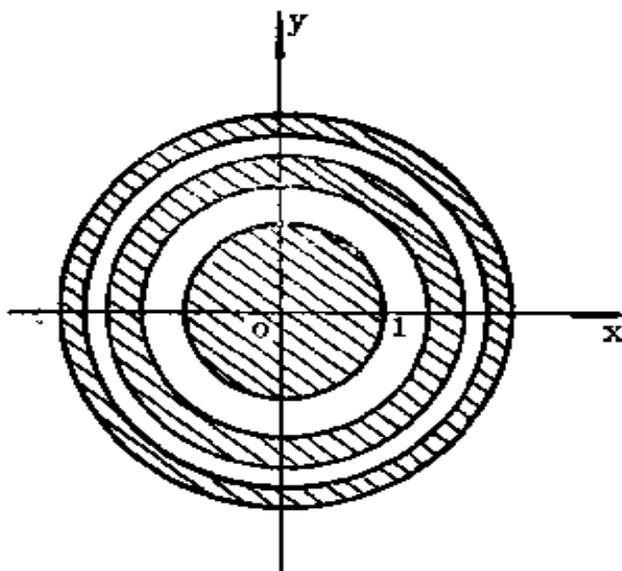


图 6·12

$$3148. u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

解 存在域为满足不等式

$$\left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1$$

(x, y 不同时为零)

或

$$x^2 + y^2 - z^2 \geq 0$$

(x, y 不同时为零)

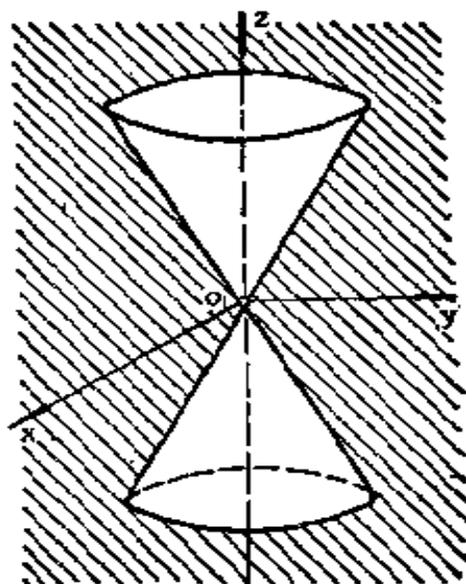


图 6-13

的点集，这是圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 的外面，如图 6-13 阴影部分所示，包括边界在内，但要除去圆锥的顶点。

$$3149. u = \ln(xyz).$$

解 存在域为满足不等式

$$xyz > 0$$

的点集，即

$$x > 0, y > 0, z > 0; \text{ 或 } x > 0, y < 0, z < 0;$$

$$x < 0, y < 0, z > 0; \text{ 或 } x < 0, y > 0, z < 0.$$

其图形为空间第一、第三、第六及第八卦限的总体，但不包括坐标面。由于图形为读者所熟知，故省略。以下有类似情况，不再说明。

$$3150. u = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

解 存在域为满足不等式

$$-x^2 - y^2 + z^2 > 1$$

的点集。这是双叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = -1$ 的内部，如图 6·14 阴影部分所示，不包括界面在内。作出下列函数的等位线：

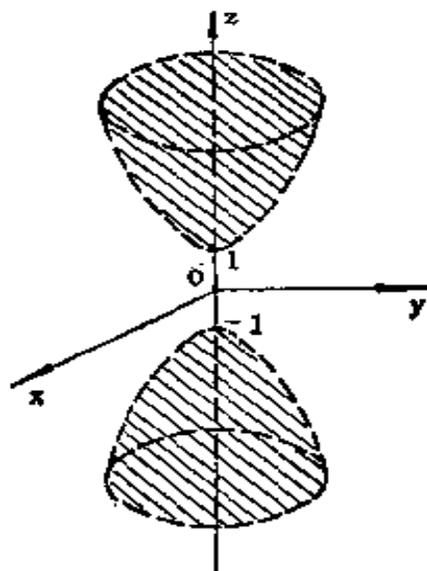


图 6·14

3151. $z = x + y.$

解 等位线为平行直线族

$$x + y = k,$$

其中 k 为一切实数，如图 6·15 所示。

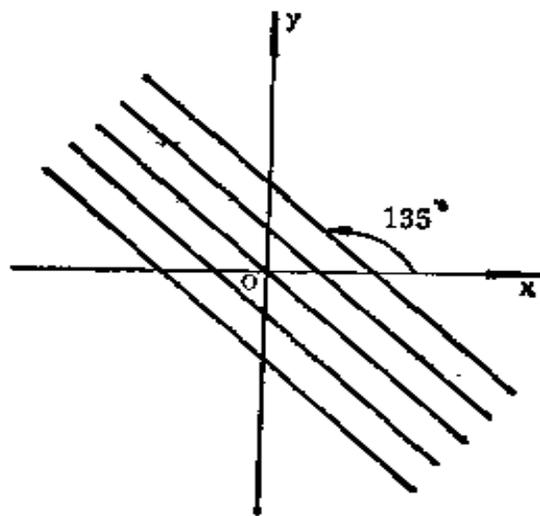


图 6·15

3152. $z = x^2 + y^2.$

解 等位线为曲线族

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$(a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 时为原点；当 $a > 0$ 时，等位线为以原点为圆心的同心圆族。

3153. $z = x^2 - y^2.$

解 等位线为曲线族

$$x^2 - y^2 = k.$$

当 $k = 0$ 时为两条互相垂直的直线： $y = x, y = -x.$

当 $k \neq 0$ 时为以 $y = \pm x$ 为公共渐近线的等边双曲线族，其中当 $k > 0$ 时顶点为 $(-\sqrt{k}, 0), (\sqrt{k}, 0)$ ，当 $k < 0$ 时顶点为 $(0, -\sqrt{-k}), (0, \sqrt{-k})$ 。

3154. $z = (x + y)^2$.

解 等位线为曲线族

$$(x + y)^2 = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 为直线 $x + y = 0$ 。当 $a \neq 0$ 时为与直线 $x + y = 0$ 平行的且等距的直线 $x + y = \pm a$ 。

3155. $z = \frac{y}{x}$.

解 等位线为以坐标原点为束心的直线束

$$y = kx \quad (x \neq 0),$$

不包括 Oy 轴在内。

3156. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$.

解 等位线为椭圆族

$$x^2 + 2y^2 = a^2 \quad (a > 0).$$

长半轴为 a ，短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ ，焦点为 $(-a\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$

及 $(a\sqrt{\frac{3}{2}}, 0)$ 。

3157. $z = \sqrt{xy}$.

解 等位线为曲线族

$$xy = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 时为坐标轴 $x = 0$ 及 $y = 0$ 。当 $a > 0$ 时为以两坐标轴为公共渐近线且位于第一、第三象限内的等

边双曲线族，顶点为 $(-a, -a)$ 及 (a, a) 。

3158. $z = |x| + y$.

解 等位线为曲线族

$$|x| + y = k,$$

其中 k 为一切实数. 当

$x \geq 0$ 时为 $x + y = k$;

当 $x < 0$ 时为 $-x + y$

$= k$. 这是顶点在 Oy

轴上两支互相垂直的

射线所构成的折线

族, 如图 6.16 所示.

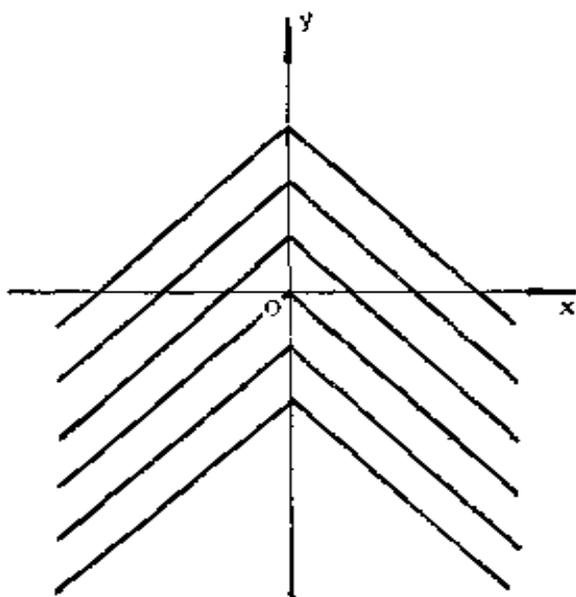


图 6.16

3159. $z = |x| + |y| - |x + y|$.

解 等位线为曲线族

$$|x| + |y| - |x + y| = a.$$

因为恒有 $|x| + |y| \geq |x + y|$, 所以 $a \geq 0$.

当 $a = 0$ 时, 由 $|x| + |y| = |x + y|$ 两边平方即得

$$xy \geq 0,$$

即为整个第一、第三象限, 包括两坐标轴在内.

当 $a > 0$ 时, $xy < 0$, 分下面四组求解:

(1) $x > 0, y < 0, x + y \geq 0, |x| + |y| - |x + y|$
 $= a$, 解之得 $y = -\frac{a}{2}$;

(2) $x > 0, y < 0, x + y \leq 0, |x| + |y| - |x + y|$
 $= a$, 解之得 $x = \frac{a}{2}$;

(3) $x < 0, y > 0, x + y \geq 0, |x| + |y| - |x + y| = a$, 解之得 $x = -\frac{a}{2}$;

(4) $x < 0, y > 0, x + y \leq 0, |x| + |y| - |x + y| = a$, 解之得 $y = \frac{a}{2}$.

这是顶点位于直线 $x + y = 0$ 上的两支互相垂直的折线族, 它的各射线平行于坐标轴, 如图 6.17 所示.

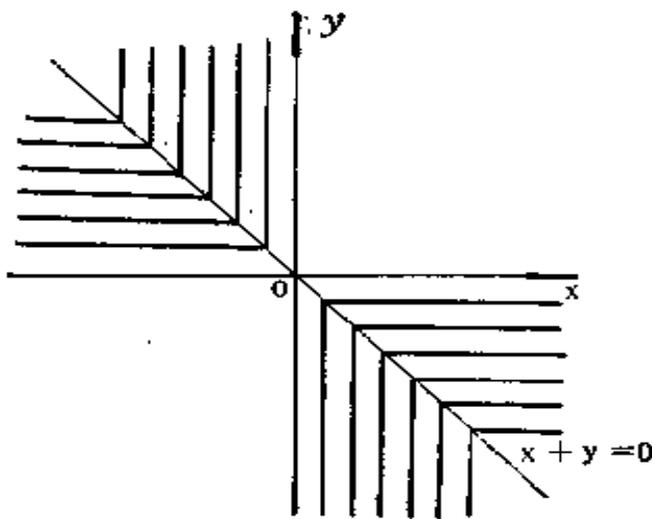


图 6.17

3160. $z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}$.

解 等位线为曲线族

$$\frac{2x}{x^2 + y^2} = k \quad (x, y \text{ 不同时为零}),$$

其中 k 为异于零的一切实数. 上式可变形为

$$\left(x - \frac{1}{k}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{k}\right)^2 \quad (k \neq 0).$$

当 $k = 0$ 时, 即得 $e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}} = 1$, 从而等位线为 $x = 0$ 即 Oy 轴, 但不包括原点.

当 $k \neq 0$ 时为中心在 Ox 轴上且经过坐标原点 (但不包括原点在内) 的圆束, 圆心在 $(\frac{1}{k}, 0)$, 半径为 $|\frac{1}{k}|$,

如图 6·18 所示.

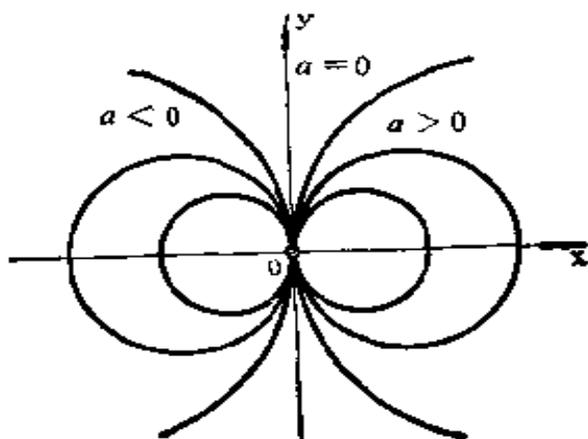


图 6·18

3161. $z = x^a \ (x > 0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^a = a \ (a > 0).$$

当 $a = 1$ 时为直线 $x = 1$ 及 Ox 轴的正向半射线, 但不包括原点在内.

当 $0 < a < 1$ 与 $a > 1$ 时的图象如图 6·19 所示.

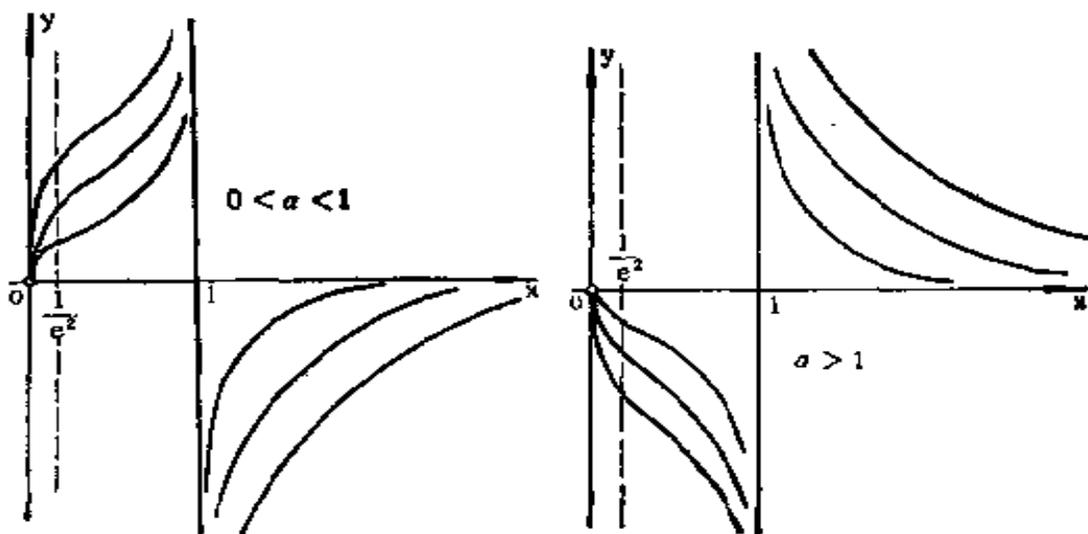


图 6·19

3162. $z = x^a e^{-x} \ (x > 0)$.

解 等位线为曲线族

$$x^y e^{-x} = a \quad (a > 0),$$

即

$$y \ln x - x = \ln a.$$

当 $a = e^{-1}$ 时为直线 $x = 1$

和曲线 $y = \frac{x-1}{\ln x}$; 当 $0 < a$

$< \frac{1}{e}$, $\frac{1}{e} < a < 1$ 或 $a \geq 1$ 时

图象布满整个右半平面, 如图 6·20 所示, 不包括 Oy 轴.

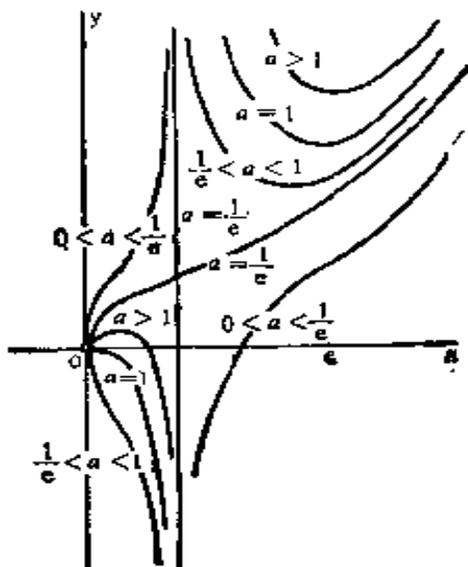


图 6·20

3163. $z = \ln \sqrt{\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2}} \quad (a > 0).$

解 等位线为曲线族

$$\frac{(x-a)^2 + y^2}{(x+a)^2 + y^2} = k^2 \quad (k > 0).$$

整理得

$$(1-k^2)x^2 - 2a(1+k^2)x + (1-k^2)a^2 + (1-k^2)y^2 = 0.$$

当 $k = 1$ 时得 $x = 0$, 即 Oy 轴. 当 $k \neq 1$ 时, 上述方程可变形为

$$\left[x - \frac{a(1+k^2)}{1-k^2} \right]^2 + y^2 = \left(\frac{2ak}{1-k^2} \right)^2,$$

这是以点 $\left(\frac{a(1+k^2)}{1-k^2}, 0 \right)$ 为圆心, 半径为 $\left| \frac{2ak}{1-k^2} \right|$

的圆族。当 $0 < k < 1$ 时，圆分布在右半平面；当 $k > 1$ 时，圆分布在左半平面。

如果注意到圆心与原点距离的平方为

$$\left[\frac{a(1+k^2)}{1-k^2} \right]^2 = \frac{a^2[(1-k^2)^2 + 4k^2]}{(1-k^2)^2}$$

$$= a^2 + \left(\frac{2ak}{1-k^2} \right)^2,$$

即等位线圆族与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 在交点处的半径互相垂直（或圆心距与两圆的半径构成直角三角形），便知等位线圆族与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 成正交。如图 6·21 所示。

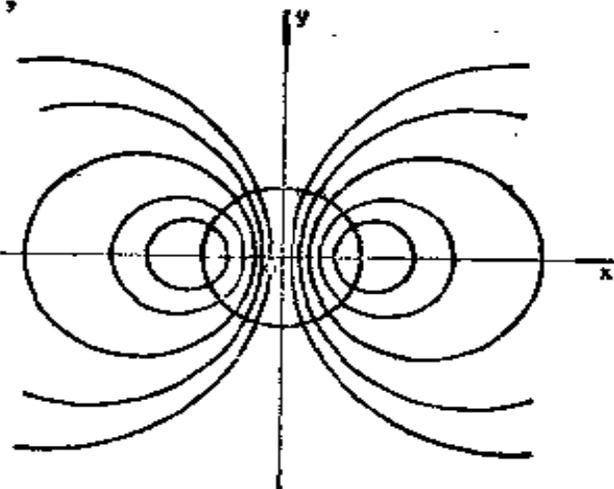


图 6·21

3164. $z = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (a > 0).$

解 等位线为曲线族

$$\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} = k,$$

其中 k 为一切实数，但要除去点 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 。
 当 $k=0$ 时， $y=0$ ，即为 Ox 轴，但不包含上述两点；
 当 $k \neq 0$ 时，方程可变形为

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{k}\right)^2 = a^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right),$$

这是圆心在 Oy 轴上且经过点 $(-a, 0)$ 及 $(a, 0)$ 但不包括这两点在内的圆族, 如图 6.22 所示.

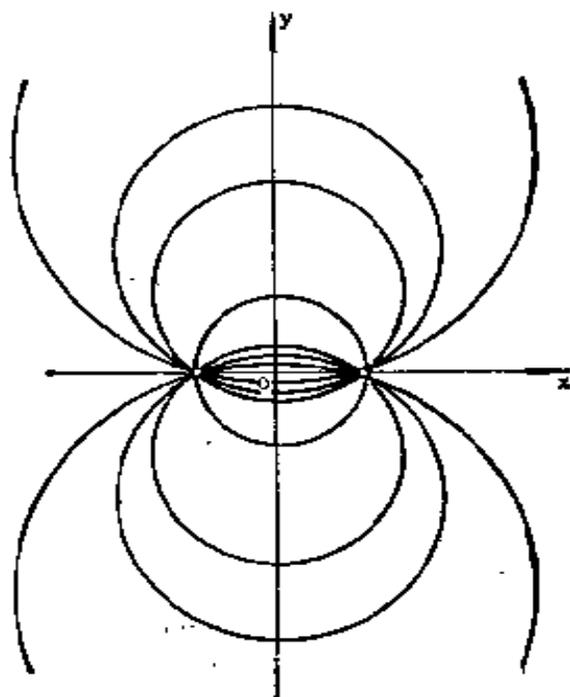


图 6.22

3165. $z = \operatorname{sgn}(\sin x \sin y)$.

解 若 $z = 0$, 则 $\sin x \cdot \sin y = 0$, 此即直线族

$$x = m\pi \text{ 和 } y = n\pi \quad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots);$$

若 $z = -1$ 或 $z = 1$, 则 $\sin x \sin y < 0$ 或 $\sin x \sin y > 0$, 此即正方形系

$$m\pi < x < (m+1)\pi, \quad n\pi < y < (n+1)\pi,$$

其中 $z = (-1)^{m+n}$.

如图 6.23 所示, $z = 0$ 时为图中网格直线; $z = 1$ 为图中带斜线的正方形; $z = -1$ 为图中空白正方形, 但后两者都不包括边界.

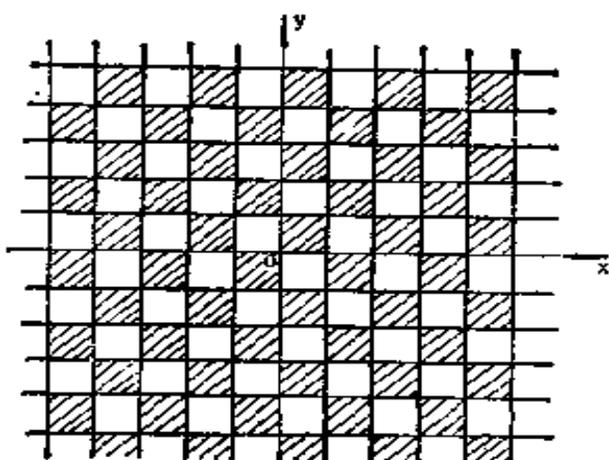


图 6.23

求下列函数的等位

面:

3166. $u = x + y + z.$

解 等位面为平行平面族

$$x + y + z = k,$$

其中 k 为一切实数.

3167. $u = x^2 + y^2 + z^2.$

解 等位面为中心在原点的同心球族

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (a \geq 0),$$

其中当 $a = 0$ 时即为原点.

3168. $u = x^2 + y^2 - z^2.$

解 当 $u = 0$ 时等位面为圆锥 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$; 当 $u > 0$ 时等位面为单叶双曲面族 $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ ($a > 0$); 当 $u < 0$ 时等位面为双叶双曲面族 $-x^2 - y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$).

3169. $u = (x + y)^2 + z^2.$

解 等位面为曲面族

$$(x + y)^2 + z^2 = a^2 \quad (a \geq 0).$$

当 $a = 0$ 时为 $x + y = 0$ 和 $z = 0$. 当 $a > 0$ 时作坐标变换

$$\begin{cases} x' = x \cos \frac{\pi}{4} + y \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y), \\ y' = -x \sin \frac{\pi}{4} + y \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x + y), \\ z' = z, \end{cases}$$

这是旋转变换. 在新坐标系中原等位面方程转化为

$$2x'^2 + z'^2 = a^2,$$

即

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

这是以 y' 轴为公共轴的椭圆柱面, 母线的方向平行于 y' 轴, 准线为 $y' = 0$ 平面上的椭圆

$$\frac{x'^2}{\frac{a^2}{2}} + \frac{z'^2}{a^2} = 1,$$

长半轴为 a (z' 轴方向), 短半轴为 $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (x' 轴方向)。

y' 轴在新系 $O-x'y'z'$ 中的方程为

$$\begin{cases} x' = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

面在旧系 $O-xyz$ 中的方程为

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

即为所求的椭圆柱面族的公共对称轴。

3170. $u = \operatorname{sgn} \sin(x^2 + y^2 + z^2)$.

解 当 $u = 0$ 时等位面为球心在原点的同心球族

$$x^2 + y^2 + z^2 = n\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

当 $u = -1$ 或 $u = 1$ 时等位面为球层族

$$n\pi < x^2 + y^2 + z^2 < (n+1)\pi \quad (n=0, 1, 2, \dots),$$

其中 $u = (-1)^n$.

根据曲面的已知方程研究其性质:

3171. $z = f(y - ax)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = f(y - ax)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = at + s, \\ z = f(s). \end{cases}$$

今固定 s , 得到以 t 为参数的直线方程, 其方向数为 $1, a, 0$. 因此, 曲面为以 $1, a, 0$ 为母线方向的一个柱面. 令 $t = 0$, 可得

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = s, \\ z = f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 0, \\ z = f(y), \end{cases}$$

这是 $x = 0$ 平面上的一条曲线, 也是柱面

$$z = f(y - ax)$$

的一条准线.

3172. $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$.

解 这是绕 Oz 轴旋转的旋转曲面的标准形式. 令 $y = 0$, 得曲线

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = f(x) \quad (x \geq 0), \end{cases}$$

它是旋转曲面的一条母线.

3173. $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = st (t \neq 0), \\ z = tf(s). \end{cases}$$

今固定 s , 这是以 t 为参数的一条过原点的直线. 因此, 所给曲面为顶点在原点的一锥面, 但不包括原点在内. 令 $t=1$, 得曲线

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = s, \\ z = f(s), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = 1, \\ z = f(y), \end{cases}$$

这是 $x=1$ 平面上的一条曲线, 也是锥面 $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ 的一条准线.

3174⁺. $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

解 引入参数 t, s , 将曲面方程 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表成参数方程

$$\begin{cases} x = t, \\ y = st, \\ z = f(s). \end{cases}$$

* 题号右上角“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的. 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

今固定 s , 这是一条过点 $(0, 0, f(s))$ 的直线, 方向数为 $1, s, 0$. 因此, 它与 Oz 轴垂直, 与 Oxy 平面平行, 且其方向与 s 有关. 从而得知, 曲面 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 表示一个直纹面. 一般说来, 它既不是柱面, 又不是锥面. 令 $t = 1$, 得到直纹面的一条准线

$$\begin{cases} x = 1, \\ z = f(y). \end{cases}$$

从此曲线上每一点引一条与 Oz 轴垂直且相交的直线. 这样的直线的全体, 便构成由 $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ 所表示的直纹面.

3175. 作出函数

$$F(t) = f(\cos t, \sin t)$$

的图形, 式中

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{若 } y \geq x, \\ 0, & \text{若 } y < x. \end{cases}$$

解 按题设, 当 $\sin t \geq \cos t$, 即 $\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq t \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $F(t) = 1$; 而当

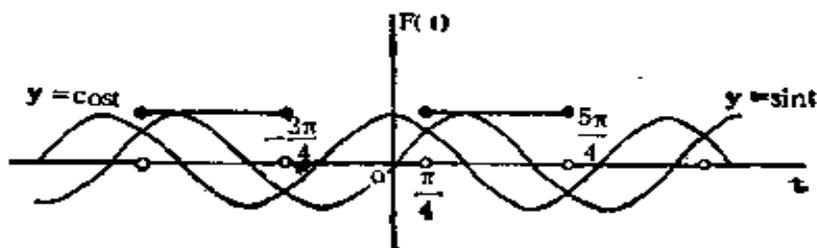


图 6.24

$\sin t < \cos t$, 即 $-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < t < \frac{\pi}{4} + 2k\pi$ 时, $F(t) = 0$. 如图 6.24 所示.

3176. 若

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2},$$

求 $f(1, \frac{y}{x})$.

$$\text{解 } f(1, \frac{y}{x}) = \frac{2 \cdot 1 \cdot \frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} = f(x, y).$$

3177. 若

$$f(\frac{y}{x}) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x} \quad (x > 0),$$

求 $f(x)$.

$$\text{解 } \text{由 } f(\frac{y}{x}) = \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2} \text{ 知 } f(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

3178. 设

$$z = \sqrt{y} + f(\sqrt{x} - 1).$$

若当 $y=1$ 时 $z=x$, 求函数 f 和 z .

解 因为当 $y=1$ 时 $z=x$, 所以

$$\begin{aligned} f(\sqrt{x} - 1) &= x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1) \\ &= (\sqrt{x} - 1)[(\sqrt{x} - 1) + 2], \end{aligned}$$

从而得

$$f(t) = t(t+2) = t^2 + 2t,$$

且

$$z = \sqrt{y} + x - 1 \quad (x > 0),$$

3179. 设

$$z = x + y + f(x - y).$$

若当 $y=0$ 时, $z=x^2$, 求函数 f 及 z .

解 因为当 $y=0$ 时 $z=x^2$, 所以

$$x^2 = x + f(x),$$

即

$$f(x) = x^2 - x,$$

且

$$z = x + y + (x - y)^2 - (x - y) = 2y + (x - y)^2.$$

3180. 若 $f(x + y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2$, 求 $f(x, y)$.

解 因为

$$\begin{aligned} f\left(x + y, \frac{y}{x}\right) &= x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \\ &= (x + y)^2 \frac{x - y}{x + y} = (x + y)^2 \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}, \end{aligned}$$

所以

$$f(x, y) = x^2 \frac{1 - y}{1 + y}.$$

3181. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 1; \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = -1,$$

从而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

$$\text{证} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1.$$

由于两个单极限都存在, 而累次极限不等, 故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3182. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$$

有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = 0,$$

然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

$$\begin{aligned} \text{证} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \end{aligned}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2} \right\} \\ = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0.$$

如果按 $y = kx \rightarrow 0$ 的方向取极限, 则有

$$\lim_{\substack{y=kx \\ x \rightarrow 0}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 k^2}{x^4 k^2 + x^2 (1-k)^2}.$$

特别地, 分别取 $k = 0$ 及 $k = 1$, 便得到不同的极限 0 及 1. 因此, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在.

3183. 证明: 对于函数

$$f(x, y) = (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$$

累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 不存在, 然而 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

证 由不等式

$$0 \leq |(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

但当 $x \neq \frac{1}{k\pi}$, $y \rightarrow 0$ 时, $(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ 的极限不存在, 因此累次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 不存在. 同法可证累次极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\}$ 也不存在.

3184. 求 $\lim_{x \rightarrow a} \left\{ \lim_{y \rightarrow b} f(x, y) \right\}$ 及 $\lim_{y \rightarrow b} \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x, y) \right\}$, 设:

$$(a) f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x^y}{1 + x^y}, \quad a = +\infty, \quad b = +0;$$

$$(B) f(x, y) = \sin \frac{\pi x}{2x + y}, \quad a = \infty, \quad b = \infty;$$

$$(r) f(x, y) = \frac{1}{xy} \tan^{-1} \frac{xy}{1 + xy}, \quad a = 0, \quad b = \infty;$$

$$(L) f(x, y) = \log_x(x + y), \quad a = 1, \quad b = 0.$$

$$\text{解 (a)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^4} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow +0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow +0} \frac{x^y}{1 + x^y} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow +0} \left\{ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^y}{1 + x^y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow +0} 1 = 1;$$

$$(B) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi x}{2x + y} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$(Г) \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{xy} \cdot \lim_{y \rightarrow \infty} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 0 \cdot \operatorname{tg} 1 \right\} = 0,$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{xy} \operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{xy}{1 + xy}}{\frac{xy}{1 + xy}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + xy} \right\}$$

$$= \lim_{y \rightarrow \infty} 1 = 1;$$

$$(Д) \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \log_x(x + y) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} \right\} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x} = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} f(x, y) \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \left\{ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x + y)}{\ln x} \right\} = \infty.$$

求下列极限:

$$3185. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2}.$$

解 由不等式 $x^2+y^2 \geq 2|xy|$ 得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} \right| \leq \frac{|x+y|}{x^2+y^2-|xy|} \leq \frac{|x+y|}{|xy|} \\ &\leq \frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|}, \end{aligned}$$

而 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{|y|} \right) = 0$, 故有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x+y}{x^2-xy+y^2} = 0.$$

$$3186. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}.$$

解 由不等式

$$0 \leq \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} \leq \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)$$

及 $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4} = 0.$$

$$3187. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x}.$$

解 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow a}} \left(\frac{\sin xy}{xy} \cdot y \right) = a.$

$$3188. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)},$$

$$\text{解 } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} (x^2 + y^2) e^{-(x+y)}$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left[\frac{(x+y)^2}{e^{x+y}} - 2 \cdot \frac{x}{e^x} \cdot \frac{y}{e^y} \right] = 0^*).$$

*) 利用 564 题的结果.

$$3189. \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2}.$$

解 由不等式

$$0 \leq \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2}$$

及 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{x^2} = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ y \rightarrow +\infty}} \left(\frac{xy}{x^2 + y^2} \right)^{x^2} = 0.$$

$$3190. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}.$$

解 由不等式

$$|x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)| \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} |\ln(x^2 + y^2)|$$

及 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{4} \ln(x^2 + y^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{4} t^2 \ln t = 0$, 即得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (x^2 + y^2)^{x^2 y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{x^2 y^2 \ln(x^2 + y^2)} = e^0 = 1.$$

$$3191. \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}} &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x \cdot \frac{x}{x+y}} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} e^{[x \ln(1 + \frac{1}{x})] \cdot \frac{x}{x+y}} \\ &= e^{[\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})] \cdot [\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow a}} \frac{x}{x+y}]} = e^{1 \cdot 1} = e. \end{aligned}$$

$$3192. \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$\text{解} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\ln(1 + e^0)}{1} = \ln 2.$$

3193⁺. 若 $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, 问下列极限沿怎样的方向 φ 有确定的极限值存在:

$$(a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}}; \quad (b) \lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{x^2 - y^2} \cdot \sin 2xy.$$

$$\text{解} \quad (a) \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{x}{x^2 + y^2}} = \lim_{\rho \rightarrow +0} e^{\frac{\cos \varphi}{\rho}}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{当 } \cos \varphi < 0; \\ 1, & \text{当 } \cos \varphi = 0; \\ +\infty, & \text{当 } \cos \varphi > 0. \end{cases}$$

于是, 仅当 $\cos \varphi \leq 0$ 即 $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ 时, 所给的极限

才有确定的值.

$$(6) e^{x^2-y^2} \sin 2xy = e^{\rho^2 \cos 2\varphi} \sin(\rho^2 \sin 2\varphi).$$

当 $\rho \rightarrow +\infty$ 时, $\sin(\rho^2 \sin 2\varphi)$ 有界, 除 $\varphi = \frac{k\pi}{2}$

($k=0, 1, 2, 3$) 外无极限, 且

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} e^{\rho^2 \cos 2\varphi} = \begin{cases} 0, & \text{当 } \cos 2\varphi < 0; \\ 1, & \text{当 } \cos 2\varphi = 0; \\ +\infty, & \text{当 } \cos 2\varphi > 0. \end{cases}$$

于是, 仅当 $\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{3\pi}{4}$ 及 $\frac{5\pi}{4} < \varphi < \frac{7\pi}{4}$ 以及 $\varphi=0, \varphi$

$=\pi$ 时才有确定的极限.

求下列函数的不连续点:

$$3194. u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解 函数 $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 在点 $(0, 0)$ 无定义, 故原点

$(0, 0)$ 为此函数的不连续点. 以下各题类似情况, 不再说明.

$$3195. u = \frac{xy}{x+y}.$$

解 直线 $x+y=0$ 上的一切点均为 $u = \frac{xy}{x+y}$ 的不连续点.

$$3196. u = \frac{x+y}{x^a + y^a}.$$

解 对于任意不等于零的实数 a , 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow -a}} \frac{x+y}{x^3+y^3} = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ y \rightarrow -a}} \frac{1}{x^2-xy+y^2} = \frac{1}{3a^2}.$$

于是，对于直线 $x+y=0$ 上除去原点 O 外的一切点均为可移去的不连续点。而原点 $O(0,0)$ 为无穷型不连续点。

3197. $u = \sin \frac{1}{xy}.$

解 $xy=0$ 上的一切点即两坐标轴上的诸点均为 $u = \sin \frac{1}{xy}$ 的不连续点。

3198. $u = \frac{1}{\sin x \sin y}.$

解 直线 $x=m\pi$ 及 $y=n\pi$ ($m, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 上的各点均为 $u = \frac{1}{\sin x \sin y}$ 的不连续点。

3199. $u = \ln(1-x^2-y^2).$

解 圆周 $x^2+y^2=1$ 上各点是 $u = \ln(1-x^2-y^2)$ 的不连续点。

3200. $u = \frac{1}{xyz}.$

解 坐标面: $x=0, y=0, z=0$ 上各点均为 $u = \frac{1}{xyz}$ 的不连续点。

3201. $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$

解 点 (a, b, c) 为 $u = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$ 的不连续点.

3202. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

分别对于每一个变数 x 或 y (当另一变数的值固定时)是连续的, 但并非对这些变数的总体是连续的.

证 先固定 $y = a \neq 0$, 则得 x 的函数

$$g(x) = f(x, a) = \begin{cases} \frac{2ax}{x^2 + a^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

即 $g(x) = \frac{2ax}{x^2 + a^2}$ ($-\infty < x < +\infty$), 它是处处有定义的有理函数. 又当 $y = 0$ 时, $f(x, 0) \equiv 0$, 它显然是连续的. 于是, 当变数 y 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 x 是连续的. 同理可证, 当变数 x 固定时, 函数 $f(x, y)$ 对于变数 y 是连续的.

作为二元函数, $f(x, y)$ 虽在除点 $(0, 0)$ 外的各点均连续, 但在点 $(0, 0)$ 不连续. 事实上, 当动点 $P(x, y)$ 沿射线 $y = kx$ 趋于原点时, 有

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y=kx)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2kx^2}{x^2(1+k^2)} = \frac{2k}{1+k^2},$$

对于不同的 k 可得不同的极限值, 从而知 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在. 因此, 函数 $f(x, y)$ 在原点不是二元连续

的.

3203. 证明: 函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{若 } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

在点 $O(0, 0)$ 沿着过此点的每一射线

$$x = t \cos \alpha, \quad y = t \sin \alpha \quad (0 \leq t < +\infty)$$

连续, 即

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0);$$

但此函数在点 $(0, 0)$ 并非连续的.

证 当 $\sin \alpha = 0$ 时, $\cos \alpha = 1$ 或 -1 . 于是, 当 $t \neq 0$ 时, $f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = \frac{t^2 \cdot 0}{t^4 + 0} = 0$, 而 $f(0, 0) = 0$,

故有 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$.

当 $\sin \alpha \neq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^4 \cos^4 \alpha + t^2 \sin^2 \alpha} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos^2 \alpha \sin \alpha}{t^2 \cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha} = \frac{0}{0 + \sin^2 \alpha} = 0, \end{aligned}$$

故 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \alpha, t \sin \alpha) = f(0, 0)$.

其次, 设动点 $P(x, y)$ 沿抛物线 $y = x^2$ 趋于原点, 得

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ (y=x^2)}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

因此, 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续.

3204. 证明: 函数

$$f(x, y) = x \sin \frac{1}{y}, \text{ 若 } y \neq 0 \text{ 及 } f(x, 0) = 0$$

的不连续点的集合不是封闭的.

证 当 $y_0 \neq 0$ 时, 函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 显见是连续的, 即 $f(x, y)$ 在除去 Ox 轴以外的一切点均连续.

又因 $|f(x, y) - f(0, 0)| = |f(x, y)| \leq |x|$, 故知 $f(x, y)$ 在原点也是连续的.

考虑当 $x_0 \neq 0$ 时, 对于点 $(x_0, 0)$, 由于极限

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(x_0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} x_0 \sin \frac{1}{y}$$

不存在, 故知 $f(x, y)$ 在点 $(x_0, 0)$ 不连续.

这样, 我们证明了, 函数 $f(x, y)$ 的全部不连续点为 Ox 轴上除去原点外的一切点. 显然, 原点是不连续点集合的一个聚点, 但它本身却不是 $f(x, y)$ 的不连续点. 因此, $f(x, y)$ 的不连续点的集合不是封闭的.

3205. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 在某域 G 内对变数 x 是连续的, 而关于 x 对变数 y 是一致连续的, 则此函数在所考虑的域内是连续的.

证 任意固定一点 $P_0(x_0, y_0) \in G$.

由于 $f(x, y)$ 关于 x 对变数 y 一致连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, 使当 $(x, y') \in G$, $(x, y'') \in G$ 且 $|y' - y''| < \delta_1$ 时, 就有

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 关于变数 x 是连续的, 故对上述的 ε , 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta_2$ 时, 就有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $0 < \delta \leq \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 并使点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域全部包含在区域 G 内, 则当点 $P(x, y)$ 属于点 (x_0, y_0) 的 δ 邻域, 即 $|PP_0| < \delta$ 时,

$$|x - x_0| < \delta \leq \delta_2, \quad |y - y_0| < \delta \leq \delta_1.$$

从而有

$$\begin{aligned} |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x, y) - f(x, y_0)| \\ &\quad + |f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, $f(x, y)$ 在点 P_0 连续. 由 P_0 的任意性知, 函数 $f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

3206. 证明: 若在某域 G 内函数 $f(x, y)$ 对变数 x 是连续的, 并满足对变数 y 的里普什兹条件, 即

$$|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L|y' - y''|,$$

式中 $(x, y') \in G, (x, y'') \in G$ 而 L 为常数, 则此函数在已知域内是连续的.

证 由于 $f(x, y)$ 在 G 内满足对 y 的里普什兹条件, 故知 $f(x, y)$ 在 G 内关于 x 对变数 y 是一致连续的. 因此, 由 3205 题的结果, 即知 $f(x, y)$ 在 G 内是连续的.

3207. 证明: 若函数 $f(x, y)$ 分别地对每一个变数 x 和 y 是

例 连续的并对于其中的一个是单调的，则此函数对两个变量的总体是连续的（尤格定理）。

证 不妨设 $f(x, y)$ 关于 x 是单调的。

设 (x_0, y_0) 为函数 $f(x, y)$ 的定义域 G 内的任一点。由于 $f(x, y)$ 关于 x 连续，故对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta_1 > 0$ （假定 δ_1 足够小，使我们所考虑的点都落在 G 内），使当 $|x - x_0| \leq \delta_1$ 时，就有

$$|f(x, y_0) - f(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对于点 $(x_0 - \delta_1, y_0)$ 及 $(x_0 + \delta_1, y_0)$ ，由于 $f(x, y)$ 关于 y 连续，故对上述的 ε ，存在 $\delta_2 > 0$ （也要求 δ_2 足够小，使所考虑的点落在 G 内），使当 $|y - y_0| < \delta_2$ 时，就有

$$|f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

及

$$|f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ，则当 $|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta$ 时，由于 $f(x, y)$ 关于 x 单调，故有

$$\begin{aligned} & |f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq \max\{|f(x_0 + \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|, \\ & |f(x_0 - \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|\}. \end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned} & |f(x_0 \pm \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| \\ & \leq |f(x_0 \pm \delta_1, y_0 + \Delta y) - f(x_0 \pm \delta_1, y_0)| \\ & \quad + |f(x_0 \pm \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0)| \end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故当 $|\Delta x| < \delta, |\Delta y| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

即 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 是连续的. 由点 (x_0, y_0) 的任意性知, $f(x, y)$ 是 G 内的二元连续函数.

3208. 设函数 $f(x, y)$ 于域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上是连续的, 而函数叙列 $\varphi_n(x)$ ($n = 1, 2, \dots$) 在 $[a, A]$ 上一致收敛并满足条件 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$. 证明: 函数叙列

$$F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

也在 $[a, A]$ 上一致收敛.

证 由于 $b \leq \varphi_n(x) \leq B$, 故 $F_n(x) = f[x, \varphi_n(x)]$ 有意义.

由题设 $f(x, y)$ 在域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 上连续, 故在此域上一致连续, 即对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使对于此域中的任意两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, 只要 $|x_1 - x_2| < \delta, |y_1 - y_2| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon.$$

特别地, 当 $|y_1 - y_2| < \delta$ 时, 对于一切的 $x \in [a, A]$, 均有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < \varepsilon.$$

对于上述的 $\delta > 0$, 因为 $\varphi_n(x)$ 在 $[a, A]$ 上一致收敛, 故存在自然数 N , 使当 $m > N, n > N$ 时, 对于一切的 $x \in [a, A]$, 均有

$$|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \delta.$$

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N , 使当 $m >$

N , $n > N$ 时, 对于一切的 $x \in (a, A)$, 均有

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_m(x)| &= \\ &= |f[x, \varphi_n(x)] - f[x, \varphi_m(x)]| < \varepsilon. \end{aligned}$$

因此, $F_n(x)$ 在 (a, A) 上一致收敛.

3209. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 内是连续的; 2) 函数 $\varphi(x)$ 于区间 (a, A) 内连续并有属于区间 (b, B) 内的值. 证明: 函数

$$F(x) = f[x, \varphi(x)]$$

于区间 (a, A) 内是连续的.

证 设点 (x_0, y_0) 为域 R 中的任一点. 由题设知函数 $f(x, y)$ 于域 R 中连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$, $|y - y_0| < \delta$ ($(x, y) \in R$) 时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

再由 $\varphi(x)$ 在 (a, A) 中的连续性可知, 对上述的 $\delta > 0$, 存在 $\eta > 0$ (可取 $\eta < \delta$), 使当 $|x - x_0| < \eta$ ($x \in (a, A)$) 时, 恒有

$$|\varphi(x) - \varphi(x_0)| = |y - y_0| < \delta.$$

于是,

$$|f[x, \varphi(x)] - f[x_0, \varphi(x_0)]| < \varepsilon,$$

即

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

因此, $F(x)$ 在点 x_0 处连续. 由 x_0 的任意性知函数 $F(x)$ 在 (a, A) 内是连续的.

3210. 设: 1) 函数 $f(x, y)$ 于域 $R(a < x < A; b < y < B)$ 内是连续的; 2) 函数 $x = \varphi(u, v)$ 及 $y = \psi(u, v)$ 于域 R'

$(a' < u < A'; b' < v < B')$ 内是连续的并有分别属于区间 (a, A) 和 (b, B) 的值. 证明: 函数

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

于域 R' 内连续.

证 以下假定所取的 δ 或 η 足够小, 使点的 δ 或 η 邻域都在所给的域内.

设点 (x_0, y_0) 为域 R 中的任一点. 由于 $f(x, y)$ 在 R 内连续, 故对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$ 时, 就有

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$$

再由 φ 及 ψ 的连续性知, 对于上述的 δ , 存在 $\eta > 0$, 使当 $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$ 时, 就有

$$|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta,$$

其中 $x_0 = \varphi(u_0, v_0), y_0 = \psi(u_0, v_0)$.

于是, 对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使当 $|u - u_0| < \eta, |v - v_0| < \eta$ 时, 就有

$$|f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] - f[\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)]| < \varepsilon,$$

即

$$|F(u, v) - F(u_0, v_0)| < \varepsilon.$$

因此, $F(u, v)$ 在点 (u_0, v_0) 连续, 由 (u_0, v_0) 的任意性知, 函数 $F(u, v)$ 于域 R' 内连续.

§2. 偏导函数. 多变量函数的数分

1° 偏导函数 若所论及的多变数的函数的一切偏导函

数是连续的, 则微分的结果与微分的次序无关.

2° 多变量函数的微分 若自变数 x, y, z 的函数 $f(x, y, z)$ 的全增量可写为下形

$$\Delta f(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

式中 A, B, C 与 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 无关而 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$, 则称函数 $f(x, y, z)$ 可微分, 而增量的线性主部 $A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z$ 等于

$$df(x, y, z) = f'_x(x, y, z)dx + f'_y(x, y, z)dy + f'_z(x, y, z)dz, \quad (1)$$

(其中 $dx = \Delta x, dy = \Delta y, dz = \Delta z$) 称为此函数的微分.

当变数 x, y, z 为其他自变数的可微分的函数时, 公式(1)仍有其意义.

若 x, y, z 为自变数, 则对于高阶的微分, 有符号公式

$$d^n f(x, y, z) = \left(dx \frac{\partial}{\partial x} + dy \frac{\partial}{\partial y} + dz \frac{\partial}{\partial z} \right)^n f(x, y, z).$$

3° 复合函数的导函数 若 $w = f(x, y, z)$, 其中 $x = \varphi(u, v), y = \psi(u, v), z = \chi(u, v)$ 且函数 φ, ψ, χ 可微分, 则

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

计算函数 w 的二阶导函数时最好用下列符号公式:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 w + \frac{\partial P_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial Q_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\text{及 } \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \left(P_1 \frac{\partial}{\partial x} + Q_1 \frac{\partial}{\partial y} + R_1 \frac{\partial}{\partial z} \right) \left(P_2 \frac{\partial}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial}{\partial y} + R_2 \frac{\partial}{\partial z} \right) w + \frac{\partial P_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial v} \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\text{其中 } P_1 = \frac{\partial x}{\partial u}, Q_1 = \frac{\partial y}{\partial u}, R_1 = \frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\text{及 } R_2 = \frac{\partial x}{\partial v}, Q_2 = \frac{\partial y}{\partial v}, R_2 = \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4° 在已知方向上的导函数 若用方向余弦 $\{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ 表 $Oxyz$ 空间内的方向 l , 且函数 $u = f(x, y, z)$ 可微分, 则沿方向 l 的导函数按下式来计算

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

在已知点函数增加最迅速的速度之大小与方向用向量——函数的梯度

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

来表示, 它的大小等于

$$|\text{grad } u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

3211. 证明:

$$f'_x(x, b) = \frac{d}{dx}[f(x, b)].$$

证 令 $\varphi(x) = f(x, b)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[f(x, b)] &= \varphi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, b) - f(x, b)}{\Delta x} = f'_x(x, b). \end{aligned}$$

注 在求某一固定点的导数及微分时, 用本题的结果常可减少运算量. 在本节中, 我们就多次利用本题的结果来简化运算.

3212. 设:

$$f(x, y) = x + (y-1) \arcsin \sqrt{\frac{x}{y}},$$

求 $f'_x(x, 1)$.

解 由于 $f(x, 1) = x$, 故 $f'_x(x, 1) = 1$.

求下列函数的一阶和二阶偏导函数:

3213. $u = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

$$\text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} = 4x^3 - 8xy^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3 - 8x^2y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 12x^2 - 8y^2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 8x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -16xy^{**}.$$

*) 以下各题不再写 $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 而仅写 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, 因为当它们连续时是相等的, 并且在今后各题中均捉

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ 理解为 $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

3214. $u = xy + \frac{x}{y}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = y + \frac{1}{y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}.$$

3215. $u = \frac{x}{y^2}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{6x}{y^4}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2}{y^3}.$$

3216. $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{2x \cdot x}{2(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{3}{2} y^2 \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{\frac{6}{2}}} = -\frac{3xy^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{3}{2} xy \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{6}{2}}}$$

$$= \frac{x(2y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$= \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3y^3}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

3217. $u = x \sin(x + y).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \sin(x + y) + x \cos(x + y),$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(x + y),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos(x + y) + \cos(x + y) - x \sin(x + y) \\ &= 2 \cos(x + y) - x \sin(x + y), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -x \sin(x + y),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \cos(x + y) - x \sin(x + y).$$

3218. $u = \frac{\cos x^2}{y}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x \sin x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\cos x^2}{y^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2 \sin x^2 + 4x^2 \cos x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2 \cos x^2}{y^3}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{2x \sin x^2}{y^2}.$$

3219. $u = \operatorname{tg} \frac{x^2}{y}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2x}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x}{y} \cdot 2 \sec^2 \frac{x^2}{y} \cdot \operatorname{tg} \frac{x^2}{y} \cdot \frac{2x}{y}$$

$$= \frac{2}{y} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{8x^2}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3} \sec^2 \frac{x^2}{y} + \frac{2x^4}{y^4} \sec^4 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} \sec^2 \frac{x^2}{y} - \frac{4x^3}{y^3} \sec^4 \frac{x^2}{y} \sin \frac{x^2}{y}$$

3220. $u = x^y.$

解 由 $u = x^y = e^{y \ln x}$ 即得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = e^{y \ln x} \cdot \ln x = x^y \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x$$

$$= x^{y-1}(1+y \ln x) \quad (x > 0).$$

3221. $u = \ln(x + y^2).$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x + y^2},$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2}{x + y^2} - \frac{2y \cdot 2y}{(x + y^2)^2} = \frac{2(x - y^2)}{(x + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x + y^2)^2}.$$

3222. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

3223. $u = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x + y}{1 - xy}.$

解 由776题知

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{x+y}{1-xy} = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y - \varepsilon\pi,$$

其中 $\varepsilon = 0, 1$ 或 -1 . 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{1+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

本题如不用776题的结果, 直接求导数也可获解.

例如,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2} \cdot \frac{1-xy + y(x+y)}{(1-xy)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

3224. $u = \operatorname{arc\,sin} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

解
$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)' \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|y|} \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad *) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|y|}{x^2 + y^2}, \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2 + y^2}}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)', \\
&= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{|y|} \left[-\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]^*) \\
&= -\frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{|y|} = -\frac{x \operatorname{sgn} y}{x^2 + y^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{xy}{|y|(x^2 + y^2)} \right] \\
&= -\frac{x|y|(x^2 + y^2) - xy \left[\frac{|y|}{y}(x^2 + y^2) + 2y|y| \right]}{y^2(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{2x|y|}{(x^2 + y^2)^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\frac{|y|}{y}(x^2 + y^2) - 2y|y|}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \frac{x^2 \operatorname{sgn} y - y|y|}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{(x^2 - y^2) \operatorname{sgn} y}{(x^2 + y^2)^2} \quad (y \neq 0).
\end{aligned}$$

*) 利用3216题的结果.

3225. $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

$$\begin{aligned}
 \text{解 } \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} \\
 &= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{3xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.
 \end{aligned}$$

利用对称性, 即得

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.
 \end{aligned}$$

3226. $u = \left(\frac{x}{y}\right)^n.$

解 $u = x^n y^{-n}.$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z x^{z-1} y^{-z} = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -z x^z y^{-z-1} = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = z(z-1) x^{z-2} y^{-z} = \frac{z(z-1)}{x^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-z)(-z-1) x^z y^{-z-2} = \frac{z(z+1)}{y^2} \left(\frac{x}{y}\right)^z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln^2 \frac{x}{y},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \left(\frac{z}{x} u\right)'_y = \frac{z}{x} \left[-\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z\right] \\ &= -\frac{z^2}{xy} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \left(-\frac{z}{y} u\right)'_z = -\frac{z}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y} - \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \\ &= -\frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= \left(u \ln \frac{x}{y}\right)'_x = \frac{z}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z \ln \frac{x}{y} + \frac{1}{x} \left(\frac{x}{y}\right)^z \\ &= \frac{1+z \ln \frac{x}{y}}{x} \frac{1}{y} \left(\frac{x}{y}\right)^z \quad \left(\frac{x}{y} > 0\right). \end{aligned}$$

3227. $u = x^{\frac{y}{z}}$.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z}-1} = \frac{yu}{xz}$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} x^{\frac{y}{z}} \ln x = \frac{u \ln x}{z},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} x^{\frac{y}{z}} \ln x = -\frac{yu \ln x}{z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{xyz \frac{\partial u}{\partial x} - yzu}{x^2 z^2} = \frac{y(y-z)u}{x^2 z^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\ln x}{z} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u \ln^2 x}{z^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= -y \ln x \cdot \left[\frac{z^2 \frac{\partial u}{\partial z} - 2uz}{z^4} \right] \\ &= \frac{yu \ln x \cdot (2z + y \ln x)}{z^4}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{xz} \left(u + y \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{u(z + y \ln x)}{xz^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} &= \ln x \cdot \left(\frac{1}{z} \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{z^2} \right) \\ &= -\frac{u \ln x \cdot (z + y \ln x)}{z^3}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = -\frac{y}{z^2} \left(\ln x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{x} \right) = -\frac{yu(z + y \ln x)}{xy^3}.$$

$$3228. \quad u = x^{y^z}$$

$$\text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z - 1} = \frac{u y^z}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z y^{z-1} x^{y^z} \ln x = z u y^{z-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z} y^z \ln x \cdot \ln y = u y^z \ln x \cdot \ln y,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^z \left(-\frac{u}{x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{u y^z (y^z - 1)}{x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = z \ln x \cdot \left[y^{z-1} \frac{\partial u}{\partial y} + (z-1) y^{z-2} u \right]$$

$$= u z y^{z-2} \ln x \cdot (z y^z \ln x + z - 1),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(y^z \frac{\partial u}{\partial z} + u y^z \ln y \right) \ln x \cdot \ln y$$

$$= u y^z \ln x \cdot \ln^2 y \cdot (1 + y^z \ln x),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x} \left(y^z \frac{\partial u}{\partial y} + u z y^{z-1} \right)$$

$$= \frac{u z y^{z-1} (y^z \ln x + 1)}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \left(y^{z-1} u + u z y^{z-1} \ln y + z y^{z-1} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \ln x$$

$$= u y^{z-1} \ln x \cdot (1 + z \ln y \cdot (1 + y^z \ln x)),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} &= y^2 \ln y \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \ln x + \frac{u}{x} \right) \\ &= \frac{u y^2 \ln y \cdot (y^2 \ln x + 1)}{x} \quad (x > 0, y > 0).\end{aligned}$$

3229. 设 (a) $u = x^2 - 2xy - 3y^2$; (b) $u = x^{y^2}$; (B) $u =$

$\arccos \sqrt{\frac{x}{y}}$, 验证等式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

证 (a) $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2x - 6y$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -2,$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(b) $\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 x^{y^2-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2yx^{y^2} \ln x$ ($x > 0$),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2yx^{y^2-1} + 2y^3 x^{y^2-1} \ln x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 2y^3 x^{y^2-1} \ln x + 2yx^{y^2-1},$$

于是, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

(B) 当 $0 < x \leq y$ 时, 我们有

$$u = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} = \arccos \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y}} = -\frac{1}{2\sqrt{x(y-x)}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \left(-\frac{\sqrt{x}}{2y^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2(y-x)}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{y^2(y-x)}} + \frac{\sqrt{x}}{4y(y-x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}(y-x)^{\frac{3}{2}}},$$

于是, 当 $0 < x \leq y$ 时, 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

$$\text{当 } y \leq x < 0 \text{ 时, } u = \arccos \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-y}}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}} \left(-\frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{-y}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-x}\sqrt{x-y}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\left[\frac{\sqrt{-x}}{2(-y)^{\frac{3}{2}}}\right] = -\frac{\sqrt{-x}}{2\sqrt{xy^2-y^3}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{1}{4\sqrt{-x}\sqrt{xy^2-y^3}} + \frac{\sqrt{-x}}{4\sqrt{y^2}(x+y)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{-x}(x-y)^{\frac{3}{2}}},$$

于是, 当 $y \leq x < 0$ 时, 也有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

仔细观察可以看到, 在不同的区域上, 一阶偏导数相差一个符号, 但二阶混合偏导数却是相等的.

3230. 设 $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, 若 $x^2 + y^2 \neq 0$ 及 $f(0, 0) = 0$. 证明

$$f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0).$$

证 由于

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} xy \frac{x^2 - y^2 - 0}{x^2 + y^2} = -y,$$

故, $f'_x(0, y) = -y$, 从而

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dy} [f'_x(0, y)] \Big|_{y=0} = -1$$

同法可求得 $f'_y(x, 0) = x$, 从而

$$f''_{yx}(0, 0) = \frac{d}{dx} [f'_y(x, 0)] \Big|_{x=0} = 1.$$

于是, $f''_{xy}(0, 0) \neq f''_{yx}(0, 0)$.

3231. 设 $u = f(x, y, z)$ 为 n 次齐次函数, 就下列各题验证关于齐次函数的尤拉定理:

(a) $u = (x - 2y + 3z)^2$; (b) $u = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;

(B) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$.

证 关于 n 次齐次函数的尤拉定理如下:

设 n 次齐次函数 $f(x, y, z)$ * 在域 A 中关于所有变量均有连续偏导函数, 则下述等式成立

$$\begin{aligned} & xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) \\ &= nf(x, y, z). \end{aligned}$$

(a) 由于 $(tx - 2ty + 3tz)^2 = t^2u$, 故 u 为二次齐次函数. 又因

* 为了书写的简便, 在这里我们仅限于讨论三个变量的情形.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(x - 2y + 3z), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -4(x - 2y + 3z),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 6(x - 2y + 3z),$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = (x - 2y + 3z)(2x - 4y$$

$$+ 6z) = 2u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(6) 由于对任何的 $t > 0$,

$$\frac{tx}{\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2 + (tz)^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = t^0 \cdot u,$$

故 u 为零次齐次函数. 又因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (xy^2$$

$$+ xz^2 - xy^2 - xz^2) = 0 \cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

(B) 由于

$$\left(\frac{tx}{ty}\right)^{\frac{n}{t}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{t}} = t^0 \cdot u \quad (t > 0),$$

故函数 u 为零次齐次函数. 又因

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{z} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{z}-1} = \frac{yu}{xz},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{\frac{n}{t} \ln \frac{x}{y}}\right)' \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{z}} \cdot \left[\frac{1}{z} \ln \frac{x}{y} - \frac{y}{z} \cdot \frac{1}{y}\right]$$

$$= \frac{u}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{n}{z}} \ln \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{z^2}\right) = -\frac{yu}{z^2} \ln \frac{x}{y},$$

故得

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x \cdot \frac{yu}{xz} + y \cdot \frac{u}{z} \left(\ln \frac{x}{y} - 1\right)$$

$$- z \cdot \frac{yu}{z^2} \ln \frac{x}{y} = 0 \cdot u,$$

即函数 u 满足尤拉定理.

3232. 证明: 若可微函数 $u = f(x, y, z)$ 满足方程式

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = nu,$$

则它为 n 次齐次函数.

证 任意固定域中一点 (x_0, y_0, z_0) , 考察下面的 t 的函数 ($t > 0$):

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n},$$

它当 $t > 0$ 时有定义且是可微的。应用复合函数的求导法则，对 t 求导数即得

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{t^n} \left\{ x_0 f'_x (tx_0, ty_0, tz_0) + y_0 f'_y (tx_0, \right. \\ &\quad \left. ty_0, tz_0) + z_0 f'_z (tx_0, ty_0, tz_0) \right\} \\ &\quad - \frac{n}{t^{n+1}} f(tx_0, ty_0, tz_0) \\ &= \frac{1}{t^{n+1}} \left\{ tx_0 f'_x (tx_0, ty_0, tz_0) + ty_0 \right. \\ &\quad \left. \cdot f'_y (tx_0, ty_0, tz_0) + tz_0 f'_z (tx_0, ty_0, tz_0) \right. \\ &\quad \left. - nf(tx_0, ty_0, tz_0) \right\}, \end{aligned}$$

由于 $tx_0 f'_x (tx_0, ty_0, tz_0) + ty_0 f'_y (tx_0, ty_0, tz_0) + tz_0$

$$\cdot f'_z (tx_0, ty_0, tz_0) = nf(tx_0, ty_0, tz_0),$$

故

$$F'(t) = 0.$$

从而当 $t > 0$ 时， $F(t) = c$ ，其中 c 为常数。现在确定 c 。为此，在定义 $F(t)$ 的等式中令 $t = 1$ ，则得

$$c = f(x_0, y_0, z_0).$$

于是，

$$F(t) = \frac{f(tx_0, ty_0, tz_0)}{t^n} = f(x_0, y_0, z_0),$$

即

$$f(tx_0, ty_0, tz_0) = t^n f(x_0, y_0, z_0).$$

上式说明函数 $f(x, y, z)$ 为一个 n 次的齐次函数，这就是所要证明的。

3233. 证明：若 $f(x, y, z)$ 是可微分的 n 次齐次函数，则其偏导函数 $f'_x(x, y, z), f'_y(x, y, z), f'_z(x, y, z)$ 是 $(n-1)$ 次的齐次函数。

证 由等式

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$$

两端分别对 x, y, z 求偏导函数，则得

$$t f'_1(tx, ty, tz) = t^n f'_1(x, y, z),$$

$$t f'_2(tx, ty, tz) = t^n f'_2(x, y, z),$$

$$t f'_3(tx, ty, tz) = t^n f'_3(x, y, z),$$

其中 $f'_1(\cdot, \cdot, \cdot), f'_2(\cdot, \cdot, \cdot), f'_3(\cdot, \cdot, \cdot)$ 分别代表

$f(\cdot, \cdot, \cdot)$ 对第一个，第二个，第三个变量的偏导数。

于是，

$$f'_1(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_1(x, y, z),$$

$$f'_2(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_2(x, y, z),$$

$$f'_3(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_3(x, y, z),$$

即偏导函数 $f'_2(x, y, z)$, $f'_1(x, y, z)$ 及 $f'_3(x, y, z)$

均为 $(n-1)$ 次的齐次函数,

3234. 设 $u = f(x, y, z)$ 是可微分两次的 n 次齐次函数. 证明

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

证 由3233题知: $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}$ 均为 $(n-1)$ 次齐次函数. 应用尤拉定理, 即得

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial y} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right) \frac{\partial u}{\partial z} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (3)$$

将(1)式两端乘以 x , (2)式两端乘以 y , (3)式两端乘以 z , 然后相加, 即得

$$\begin{aligned} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u &= (n-1) \left(x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + z \frac{\partial u}{\partial z}\right) = n(n-1)u, \end{aligned}$$

这就是所要证明的等式.

求下列函数的一阶和二阶微分(x, y, z 为自变数):

3235. $u = x^m y^n$.

解 $du = x^{m-1} y^{n-1} (m y dx + n x dy),$
 $d^2 u = m(m-1)x^{m-2} y^n dx^2 + 2mnx^{m-1} y^{n-1} dx dy$
 $+ n(n-1)x^m y^{n-2} dy^2$
 $= x^{m-2} y^{n-2} [m(m-1)y^2 dx^2 + 2mnxy dx dy$
 $+ n(n-1)x^2 dy^2].$

3236. $u = \frac{x}{y}$.

解 $du = \frac{y dx - x dy}{y^2},$
 $d^2 u = \frac{y^2 (dxdy - dx dy) - 2y dy (y dx - x dy)}{y^4}$
 $= -\frac{2}{y^3} (y dx - x dy) dy.$

3237. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $du = \frac{x dx + y dy}{\sqrt{x^2 + y^2}},$
 $d^2 u = \frac{d(x dx + y dy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} + (x dx + y dy)$
 $\cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \frac{dx^2 + dy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{(x dx + y dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$
 $= \frac{(y dx - x dy)^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

3238. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $du = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$,

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{d(xdx + ydy)}{x^2 + y^2} - \frac{2(xdx + ydy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{dx^2 + dy^2}{x^2 + y^2} - \frac{2(xdx + ydy)^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{(y^2 - x^2)(dx^2 - dy^2) - 4xydx dy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned}$$

3239. $u = e^{xy}$.

解 $du = e^{xy}(ydx + xdy)$,

$$\begin{aligned} d^2u &= e^{xy}[(ydx + xdy)^2 + 2dxdy] \\ &= e^{xy}[y^2dx^2 + 2(1 + xy)dxdy + x^2dy^2]. \end{aligned}$$

3240. $u = xy + yz + zx$.

解 $du = (y + z)dx + (z + x)dy + (x + y)dz$,

$$d^2u = 2(dxdy + dydz + dzdx).$$

3241. $u = \frac{z}{x^2 + y^2}$.

$$\begin{aligned} \text{解 } du &= -\frac{2z}{(x^2 + y^2)^2}(xdx + ydy) + \frac{dz}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{(x^2 + y^2)dz - 2z(xdx + ydy)}{(x^2 + y^2)^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d^2u &= \frac{1}{(x^2 + y^2)^4} \left\{ (x^2 + y^2)^2 [2(xdx + ydy)dz \right. \\ &\quad \left. - 2(xdx + ydy)dz - 2z(dx^2 + dy^2)] \right\} \end{aligned}$$

Б. П. 吉米多维奇
Б. П. ДЕМИДОВИЧ

数学分析

习题集题解

(六)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琼 主审



山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

数学分析习题集题解(一) 定价13.30元

分析引论

数学分析习题集题解(二) 定价15.10元

单变量函数的微分学

数学分析习题集题解(三) 定价17.70元

不定积分 定积分

数学分析习题集题解(四) 定价15.50元

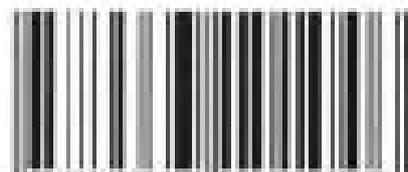
级数

数学分析习题集题解(五) 定价19.80元

多变量函数的微分法 带参数的积分

数学分析习题集题解(六) 定价15.90元

重积分和曲线积分



9 787533 101046 >

ISBN 7-5331-0104-9
0·10 定价15.90元

Б. П. 吉米多维奇

数学分析习题集题解

(六)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

山东科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

Б. П. 吉米多维奇数学分析习题集题解 (6)/费定
晖编.—2版.—济南:山东科学技术出版社,1999.9
(2003.2重印)

ISBN 7-5331-0104-9

I. Б… II. 费… III. 数学分析—高等学校—解题
IV. 017-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 43949 号

Б. П. 吉米多维奇
数学分析习题集题解
(六)

费定晖 周学圣 编演
郭大钧 邵品琮 主审

*

山东科学技术出版社出版
(济南市玉函路 16 号 邮编 250002)

山东科学技术出版社发行
(济南市玉函路 16 号 电话 2064651)

济南中汇印务有限责任公司印刷

*

787mm×1092mm 32 开本 17 印张 400 千字

2003 年 2 月第 2 版第 13 次印刷

印数: 202501-210500

ISBN 7-5331-0104-9
O·10 定价: 15.90 元

出版说明

吉米多维奇(Б. П. Д ЕМИД ОВИЧ)著《数学分析习题集》一书的中译本,自 50 年代初在我国翻译出版以来,引起了全国各大专院校广大师生的巨大反响。凡从事数学分析教学的师生,常以试解该习题集中的习题,作为检验掌握数学分析基本知识和基本技能的一项重要手段。二十多年来,对我国数学分析的教学工作是甚为有益的。

该书四千多道习题,数量多,内容丰富,由浅入深,部分题目难度大。涉及的内容有函数与极限,单变量函数的微分学,不定积分,定积分,级数,多变量函数的微分学,带参变量积分以及重积分与曲线积分、曲面积分等等,概括了数学分析的全部主题。当前,我国广大读者,特别是肯于刻苦自学的广大数学爱好者,在为四个现代化而勤奋学习的热潮中,迫切需要对一些疑难习题有一个较明确的回答。有鉴于此,我们特约作者,将全书 4462 题的所有解答汇编成书,共分六册出版。本书可以作为高等院校的教学参考用书,同时也可作为广大读者在自学微积分过程中的参考用书。

众所周知,原习题集,题多难度大,其中不少习题如果认真习作的话,既可以深刻地巩固我们所学到的基本概念,又可以有效地提高我们的运算能力,特别是有些难题还可以迫使我们学会综合分析的思维方法。正由于这样,我们殷切期望初学数学分析的青年读者,一定要刻苦钻研,千万不要轻易查抄

本书的解答,因为任何削弱独立思考的作法,都是违背我们出版此书的本意。何况所作解答并非一定标准,仅作参考而已。如有某些误解、差错也在所难免,一经发觉,恳请指正,不胜感谢。

本书蒙潘承洞教授对部分难题进行了审校。特请郭大钧教授、邵品琮教授对全书作了重要仔细的审校。其中相当数量的难度大的题,都是郭大钧、邵品琮亲自作的解答。

参加编演工作的还有黄春朝同志。

本书在编审过程中,还得到山东大学、山东工业大学、山东师范大学和曲阜师范大学的领导和同志们的大力支持,特在此一并致谢。

目 录

第八章 重积分和曲线积分	1
§ 1. 二重积分	1
§ 2. 面积的计算法	61
§ 3. 体积的计算法	84
§ 4. 曲面面积计算法	105
§ 5. 二重积分在力学上的应用	119
§ 6. 三重积分	144
§ 7. 利用三重积分计算体积法	168
§ 8. 三重积分在力学上的应用	187
§ 9. 二重和三重广义积分	218
§ 10. 多重积分	270
§ 11. 曲线积分	299
§ 12. 格林公式	349
§ 13. 曲线积分的物理应用	378
§ 14. 曲面积分	400
§ 15. 斯托克斯公式	430
§ 16. 奥斯特洛格拉德斯基公式	440
§ 17. 场论初步	475

第八章 重积分和曲线积分

§ 1. 二重积分

1° 二重积分的直接算法 所谓连续函数 $f(x, y)$ 展布在有限封闭可求积二维域 Ω 内的二重积分乃是指的数

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max|\Delta x_i| \rightarrow 0 \\ \max|\Delta y_j| \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_j = y_{j+1} - y_j$, 而其和为对所有 i, j 使 $(x_i, y_j) \in \Omega$ 的那些值来求的。

若域 Ω 由下面的不等式所给出

$$a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x),$$

其中 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 为在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 则对应的二重积分可按下面的公式来计算

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

2° 二重积分中的变量代换 若可微分的连续函数

$$x = x(u, v), y = y(u, v)$$

把平面 Oxy 上的有限闭域 Ω 单值唯一地映射为平面 Ouv 上的域 Ω' 及雅哥比式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0,$$

则下之公式正确:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \iint_{\Omega'} f(x(u, v), y(u, v)) |I| du dv.$$

特别是,根据公式 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ 变换为极坐标 r 和 φ 的情形有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr d\varphi.$$

3901. 把积分 $\iint_{\substack{0 \leq x < 1 \\ 0 \leq y < 1}} xy dx dy$, 当作积分和的极限, 用直线

$$x = \frac{i}{n}, y = \frac{j}{n} (i, j = 1, 2, \dots, n-1)$$

把积分域分为许多正方形, 并选取被积函数在这些正方形之右顶点的值, 计算所论积分的值.

解 由于

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{j}{n} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad (n \rightarrow \infty),$$

其中

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2},$$

故

$$\iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} xy dx dy = \frac{1}{4}.$$

3902. 用直线

$$x = 1 + \frac{i}{n}, y = 1 + \frac{2j}{n} (i, j = 0, 1, \dots, n)$$

把域 $1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3$ 分为许多矩形. 作出函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 在此域内的积分下和 \underline{S} 与积分上和 \overline{S} . 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 上和与下和的极限等于什么?

解 下和

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(1 + \frac{i}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \\
&= \frac{2n}{n^2} \left[n + \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 + n + \frac{4}{n} \sum_{j=0}^{n-1} j \right. \\
&\quad \left. + \frac{4}{n^2} \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \right] \\
&= \frac{40}{3} - \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2},
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n-1} i^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}, \\
\sum_{j=0}^{n-1} j^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6};
\end{aligned}$$

而上和

$$\begin{aligned}
\bar{S} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[\left(1 + \frac{i}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{2j}{n} \right)^2 \right] \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \\
&= \frac{40}{3} + \frac{11}{n} + \frac{5}{3n^2}.
\end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, \underline{S} 与 \bar{S} 的极限均等于 $\frac{40}{3} = 13\frac{1}{3}$.

3903. 用一系列内接正方形作为积分域的近似域, 这些正方形的顶点 A_n 在整数点, 并取被积函数在每个正方形距原点的最远的顶点之值. 近似地计算积分

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24 + x^2 + y^2}},$$

并与精确的值加以比较。

解 由题意知, 应取的正方形顶点为 $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2),$

(3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), 故利用对称性知

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} &\doteq \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{29}} + \frac{2}{\sqrt{34}} \\ &+ \frac{2}{\sqrt{41}} + \frac{1}{\sqrt{32}} + \frac{2}{\sqrt{37}} + \frac{2}{\sqrt{44}} + \frac{1}{\sqrt{42}} + \frac{2}{\sqrt{49}} \\ &\doteq 0.196 + 0.371 + 0.343 + 0.312 + 0.177 \\ &+ 0.329 + 0.302 + 0.154 + 0.285 \\ &\doteq 2.470, \end{aligned}$$

$$\text{即 } \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \doteq 9.880.$$

下面计算积分的精确值:

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} \\ &= 4 \int_0^5 \ln(y + \sqrt{24+x^2+y^2}) \Big|_0^{\sqrt{25-x^2}} dx \\ &= 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx - 2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int \ln(24+x^2) dx &= x \ln(24+x^2) - \int \frac{2x^2}{24+x^2} dx \\ &= x \ln(24+x^2) - 2x + \frac{24}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{24}} + C, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &2 \int_0^5 \ln(24+x^2) dx \\ &= \left(2x \ln(24+x^2) - 4x + \frac{48}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{24}} \right) \Big|_0^5 \end{aligned}$$

$$= 20\ln 7 - 20 + 8\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{24}};$$

又

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx \\ &= 4[x \ln(\sqrt{25-x^2} + 7)] \Big|_0^5 \\ & \quad + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}} \\ &= 20\ln 7 + 4 \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}}, \end{aligned}$$

再令 $x = 5\sin t$, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^5 \frac{x^2 dx}{(\sqrt{25-x^2} + 7) \sqrt{25-x^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{25\cos^2 t + 25}{5\cos t + 7} dt \\ &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (5\cos t - 7) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{24}{5\cos t + 7} dt \\ &= (7t - 5\sin t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 24 \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{7\pi}{2} - 5 - 4\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & 4 \int_0^5 \ln(\sqrt{25-x^2} + 7) dx \\ &= 20\ln 7 + 14\pi - 20 - 16\sqrt{6} \operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}}. \end{aligned}$$

注意到

$$2\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}} - \operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{24}} = \frac{\pi}{2},$$

最后使得到

$$\begin{aligned}
& \iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2-y^2}} \\
&= 14\pi - 4\sqrt{24} \left(2\operatorname{arctg} \frac{2}{\sqrt{24}} + \operatorname{arctg} \frac{5}{\sqrt{24}} \right) \\
&= 2\pi(7 - \sqrt{24}) \doteq 13.19.
\end{aligned}$$

将精确值与近似值作比较, 显见误差较大, 其原因在于有不少不是正方形的域都被忽略, 因而产生较大的绝对误差 4.31 及较大的相对误差 $\frac{4.31}{13.19} \doteq 32.7\%$.

注意, 求 $\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}}$ 的精确值若采用极坐标则较为简单:

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2 \leq 25} \frac{dxdy}{\sqrt{24+x^2+y^2}} &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^5 \frac{rdr}{\sqrt{24+r^2}} \\
&= 2\pi(7 - \sqrt{24}).
\end{aligned}$$

但按原习题集的安排, 似应在 3937 题以后才开始使用极坐标, 故本题仍用直角坐标进行计算.

3904. 用直线 $x = \text{常数}$, $y = \text{常数}$, $x + y = \text{常数}$ 把域 S 分为四个相等的三角形, 并取被积函数在每个三角形的中线交点之值, 近似地计算积分

$$\iint_S \sqrt{x+y} dS,$$

其中 S 表由直线 $x = 0$, $y = 0$ 及 $x + y = 1$ 所围成的三角形.

解 我们只须以 $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ 及 $x + y = \frac{1}{2}$ 分域 S , 即得四个相等的三角形, 它们的面积均为 $\frac{1}{8}$, 重心为

$\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$ 及 $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$. 于是, 得此积分的近似值为

$$\begin{aligned} & \iint_D \sqrt{x+y} dS \\ & \doteq \frac{1}{8} \left[\sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} + \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} + 2\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{6}} \right] \\ & \doteq \frac{1}{8} (0.577 + 0.816 + 2.0913) \doteq 0.402, \end{aligned}$$

其精确值为

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x+y} dS &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \sqrt{x+y} dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (1-x^{\frac{3}{2}}) dx = \frac{2}{5} = 0.4. \end{aligned}$$

3905. 把域 $S \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 分为有限个直径小于 δ 的可求积的子域 $\Delta S_i (i = 1, 2, \dots, n)$. 对于什么样的值 δ 能保证不等式:

$$\left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001$$

成立? 其中 $(x_i, y_i) \in \Delta S_i$.

解 记函数 $\sin(x+y)$ 在 ΔS_i 中的振幅为 ω_i , 则

$$\begin{aligned} & \left| \iint_S \sin(x+y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} [\sin(x+y) - \sin(x_i + y_i)] dS \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} |\sin(x+y) - \sin(x_i + y_i)| dS \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \iint_{\Delta S_i} \omega_i dS = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta S_i.$$

由于域 $S\{x^2 + y^2 \leq 1\}$ 的面积等于 π , 故只要

$$\omega_i < \frac{0.001}{\pi},$$

便能满足原不等式的要求。但因为

$$\begin{aligned} \omega_i &= \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x, y) \in \Delta S_i}} |\sin(x' + y') - \sin(x + y)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x, y) \in \Delta S_i}} |(x' + y') - (x + y)| \\ &\leq \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x, y) \in \Delta S_i}} [|x' - x| + |y' - y|] \\ &\leq \sup_{\substack{(x', y') \in \Delta S_i \\ (x, y) \in \Delta S_i}} \sqrt{2[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]}^{*}) \\ &= \sqrt{2} \delta, \end{aligned}$$

故只要取

$$\delta < \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \times 0.001 \doteq 0.00022,$$

则有

$$\left| \iint_S \sin(x + y) dS - \sum_{i=1}^n \sin(x_i + y_i) \Delta S_i \right| < 0.001.$$

*) 对于任意非负实数 a, b 有

$$2ab \leq a^2 + b^2 \text{ 或 } (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

从而

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

计算积分:

$$3906. \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_0^1 (x+y) dy = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} \right) dx = 1.$$

$$3907. \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy.$$

$$\text{解} \quad \int_0^1 dx \int_{x^2}^x xy^2 dy = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^7}{3} \right) dx = \frac{1}{40}.$$

$$3908. \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr &= \frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^3}{3} \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

3909. 设 R 为矩形

$$a \leq x \leq A, \quad b \leq y \leq B.$$

证明等式

$$\iint_R X(x)Y(y) dx dy = \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy.$$

证 根据在矩形域的情况下化二重积分为逐次积分的计算方法,不妨先对 y 后对 x 积分,即得

$$\begin{aligned} \iint_R X(x)Y(y) dx dy &= \int_a^A dx \int_b^B X(x)Y(y) dy \\ &= \int_a^A X(x) dx \int_b^B Y(y) dy. \end{aligned}$$

3910. 设:

$$f(x, y) = F_{xy}''(x, y),$$

计算

$$I = \int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy.$$

解 不妨按先对 y 后对 x 积分的顺序计算, 即得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^A [F_x(x, B) - F_x(x, b)] dx \\ &= F(x, B) \Big|_a^A - F(x, b) \Big|_a^A \\ &= F(A, B) - F(a, B) - F(A, b) + F(a, b). \end{aligned}$$

3911. 设 $f(x)$ 为在闭区间 $a \leq x \leq b$ 内的连续函数, 证明不等式

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx,$$

此处仅当 $f(x) = \text{常数}$ 时等号成立.

证 因为

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy \\ &= (b-a) \int_a^b f^2(x) dx - 2 \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 \\ &\quad + (b-a) \int_a^b f^2(y) dy, \end{aligned}$$

故有

$$\left[\int_a^b f(x) dx \right]^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

当 $f(x) = \text{常数}$ 时, 显然上式中等号成立. 反之, 设上式中等号成立, 则

$$\int_a^b dx \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy = 0.$$

由于函数 $F(x) = \int_a^b [f(x) - f(y)]^2 dy$ 是 $a \leq x \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $F(x) \equiv 0 (a \leq x \leq b)$. 特别 $F(a) = 0$, 即 $\int_a^b [f(a) - f(y)]^2 dy = 0$. 又由于函数

$$G(y) = [f(a) - f(y)]^2$$

是 $a \leq y \leq b$ 上的非负连续函数, 故 $G(y) \equiv 0 (a \leq y \leq b)$. 因此, $f(y) \equiv f(a) (a \leq y \leq b)$, 即 $f(x) =$ 常数. 证毕.

3912. 下列积分有什么样的符号:

$$(a) \iint_{|x|+|y|<1} \ln(x^2 + y^2) dx dy;$$

$$(b) \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy;$$

$$(c) \iint_{\substack{0 \leq x < 1 \\ -1 \leq y < 1}} \arcsin(x-y) dx dy?$$

解 (a) 由于 $0 < x^2 + y^2 \leq (|x| + |y|)^2 \leq 1$ 及 $\ln(x^2 + y^2) \leq \ln 1 = 0$, 且当 $|x| + |y| < 1$ 时 $\ln(x^2 + y^2) < 0$, 故

$$\iint_{|x|+|y|<1} \ln(x^2 + y^2) dx dy < 0.$$

(b) 我们有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy = I_1 - I_2 - I_3,$$

其中

$$I_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy,$$

$$I_2 = \iint_{1 < x^2+y^2 \leq 2} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy,$$

$$I_3 = \iint_{2 < x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{x^2+y^2-1} dx dy.$$

显然

$$0 < I_1 < \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \pi,$$

$$I_2 > 0,$$

$$I_3 > \iint_{2 < x^2+y^2 < 4} dx dy = 4\pi - 2\pi = 2\pi,$$

故

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy < 0.$$

(B) 我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1}} \arcsin(x+y) dx dy \\ &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 0}} \arcsin(x+y) dx dy \\ &+ \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1-x}} \arcsin(x+y) dx dy. \end{aligned}$$

上式右端第一个积分由对称性知其值为零,第二个积分因被积函数在积分域上为非负不恒为零的连续函数,因而积分值是正的.于是,原积分是正的.

3913. 求函数

$$f(x, y) = \sin^2 x \sin^2 y$$

在正方形: $0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi$ 内的平均值.

解 平均值

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} \sin^2 x \sin^2 y dx dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(\int_0^\pi \sin^2 x dx \right)^2 = \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x \right) \Big|_0^\pi \right]^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}.$$

3914. 利用中值定理, 估计积分

$$I = \iint_{|x|+|y|\leq 10} \frac{dxdy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$$

之值.

解 由于积分域的面积 为 200, 故由积分中值定理知

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta} \cdot 200 \\ &= \frac{200}{100 + \cos^2 \xi + \cos^2 \eta}, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 (ξ, η) 为域 $|x| + |y| \leq 10$ 中的某点.

显然

$$0 \leq \cos^2 \xi + \cos^2 \eta \leq 2,$$

我们证明必有

$$0 < \cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2. \quad (2)$$

由于函数 $\cos^2 x + \cos^2 y$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的最大值为 2, 最小值为 0. 从而连续函数

$\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$ 在有界闭域 $|x| + |y| \leq 10$ 上的

最小值为 $\frac{1}{102}$, 最大值为 $\frac{1}{100}$. 如果 $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta = 2$, 则

由(1)式知

$$\begin{aligned} &\iint_{|x|+|y|\leq 10} \left(\frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102} \right) dxdy \\ &= I - I = 0. \end{aligned}$$

但 $f(x, y) = \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} - \frac{1}{102}$ 是非负连续函数, 从而必有 $f(x, y) \equiv 0$ (在域 $|x| + |y| \leq 10$ 上),

即 $\cos^2 x + \cos^2 y \equiv 2$ (在域 $|x| + |y| \leq 10$ 上). 这显然是错误的. 由此可知, $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta < 2$. 同理可证 $\cos^2 \xi + \cos^2 \eta > 0$. 于是, (2) 式成立. 从而, 得

$$\frac{200}{102} < I < \frac{200}{100}, \text{ 即 } 1.96 < I < 2.$$

3915. 求圆 $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ 上的点到原点的距离之平方的平均值.

解 平均值

$$I_0 = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} (x^2 + y^2) dx dy.$$

由于

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} y^2 dx dy \\ &= \frac{1}{\pi R^2} \int_a^{a+R} dx \int_b^{b+\sqrt{R^2-(x-a)^2}} \sqrt{R^2-(x-a)^2} y^2 dy \\ &= \frac{1}{3\pi R^2} \left\{ 6b^2 \int_{a-R}^{a+R} \sqrt{R^2-(x-a)^2} dx \right. \\ & \quad \left. + 2 \int_{a-R}^{a+R} [R^2-(x-a)^2]^{\frac{3}{2}} dx \right\} \\ &= \frac{2b^2}{\pi R^2} \left[\frac{x-a}{2} \sqrt{R^2-(x-a)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{R^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{R} \right] \Big|_{a-R}^{a+R} \\ & \quad + \frac{2}{3\pi R^2} \left\{ \frac{x-a}{8} [5R^2 - 2(x-a)^2] \sqrt{R^2-(x-a)^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3R^4}{8} \arcsin \frac{x-a}{R} \right\} \Big|_{a-R}^{a+R} \\ &= \frac{2b^2}{\pi R^2} \cdot \frac{\pi R^2}{2} + \frac{2}{3\pi R^2} \cdot \frac{3\pi R^4}{8} = b^2 + \frac{R^2}{4}, \end{aligned}$$

同理,有

$$\frac{1}{\pi R^2} \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} x^2 dx dy = a^2 + \frac{R^2}{4}.$$

于是,

$$I_0 = a^2 + b^2 + \frac{R^2}{2}.$$

在问题 3916 - 3922 中对二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 内按

所指示的区域 Ω 依两个不同的顺序安置积分的上下限.

3916. Ω - 以 $O(0,0), A(1,0), B(1,1)$ 为顶点的三角形.

解 为方便起见,将二重积分 $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ 记以 I .

$$\text{于是, } I = \int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx.$$

3917. Ω - 以 $O(0,0), A(2,1), B(-2,1)$ 为顶点的三角形.

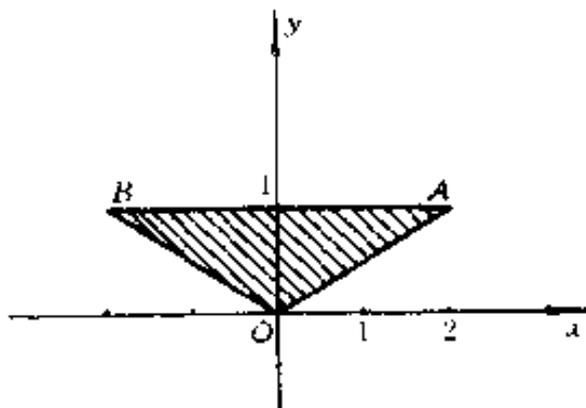


图 8.1

解 如图 8.1 所示

$$OA \text{ 的方程为 } y = \frac{1}{2}x,$$

$$OB \text{ 的方程为 } y = -\frac{1}{2}x,$$

AB 的方程为 $y = 1$.

于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{\frac{1}{2}y}^{2y} f(x, y) dx = \int_{-2}^0 dx \int_{-\frac{1}{2}x}^1 f(x, y) dy \\ &\quad + \int_0^2 dx \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x, y) dy \\ &= \int_{-2}^2 dx \int_{\frac{1}{2}|x|}^1 f(x, y) dy. \end{aligned}$$

3918. Ω — 以 $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,2)$, $C(0,1)$ 为顶点的梯形。

解 如图 8.2 所示, BC 的方程为 $y - 1 = x$.

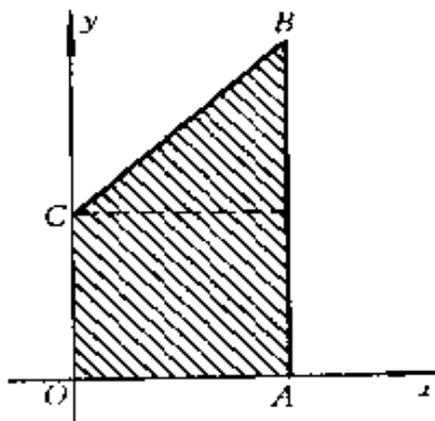


图 8.2

于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1+x} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

3919. Ω — 圆 $x^2 + y^2 \leq 1$.

$$\begin{aligned} \text{解 } I &= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

3920. Ω — 圆 $x^2 + y^2 \leq y$.

解 如图 8.3 所示. 积分域的围线 $x^2 + y^2 = y$ 即为

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

于是,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy \\
 &= \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.
 \end{aligned}$$

3921. Ω —由曲线 $y = x^2$ 及 $y = 1$ 所包围的抛物线的一节.

解 曲线 $y = x^2$ 及 $y = 1$ 的交点为 $(-1, 1), (1, 1)$.

于是,

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

3922. Ω —圆环 $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

解 如图 8.4 所示. 若先对 y 后对 x 积分, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \\
 &+ \int_{-1}^1 dx \left\{ \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy \right. \\
 &+ \left. \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \right\} \\
 &+ \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.
 \end{aligned}$$

若先对 x 后对 y 积分, 则

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \\
 &+ \int_{-1}^1 dy \left\{ \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \right. \\
 &+ \left. \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx \right\} \\
 &+ \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx.
 \end{aligned}$$

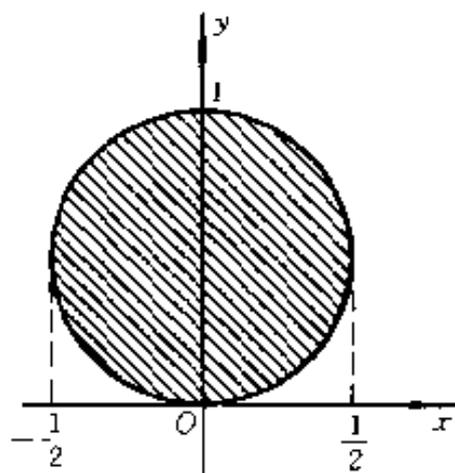


图 8.3

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx \Big\} \\
 & + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) dx.
 \end{aligned}$$

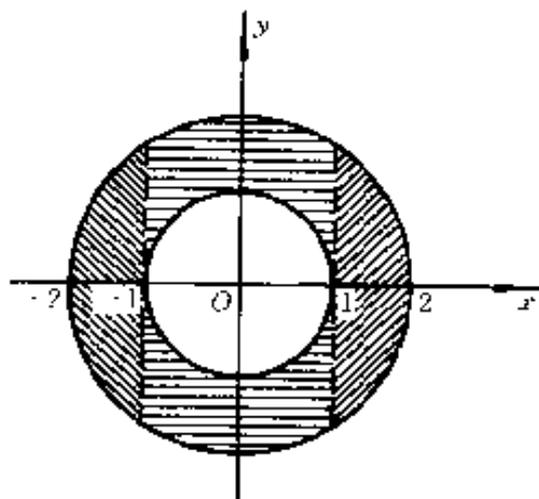


图 8.4

3923. 证明迪里黑里公式

$$\begin{aligned}
 & \int_0^a dx \int_0^x f(x,y) dy \\
 & = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y) dx \quad (a > 0).
 \end{aligned}$$

证 公式左端的逐次积分，
等于积分 $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$ ，其
中 Ω 为三角形域 OAB (图 8.

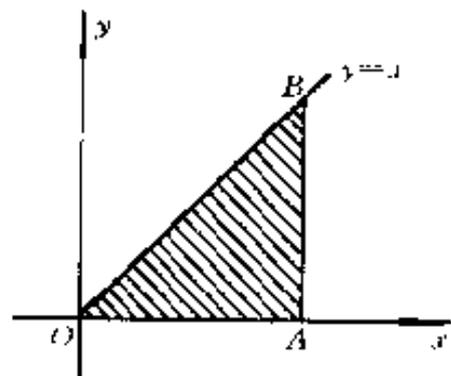


图 8.5

5); $O(0,0)$, $A(a,0)$, $B(a,$
 $a)$. 对于该积分, 若化为先对 x 后对 y 的逐次积分, 即为
公式的右端. 于是本题获证。

在下列积分中改变积分的顺序:

$$3924. \int_0^2 dx \int_r^{2r} f(x, y) dy.$$

解 积分域的围线为: $y = x$, $y = 2x$ 及 $x = 2$, 如图 8.6 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^2 dx \int_r^{2r} f(x, y) dy \\ &= \int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^y f(x, y) dx \\ &+ \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^2 f(x, y) dx. \end{aligned}$$

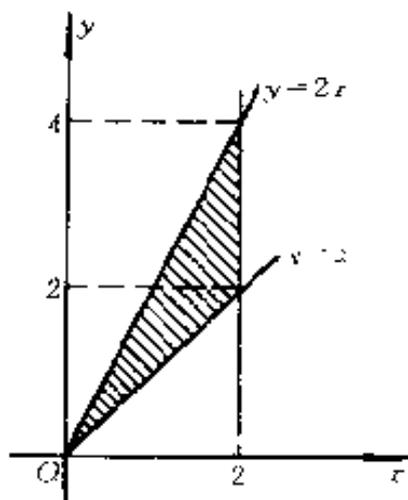


图 8.6

$$3925. \int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$$

解 积分域的围线为: $y = 2 - x$ 及 $y - 1 = \frac{x^2}{4}$, 其交点为 $(2, 0)$, $(-6, 8)$, 如图 8.7 所示. 改变积分的顺序, 即得

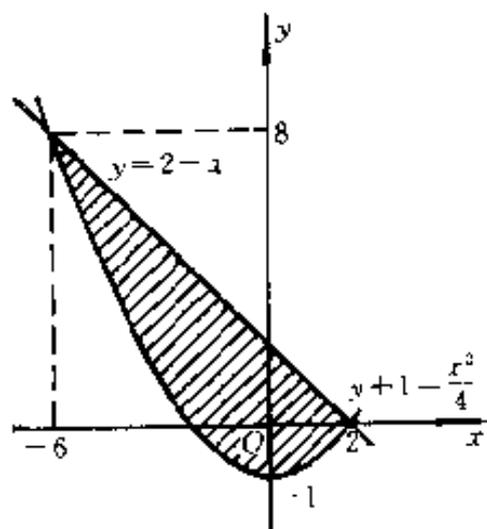


图 8.7

$$\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy$$

$$= \int_{-1}^0 dy \int_{-2}^{\sqrt{1+y}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_2^{2-\sqrt{1-y}} f(x, y) dx.$$

3926. $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy.$

解 积分域的围线为: $y = x^2$ 及 $y = x^3$, 其交点为 $(0, 0)$, $(1, 1)$, 如图 8.8 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy \\ &= \int_0^1 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

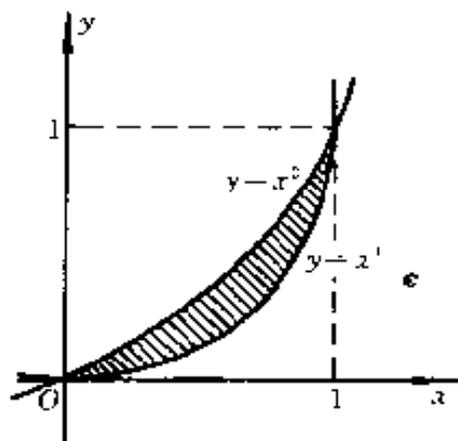


图 8.8

3927. $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy.$

解 积分域的围线为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的下半部分及抛物线 $y = 1 - x^2$, 如图 8.9 所示. 改变积分的顺序, 即得

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy \\ &= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \\ &+ \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

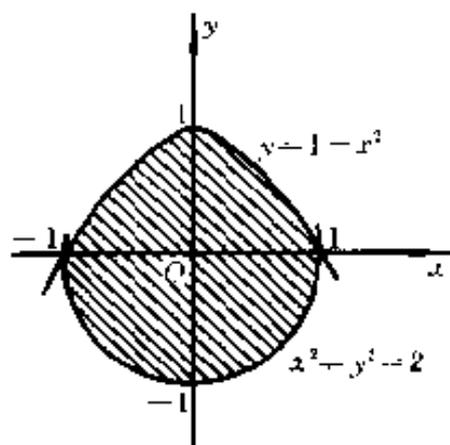


图 8.9

$$3928. \int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy.$$

解 积分域的围线为圆 $x^2 + y^2 = 2x$ 或 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 及直线 $y = 2-x$, 其交点为 $(2,0)$, $(1,1)$, 如图 8.10 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

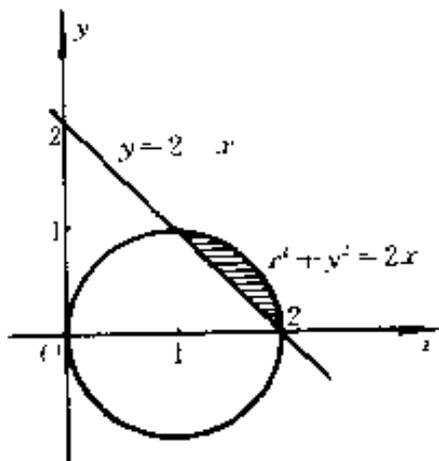


图 8.10

$$\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y) dy$$

$$= \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y) dx.$$

$$3929. \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy (a > 0).$$

解 积分域由围线 $(x-a)^2 + y^2 = a^2 (y \geq 0)$, $y^2 = 2ax (y \geq 0)$ 及 $x = 2a$ 组成. 如图 8.11 中阴影部分所示. 改变积分的顺序, 即得

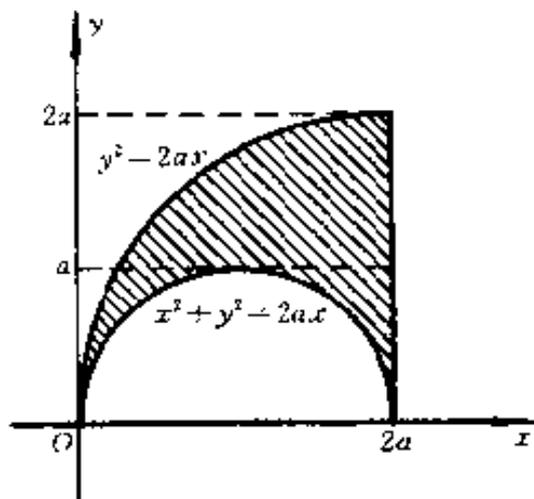


图 8.11

$$\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y) dy$$

$$= \int_0^a dy \left\{ \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y) dx + \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x,y) dx \right\}$$

$$+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x,y) dx.$$

$$3930. \int_1^r dx \int_0^{\ln r} f(x, y) dy.$$

解 积分域如图 8.12 中阴影部分所示. 改变积分顺序, 即得

$$\int_1^r dx \int_0^{\ln r} f(x, y) dy \\ = \int_0^{\ln r} dy \int_{e^y}^r f(x, y) dx.$$

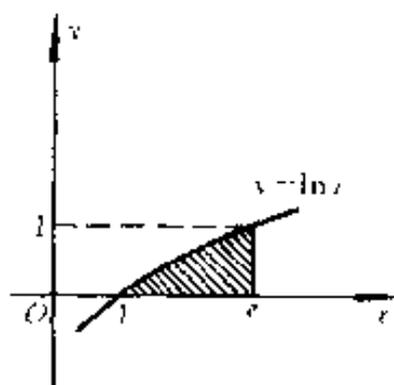


图 8.12

$$3931. \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

解 积分域如图 8.13 中阴影部分所示. 由于 $y = \sin x$ 的反函数, 当 y 从 0 变到 1 时为 $x = \arcsin y$, 当 y 从 1 变到 -1 时 $x = \pi - \arcsin y$, 当 y 从 -1 变到 0 时为 $x = 2\pi + \arcsin y$, 故改变积分的顺序, 即得

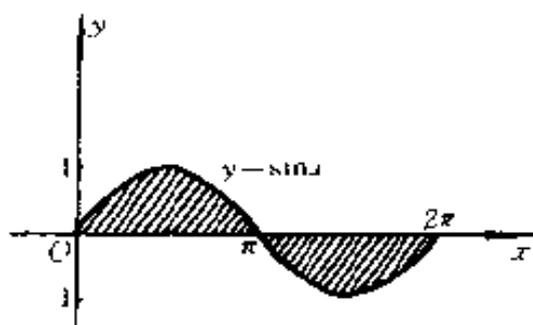


图 8.13

$$\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy \\ = \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx \\ = \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx.$$

计算下列积分:

$$3932. \iint_{\Omega} xy^2 dx dy, \text{ 设 } \Omega \text{ 是由抛物线}$$

$y^2 = 2px$ 和直线 $x = \frac{p}{2}$ ($p > 0$) 所界的区域.

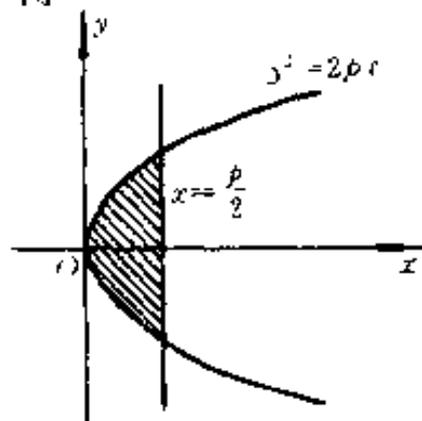


图 8.14

解 积分域如图 8.14 所示, 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy^2 dx dy &= \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{\sqrt{2px}}^{\sqrt{2bx}} xy^2 dy \\ &= \int_0^{\frac{p}{2}} \frac{2}{3} x \sqrt{(2px)^3} dx = \frac{p^5}{21}. \end{aligned}$$

3933. $\iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}}$ ($a > 0$), 设 Ω 是

由圆心在点 (a, a) 半径为 a 且与坐标轴相切的圆周的较短弧和坐标轴所围成的区域.

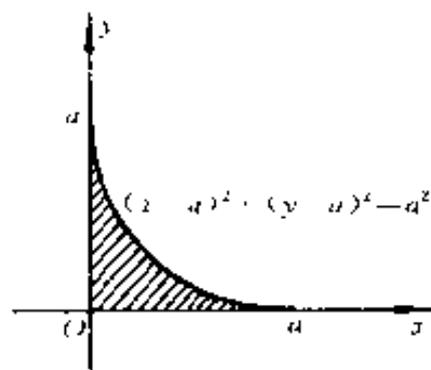


图 8.15

解 如图 8.15 所示, 当 x 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的

x, y 从 0 变到 $a - \sqrt{2ax - x^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{\sqrt{2a-x}} &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a-x}} \int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}} dy \\ &= \int_0^a \frac{adx}{\sqrt{2a-x}} = \int_0^a \sqrt{x} dx = \left(2\sqrt{2} - \frac{8}{3}\right) a \sqrt{a}. \end{aligned}$$

3934. $\iint_{\Omega} |xy| dx dy$, 设 Ω 是以 a 为半径, 坐标原点为圆心的圆.

解
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} |xy| dx dy &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} |xy| dy \\ &= \int_{-a}^a (a^2 - x^2) |x| dx = 2 \int_0^a (a^2 - x^2) x dx = \frac{a^4}{2}. \end{aligned}$$

3935. $\iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy$, 设 Ω 是以 $y = x, y = x + a, y = a$ 和 $y = 3a$ ($a > 0$) 为边的平行四边形.

解 如图 8.16 所示. 当 y 从 a 变到 $3a$ 时, 对于每一固定的 y , x 从 $y-a$ 变到 y . 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_a^{3a} \left[\frac{y^3}{3} + ay^2 - \frac{(y-a)^3}{3} \right] dy \\ &= \frac{168a^4}{12} = 14a^4. \end{aligned}$$

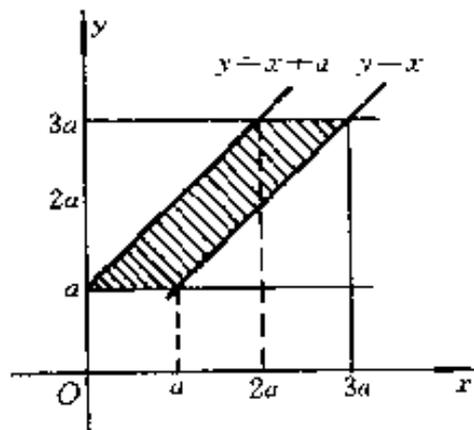


图 8.16

3936. $\iint_{\Omega} y^2 dx dy$, 设 Ω 是由横轴和摆线

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的第一拱所界的区域.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \iint_{\Omega} y^2 dx dy = \int_0^{2\pi} dx \int_0^y y^2 dx \\ &= \frac{a^4}{3} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^4 dt \\ &= \frac{2^4 a^4}{3} \int_0^{2\pi} \sin^8 \frac{t}{2} dt = \frac{2^5 a^4}{3} \int_0^{\pi} \sin^8 u du \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^8 u du \right\} \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 u du \right\} \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 u du^{*)} \\ &= \frac{2^5 a^4}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{35}{12} \pi a^4. \end{aligned}$$

*) 参看 2282 题的结果.

* *) 参看 2281 题的结果。

在二重积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

中, 假定 $x = r \cos \varphi$ 和 $y = r \sin \varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并配置积分的限, 设:

3937. Ω - 圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$.

解 雅可比式 $J = r$, 以下各题不再写出。

φ 从 0 变到 2π , r 从 0 变到 a . 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3938. Ω - 圆 $x^2 + y^2 \leq ax$ ($a > 0$).

解 圆 $x^2 + y^2 = ax$ 即 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, 极坐

标方程为 $r = a \cos \varphi$. 当 φ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $a \cos \varphi$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3939. Ω - 环 $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.

解 φ 从 0 变到 2π , r 从 $|a|$ 变到 $|b|$. 于是

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{|b|} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3940. Ω - 三角形 $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x$.

解 由于直线 $x + y = 1$ 的极坐标方程为

$$r = \frac{1}{\sin \varphi + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \csc \left(\varphi + \frac{\pi}{4} \right),$$

因而当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

3941. Ω — 抛物线形 $-a \leq x \leq a; \frac{x^2}{a} \leq y \leq a$.

解 如图 8.17 所示.

区域 Ω 可分为三部分:

(1) 当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$, 其中

$r = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$ 为抛物线 $y = \frac{x^2}{a}$ 的极坐标方程;

(2) 当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{3\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\frac{a}{\sin \varphi}$;

(3) 当 φ 从 $\frac{3\pi}{4}$ 变到 π 时, 对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$.

于是

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr$$

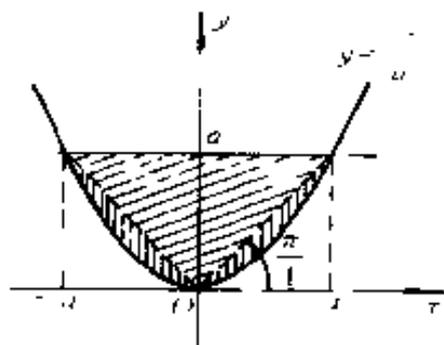


图 8.17

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \\
 & + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} d\varphi \int_0^{\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.
 \end{aligned}$$

3942. 在怎样的情况下, 当变换为极坐标之后, 积分的限是常数?

解 若变换为极坐标, 积分

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_a^b f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr,$$

其中 α, β, a, b 均为常数, 则表明积分域 Ω 为 $a \leq r \leq b$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$. 它表示圆环面 $a \leq r \leq b$ 被射线 $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ 截出的部分, 且只有积分域是这种情况, 变换为极坐标后积分的限才是常数. 如 3937 题及 3939 题即为其特例.

在下列积分中, 假定 $x = r\cos\varphi$ 和 $y = r\sin\varphi$, 变换为极坐标 r 和 φ , 并依两种不同的顺序配置积分的限:

3943. $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy.$

解 如图 8.18 所示.

若先对 r 积分, 则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\sec\varphi$; 当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ, r 从 0 变到 $\csc\varphi$.

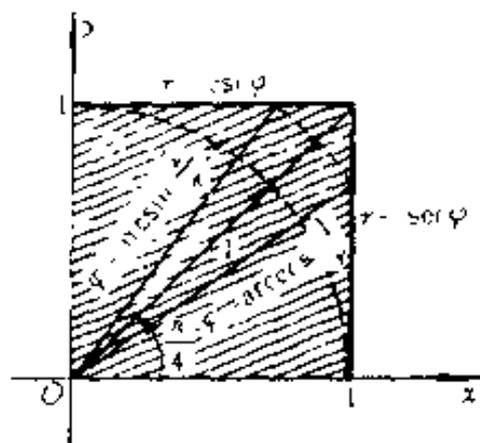


图 8.18

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 1 时, φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$; 当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin \frac{1}{r}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sec\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \\ &+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\csc\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \\ &= \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi + \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{1}{r}} \\ & f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

3944. $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$

解 如图 8.19 所示. 若先对 r 积分, 则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}} \csc\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)$ 变到 1.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 变到 1 时, 对于每一固定的

r , φ 从 $\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$ 变到 $\frac{\pi}{4} + \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$, 其中

直线 $x + y = 1$ 的极坐标方程为 $r\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

即 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{1}{r\sqrt{2}}$ 或 $\frac{\pi}{4} - \varphi = \pm \arccos \frac{1}{r\sqrt{2}}$.

于是,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y) dy \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}\csc(\varphi+\frac{\pi}{4})}}^1 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr \\
 &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 r dr \int_{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}}^{\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{1}{r\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi.
 \end{aligned}$$

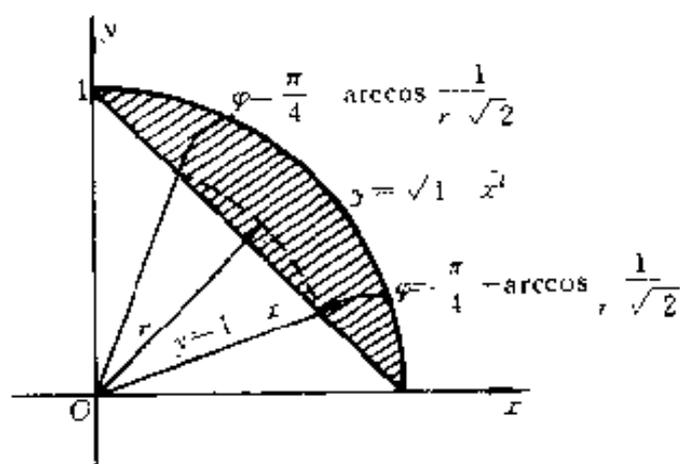


图 8.19

3945. $\int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy.$

解 如图 8.20 所示.

若先对 r 积分, 则当 φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $\frac{2}{\cos\varphi}$.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 $2\sqrt{2}$ 时, φ 从 $\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$; 当 r

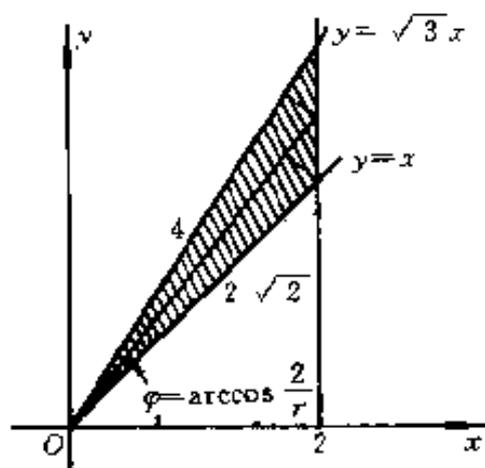


图 8.20

从 $2\sqrt{2}$ 变到 4 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{2}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{3}$. 于是,

$$\begin{aligned} \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} r f(r) dr \\ &= \frac{\pi}{12} \int_0^{\sqrt{2}} r f(r) + \int_2^4 \left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{2}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

3946⁺. ① $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$

解 如图 8.21 所示. 若先对 r 积分, 则当 φ 从 0 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 $\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 变到 $\frac{1}{\cos\varphi}$, 其中 $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 为抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程.

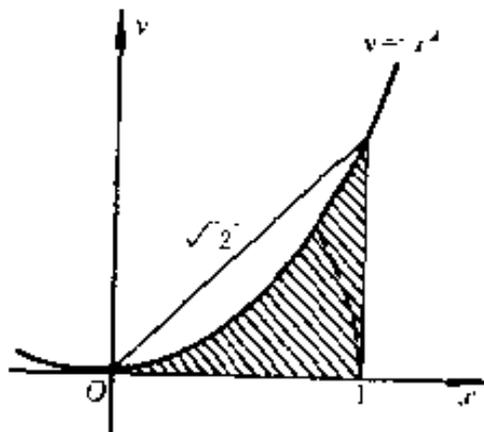


图 8.21

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 1 时对于每一固定的 r , φ 从 0 变到 $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$ (由 $r = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$ 解出 φ); 当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}$. 于是,

① 题号右上角带“+”号表示题解答案与原习题集中译本所附答案不一致, 以后不再说明. 中译本基本是按俄文第二版翻译的, 俄文第二版中有一些错误已在俄文第三版中改正.

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr =$$

$$\int_0^1 r dr \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi$$

$$+ \int_1^{\sqrt{2}} r dr \int_{\arcsin \frac{1}{r}}^{\arcsin \frac{\sqrt{1+4r^2}-1}{2r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi.$$

3947. $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$) 所界的域.

解 令 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, 则曲线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ ($x \geq 0$) 的极坐标方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, 其图象是双纽线的右半部分, 如图 8.22 所示.

若先对 r 积分, 则当 φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$ 时, 对于每一固定的 φ , r 从 0 变到 $a\sqrt{\cos 2\varphi}$.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $-\frac{1}{2}\arccos \frac{r^2}{a^2}$ 变到 $\frac{1}{2}\arccos \frac{r^2}{a^2}$. 于是, $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$

$$= \int_0^a r dr \int_{-\frac{1}{2}\arccos \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{1}{2}\arccos \frac{r^2}{a^2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r dr.$$

假定 r 和 φ 为极坐标, 在下列积分中变更积分的顺序:

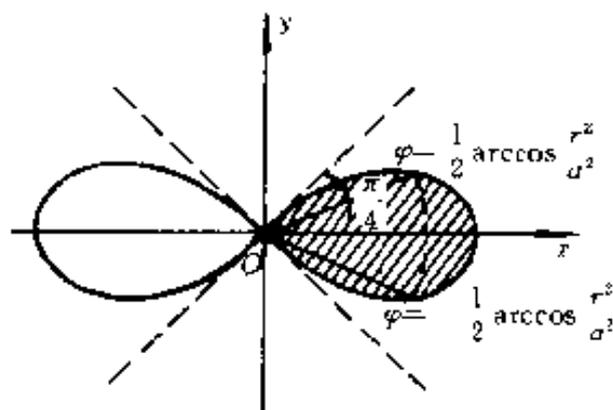


图 8.22

3948. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \quad (x > 0).$

解 积分域为由圆 $r = a \cos \varphi$ 或 $(x - \frac{a}{2})^2 + r^2 = (\frac{a}{2})^2$ 所围成的圆域.

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $-\arccos \frac{r}{a}$ 变到 \arccos

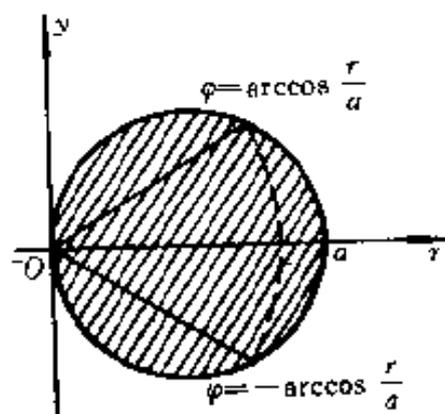


图 8.23

$\frac{r}{a}$ (图 8.23). 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} f(\varphi, r) dr \\ &= \int_0^a dr \int_{-\arccos \frac{r}{a}}^{\arccos \frac{r}{a}} f(\varphi, r) d\varphi. \end{aligned}$$

3949. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \quad (a > 0).$

解 积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ 的右上部分围成(图

8.24).

若先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 a 时, 对于每一固定的 r, φ 从 $\frac{1}{2}\arcsin \frac{r^2}{a^2}$ 变到

$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{r^2}{a^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} f(\varphi, r) dr \\ &= \int_0^a dr \int_{\frac{1}{2}\arcsin \frac{r^2}{a^2}}^{\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin \frac{r^2}{a^2}} f(\varphi, r) d\varphi. \end{aligned}$$

3950. $\int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr$
 $(0 < a < 2\pi).$

解 积分域由曲线 $r = \varphi$ (阿基米德螺线) 与射线 $\varphi = a$ 围成(图 8.25).

改变积分顺序, 即得

$$\begin{aligned} & \int_0^a d\varphi \int_0^{\varphi} f(\varphi, r) dr \\ &= \int_0^a dr \int_r^a f(\varphi, r) d\varphi. \end{aligned}$$

变换成极坐标, 以一重积分来代替二重积分:

3951. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy.$

解 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(\sqrt{x^2+y^2}) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 f(r) r dr$
 $= 2\pi \int_0^1 r f(r) dr.$

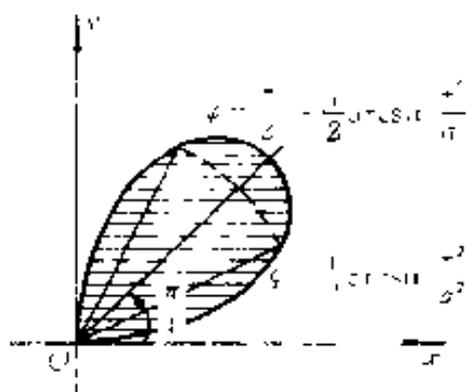


图 8.24

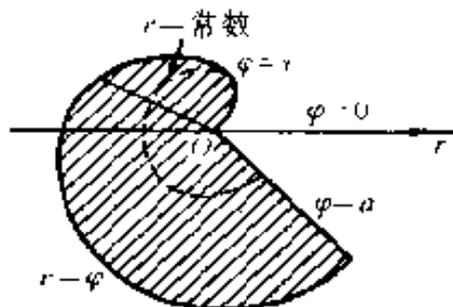


图 8.25

3952. $\iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$, 其中 $\Omega = \{|y| \leq |x|; |x| \leq 1\}$.

解 域 Ω 如图 8.26 所示。先对 φ 积分, 则当 r 从 0 变到 1 时, φ 从 $-\frac{\pi}{4}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$; 当 r 从 1 变到 $\sqrt{2}$ 时, 对于每一固定的 r , φ 从 $\arccos \frac{1}{r}$ 变到 $\frac{\pi}{4}$. 于是,

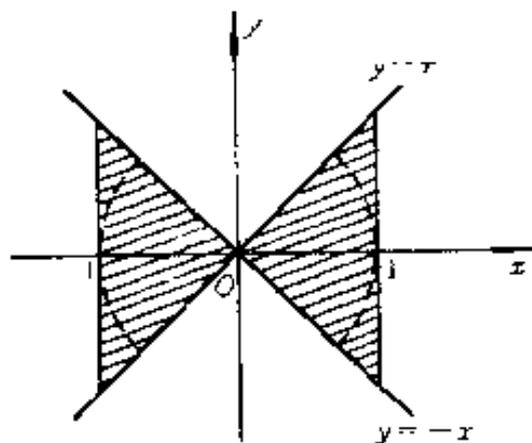


图 8.26

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy \\ &= 2 \int_0^1 r f(r) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi + 4 \int_1^{\sqrt{2}} r f(r) \int_{\arccos \frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \\ &= \pi \int_0^1 r f(r) dr + \int_1^{\sqrt{2}} \left(\pi - 4 \arccos \frac{1}{r} \right) r f(r) dr. \end{aligned}$$

3953. $\iint_{x^2 + y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy$.

解 $\iint_{x^2 + y^2 \leq x} f\left(\frac{y}{x}\right) dx dy = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} f(\operatorname{tg} \varphi) r dr$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\operatorname{tg} \varphi) \cos^2 \varphi d\varphi.$$

变换成极坐标, 以计算下列二重积分:

3954. $\iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$

$$\text{解} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \cdot r dr = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

$$3955. \quad \iint_{x^2 \leq x^2+y^2 \leq 4x^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \iint_{x^2 \leq x^2+y^2 \leq 4x^2} \sin \sqrt{x^2+y^2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr \\ &= 2\pi \int_{\pi}^{2\pi} r \sin r dr = -6\pi^2. \end{aligned}$$

3956. 利用函数组

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = \sqrt{xy}$$

把矩形 $S\{a < x < a+h, b < y < b+h\}$ ($a > 0, b > 0$)

变换为域 S' . 求域 S' 的面积与 S 的面积之比.

当 $h \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限等于什么?

解 正方形的角点 $A(a, b), B(a+h, b), C(a+h, b+h), D(a, b+h)$ 对应于 Ouv 平面上的点 $A' \left(\frac{b^2}{a}, \sqrt{ab} \right)$,

$$B' \left(\frac{b^2}{(a+h)^2}, \sqrt{(a+h)b} \right),$$

$$C' \left(\frac{(b+h)^2}{a+h}, \sqrt{(a+h)(b+h)} \right),$$

$$D' \left(\frac{(b+h)^2}{a}, \sqrt{a(b+h)} \right).$$

正方形的四边 $y=b, x=a+h, y=b+h, x=a$ 对应于 Ouv 平面上的四条曲线, 即

$$A'B': u = \frac{b^3}{v^2}; \quad B'C': u = \frac{v^4}{(a+h)^3};$$

$$C'D': u = \frac{(b+h)^3}{v^2}; \quad D'A': u = \frac{v^4}{a^3}.$$

由这四条曲线围成的域即为 S' (图 8.27).

于是, 域 S' 的面积

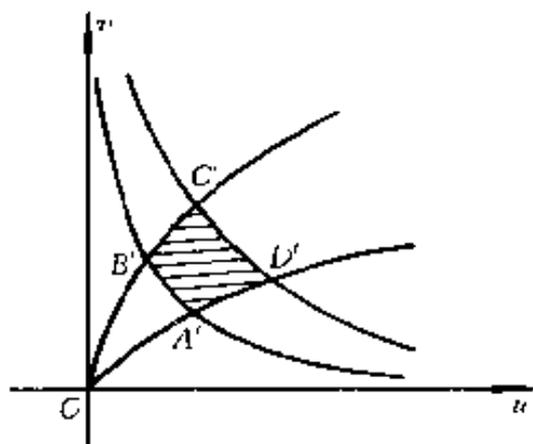


图 8.27

$$\begin{aligned} S' &= \iint_{S'} dudv = \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{a(b+h)}} \frac{v^4}{a^3} dv \\ &+ \int_{\sqrt{a(b+h)}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{(b+h)^3}{v^2} dv - \int_{\sqrt{ab}}^{\sqrt{(a+h)b}} \frac{b^3}{v^2} dv \\ &- \int_{\sqrt{(a+h)b}}^{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \frac{v^4}{(a+h)^3} dv \\ &= \frac{1}{5a^3} [\sqrt{a^5(b+h)^5} - \sqrt{a^5b^5}] \\ &+ (b+h)^3 \left[\frac{1}{\sqrt{a(b+h)}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)(b+h)}} \right] \\ &- b^3 \left[\frac{1}{\sqrt{ab}} - \frac{1}{\sqrt{(a+h)b}} \right] \\ &- \frac{1}{5(a+h)^3} [\sqrt{(a+h)^5(b+h)^5} - \sqrt{(a+h)^5b^5}] \end{aligned}$$

$$= \frac{6}{5} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right].$$

从而, 域 S' 的面积与 S 的面积之比

$$\begin{aligned} \frac{S'}{S} &= \frac{6}{5h^2} [\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}] \left[\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right] \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{[\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}](\sqrt{a+h} - \sqrt{a})}{h^2 \sqrt{a(a+h)}} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})(\sqrt{b+h} - \sqrt{b})} \\ &= \frac{6}{5} \cdot \frac{b^2 + b(b+h) - (b+h)^2 + (2b+h)\sqrt{b(b+h)}}{\sqrt{a(a+h)}(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})(\sqrt{b+h} + \sqrt{b})}. \end{aligned}$$

上述比式是 h 的函数, 并且在 $h=0$ 点连续. 于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5b^2}{4\sqrt{a^3} \cdot \sqrt{b}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

事实上, 应用洛比塔法则求此极限更简单些, 这是因为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5}{2} \sqrt{(b+h)^3} = \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}}.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2} (a+h)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}}.$$

于是,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S'}{S} = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{2} b^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} a^{-\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

注意, 若利用二重积分的变量代换, 则计算 S' 较为简

单. 容易算得 $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = -\frac{3}{2} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{3}{2}}$, 故

$$S' = \iint_{S'} dudv = \iint_S \left| \frac{D(u,v)}{D(x,y)} \right| dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3}{2} \int_a^{a+h} x^{-\frac{3}{2}} dx \int_b^{b+h} y^{\frac{3}{2}} dy \\
&= \frac{6}{5} \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{a+h}} \right) (\sqrt{(b+h)^5} - \sqrt{b^5})
\end{aligned}$$

与上述结果一致. 但是, 从原习题集题目的安排来看, 似乎应从 3966 题以后才开始用一般的变量代换来计算二重积分.

引入新的变量 u, v 来代替 x, y , 并确定下列二重积分中的积分限:

3957. $\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy$ ($0 < a < b; 0 < \alpha < \beta$), 若 $u = x$,
 $v = \frac{y}{x}$.

解 在变换 $u = x, v = \frac{y}{x}$ 下, 区域 $\Omega = \{a \leq x \leq b, \alpha x \leq y \leq \beta x\}$ 变为 $\Omega = \{a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq \beta\}$. 变换的雅哥比式

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & u \end{vmatrix} = u > 0.$$

于是

$$\int_a^b dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y) dy = \int_a^b u du \int_{\alpha}^{\beta} f(u, uv) dv.$$

3958. $\int_0^2 dx \int_{1-x}^{2-x} f(x, y) dy$, 若 $u = x + y, v = x - y$.

解 在变换 $u = x + y, v = x - y$ 下, 区域 $\Omega = \{0 \leq x \leq 2, 1 - x \leq y \leq 2 - x\}$ 变为 $\Omega = \{1 \leq u \leq 2, -u \leq v \leq 4 - u\}$. 事实上, $u + v = 2x, u - v = 2y$, 故 $0 \leq u + v \leq 4$, 即 $-u \leq v \leq 4 - u$. 变换的雅哥比式 $I = -\frac{1}{2}$, 从而 $|I|$

$= \frac{1}{2}$. 于是,

$$\int_0^2 dx \int_{1-x}^x f(x, y) dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{-u}^u f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right) dv.$$

3959. $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$,

$x = 0, y = 0 (a > 0)$ 所界的区域, 若

$$x = u \cos^4 v, \quad y = u \sin^4 v.$$

解 Ω 的界线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 的参数方程为

$$x = a \cos^4 v, \quad y = a \sin^4 v \quad \left(0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

对于变换 $x = u \cos^4 v, y = u \sin^4 v$, 有 $|I| = 4|u \cos^3 v \cdot \sin^3 v|$, 且区域 Ω 变为 $\Omega' = \{0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}\}$.

于是,

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$$

$$= 4 \int_0^a u du \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) dv$$

$$= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v \sin^3 v dv \int_0^a u f(u \cos^4 v, u \sin^4 v) du.$$

3960. 证明: 变数代换

$$x + y = \xi, \quad y = \xi \eta$$

把三角形 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ 变为单位正方形 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$.

证 由 $0 \leq y \leq 1 - x$ 及 $0 \leq x \leq 1$ 得 $0 \leq x + y \leq 1$, 即

$$0 \leq \xi \leq 1.$$

又 $\eta = \frac{y}{\xi} \leq \frac{y}{0+y} = 1$, 且 $\eta \geq 0$, 故 $0 \leq \eta \leq 1$.

反之, 从 $0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1$ 得 $0 \leq x+y \leq 1$,
 $y = \xi\eta, x = \xi(1-\eta)$, 故 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x$.
 因此, 三角形域 $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ 变为正方形
 域 $\{0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1\}$.

3961. 在什么样的变数代换下, 由曲线 $xy = 1, xy = 2, x-y = 1, x-y = -1 (x > 0, y > 0)$ 所界的曲线四边形变换成矩形, 其边平行于坐标轴?

解 原四条曲线为 $xy = 1, xy = 2, x-y = -1, x-y = 1 (x > 0, y > 0)$, 故显然应作变换 $xy = u, x-y = v$. 这时 u 从 1 变到 2, v 从 -1 变到 1, 故原积分域变为域:
 $1 \leq u \leq 2, -1 \leq v \leq 1$.

进行适当的变数代换, 化二重积分为一重的:

3962.
$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy.$$

解 作变换 $x+y = u, x-y = v$ 或 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$, 则有 $|J| = \frac{1}{2}$, 且 u 从 -1 变到 1, v 从 -1 变到 1. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{|x|+|y| \leq 1} f(x+y) dx dy &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 f(u) du \\ &= \int_{-1}^1 f(u) du. \end{aligned}$$

3963.
$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \quad (a^2+b^2 \neq 0).$$

解 作变换 $\frac{ax+by}{\sqrt{a^2+b^2}} = u, \frac{bx-ay}{\sqrt{a^2+b^2}} = v$, 则有 $x = \frac{au+bv}{\sqrt{a^2+b^2}}, y = \frac{bu-av}{\sqrt{a^2+b^2}}$. 及 $x^2+y^2 = u^2+v^2 \leq 1$, 故域 $x^2+y^2 \leq 1$ 变为 $u^2+v^2 \leq 1$, 且有 $|I| = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} f(ax+by+c) dx dy \\ &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du dv \\ &= \int_{-1}^1 du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) dv \\ &= \int_{-1}^1 f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} dv \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-u^2} f(\sqrt{a^2+b^2}u+c) du. \end{aligned}$$

3964. $\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$, 其中 Ω 为由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x (x>0, y>0)$ 所界的域.

解 作变换 $xy=u, \frac{y}{x}=v$, 则域 Ω 变为域

$\Omega' = \{1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$, 且 $|I| = \frac{1}{2v}$. 于是,

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_1^2 \frac{dv}{2v} \int_1^2 f(u) du = \ln 2 \cdot \int_1^2 f(u) du.$$

3965. $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $x^2+y^2=x+y$ 所包围的域.

解 域 Ω 即圆 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$. 作变

换: $x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi, y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$, 则域 Ω 变为域

$\Omega' = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, 且 $|I| = r$. 于是

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x+y) dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r + r^2(\sin\varphi \\ &\quad + \cos\varphi)) dr = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

计算下列二重积分:

3966. $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy.$

解 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x|+|y|) dx dy$
 $= 4 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y) dy = \frac{4}{3}.$

3967. $\iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy$, 其积分域 Ω 是由椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所界的域.

解 作变换: $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$, 则域 Ω 变为域 $\Omega' = \{0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, 且 $|I| = abr$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 ab \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= 2\pi ab \int_0^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{2\pi ab}{3}. \end{aligned}$$

3968. $\iint_{x^2+y^2\leq 1} (x^2+y^2) dx dy.$

解 作变换: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 并利用对称性, 则有

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2+y^2) dx dy &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\left(\frac{1-\sin^2 2\varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi}\right)^{\frac{1}{4}}} r^3 dr \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \varphi dt \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^4 \varphi} = 2 \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t^4} dt \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

*) 利用 1712 题的结果.

3969. $\iint_{\Omega} (x+y) dx dy$, 其积分域 Ω 是由曲线 $y^2 = 2x, x+y = 4, x+y = 12$ 所界的域.

解 由解方程组

$$\begin{cases} x+y=4, \\ y^2=2x \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} x+y=12, \\ y^2=2x \end{cases}$$

求得两条直线与抛物线的交点为 $A(2, 2), B(8, 4), C(18, -6), D(8, -4)$ (图 8.28). 于是,

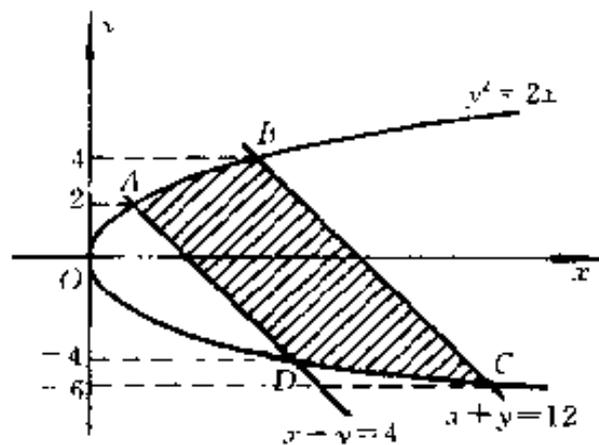


图 8.28

$$\iint_{\Omega} (x+y) dx dy = \int_{-6}^{-4} dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{12-y} (x+y) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_4^2 dy \int_1^{12-y} (x+y) dx + \int_2^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{12-y} (x+y) dx \\
& = 79 \frac{13}{15} + 384 + 79 \frac{13}{15} = 543 \frac{11}{15}.
\end{aligned}$$

3970. $\iint_{\Omega} xy dx dy$, 其中 Ω 是由曲线 $xy=1$, $x+y=\frac{5}{2}$ 所界的区域.

解 曲线 $xy=1$ 与直线 $x+y=\frac{5}{2}$ 的交点为 $(\frac{1}{2}, 2)$, $(2, \frac{1}{2})$. 于是,

$$\begin{aligned}
\iint_{\Omega} xy dx dy &= \int_{\frac{1}{2}}^2 x dx \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} y dy \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{25}{4} x - 5x^2 + x^3 - \frac{1}{x} \right) dx \\
&= 1 \frac{37}{128} - \ln 2.
\end{aligned}$$

3971. $\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy$.

解 $\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\cos(x+y)| dx dy = \int_0^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int_0^{\pi} |\cos(x+y)| dy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \cos(x+y) dy - \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \right) dx$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(- \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \cos(x+y) dy \right. \\
& \left. + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \cos(x+y) dy \right) dx \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin x \right) - \left[\sin(x+\pi) - \sin \frac{\pi}{2} \right] \right\} dx \\
& + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{ - \left(\sin \frac{3\pi}{2} - \sin x \right) + \left[\sin(x+\pi) \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin \frac{3\pi}{2} \right] \right\} dx \\
& = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2 dx = 2\pi.
\end{aligned}$$

3972. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left| \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 \right| dx dy.$

解 积分域如图 8.29 所示, 由 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 和 Ω_4 所组成, 其中 Ω_1 为由圆 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 = 0$, 即

$$\begin{aligned}
& \text{圆} \left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 \\
& + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

围成的区域, 该圆的极坐标方程为

$$r = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right),$$

而圆 $x^2 + y^2 = 1$ 的极坐标方程为 $r = 1$. 于是, 各区域为

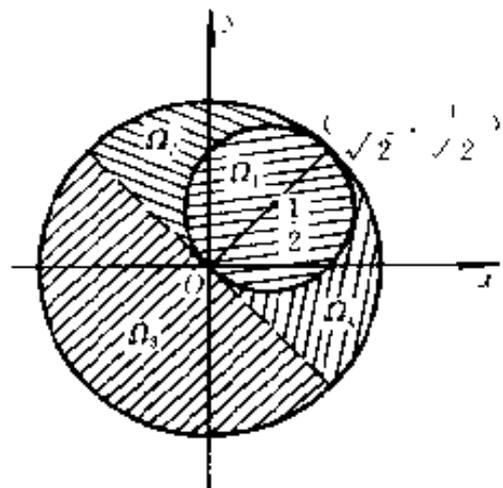


图 8.29

$$\Omega_1: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\Omega_2: \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}, \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq r \leq 1;$$

$$\Omega_3: \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{7\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1;$$

$$\Omega_4: -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \leq r \leq 1.$$

当点在 Ω_1 中时, 由于 $\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$ 即 $\frac{x+y}{\sqrt{2}} - (x^2 + y^2) \geq 0$, 故

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2 =$$

$r\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) - r^2$; 当点在 Ω_2, Ω_3 和 Ω_4 中时,

$$\left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| = x^2 + y^2 - \frac{x+y}{\sqrt{2}} = r^2 - r\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right).$$

于是, 注意到利用对称性便得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left|\frac{x+y}{\sqrt{2}} - x^2 - y^2\right| dx dy \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})} [r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) - r^2] r dr \\ &+ 2 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\varphi \int_{\sin(\varphi + \frac{\pi}{4})}^1 [r^2 - r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})] r dr \\ &+ \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^1 [r^2 - r \sin(\varphi + \frac{\pi}{4})] r dr \\ &= \frac{1}{6} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) d\varphi + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{6} \sin^4\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \Big] d\varphi \\
& + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right) \right] d\varphi \\
& = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 u du \right) \\
& \quad + \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \\
& \quad *) \\
& = \frac{\pi}{32} + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} + \frac{\pi}{32} \right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{9\pi}{16}.
\end{aligned}$$

*) 利用 2281 题的结果.

$$3973^+. \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y - x^2|} dx dy.$$

$$\begin{aligned}
\text{解} \quad & \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2}} \sqrt{|y - x^2|} dx dy = \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2}} \sqrt{x^2 - y} dx dy \\
& + \iint_{\substack{|x| \leq 1 \\ x^2 < y \leq 2}} \sqrt{y - x^2} dx dy \\
& = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy \\
& = \frac{4}{3} \int_0^1 x^3 dx + \frac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
& = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 \theta d\theta \\
& = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} \left(\frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} \right)^{*)} = \frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

*) 参看 1750 题的结果.

计算不连续函数的积分:

$$3974. \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy.$$

解 当 $y^2 - x^2 < 2$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = 1;$$

当 $y^2 - x^2 > 2$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = -1;$$

当 $y^2 - x^2 = 2$ 时,

$$\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = 0.$$

现将域 $x^2 + y^2 \leq 4$ 分成 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 和 Ω_5 五部分, 其界线分别为

$x^2 + y^2 = 4, y^2 - x^2 = 2, x = \pm 1$ (图 8.30). 当点在 Ω_1 和 Ω_5 中时, $y^2 - x^2 > 2$, 故 $\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = -1$; 当点在 Ω_2, Ω_3 和 Ω_4 中时, $y^2 - x^2 < 2$, 故 $\operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) = 1$. 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy \\ &= - \iint_{\Omega_1} dx dy - \iint_{\Omega_5} dx dy + \iint_{\Omega_2} dx dy + \iint_{\Omega_3} dx dy \\ & \quad + \iint_{\Omega_4} dx dy \\ &= -4 \int_0^1 dx \int_{\sqrt{2+x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy + 4 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2+x^2}} dy \end{aligned}$$

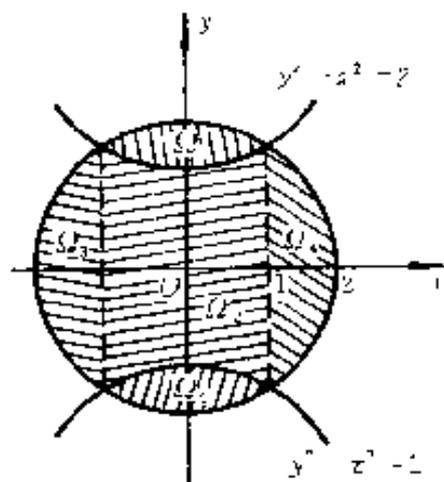


图 8.30

$$\begin{aligned}
& + 4 \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \\
& = 8 \int_0^1 \sqrt{2+x^2} dx + 4 \left(\int_1^2 \sqrt{4-x^2} dx \right. \\
& \quad \left. - \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \right) \\
& = \frac{4\pi}{3} + 8 \ln \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

3975. $\iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x+y] dx dy.$

解 当 $0 \leq x+y < 1$ 时,
 $[x+y] = 0;$
 当 $1 \leq x+y < 2$ 时,
 $[x+y] = 1;$
 当 $2 \leq x+y < 3$ 时,
 $[x+y] = 2;$
 当 $3 \leq x+y < 4$ 时,
 $[x+y] = 3;$

当 $x+y = 4$ 时, $[x+y] = 4.$

如图 8.31 所示, 域 $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2$ 可分为下列四部分:

$$\Omega_1: x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0;$$

$$\Omega_2: 1 \leq x+y \leq 2, x=0, y=0;$$

$$\Omega_3: 2 \leq x+y \leq 3, x=2, y=2;$$

$$\Omega_4: x+y \geq 3, x \leq 2, y \leq 2.$$

当点属于 Ω_1 的内部时, $[x+y] = 0$; 当点属于 Ω_2 的内部时, $[x+y] = 1$; 当点属于 Ω_3 的内部时, $[x+y] =$

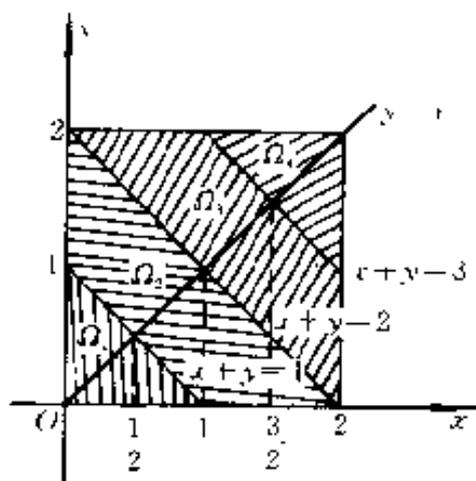


图 8.31

2; 当点属于 Ω_4 的内部时, $[x + y] = 3$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x + y] dx dy &= \iint_{\Omega_2} dx dy + 2 \iint_{\Omega_3} dx dy + 3 \iint_{\Omega_4} dx dy \\ &= 2 \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{1-x}^x dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} dy \right) + 4 \left(\int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{2-x}^x dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{2-x}^{3-x} dy \right) + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \int_{3-x}^x dy \\ &= 2 \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (2x - 1) dx + \int_1^2 (2 - x) dx \right) \\ &\quad + 4 \left(\int_{\frac{3}{2}}^2 (2x - 2) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 dx \right) \\ &\quad + 6 \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x - 3) dx = 6. \end{aligned}$$

3976. $\iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y - x^2} dx dy.$

解 如图 8.32 所示.

当 $x^2 \leq y < x^2 + 1$ 时,

$$[y - x^2] = 0;$$

当 $1 + x^2 \leq y < x^2 + 2$ 时,

$$[y - x^2] = 1;$$

$$\text{当 } 2 + x^2 \leq y < x^2 + 3 \text{ 时,}$$

+ 3 时,

$$[y - x^2] = 2;$$

$$\text{当 } 3 + x^2 \leq y < 4 \text{ 时,}$$

$$[y - x^2] = 3.$$

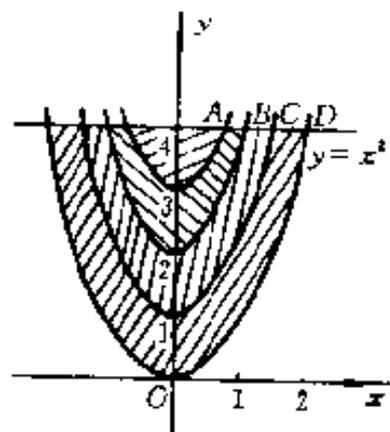


图 8.32

抛物线 $y = x^2 + 3, y = x^2 + 2, y = x^2 + 1$ 及 $y = x^2$ 与直线 $y = 4$ 在第一象限内的交点为 $A(1, 4), B(\sqrt{2}, 4), C(\sqrt{3}, 4)$ 及 $D(2, 4)$, 与 Oy 轴对称的位置还有四个交点, 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2 \leq y \leq 4} \sqrt{y - x^2} dx dy \\ &= 2 \left[\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+1}^{x^2+2} dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_{x^2+1}^4 dy \right] \\ & \quad + 2\sqrt{2} \left[\int_0^1 dx \int_{x^2+2}^{x^2+3} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2+2}^4 dy \right] \\ & \quad + 2\sqrt{3} \int_0^1 dx \int_{x^2+3}^4 dy \\ &= 2 \left[\sqrt{2} + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{3-x^2}{\sqrt{2}} dx \right] + 2\sqrt{2} \\ & \quad \cdot \left[1 + \int_1^{\sqrt{2}} (2-x^2) dx \right] + 2\sqrt{3} \int_0^1 (1-x^2) dx \\ &= \frac{4}{3} (4 + 4\sqrt{3} - 3\sqrt{2}). \end{aligned}$$

3977. 设 m 及 n 为正整数且其中至少有一个是奇数, 证明

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

证 作变换: $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则得

$$\begin{aligned} \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy &= \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq a}} r^{m+n+1} \cos^m \varphi \sin^n \varphi dr d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \\ &= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$= \frac{a^{m+n+2}}{m+n+2} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \cdot \sin^n \varphi d\varphi \right], \quad (1)$$

若在上式右端的第二个积分中令 $\varphi = \pi + t$, 即得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi = (-1)^m \cdot (-1)^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t \cdot \sin^n t dt. \quad (2)$$

当 m 及 n 中有且仅有一个为奇数时, $(-1)^m \cdot (-1)^n = -1$, 因而(1)式为零, 当 m 和 n 均为奇数时, $(-1)^m \cdot (-1)^n = 1$, 因而(1)式等于

$$\frac{2a^{m+n+2}}{m+n+2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi.$$

但此被积函数在对称区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上为奇函数, 故积分仍然为零.

总之, 当 m 和 n 中至少有一个为奇数时,

$$\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} x^m y^n dx dy = 0.$$

3978. 求:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy,$$

其中 $f(x, y)$ 为连续函数.

解 利用积分中值定理, 即得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy \\ &= f(\xi, \eta) \iint_{x^2+y^2 \leq \rho^2} dx dy = \pi \rho^2 \cdot f(\xi, \eta), \end{aligned}$$

其中点 (ξ, η) 为圆域 $x^2 + y^2 \leq \rho^2$ 内的一点显然,当 $\rho \rightarrow 0$ 时,点 $(\xi, \eta) \rightarrow O(0, 0)$. 于是,根据函数 $f(x, y)$ 的连续性知:

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{x^2 + y^2 \leq \rho^2} f(x, y) dx dy \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} f(\xi, \eta) = f(0, 0). \end{aligned}$$

3979. 设

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{tx}{y^2}} dx dy,$$

求 $F'(t)$.

解 令 $x = ut, y = vt$, 则

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{\frac{tx}{y^2}} dx dy = \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} t^2 e^{\frac{u}{v^2}} du dv. \quad (1)$$

于是,似乎应该有

$$\begin{aligned} F'(t) &= \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} 2te^{\frac{u}{v^2}} du dv \\ &= \frac{2}{t} \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} t^2 e^{\frac{u}{v^2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \quad (t > 0). \end{aligned}$$

但这是错误的. 实际上本题有问题, 因为(1)式中的二重积分都是广义二重积分. 当 $t > 0$ 时, 在 $x > 0, y = 0$ 上(即 $u > 0, v = 0$ 上)被积函数成为无穷, 而且这个广义二重积分是发散的. 这是因为, 根据被积函数的非负性, 有(参看 § 9)

$$\iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{\frac{u}{v^2}} du dv = \int_0^1 dv \int_0^1 e^{\frac{u}{v^2}} du$$

$$= \int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv. \quad (2)$$

对此积分, $v = 0$ 是瑕点, 由于被积函数 $v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1)$ 在 $0 \leq v \leq 1$ 上非负, 且 (令 $\frac{1}{v^2} = t$)

$$\lim_{v \rightarrow +0} v^2 [v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t - 1}{t^2} = +\infty,$$

故瑕积分 $\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv$ 发散, 且

$$\int_0^1 v^2 (e^{\frac{1}{v^2}} - 1) dv = +\infty.$$

由此, 再根据(1)式与(2)式, 得

$$F(t) \equiv +\infty \text{ (当 } t > 0 \text{ 时)}.$$

因此, 提出求 $F'(t)$ 的问题是无意义的.

注意, 若本题换为: 设

$$F(t) = \iint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t}} e^{-\frac{t^2}{y^2}} dx dy,$$

求 $F'(t)$. 这时得 (作代换 $x = ut, y = vt$)

$$F(t) = t^2 \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{u^2}{v^2}} du dv,$$

从而右端积分是收敛的, (实际上可视为常义积分). 于是,

$$F'(t) = 2t \iint_{\substack{0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq 1}} e^{-\frac{u^2}{v^2}} du dv = \frac{2}{t} F(t) \text{ (} t > 0 \text{)}.$$

3980⁺. 设

$$F(t) = \iint_{(x-t)^2 + (y-t)^2 \leq 1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

求 $F'(t)$.

解 作变量代换 $x = u + t, y = v + t$ (t 固定), 则

$$F(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2} dudv. \quad (1)$$

今在积分号下求导数^{*}, 得

$$\begin{aligned} F'(t) &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}} dudv \\ &= \iint_{(x-t)^2+(y-t)^2 \leq 1} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\ &\quad (-\infty < t < +\infty). \end{aligned}$$

*) 积分号下求导数的合理性, 证明如下: 令

$$f(u, v, t) = \sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2},$$

则

$$\begin{aligned} f'_t(u, v, t) &= \frac{u+t+v+t}{\sqrt{(u+t)^2 + (v+t)^2}} \\ &\quad ((u, v) \neq (-t, -t)). \end{aligned}$$

当 $(u, v) = (-t, -t)$ 时, 易知 $f'_t(u, v, t)$ 不存在, 但右导数存在且等于 $\sqrt{2}$, 左导数也存在且等于 $-\sqrt{2}$. 由于对任何数 a, b , 有 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 故 $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, 从而 $\frac{|a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \sqrt{2}$. 于是,

$$|f'_t(u, v, t)| \leq \sqrt{2} \quad ((u, v) \neq (-t, -t)). \quad (2)$$

如果 $|t| > \frac{1}{\sqrt{2}}$, 这时 $f(u, v, t), f'_t(u, v, t)$ (t 固定) 都是域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 上的连续函数, 当然可在积分号下求导数, 得

$$F(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) dudv. \quad (3)$$

但如果 $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, 则(3)式右端积分的被积函数 $f'_i(u, v, t)$ 在积分域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 中的点 $(u, v) = (-t, -t)$ 不连续. 因此, 不能立即断定(3)式的正确性. 下面不论 t 为何值 ($-\infty < t < +\infty$) 直接证明(3)式成立. 令

$$g(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_i(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (4)$$

由(2)式知 $f'_i(u, v, t)$ 是有界的, 且在域 $u^2 + v^2 \leq 1$ 上至多有一个不连续点 (t 固定), 故(4)式右端的积分存在. 实际上, 利用(2)式以及 $f'_i(u, v, t)$ 当 $(u, v) \neq (-t, -t)$ 时的连续性, 用(必要时, 即 $|t| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时)挖掉以点 $(-t, -t)$ 为中心的小圆域的方法, 不难证明 $g(t)$ 是 $-\infty < t < +\infty$ 上的连续函数(详细证明留给读者). 令

$$G(t) = \int_0^t g(s) ds \quad (-\infty < t < +\infty),$$

则

$$G'(t) = g(t) \quad (-\infty < t < +\infty). \quad (5)$$

但

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^t ds \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_i(u, v, s) du dv \\ &= \iiint_{\substack{u^2+v^2 \leq 1 \\ 0 \leq s \leq t}} f'_i(u, v, s) du dv ds \end{aligned}$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} dudv \int_0^t f'_{,3}(u, v, s) ds. \quad (6)$$

注意, (6) 式中的运算是合理的, 因为三维域 $u^2 + v^2 \leq 1, 0 \leq s \leq t$ (t 固定) 中, 三元函数 $f'_{,3}(u, v, s)$ 有界且只在直线 $u = v = -s$ 的一段上不连续, 从而(6) 式中的三重积分及两个累次积分都存在, 故它们相等.

下证恒有

$$\int_0^t f'_{,3}(u, v, s) ds = f(u, v, t) - f(u, v, 0). \quad (7)$$

事实上, 若 $(u, v) \neq (-t_1, -t_1)$ ($t_1 \in [0, t]$) 则 $f'_{,3}(u, v, s)$ 是 $0 \leq s \leq t$ 上的连续函数 (u, v 固定), 从而(7) 式成立; 若 $(u, v) = (-t_1, -t_1)$ (t_1 是属于 $[0, t]$ 的某数), 则由 $f(u, v, s)$ 对任何 u, v, s 的连续性, 有

$$\begin{aligned} \int_0^t f'_{,3}(u, v, s) ds &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{t_1-\epsilon} f'_{,3}(u, v, s) ds \\ &\quad + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \int_{t_1+\epsilon'}^t f'_{,3}(u, v, s) ds \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} [f(u, v, t_1 - \epsilon) - f(u, v, 0)] \\ &\quad + \lim_{\epsilon' \rightarrow 0} [f(u, v, t) - f(u, v, t_1 + \epsilon')] \\ &= f(u, v, t_1) - f(u, v, 0) + f(u, v, t) - f(u, v, t_1) \\ &= f(u, v, t) - f(u, v, 0), \end{aligned}$$

故(7) 式恒成立. 代入(6) 式, 得

$$\begin{aligned} G(t) &= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} [f(u, v, t) - f(u, v, 0)] dudv \\ &= F(t) - F(0) \quad (-\infty < t < +\infty). \end{aligned}$$

由此, 再注意到(5) 式, 即知 $F'(t)$ 存在, 且

$$F(t) = G(t) = g(t)$$

$$= \iint_{u^2+v^2 \leq 1} f'_t(u, v, t) du dv \quad (-\infty < t < +\infty),$$

即(3)式成立.

3981. 设

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) dx dy \quad (t > 0),$$

求 $F'(t)$.

解 令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则

$$F'(t) = \int_0^t dr \int_0^{2\pi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r d\varphi,$$

故得

$$F'(t) = \int_0^{2\pi} f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) t d\varphi.$$

注意, 此题中应假定 $f(x, y)$ 是连续函数.

3982. 设 $f(x, y)$ 是连续的, 求证函数

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^x d\xi \int_{\xi-x+y}^{x+y-\xi} f(\xi, \eta) d\eta$$

满足方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

证 利用含参变量的常义积分求导数的公式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - (-1)f(\xi, \xi-x+y)] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x-x+y}^{x+y-x} f(x, \eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) + f(\xi, \xi-x+y)] d\xi, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_x(\xi, x+y-\xi) - f'_x(\xi, \xi-x+y)] d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2} [f(x, x+y-x) + f(x, x-x+y)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi + f(x, y).$$

同理, 有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \int_0^x [f(\xi, x+y-\xi) - f(\xi, \xi-x+y)] d\xi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{2} \int_0^x [f'_y(\xi, x+y-\xi) - f'_y(\xi, \xi-x+y)] d\xi.$$

于是, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

证毕.

注意, 显然本题还应假定 $f'_y(x, y)$ 存在且连续.

3983. 设函数 $f(x, y)$ 的等位线是简单封闭曲线, $S(v_1, v_2)$ 是由曲线 $f(x, y) = v_1$ 及 $f(x, y) = v_2$ 所围成的域. 证明

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv,$$

其中 $F(v)$ 为由曲线 $f(x, y) = v_1$ 与 $f(x, y) = v_2$ 所包围的面积.

证 作 $[v_1, v_2]$ 的任一分划 T :

$$v_1 = v'_0 < v'_1 < \dots < v'_i < \dots < v'_n = v_2.$$

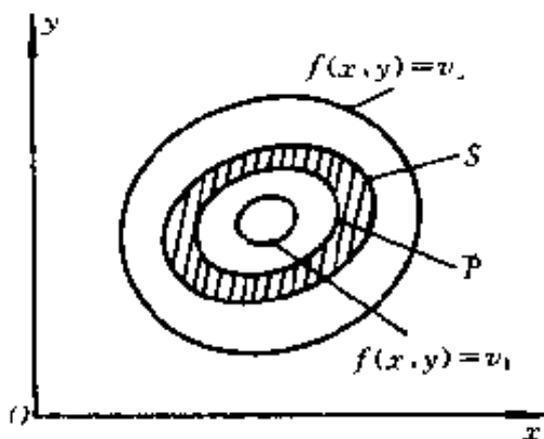


图 8.33

令 $d(T) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta v_i$, 这里 $\Delta v_i = v'_i - v'_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). 于是, 由积分中值定理(这里假定了 $f(x, y)$ 在 $S(v_1, v_2)$ 上连续) 知

$$\begin{aligned} & \iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^n \iint_{S(v'_{i-1}, v'_i)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \Delta S_i, \end{aligned}$$

其中 ΔS_i 表小环形域 $S(v'_{i-1}, v'_i)$ (如图 8.33 阴影部分所示) 的面积, $\bar{P}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \in S(v'_{i-1}, v'_i)$.

令 $v_i^* = f(\bar{x}_i, \bar{y}_i)$, 则 $v'_{i-1} \leq v_i^* \leq v'_i$. 又显然(利用微分中值定理) 有

$$\begin{aligned} \Delta S_i &= F(v'_i) - F(v'_{i-1}) = F'(\bar{v}_i)(v'_i - v'_{i-1}) \\ &= F'(\bar{v}_i) \Delta v_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

其中 $v'_{i-1} \leq \bar{v}_i \leq v'_i$. 这里我们假定了 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上存在且可积, 于是它有界, 即

$$|F'(v)| \leq M = \text{常数} \quad (v_1 \leq v \leq v_2). \quad (1)$$

我们有

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n v_i^* F'(\bar{v}_i) \Delta v_i = I_1 + I_2, \quad (2)$$

其中

$$I_1 = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i, \quad I_2 = \sum_{i=1}^n (v_i^* - \bar{v}_i) F'(\bar{v}_i) \Delta v_i.$$

由于 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上可积, 故 $vF'(v)$ 也在 $[v_1, v_2]$ 上可积. 因此,

$$\begin{aligned}\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_1 &= \lim_{d(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i F'(\bar{v}_i) \Delta v_i \\ &= \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.\end{aligned}\quad (3)$$

另一方面,由(1)式知

$$|I_2| \leq M d(T) \sum_{i=1}^n \Delta v_i = M(v_2 - v_1) d(T),$$

故

$$\lim_{d(T) \rightarrow 0} I_2 = 0.\quad (4)$$

现在(2)式两端令 $d(T) \rightarrow 0$ 取极限(注意,(2)式左端是常数),并注意到(3)式与(4)式,即得

$$\iint_{S(v_1, v_2)} f(x, y) dx dy = \int_{v_1}^{v_2} v F'(v) dv.$$

证毕.

应当指出,正如上面所说的,本题应假定 $f(x, y)$ 在 $S(v_1, v_2)$ 上连续,而 $F'(v)$ 在 $[v_1, v_2]$ 上存在并且可积.

§ 2. 面积的计算法

Oxy 平面上域 S 的面积由公式

$$S = \iint_S dx dy$$

所给出.

求下列曲线所界的面积:

3984. $xy = a^2, x + y$

$$= \frac{5a}{2} (a > 0).$$

解 两曲线的交点

为 $A(\frac{a}{2}, 2a)$ 和

$B(2a, \frac{a}{2})$ (图 8.

34), 故所求面积为

$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{2a} dx \int_{\frac{a^2}{x}}^{\frac{5a}{2}-x} dy =$$

$$\frac{15}{8}a^2 - 2a^2 \ln 2.$$

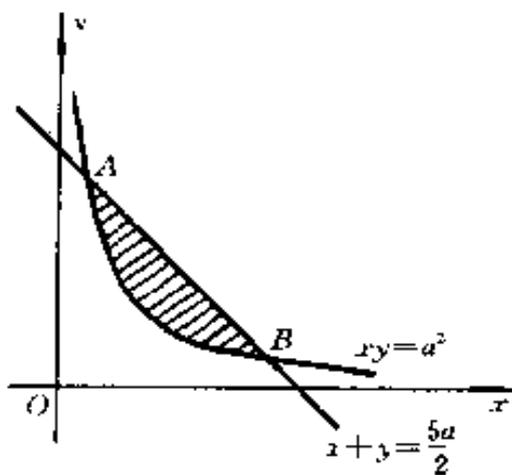


图 8.34

3985. $y^2 = 2px + p^2, y^2 = -2qx + q^2 (p > 0, q > 0).$

解 两曲线的交点为

$A(\frac{q-p}{2}, \sqrt{pq})$ 和

$B(\frac{q-p}{2}, -\sqrt{pq})$ (图

8.35), 故所求面积为

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{pq}} dy \int_{\frac{y^2-p^2}{2p}}^{\frac{q^2-y^2}{2q}} dx$$

$$= \frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}.$$

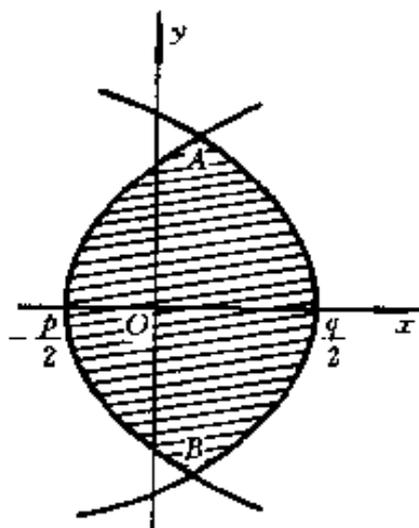


图 8.35

3986. $(x-y)^2 + x^2 = a^2$

($a > 0$).

解 如图 8.36 所示.

所求面积的域为:

$$-a \leq x \leq a,$$

$x - \sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq x + \sqrt{a^2 - x^2}$. 于是,
 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-a}^a dx \int_x^{x + \sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2} dy \\
 &= 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt \\
 &= 4 \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^2.
 \end{aligned}$$

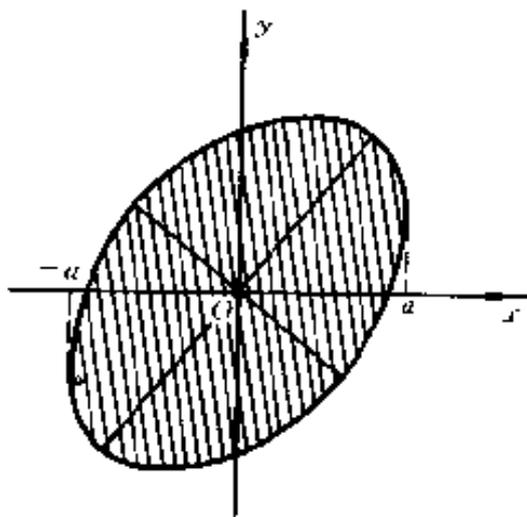


图 8.36

变换为极坐标,以计算由下列曲线所界的面积:

3987. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2); x^2 + y^2 \geq a^2$.

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi \text{ 及 } r \geq a.$$

它们的交点(在第一象限内)为 $(a, \frac{\pi}{6})$, 如图 8.37 所示. 利用对称性, 得所求面积为

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\varphi \int_a^{\sqrt{2a^2 \cos 2\varphi}} r dr \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2a^2 \cos 2\varphi - a^2) d\varphi \\
 &= \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} a^2.
 \end{aligned}$$

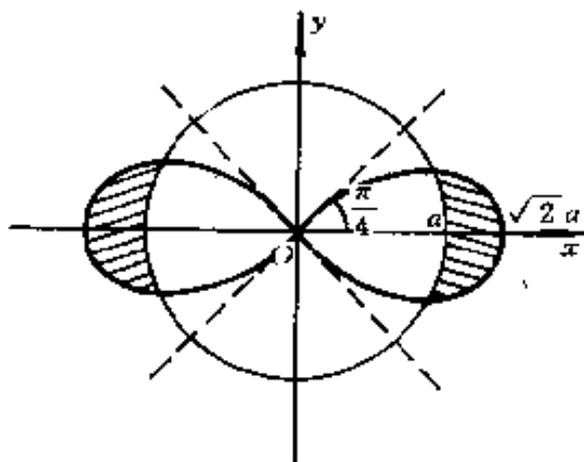


图 8.37

3988. $(x^3 + y^3)^2 = x^2 + y^2; x \geq 0, y \geq 0.$

解 将方程化为极坐标方程,得

$$(r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta)^2 = r^2,$$

即

$$r^2 = \frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}).$$

曲线所界的面积为

$$S = \iint_S r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta}.$$

由于

$$\frac{1}{\cos^3 \theta + \sin^3 \theta} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{1 - \sin \theta \cos \theta} \right),$$

又

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta + \cos \theta} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Intg} \frac{\theta + \frac{\pi}{4}}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\operatorname{Intg} \frac{3\pi}{8} - \operatorname{Intg} \frac{\pi}{8} \right) \\ &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} - \ln \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} \right] \\ &= \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2}), \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta} d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^{**}}{2\left(\frac{1}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2}}$$

$$= 2\operatorname{arctg}(\sin\theta - \cos\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

于是,所求的面积为

$$S = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin\theta + \cos\theta} + \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\theta + \cos\theta}{1 - \sin\theta\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3} \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{\pi}{6}.$$

*) 利用 2053 题的结果,其中

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{3}{2}, A = 2, B = 0.$$

3989. $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$ ($a > 0$).

解 显然曲线关于 Ox 轴对称,故只要求出 $y \geq 0$ 的部分. 化为极坐标,方程为

$$r = a\cos\theta(4\cos^2\theta - 3).$$

由于必须 $x^3 - 3xy^2 \geq 0$,故 $\cos\theta(4\cos^2\theta - 3) \geq 0$. 因此,
 $\cos\theta \geq 0$ 且 $\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $\cos\theta \leq 0$ 且 $\cos\theta \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

故 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}$, $-\pi + \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq$
 $-\frac{\pi}{2}$.

于是,在 Ox 轴的上方部分 ($y \geq 0$) 为

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6} \text{ 和 } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6}.$$

由此可知

$$S = \iint_{\frac{\pi}{3}} r dr d\theta = 2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} r^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - \frac{\pi}{6}} r^2 d\theta \right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta \\ + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta.$$

在上式右端第二个积分中作代换 $\theta = \pi - \varphi$, 则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5\pi}{6}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta \\ = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta,$$

故

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta (4 \cos^2 \theta - 3)^2 d\theta \\ = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (16 \cos^6 \theta - 24 \cos^4 \theta + 9 \cos^2 \theta) d\theta \\ = a^2 \left(16 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - 24 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right. \\ \left. + 9 \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \right) \\ = \frac{\pi a^2}{4}.$$

3990. $(x^2 + y^2)^2 = 8a^2 xy; (x - a)^2 + (y - a)^2 \leq a^2 (a > 0)$.

解 将方程化为极坐标方程, 得(双纽线)

$$r^4 = 8a^2 r^2 \cos \theta \sin \theta,$$

即

$$r = 2a \sqrt{\sin 2\theta};$$

与圆周

$$(r \cos \theta - a)^2 + (r \sin \theta - a)^2 = a^2,$$

即

$$r = a(\cos\theta + \sin\theta) \pm a \sqrt{\sin 2\theta}.$$

显然, 两条曲线关于射线 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 是对称的. 令

$$2a \sqrt{\sin 2\theta} = a(\cos\theta + \sin\theta) - a \sqrt{\sin 2\theta},$$

解得交点的极角

$$\theta = \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S r dr d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \{ (2a \sqrt{\sin 2\theta})^2 - [a(\cos\theta + \sin\theta) \\ &\quad - a \sqrt{\sin 2\theta}]^2 \} d\theta \\ &= \int_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} (2a^2 \sin 2\theta + 2a^2 (\sin\theta + \cos\theta) \sqrt{\sin 2\theta} \\ &\quad - a^2) d\theta. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} &\int (\sin\theta + \cos\theta) \sqrt{\sin 2\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2} (\sin\theta - \cos\theta) \sqrt{\sin 2\theta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \arcsin(\sin\theta - \cos\theta) + C'. \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} S &= a^2 \left[-\cos 2\theta + (\sin\theta - \cos\theta) \sqrt{\sin 2\theta} \right. \\ &\quad \left. + \arcsin(\sin\theta - \cos\theta) - \theta \right] \Big|_{\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{3\sqrt{7}}{8} + \frac{\sqrt{14}}{4} \sqrt{\frac{1}{8}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8} \Big) \\
& = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right) \\
& = a^2 \left(\frac{\sqrt{7}}{2} + \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} \right)^{**}) .
\end{aligned}$$

*) 利用三角恒等式

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sin 2x} \sin x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) \sqrt{\operatorname{tg} x}, \\
\sqrt{\sin 2x} \cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \right) \sqrt{\operatorname{ctg} x}
\end{aligned}$$

化为二项型微分的积分, 参看 А. Ф. Тимофеев
《ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ》第五章 § 15.

**) 容易证明:

$$\arcsin \frac{\sqrt{14}}{4} - \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} = \arcsin \frac{\sqrt{14}}{8}.$$

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
& \sin \left(\arcsin \frac{\sqrt{14}}{8} + \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{8} \right) \\
& = \frac{3 \sqrt{14}}{32} + \frac{5 \sqrt{14}}{32} = \frac{\sqrt{14}}{4}.
\end{aligned}$$

根据公式

$$x = a \cos^{\alpha} \varphi, y = b \sin^{\alpha} \varphi (r \geq 0)$$

引入普遍的极坐标(其中 a, b 和 α 为以适当的方法选出的常数, 且 $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \alpha a b r \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi$), 以求由下列曲线所界的面积(假定参数是正的):

$$3991. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k}.$$

解 不失一般性, 设 $k > 0, h > 0$. 令

$$x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi,$$

则方程化为

$$r = \frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi.$$

由于 $r \geq 0$, 故有

$$\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi \geq 0,$$

因此, 首先必须 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$. 同时, 应有 $\cos\varphi \geq 0$ 且

$$\operatorname{tg}\varphi \geq -\frac{ak}{bh} \text{ 或者 } \cos\varphi < 0 \text{ 且 } \operatorname{tg}\varphi \leq -\frac{ak}{bh}.$$

从而, 极角 φ 应满足不等式

$$-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh} \leq \varphi \leq \pi - \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}.$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_S abrd\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi - \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} \left(\frac{a}{h}\cos\varphi + \frac{b}{k}\sin\varphi \right)^2 d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \int_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi - \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} \sin^2(\varphi + \alpha_0) d\varphi, \end{aligned}$$

其中 $\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}$. 从而, 我们有

$$\begin{aligned} S &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \left[\frac{\varphi + \alpha_0}{2} - \frac{1}{4}\sin 2(\varphi + \alpha_0) \right] \Big|_{-\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}}^{\pi - \operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{\pi ab}{4} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

3992. $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2}; x = 0, y = 0.$

解 令

$$x = a \cos \varphi, y = b r \sin \varphi,$$

则方程化为

$$r = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}.$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_S ab r dr d\theta = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^4 \sin^4 \varphi + 2\left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi. \end{aligned}$$

根据 И. М. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著的《函数表与积分表》2. 125、2. 126 知:

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} &= \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left\{ \frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right\} + C. \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4 \cos^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^4 \left\{ \frac{\operatorname{tg} \varphi}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} + \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \end{aligned}$$

$$= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h} \right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{a}{h} \right)^4;$$

又

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^4 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} &= \int \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \int \frac{\operatorname{tg}^4 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^3 \varphi} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} - \frac{2}{3} \left\{ \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{2} + \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} + C, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{b}{k} \right)^4 \sin^4 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k} \right)^4 \left\{ \frac{\operatorname{tg}^5 \varphi}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} - \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{9} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2}{\operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg} \varphi + 1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2\operatorname{tg} \varphi - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}-0} \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k} \right)^4 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k} \right)^4; \end{aligned}$$

此外, 还有

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= -\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} + C, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}{(\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)^2} d\varphi \\ &= ab \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg}^3 \varphi)} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{ab}{3} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2. \end{aligned}$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{a}{h}\right)^4 + \frac{2\pi ab}{9\sqrt{3}} \left(\frac{b}{k}\right)^4 + \frac{ab}{3} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left(\frac{b}{k}\right)^2 \\ &= \frac{ab}{3} \left[\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^4}{h^4} + \frac{b^4}{k^4}\right) + \frac{a^2 b^2}{h^2 k^2} \right]. \end{aligned}$$

3993. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^4 = \frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} (x > 0, y > 0).$

解 方法一

令

$$x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi,$$

则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}).$$

于是, 曲线所界的面积为

$$S = \iint_S ab r dr d\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi + \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi.$$

注意到

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi &= \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\ &= -\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi &= \int \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&= \int \frac{(\operatorname{tg} \varphi - 1)(\operatorname{tg} \varphi + 1) + 1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&= \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) - 2 \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&\quad + \int \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^4} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&= -\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} + C,
\end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left[-\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&\quad + \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k} \right)^2 \left[-\frac{1}{1 + \operatorname{tg} \varphi} + \frac{1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} \right] \Big|_c^{\frac{\pi}{2}-0} \\
&= \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).
\end{aligned}$$

方法二

令

$$x = hr \cos \varphi, \quad y = kr \sin \varphi,$$

则方程化为

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{1}{\left(\frac{h}{a} \cos \varphi + \frac{k}{b} \sin \varphi \right)^4} \\
&= \left[\frac{a^2 b^2}{(hb)^2 + (ka)^2} \right]^2 \frac{1}{\sin^4(\varphi + \alpha)} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}),
\end{aligned}$$

其中 $\operatorname{tga} = \frac{hb}{ka}$. 于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_S hkrdrd\varphi = \frac{hka^4b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \\
&\cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^4(\varphi + \alpha)} \\
&= \frac{hka^4b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \left[-\frac{1}{6} \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin^3(\varphi + \alpha)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3} \frac{\cos(\varphi + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha)} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{hka^4b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \left[\frac{1}{6} \left(\frac{\sin\alpha}{\cos^3\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) \right] \\
&= \frac{hka^4b^4}{[(hb)^2 + (ka)^2]^2} \cdot \frac{1}{6} \frac{[(hb)^2 + (ka)^2]^{3**})}{(hbka)^3} \\
&= \frac{ab}{6} \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right).
\end{aligned}$$

*) 参看 2012 题的结果.

**) 由 $\operatorname{tg}\alpha = \frac{hb}{ka}$ 知:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{ka}{hb}, \quad \sin\alpha = \frac{hb}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{ka}{\sqrt{(hb)^2 + (ka)^2}}.$$

$$3994. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2} \quad (x > 0, y > 0).$$

解 令

$$x = a \cos\varphi, \quad y = b \sin\varphi,$$

则方程化为

$$r^2 = \frac{\left(\frac{a}{h} \right)^2 \cos^2\varphi - \left(\frac{b}{k} \right)^2 \sin^2\varphi}{(\cos\varphi + \sin\varphi)^4}.$$

由于

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2 \cos^2 \varphi - \left(\frac{b}{k}\right)^2 \sin^2 \varphi \geq 0,$$

$$\left(\frac{ak}{bh}\right)^2 \geq \operatorname{tg}^2 \varphi,$$

注意到 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, 可知极角的变化区间为

$$0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}.$$

于是, 注意利用上题中两个不定积分, 便得到曲线所界的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_S abrdrd\varphi = \frac{ab}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} r^2 d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \frac{\cos^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi \\ &\quad - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \frac{\sin^2 \varphi}{(\cos \varphi + \sin \varphi)^4} d\varphi \\ &= \frac{ab}{2} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[-\frac{1}{3(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \\ &\quad - \frac{ab}{2} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[-\frac{3\operatorname{tg}^2 \varphi + 3\operatorname{tg} \varphi + 1}{(1 + \operatorname{tg} \varphi)^3} \right] \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{ak}{bh}} \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \left[\frac{-1}{\left(1 + \frac{ak}{bh}\right)^3} + 1 \right] \\ &\quad + \frac{ab}{6} \left(\frac{b}{k}\right)^2 \left[\frac{3\left(\frac{ak}{bh}\right)^2 + 3\left(\frac{ak}{bh}\right) + 1}{\left(1 + \frac{ak}{bh}\right)^3} - 1 \right] \\ &= \frac{ab}{6} \left(\frac{a}{h}\right)^2 \frac{(ak)^3 + 3(ak)^2bh + 3ak(bh)^2}{(ak + bh)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ab}{5} \left(\frac{b}{k} \right)^2 \frac{-(ak)^3}{(ak + bh)^3} \\
& = \frac{a^4bk}{6h^2(ak + bh)^3} (a^2k^2 + 3akbh + 2b^2h^2) \\
& = \frac{a^4bk(ak + 2bh)}{6h^2(ak + bh)^2}.
\end{aligned}$$

3995. $\sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \sqrt[4]{\frac{y}{b}} = 1; x = 0, y = 0.$

解 令

$$x = arcos^8\varphi, y = brsin^8\varphi,$$

则方程化为

$$r = 1 \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

于是, 曲线所界的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_S 8abrcos^7\varphi sin^7\varphi d\varphi \\
&= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^7\varphi sin^7\varphi d\varphi \\
&= 4ab \int_0^1 u^7(1-u^2)^3 du \\
&= 4ab \int_0^1 (u^7 - 3u^9 + 3u^{11} - u^{15}) du \\
&= 4ab \left(\frac{1}{8} - \frac{3}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{14} \right) \\
&= \frac{ab}{70}.
\end{aligned}$$

进行适当的变量代换, 求由下列曲线所界的面积:

3996. $x + y = a, x + y = b, y = ax, y = \beta x$
 $(0 < a < b; 0 < \alpha < \beta).$

解 作变换: $x + y = u, \frac{y}{x} = v$, 则 $a \leq u \leq b, \alpha \leq v \leq$

β , 且有

$$|I| = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \int_a^{\beta} u du \int_a^{\beta} \frac{dv}{(1+v)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\beta - \alpha)(b^2 - a^2)}{(1 + \alpha)(1 + \beta)}.$$

3997. $xy = a^2, xy = 2a^2, y = x, y = 2x (x > 0; y > 0)$.

解 作变换: $xy = u, \frac{y}{x} = v$, 则 $a^2 \leq u \leq 2a^2, 1 \leq v \leq 2$, 且有

$$|I| = \frac{1}{2v}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{2} \int_{a^2}^{2a^2} du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \frac{1}{2} a^2 \ln 2.$$

3998. $y^2 = 2px, y^2 = 2qx, x^2 = 2ry, x^2 = 2sy (0 < p < q; 0 < r < s)$.

解 作变换: $\frac{y^2}{x} = u, \frac{x^2}{y} = v$, 则 $2p \leq u \leq 2q,$
 $2r \leq v \leq 2s$, 且有

$$|I| = \frac{1}{3}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{3} \int_{2p}^{2q} du \int_{2r}^{2s} dv = \frac{4}{3} (q - p)(s - r).$$

3999. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1, \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 2, \frac{x}{a} = \frac{y}{b}, \frac{4x}{a} = \frac{y}{b}$
($a > 0, b > 0$).

解 作变换: $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = u, \frac{x}{y} = v$, 即

$$x = \frac{u^2 v}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right]^2}, \quad y = \frac{u^2}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right]^2}.$$

则 $1 \leq u \leq 2$, $\frac{a}{4b} \leq v \leq \frac{a}{b}$, 且有

$$|I| = \frac{2u^3}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right]^4}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 2u^3 du \int_{\frac{a}{4b}}^{\frac{a}{b}} \frac{dv}{\left[\sqrt{\frac{v}{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}\right]^4} \\ &= \frac{15}{2} \cdot \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \frac{2at dt}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^4} \\ &= 15a \int_{\frac{1}{2\sqrt{b}}}^{\frac{1}{\sqrt{b}}} \left[\frac{1}{\left(t + \frac{1}{\sqrt{b}}\right)^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{1}{b}} + t\right]^4} \right] dt \\ &= 15a \cdot \left(\frac{7b}{72} - \frac{37b}{648} \right) = \frac{65ab}{108}. \end{aligned}$$

*) 作代换 $v = at^2$.

4000. $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$, 其中 λ 取下列各值: $\frac{1}{3}c^2, \frac{2}{3}c^2, \frac{4}{3}c^2,$
 $\frac{5}{3}c^2 (x > 0, y > 0)$.

解 方程 $\frac{x^2}{\lambda} + \frac{y^2}{\lambda - c^2} = 1$ 可变为

$$\lambda^2 - (x^2 + y^2 + c^2)\lambda + c^2x^2 = 0.$$

将 λ 作为未知量解方程, 不妨记方程的两个解为 λ 及 μ , 则

$$\lambda = \frac{x^2 + y^2 + c^2 + \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}}{2},$$

$$\mu = \frac{x^2 + y^2 + c^2 - \sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}}{2},$$

今设按上式作变量代换, 将 (x, y) 变为 (λ, μ) . 易知

$$\begin{aligned} \left| \frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)} \right| &= \frac{4c^2xy}{\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - 4c^2x^2}} \\ &= \frac{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}{\lambda - \mu}, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{D(x, y)}{D(\lambda, \mu)} &= \frac{1}{\frac{D(\lambda, \mu)}{D(x, y)}} \\ &= \frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}}. \end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$S = \iint_{\sigma} dx dy = \iint \frac{\lambda - \mu}{4\sqrt{\lambda\mu(c^2 - \mu)(\lambda - c^2)}} d\lambda d\mu$$

$$\frac{4c^2}{3} \leq \lambda \leq \frac{5c^2}{3}$$

$$\frac{c^2}{3} \leq \mu \leq \frac{2c^2}{3}$$

$$= \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{u - v}{\sqrt{uv(1 - v)(u - 1)}} du dv$$

$$= \frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u} du}{\sqrt{u - 1}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1 - v)}}$$

$$-\frac{c^2}{4} \int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v} dv}{\sqrt{1-v}}$$

由于

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u-1}} du = \frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{4}{3}}^{\frac{5}{3}} \frac{du}{\sqrt{u(u-1)}} = 2 \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dv}{\sqrt{v(1-v)}} = 2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}},$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} dv = \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}},$$

故最后得

$$\begin{aligned} S &= \frac{c^2}{4} \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{3} - \frac{2}{3} + \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \cdot \left. \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \\ &= \frac{c^2}{4} \left[\left(2 \lg \frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right) \left(\arcsin \sqrt{\frac{2}{3}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \arcsin \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \right] \\ &= \frac{c^2}{6} (\sqrt{10} - 2) \arcsin \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

4001. 求由椭圆

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = 1$$

(其中 $\delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$) 所界的面积,

解 作变换: $a_1x + b_1y + c_1 = u, a_2x + b_2y + c_2 = v,$

则椭圆所围成的域变为 $u_2 + v_2 \leq 1$, 且有

$$|I| = \frac{1}{|\delta|}.$$

于是, 所求的面积为

$$S = \frac{1}{|\delta|} \iint_{u^2+v^2 \leq 1} dudv = \frac{\pi}{|\delta|}.$$

4002. 求由椭圆

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 u} - \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 u} = c^2 (u = u_1, u_2)$$

和双曲线

$$\frac{x^2}{\cos^2 v} - \frac{y^2}{\sin^2 v} = c^2 (v = v_1, v_2)$$

$$(0 < u_1 < u_2; 0 < v_1 < v_2; x > 0, y > 0)$$

所界的面积.

解 作变换: $x = c \operatorname{ch} u \cos v, y = c \operatorname{sh} u \sin v$,
则有

$$|I| = |c^2 \operatorname{ch}^2 u - c^2 \cos^2 v|.$$

因为 $\operatorname{ch}^2 u \geq 1 \geq \cos^2 v$, 故所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= c^2 \int_{u_1}^{u_2} \int_{v_1}^{v_2} (\operatorname{ch}^2 u - \cos^2 v) dudv \\ &= c^2 [(v_2 - v_1) \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \operatorname{ch}^2 u}{2} du - (u_2 - u_1) \\ &\quad \cdot \int_{v_1}^{v_2} \cos^2 v dv] \\ &= \frac{c^2}{4} [(v_2 - v_1)(\operatorname{sh} 2u_2 - \operatorname{sh} 2u_1) - (u_2 - u_1) \\ &\quad \cdot (\sin 2v_2 - \sin 2v_1)]. \end{aligned}$$

4003. 求用平面 $x + y + z = b$ 与曲面 $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = a^2$ 相截所得截断面之面积.

解 为简化平面和曲面的方程,作变量代换:

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{\sqrt{2}}z,$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{6}}x - \frac{2}{\sqrt{6}}y + \frac{1}{\sqrt{6}}z,$$

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}y + \frac{1}{\sqrt{3}}z,$$

这是一个正交变换,故 $Ox'y'z'$ 成为一新的直角坐标系.在新的坐标系下,平面方程为

$$z' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z) = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由于

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$y = -\frac{\sqrt{6}}{3}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

$$z = -\frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{3}}z',$$

故有

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz &= \frac{1}{2}[(x - y)^2 \\ &\quad + (y - z)^2 + (z - x)^2] \\ &= \frac{3}{2}(x'^2 + y'^2).\end{aligned}$$

从而,曲面方程变为

$$x'^2 + y'^2 = \frac{2}{3}a^2.$$

于是,所求的面积为

$$S = \iint_{x'^2 + y'^2 \leq \frac{2}{3}a^2} dx' dy' = \frac{2}{3}\pi a^2.$$

4004. 求用平面 $z = 1 - 2(x + y)$ 与曲面 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ 相截所得截断面之面积.

解 平面被曲面所截部分记为 S , 它在 Oxy 平面上的投影记为 D . 由于平面 $z = 1 - 2(x + y)$ 的法线之方向余弦为 $\cos\alpha = \cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = \frac{1}{3}$, 故 $D = S\cos\gamma = \frac{1}{3}S$, 从而 $S = 3D$, 显然 D 为 Oxy 平面上由曲线 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{1 - 2(x + y)} = 0$ (也即 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$) 所界的区域. 作变量代换

$$x = u + v + \frac{1}{7}, \quad y = u - v + \frac{1}{7}.$$

于是, $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -2$, 且曲线 $2x^2 + 2y^2 + 3xy - x - y = 0$ 变为 $7u^2 + v^2 - \frac{1}{7} = 0$, 这是一个椭圆(在 uv 平面上). 从而, 即得

$$\begin{aligned} D &= \iint_D dx dy = 2 \iint_{49u^2 + 7v^2 \leq 1} du dv \\ &= 2 \cdot \pi \left(\frac{1}{7} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \right) = \frac{2\pi}{7\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

由此, 最后得

$$S = 3D = \frac{6\pi}{7\sqrt{7}}.$$

§ 3. 体积的计算法

设柱体上顶是连续的曲面 $z = f(x, y)$, 下底是平面 $z = 0$, 侧面为从平面 Oxy 中的可求面积的区域 Ω (图 8.38) 竖起的垂直柱面所界定.

柱体的体积等于

$$V = \iint_{\Omega} f(x, y) dx dy,$$

4005. 试绘出一物体, 其体积等于积分

$$V = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy.$$

解 积分域为三角形

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x.$$

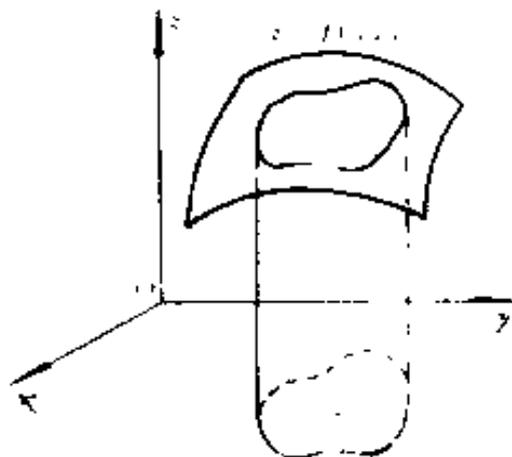


图 8.38

柱体上顶为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 物体的形状如图 8.39 所示.

4006. 描出下列二重积分所表示的体积:

$$(a) \iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} (x+y) dx dy;$$

- (6) $\iint_{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1} \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}} dx dy;$
- (B) $\iint_{|x| + |y| \leq 1} (x^2 - y^2) dx dy;$
- (Г) $\iint_{x^2 + y^2 \leq 4} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy;$
- (Д) $\iint_{\substack{1 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x}} \sqrt{xy} dx dy;$
- (e) $\iint_{x^2 + y^2 \leq 1} \sin \pi \sqrt{x^2 + y^2} dx dy.$

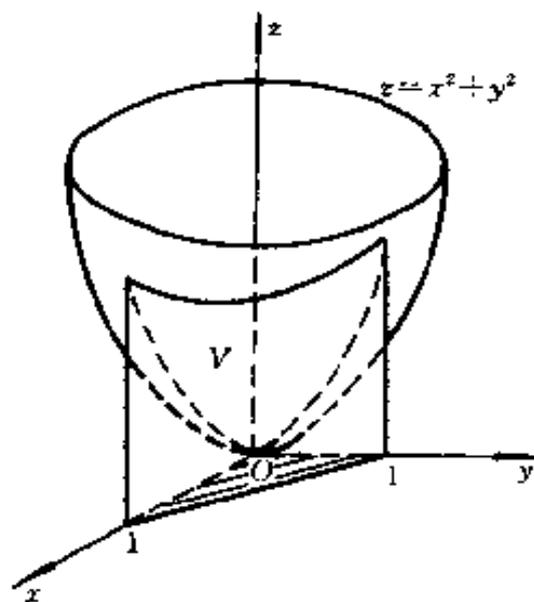


图 8.39

解 (a) 积分域为三角形

$$0 \leq x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0.$$

柱体的上顶为平面 $z = x + y$ (图 8.40).

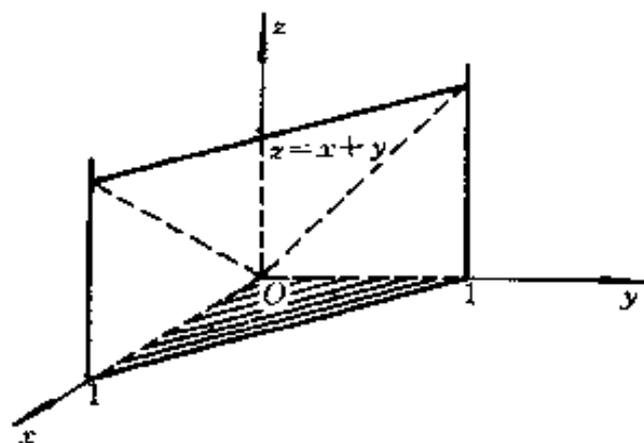


图 8.40

(6) 积分域为椭圆

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1,$$

即立体的底面, 顶面为椭球面 $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}$ (图 8.41).

(B) 积分域为由直线

$x + y = 1, x + y = -1, x - y = 1, y - x = 1$ 围成的正方形, 柱体的顶面为旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$. 图 8.42 中仅画了第一卦限部分的体积.

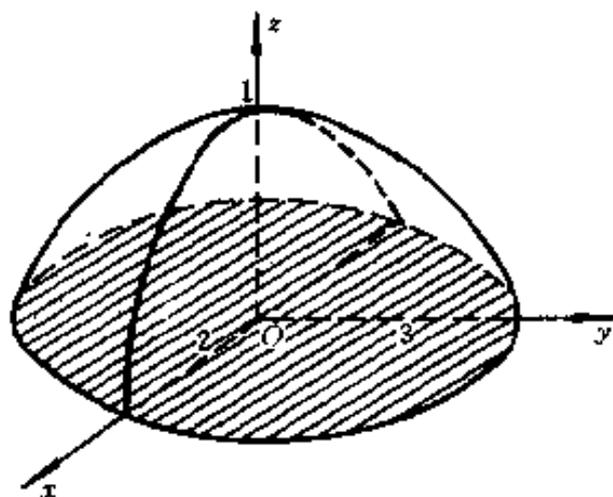


图 8.41

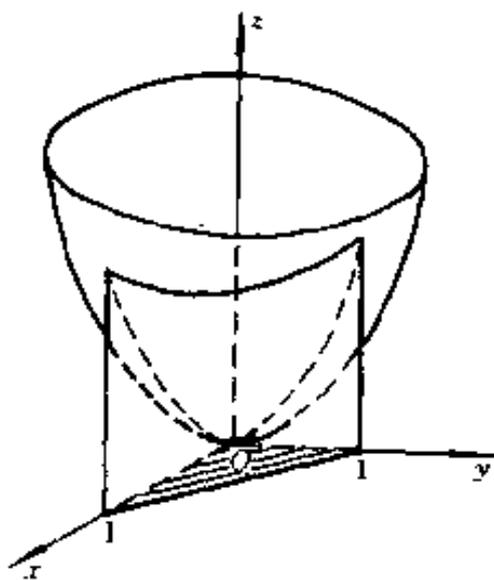


图 8.42

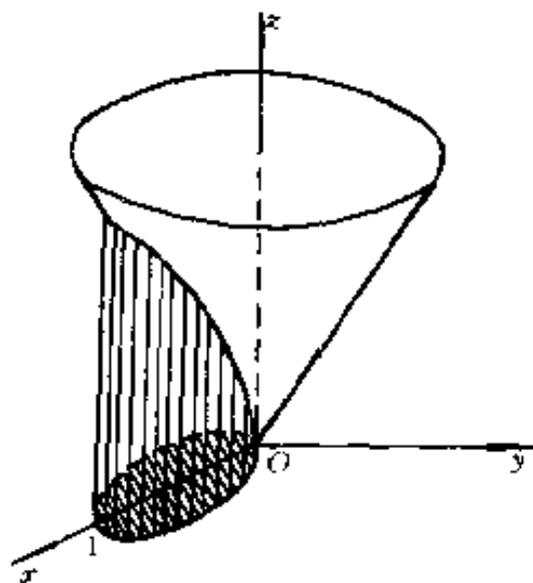


图 8.43

(r) 积分域为圆

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}.$$

柱体的顶面为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (图 8.43).

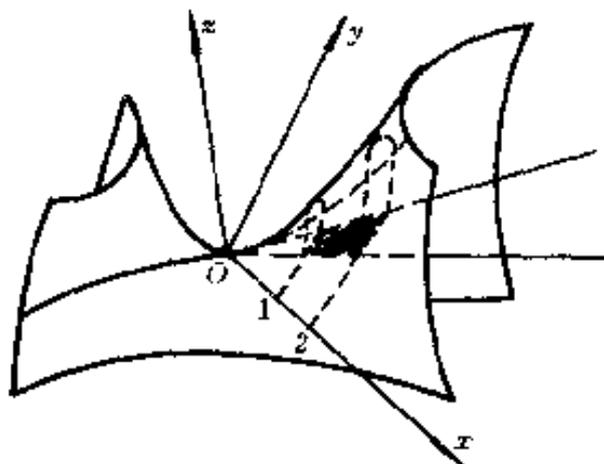


图 8.44

(π) 积分域为梯形 $1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq 2x$. 柱体的顶面为双曲抛物面 $z = \sqrt{xy}$ (图 8.44).

(e) 积分域为圆

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

即立体的底面, 顶面是由正弦曲线 $z = \sin \pi x$ 绕 Oz 轴旋转一周而得的旋转曲面 (图 8.45).

求由下列曲面所界的体积:

4007. $z = 1 + x + y, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0.$

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1+x+y) dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{3}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

4008. $x + y + z = a, x^2 + y^2 = R^2, x = 0, y = 0, z = 0 (a \geq R\sqrt{2}).$

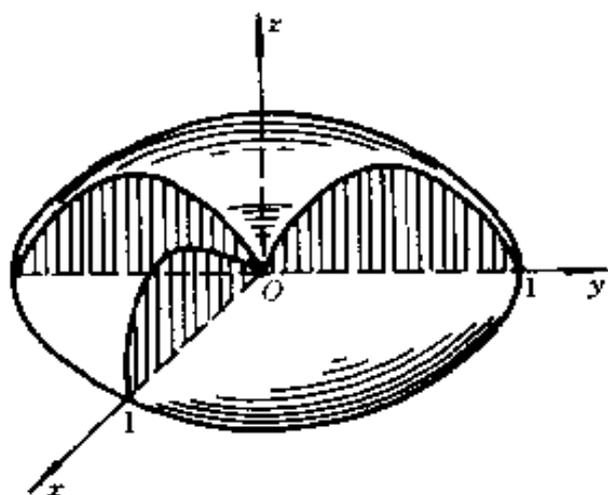


图 8.45

$$\begin{aligned} \text{解 } V &= \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} (a-x-y) dy \\ &= \int_0^R \left[(a-x) \sqrt{R^2-x^2} - \frac{R^2-x^2}{2} \right] dx \\ &= \int_0^R a \sqrt{R^2-x^2} dx - \int_0^R \left(x \sqrt{R^2-x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{R^2-x^2}{2} \right) dx = \frac{\pi a R^2}{4} - \frac{2R^3}{3}. \end{aligned}$$

4009. $z = x^2 + y^2, y = x^2, y = 1, z = 0.$

$$\text{解 } V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (x^2 + y^2) dy = \frac{88}{105}.$$

4010. $z = \cos x \cos y, z = 0, |x + y| \leq \frac{\pi}{2}, |x - y| \leq \frac{\pi}{2}.$

解 因函数 $z = \cos x \cdot \cos y$ 的图形关于 Oyz 平面对称, 而积分域 (图 8.46). 关于 Oy 轴对称, 故所求的体积为

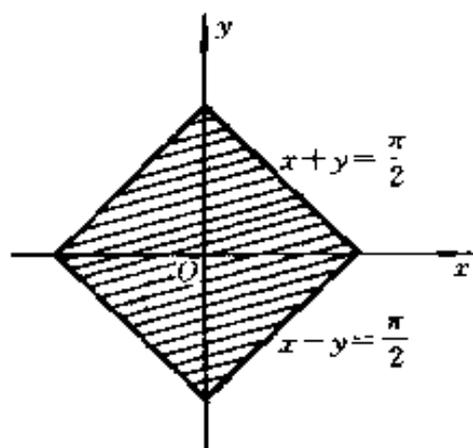


图 8.46

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_x^{\frac{\pi}{2}-x} \cos x \\ &\quad \cdot \cos y dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx \\ &= 4 \left(\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi. \end{aligned}$$

4011. $z = \sin \frac{\pi y}{2x}, z = 0, y = x, y = 0, x = \pi.$

解 $V = \int_0^{\pi} dx \int_0^x \sin \frac{\pi y}{2x} dy = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi.$

4012. $z = xy, x + y + z = 1, z = 0.$

解 体积 V 由两部分组成:

$$\begin{aligned} V_1: & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \\ & \leq \frac{1-x}{1+x}, z = xy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2: & 0 \leq x \leq 1, \frac{1-x}{1+x} \leq \\ & y \leq 1-x, z = 1-x-y. \end{aligned}$$

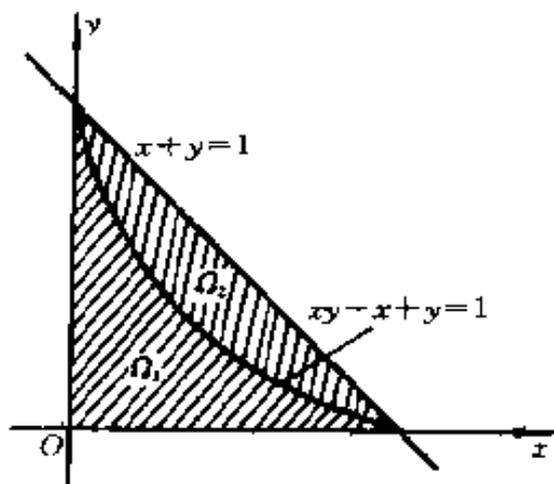


图 8.47

它们在 Oxy 平面上的射影域 Ω_1 及 Ω_2 如图 8.47 所示. 于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= V_1 + V_2 \\
 &= \int_0^1 x dx \int_0^{\frac{1-x}{1+x}} y dy \\
 &+ \int_0^1 dx \int_{\frac{1-x}{1+x}}^{1-x} (1-x-y) dy \\
 &= \left(-\frac{11}{4} + 4\ln 2 \right) \\
 &+ \left(\frac{25}{6} - 6\ln 2 \right) \\
 &= \frac{17}{12} - 2\ln 2.
 \end{aligned}$$

变换成极坐标, 以求由下列曲面所界的体积:

4013. $z^2 = xy, x^2 + y^2 = a^2.$

解 因为 $z = \sqrt{xy}$, 故所求的体积为

$$\begin{aligned}
 V &= 4 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x>0, y>0}} \sqrt{xy} dx dy \\
 &= 4 \int_0^a dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\varphi \sin\varphi} \cdot r^2 d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{2}}\varphi \sin^{\frac{1}{2}}\varphi d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)^{*)} = \frac{2}{3} a^3 \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
 &= \frac{2}{3} a^3 \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{4}{3} a^3 \frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)}{\sqrt{\pi}}.
 \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

$$4014. z = x + y, (x^2 + y^2)^2 = 2xy, z = 0 (x > 0, y > 0).$$

解 令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 则方程

$$(x^2 + y^2)^2 = 2xy \text{ 及 } z = x + y$$

变为

$$r^2 = 2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \text{ 及 } z = r(\cos\varphi + \sin\varphi).$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} (x + y) dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\sin 2\varphi}} r^2 (\cos\varphi + \sin\varphi) dr \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{\frac{5}{2}}\varphi \cos^{\frac{3}{2}}\varphi + \cos^{\frac{5}{2}}\varphi \sin^{\frac{3}{2}}\varphi) d\varphi \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot B\left(\frac{5}{4}, \frac{7}{4}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}{\Gamma(3)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2!} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

$$4015. z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x, z = 0.$$

解 令 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 则方程

$$x^2 + y^2 = x, x^2 + y^2 = 2x \text{ 及 } z = x^2 + y^2$$

变为

$$r = \cos\varphi, r = 2\cos\varphi \text{ 及 } z = r^2.$$

于是,所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} r^3 dr \\ &= \frac{2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (16\cos^4\varphi - \cos^4\varphi) d\varphi \\ &= \frac{15}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{15}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{45}{32}\pi. \end{aligned}$$

4016. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \geq a|x| (a > 0).$

解 只须计算由下列曲面所围成的体积:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 \leq a|x|.$$

若引用极坐标,则

$$r^2 + z^2 = a^2, r^2 \leq a|r\cos\varphi|,$$

其体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= 8 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a|x| \\ x \geq 0, y \geq 0}} \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} dx dy \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\cos\varphi} r \cdot \sqrt{a^2 - r^2} dr \\ &= -\frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{a\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{8a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^3\varphi) d\varphi \\ &= \frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9}. \end{aligned}$$

于是,所求的体积为

$$V = \frac{4\pi a^3}{5} - \left(\frac{4\pi a^3}{3} - \frac{16a^3}{9} \right) = \frac{16a^3}{9}.$$

4017. $x^2 + y^2 - az = 0, (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), z = 0 (a > 0)$.

解 若引用极坐标, 则有

$$z = \frac{r^2}{a}, r^2 = a^2 \cos 2\varphi (a > 0).$$

于是, 利用对称性知, 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \frac{1}{a} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \frac{r^2}{a} \cdot r dr \\ &= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^3}{8}. \end{aligned}$$

4018. $z = e^{-(x^2 + y^2)}, z = 0, x^2 + y^2 = R^2$.

解 利用对称性, 得所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} e^{-(x^2 + y^2)} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-R^2}). \end{aligned}$$

4019. $z = c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a}, x^2 + y^2 = a^2, y = x \operatorname{tg} \alpha, y = x \operatorname{tg} \beta (a > 0, c > 0, 0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi)$.

解 所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D c \cos \frac{\pi \sqrt{x^2 + y^2}}{2a} dx dy \\ &= \int_\alpha^\beta d\varphi \int_0^a c r \cos \frac{\pi r}{2a} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c(\beta - \alpha) \left[\frac{2ar}{\pi} \sin \frac{\pi r}{2a} + \frac{4a^2}{\pi^2} \cos \frac{\pi r}{2a} \right] \Big|_0^a \\
&= 2a^2 c(\beta - \alpha) \left\{ \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \right\} \\
&= \frac{2a^2 c(\beta - \alpha)(\pi - 2)}{\pi^2}.
\end{aligned}$$

4020. $z = x^2 + y^2, z = x + y$.

解 立体的射影域的围线为 $x^2 + y^2 = x + y$ 或

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. 若引用代换 $x = \frac{1}{2} + r\cos\varphi, y = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$, 则有

$$z = r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi), z = 1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$(0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} [(x + y) - (x^2 + y^2)] dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left\{ [1 + r(\cos\varphi + \sin\varphi)] \right. \\
&\quad \left. - \left[r^2 + \frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) \right] \right\} r dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(\frac{1}{2} - r^2 \right) r dr = \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

求由下列曲面所界的体积(假定参数是正的):

4021. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} (z > 0)$.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$= \frac{1}{2}$. 令 $x = a \cos \varphi, y = b r \sin \varphi$, 则方程化为

$$z = c \sqrt{1 - r^2} \text{ 及 } z = cr \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left[c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} - c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} \right] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} abr (c \sqrt{1 - r^2} - cr) dr \\ &= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (r \sqrt{1 - r^2} - r^2) dr \\ &= -\frac{1}{3} abc \int_0^{2\pi} \left[r^3 - (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \pi abc (2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4022. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

解 若令 $x = a \cos \varphi, y = b r \sin \varphi$, 则曲面方程化为

$$z = \pm c \sqrt{1 + r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} 2c \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2abc r \sqrt{1 + r^2} dr \\ &= 2abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1 + r^2} dr \\ &= \frac{4\pi}{3} abc (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

$$4023. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, z = 0.$$

解 立体在 Oxy 平面上的射影域的界线为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}$, 即 $\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$. 若令

$\frac{x}{a} = \frac{1}{2} + r\cos\varphi, \frac{y}{b} = \frac{1}{2} + r\sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c \left[\frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \right] \\ \left(0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$V = \iint_{\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2}} c \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy \\ = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} r \left[\frac{1}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi) + r^2 \right] dr \\ = abc \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{16} \right] d\varphi \\ = abc \cdot \frac{3 \cdot 2\pi}{16} = \frac{3}{8}\pi abc.$$

$$4024. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^2 + \frac{z}{c} = 1, z = 0.$$

解 若令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi$, 则曲面方程化为

$$z = c(1 - r^4) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$V = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} c \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \right] dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abc r(1-r^2) dr = \frac{2}{3} \pi abc.$$

4025. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \frac{z^2}{c^2} = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

解 下面计算位于第一卦限部分的体积.

令 $x = a \cos^2 \varphi, y = b r \sin^2 \varphi$, 则方程化为

$$z = c \sqrt{1-r^2} \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1).$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2} dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc \sin 2\varphi \cdot \sqrt{1-r^2} r dr \\ &= abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \right) \left(\int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr \right) \\ &= \frac{abc}{3}. \end{aligned}$$

4026. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$

解 令

$$x = a \cos \varphi, y = b r \sin \varphi,$$

则方程化为

$$z = \pm c \sqrt{1-r^2},$$

$$r^2 = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$$

$$= \cos 2\varphi \quad (\text{因 } r^2 = \cos 2\varphi \geq 0,$$

$$\text{故 } -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}).$$

于是, 利用对称性知, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned}
V &= 8c \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy \\
&= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{1 - r^2} r dr d\varphi \\
&= 8abc \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3} (1 - \sqrt{8} \sin^3 \varphi) d\varphi \\
&= \frac{8abc}{3} \left(\varphi + \sqrt{8} \cos \varphi - \frac{\sqrt{8}}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{8abc}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{5}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \right) \\
&= \frac{2abc}{9} (3\pi + 20 - 16\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

4027. $z^2 = xy, x + y = a, x + y = b (0 < a < b)$.

解 由于 $z = \pm \sqrt{xy}$, 又所界立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由直线 $x + y = a, x + y = b, x = 0$ 及 $y = 0$ 围成. 于是, 利用对称性知, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned}
V &= 2 \iint_{\Omega} \sqrt{xy} dx dy \\
&= 2 \left(\int_0^a dx \int_{a-x}^{b-x} \sqrt{xy} dy + \int_a^b dx \int_0^{b-x} \sqrt{xy} dy \right) \\
&= \frac{4}{3} \int_0^a [\sqrt{x(b-x)^3} - \sqrt{x(a-x)^3}] dx \\
&\quad + \frac{4}{3} \int_a^b \sqrt{x(b-x)^3} dx \\
&= \frac{4}{3} \int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx \\
&\quad - \frac{4}{3} \int_0^a (a-x) \sqrt{x(a-x)} dx.
\end{aligned}$$

令 $x = b \sin^2 t$, 可得

$$\begin{aligned}
& \int_0^b (b-x) \sqrt{x(b-x)} dx \\
&= 2b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t \sin^2 t dt \\
&= 2b^3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t dt \right) \\
&= 2b^3 \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{1}{16} \pi b^3;
\end{aligned}$$

同理,有

$$\int_0^a (a-x) \sqrt{x(a-x)} dx = \frac{1}{16} \pi a^3.$$

于是,所求的体积为

$$V = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi b^3}{16} - \frac{\pi a^3}{16} \right) = \frac{\pi}{12} (b^3 - a^3).$$

4028. $z = x^2 + y^2, xy = a^2, xy = 2a^2, y = \frac{x}{2}, y = 2x, z = 0.$

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由曲线 $xy = a^2, xy = 2a^2$ 和直线 $y = \frac{x}{2}, y = 2x$ 围成. 利用对称性,曲面所界体积可表示为

$$V = 2 \iint_{\Omega} z dx dy = 2 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy.$$

作变量代换

$$xy = ua^2, y = vx,$$

则积分域 Ω 变为长方形域

$$1 \leq u \leq 2, \frac{1}{2} \leq v \leq 2,$$

且 $|I| = \frac{a^2}{2v}, z = x^2 + y^2 = a^2 \left(\frac{u}{v} + uv \right).$

于是,所求的体积为

$$\begin{aligned}
V &= 2 \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy \\
&= 2 \iint_{\substack{1 \leq u \leq 2 \\ \frac{1}{2} \leq v \leq 2}} a^2 \left(\frac{u}{v} + uv \right) \frac{a^2}{2v} du dv \\
&= a^4 \int_1^2 u du \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{v^2} \right) dv = \frac{9}{2} a^4.
\end{aligned}$$

4029. $z = xy, x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x, y^2 = 2x, z = 0$.

解 曲面所界立体 V 在 Oxy 平面上的射影域 Ω 由曲线 $x^2 = y, x^2 = 2y, y^2 = x$ 及 $y^2 = 2x$ 围成.

我们有

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} xy dx dy.$$

作变量代换

$$x = uy^2, y = vx^2,$$

或

$$x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}, y = u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}},$$

则积分域 Ω 变为正方形域

$$\frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq 1,$$

且 $|I| = \frac{1}{3} u^{-2} v^{-2}$. 于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\Omega} xy dx dy = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} v^{-3} du dv \\
&= \frac{1}{3} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 u^{-3} du \right)^2 \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

4030. $z = c \sin \frac{\pi xy}{a^2}, z = 0, xy = a^2, y = ax, y = \beta x (0 < \alpha < \beta; x > 0)$.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由曲线 $xy = a^2$ 和直线 $y = ax, y = \beta x (x > 0)$ 围成. 于是, 曲面所界的体积为

$$V = \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy.$$

作变量代换 $x = a \operatorname{arctg} \varphi, y = a \operatorname{arctg} \varphi$, 则 $|I| = a^2 r$. 于是,

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = c \iint_{\Omega} \sin \frac{\pi xy}{a^2} dx dy \\ &= a^2 c \int_{\operatorname{arctg} \alpha}^{\operatorname{arctg} \beta} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{-\ln \varphi \cos \varphi}}} \sin(\pi r^2 \sin \varphi \cos \varphi) r dr d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi} \int_{\operatorname{arctg} \alpha}^{\operatorname{arctg} \beta} \frac{1}{\sin \varphi \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{\pi} \ln \operatorname{tg} \varphi \Big|_{\operatorname{arctg} \alpha}^{\operatorname{arctg} \beta} = \frac{a^2 c}{\pi} \ln \frac{\beta}{\alpha}. \end{aligned}$$

4031. $z = x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}, z = 0, x + y = 1, x = 0, y = 0$.

解 曲面所界的立体在 Oxy 平面上的投影域 Ω 由直线 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 围成. 于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_{\Omega} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}}) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[x^{\frac{3}{2}}(1-x) + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}} \right] dx \\ &= \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{35} (1-x)^{\frac{7}{2}} \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{4}{35} = \frac{8}{35}.$$

4032. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z}{c} = 1, \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1, z = 0.$

解 令

$$x = ar\cos^3\varphi, y = br\sin^3\varphi,$$

则方程化为

$$z = c[1 - r^2(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)],$$

$$r = 1 \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

于是,利用对称性知,曲面所界的体积为

$$V = 4 \iint_{\Omega} z dx dy$$

$$= 12abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 [1 - r^2(\cos^6\varphi + \sin^6\varphi)] \\ \cdot r \cos^2\varphi \sin^2\varphi dr d\varphi$$

$$= 12abc \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^6\varphi + \sin^6\varphi) \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \right]$$

$$= 6abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi \cos^2\varphi \sin^2\varphi d\varphi \right)$$

$$= 6abc \left[\frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{10} \cdot \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{3\pi abc}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{105}{1920} \right) = \frac{75}{256} \pi abc.$$

4033. $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} = a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} (y \geq 0).$

解 令

$$x = r \cos\varphi, y = r \sin\varphi,$$

则方程化为

$$\begin{aligned} z &= c\varphi, \\ r &= a\varphi \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

于是, 曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\Omega} z dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{a\varphi} c\varphi r dr d\varphi \\ &= \frac{a^2 c}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi^2 d\varphi = \frac{a^2 c}{6} \varphi^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^3 a^2 c}{128}. \end{aligned}$$

4034. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (n > 0).$

解 曲面方程可表示为

$$z = c \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)}.$$

若令

$$x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, y = b r \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right),$$

则曲面所界的体积为

$$\begin{aligned} V &= c \iint_{\Omega} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} \right)} dx dy \\ &= \frac{2abc}{n} \int_0^1 \sqrt[n]{1 - r^n} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}} \varphi \sin^{\frac{2-n}{n}} \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

若令 $r^n = t$ 可得

$$\int_0^1 \sqrt[n]{1 - r^n} r dr = \int_0^1 (1 - t)^{\frac{1}{n}} t^{\frac{2}{n} - 1} dt$$

$$\begin{aligned}
&= B\left(\frac{1}{n} + 1, \frac{2}{n}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n} + 1\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{3}{n}\right)} \\
&= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)};
\end{aligned}$$

令 $\sin^2 \varphi = t$ 可得

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2-n}{n}} \varphi \sin^{\frac{2-n}{n}} \varphi d\varphi &= \frac{1}{2n} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{n}-1} t^{\frac{1}{n}-1} dt \\
&= \frac{1}{2n} \cdot B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

于是, 所求的体积为

$$\begin{aligned}
V &= \frac{abc}{n^2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{3\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)} \\
&= \frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

4035. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n + \left(\frac{z}{c}\right)^n = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (n > 0, m > 0).$

解 令

$$x = a \cos^2 \varphi, y = b r \sin^2 \varphi (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}),$$

则曲面所界的体积为

$$\begin{aligned}
V &= c \iint_{\Omega} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^n} dx dy \\
&= 2abc \int_0^1 \sqrt[m]{1 - r^n} r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\
&= abc \int_0^1 \sqrt[m]{1 - r^n} r dr \\
&= \frac{abc}{n} \int_0^1 (1 - t)^{\frac{1}{m}} t^{\frac{2}{n}-1} dt \\
&= \frac{abc}{n} \cdot B\left(\frac{1}{m} + 1, \frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{abc}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n} + 1\right)} \\
&= \frac{abc}{n + 2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)}.
\end{aligned}$$

§ 4. 曲面面积计算法

1° 曲面由显函数给出的情形 平滑曲面 $z = z(x, y)$ 的面积由积分

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

(其中 Ω 为已知曲面在 Oxy 平面上的射影) 所表出.

2° 曲面由参数方程给出的情形 若曲面的方程是用参数给出

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

其中 $(u, v) \in \Omega$, Ω 为封闭可求积的有界区域, 假定函数 x, y 和 z 为在域 Ω 内连续可微分的函数, 则对于曲面的面积有公式

$$S = \iint_{\sigma} \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

4036. 求曲面 $az = xy$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ 内那部分的面积.

解 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a} \right)^2 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} dx dy \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{\frac{a^2 + (x^2 + y^2)}{a^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{a} \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)} dx dy \\ &= \frac{4}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 + r^2} dr \\ &= \frac{2\pi a^2}{3} (2\sqrt{2} - 1). \end{aligned}$$

4037. 求由曲面 $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$ 所界物体的面积.

解 如图 8.48 所示, 两曲面的交线在 Oyz 平面上的射影为圆

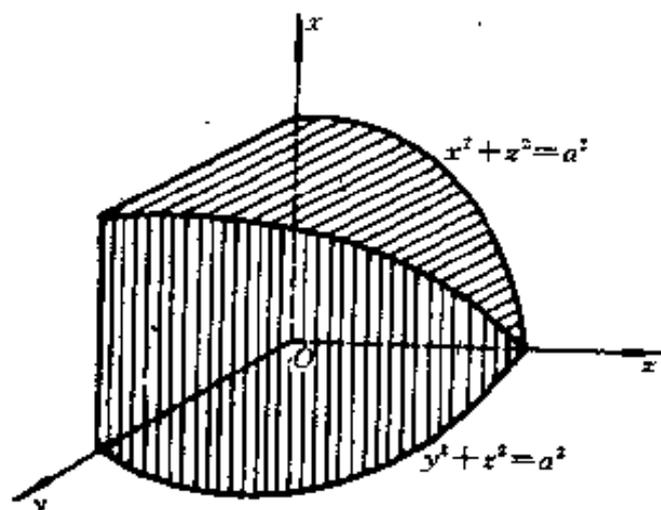


图 8.48

$$y^2 + z^2 = a^2, x = 0.$$

于是,利用对称性知,所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \iint_{y^2+z^2 \leq a^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz \\
 &= 4 \cdot 4 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \sqrt{1 + 0^2 + \left(-\frac{z}{x}\right)^2} dy \\
 &= 16 \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{x^2}} dy \\
 &= 16a \int_0^a dz \int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} \frac{dy}{\sqrt{a^2-z^2}} \\
 &= 16a \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2-z^2}} \cdot \sqrt{a^2-z^2} dz = 16a^2.
 \end{aligned}$$

4038. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 包含在柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b \leq$

a) 内那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\end{aligned}$$

又积分域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ 位于第一象限部分为

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned}S &= 2 \cdot 4 \int_0^a dx \int_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy \\ &= 8a \int_0^a \arcsin \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Big|_0^{\frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= 8a^2 \arcsin \frac{b}{a}.\end{aligned}$$

4039. 求曲面 $z^2 = 2xy$ 被平面 $x + y = 1, x = 0, y = 0$ 所截下那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{y^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2}} \\ &= \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x + y}{\sqrt{xy}},\end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{x+y}{\sqrt{xy}} dy \\
&= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^1 [2\sqrt{x(1-x)} \\
&\quad + \frac{2}{3\sqrt{x}}(1-x)\sqrt{1-x}] dx \\
&= \sqrt{2} \int_0^1 \frac{2\sqrt{1-x}(1+2x)}{3\sqrt{x}} dx \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-x}(1+2x) d(\sqrt{x}) \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 \sqrt{1-t^2}(1+2t^2) dt \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

4040. 求曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在圆柱 $x^2 + y^2 = \pm ax$ 外那部分的面积(维维安尼问题).

解 只须求出球面被圆柱面割出部分的面积. 因为

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},
\end{aligned}$$

于是, 利用对称性知, 割出部分的面积为

$$\begin{aligned}
S &= 8 \iint_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} \frac{ar}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right).
\end{aligned}$$

因而, 所求的面积为

$$A = 4\pi a^2 - S = 4\pi a^2 - 8a^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 8a^2.$$

4041. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 包含在圆柱 $x^2 + y^2 = 2x$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2} = \sqrt{2}, \end{aligned}$$

又积分域为: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\varphi$, 于是,

所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{2} \, dx dy \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \sqrt{2} \, r dr \\ &= 2\sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \, d\varphi = 2\pi. \end{aligned}$$

4042. 求曲面 $z = x^2 - y^2$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned} & \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)^2 + \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}}, \end{aligned}$$

又积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ 所围成, 于是, 利用对称性知, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_{\Omega} \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^2 - y^2}} dx dy \\
 &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{2}r \cdot \frac{r \cos \varphi}{r \sqrt{\cos 2\varphi}} dr \\
 &= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos \varphi \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi \\
 &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} d(\sqrt{2} \sin \varphi) \\
 &= 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} d(\sqrt{2} \sin \varphi) \\
 &= 2a^2 \left[\frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{2} \sqrt{1 - 2\sin^2 \varphi} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \arcsin(\sqrt{2} \sin \varphi) \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi a^2}{2}.
 \end{aligned}$$

4043. 求曲面 $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ 被平面 $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$ 所截那部分的面积.

解 因为

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$$

故所求的面积为

$$S = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

, 其中 Ω 为由直线 $x - y = \pm 1, x + y = \pm 1$ 围成的正方形域. 为便于计算, 作变换

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}u - \frac{\sqrt{2}}{2}v, y = \frac{\sqrt{2}}{2}u + \frac{\sqrt{2}}{2}v,$$

从而积分域变为由方程 $u = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, v = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ 围成的正方形, 且 $I = 1$. 于是, 注意利用对称性, 即得所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_D \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} du \int_{-u}^u \sqrt{1+u^2+v^2} dv \\ &= \\ &= 4 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left\{ u \sqrt{1+2u^2} + \frac{1+u^2}{2} [\ln(\sqrt{1+2u^2}+u) \right. \\ &\quad \left. - \ln(\sqrt{1+2u^2}-u)] \right\} du \\ &= \frac{2}{3} (1+2u^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [\ln(\sqrt{1+2u^2}+u) \\ &\quad - \ln(\sqrt{1+2u^2}-u)] d\left(u + \frac{u^3}{3}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4 \left(u + \frac{u^3}{3}\right) \\ &\quad \cdot \frac{du}{\sqrt{1+2u^2}(1+u^2)} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1 + \frac{u^2}{3}}{1+u^2} \\ &\quad \cdot \frac{d(1+2u^2)}{\sqrt{1+2u^2}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6} \ln 3 - \frac{2}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{t^2+5}{t^2+1} dt^{**}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} + \frac{7\sqrt{2}}{6}\ln 3 - \frac{2}{3}(\sqrt{2} - 1) \\
&\quad - \frac{8}{3} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{t^2 + 1} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7}{4}\ln 3\right) + \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{3}\operatorname{arctg} \sqrt{2} \\
&= -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1 + \frac{7\ln 3}{4}\right) + \frac{8}{3}\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

*) 作代换 $1 + 2u^2 = t^2$.

4044. 求曲面 $x^2 + y^2 = 2az$ 包含在柱面 $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy$ 内那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} \\
&= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)},
\end{aligned}$$

又积分域由双纽线 $r^2 = a^2 \sin 2\varphi$ 围成, 于是, 利用对称性, 即得所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_D \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + (x^2 + y^2)} \, dx dy \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^a \frac{\sqrt{a^2 + r^2}}{a} r dr \\
&= \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{\pi}{4}} [a^3(1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} - a^3] d\varphi \\
&= \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi - \frac{\pi a^2}{3}.
\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \sin 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [1 + \cos 2(\frac{\pi}{4} - \varphi)]^{\frac{3}{2}} d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) d\varphi \\
&= 2\sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 t dt = 2\sqrt{2} \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3}\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{5}{3},
\end{aligned}$$

故最后得

$$S = \frac{4a^2}{3} \cdot \frac{5}{3} - \frac{\pi a^2}{3} = \frac{a^2}{9}(20 - 3\pi).$$

4045. 求曲面 $x^2 + y^2 = a^2$ 被平面 $x + z = 0, x - z = 0$ ($x > 0, y > 0$) 所截那部分的面积.

解 因为

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} &= \sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}},
\end{aligned}$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned}
S &= \iint_{\bar{H}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx dz \\
&= \int_0^a dx \int_{-x}^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dz \\
&= \int_0^a \frac{2ax}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2a^2.
\end{aligned}$$

4046. 求由曲面 $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}z^2, x + y + z = 2a$ ($a > 0$) 所界物体的表面积和体积.

解 曲面的交线在 Oxy 平面上的射影为

$$3x^2 + 3y^2 = (2a - x - y)^2,$$

即

$$x^2 + y^2 - xy + 2a(x + y) = 2a^2.$$

令

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

则方程变为

$$\frac{\left(x' + \frac{4a}{\sqrt{2}}\right)^2}{(2\sqrt{3}a)^2} + \frac{y'^2}{(2a)^2} = 1.$$

由此可见, 曲面所界的物体在 Oxy 平面上的射影域为以 $2a$ 为短半轴、 $2\sqrt{3}a$ 为长半轴的椭圆.

物体的表面积由截面和截出的锥面两部分组成.

对于 $z = 2a - x - y, z = \sqrt{3x^2 - 3y^2}$ 分别有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{3},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 2.$$

于是, 物体的表面积

$$\begin{aligned} S &= \iint_{\Omega} \sqrt{3} dx dy + \iint_{\Omega} 2 dx dy \\ &= (\sqrt{3} + 2) \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a \\ &= 4\pi(3 + 2\sqrt{3})a^2. \end{aligned}$$

又所截圆锥之高为

$$H = \left| \frac{-2a}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \right| = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

(即坐标原点到平面 $x + y + z = 2a$ 的距离). 于是, 物体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot A \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}},$$

其中 A 为截圆锥的底面积:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\bar{\Omega}} \sqrt{3} \, dx dy = \sqrt{3} \cdot \pi \cdot 2a \cdot 2\sqrt{3}a \\ &= 12\pi a^2. \end{aligned}$$

因此, 所求物体的体积为

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12\pi a^2 \cdot \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{3}}\pi a^3.$$

4047. 求球壳被包含在两条纬线和两条经线间那部分的面积.

解 球壳的参数方程为

$$x = R\cos\varphi\cos\psi, y = R\sin\varphi\cos\psi, z = R\sin\psi$$

其中 R 为球的半径. 因为

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 \\ &= R^2\sin^2\varphi\cos^2\psi + R^2\cos^2\varphi\cos^2\psi = R^2\cos^2\psi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 \\ &= R^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + R^2\sin^2\varphi\sin^2\psi + R^2\cos^2\psi \\ &= R^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi} \\ &= R^2\sin\varphi\cos\psi\cos\varphi\sin\psi - R^2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi \\ &\quad + 0 = 0, \end{aligned}$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2\cos\psi.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} R^2\cos\psi d\psi \\ &= (\varphi_2 - \varphi_1)(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)R^2, \end{aligned}$$

其中 φ_1 及 φ_2 为经线的经度, ψ_1 及 ψ_2 为纬线的纬度.

4048. 求螺旋面

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = h\varphi,$$

其中 $0 < r < a, 0 < \varphi < 2\pi$ 那部分的面积.

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2 + h^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

于是, 所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{r^2 + h^2} dr \\ &= 2\pi \left[\frac{r}{2} \sqrt{r^2 + h^2} + \frac{h^2}{2} \ln(r + \sqrt{r^2 + h^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi a \sqrt{a^2 + h^2} + \pi h^2 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + h^2}}{h}. \end{aligned}$$

4049. 求环面

$$x = (b + a\cos\psi)\cos\varphi, y = (b + a\cos\psi)\sin\varphi,$$

$$z = a\sin\psi (a < a \leq b)$$

被两条经线 $\varphi = \varphi_1, \varphi = \varphi_2$ 和两条纬线 $\psi = \psi_1, \psi = \psi_2$ 所界那部分的面积. 整个环的表面积等于什么?

解 因为

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = (b + a\cos\psi)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \psi}\right)^2 = a^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \frac{\partial z}{\partial \psi}$$

故

$$\sqrt{EG - F^2} = a(b + a\cos\psi)$$

于是,所求的面积为

$$\begin{aligned} S &= \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\psi_1}^{\psi_2} a(b + a\cos\psi) d\psi \\ &= a(\varphi_2 - \varphi_1) [b(\psi_2 - \psi_1) + a(\sin\psi_2 - \sin\psi_1)]. \end{aligned}$$

整个环的表面积

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} a(b + a\cos\psi) d\psi = 4\pi^2 ab.$$

4050. 求立体角 ω , 在这个角里从坐标原点看得见矩形

$$x = a > 0, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c.$$

若 a 很大, 对于 ω 推出近似公式.

解 以原点为球心作单位球, 则 ω 即为该球面含于四面体 $O-ABCD$ 内的面积, 其中 $ABCD$ 是以 b, c 为边长的矩形(图 8.49).

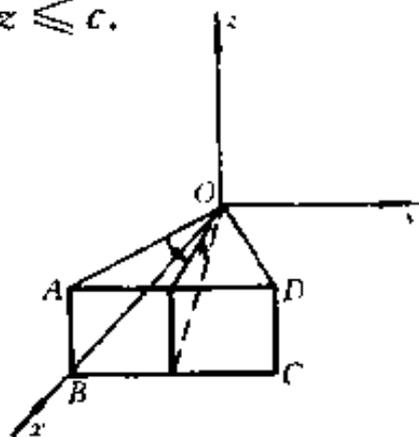


图 8.49

取球坐标系, 由 4047

题知:

$$\sqrt{EG - F^2} = \cos\psi$$

又 φ 和 ψ 的变化域为

$$0 \leq \varphi \leq \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$0 \leq \psi \leq \arcsin \frac{c\cos\varphi}{\sqrt{a^2 + c^2\cos^2\varphi}}.$$

于是,立体角

$$\begin{aligned}
 \omega &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} d\varphi \int_0^{\arcsin \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2+c^2 \cos^2 \varphi}}} \cos \psi d\psi \\
 &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{c \cos \varphi}{\sqrt{a^2+c^2 \cos^2 \varphi}} d\varphi \\
 &= \int_0^{\arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}} \frac{d \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \sin \varphi \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \sin \varphi \right)^2}} \\
 &= \arcsin \left(\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}} \sin \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \\
 &= \arcsin \frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}}.
 \end{aligned}$$

当 a 很大时,有

$$\begin{aligned}
 \frac{bc}{\sqrt{(a^2+c^2)(a^2+b^2)}} &= \frac{bc}{a^2 \sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right) \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)}} \\
 &\doteq \frac{bc}{a^2},
 \end{aligned}$$

于是,得 ω 的近似公式

$$\omega \doteq \frac{bc}{a^2}$$

§ 5. 二重积分在力学上的应用

1° 重心 若 x_0 和 y_0 为平面 Oxy 内薄板 Ω 的重心坐标, $\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的密度,则

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho x dx dy, y_0 = \frac{1}{M} \iint_{\Omega} \rho y dx dy, \quad (1)$$

其中 $M = \iint_{\Omega} \rho dx dy$ 为薄板的质量.

若薄板是均匀的, 则于公式(1)中应令 $\rho = 1$.

2° 转动惯量 I_x 和 I_y 分别为平面 Oxy 内薄板 Ω 对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 —— 用公式来表示

$$I_x = \iint_{\Omega} \rho y^2 dx dy, I_y = \iint_{\Omega} \rho x^2 dx dy, \quad (2)$$

其中 $\rho = \rho(x, y)$ 为薄板的密度.

于公式(2)中假定 $\rho = 1$, 我们得到平面图形的几何转动惯量.

4051. 求边长为 a 的正方形薄板的质量, 设薄板上每一点的密度与该点距正方形顶点之一的距离成比例且在正方形的中点等于 ρ_0 .

解 取坐标系如图 8.50

所示, 则密度

$$\rho = k \sqrt{x^2 + y^2}.$$

由于 $\rho_0 = k$

$$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2},$$

故 $k = \frac{\rho_0}{a} \sqrt{2}$, 从而

$$\rho = \frac{\rho_0 \sqrt{2}}{a} \sqrt{x^2 + y^2}.$$

若引用极坐标, 即得质量

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \frac{\rho_0 \sqrt{2}}{a} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ &= \frac{\rho_0}{a} \sqrt{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}} r^2 dr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{a}{\sin\varphi}} r^2 dr \right] \end{aligned}$$

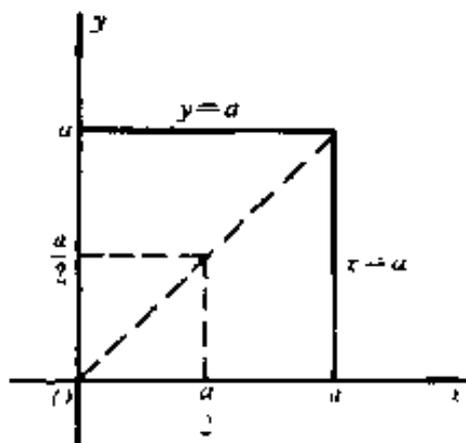


图 8.50

$$\begin{aligned}
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} \right) \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2 \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2 \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} d(\operatorname{tg} \varphi) \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} 2 \sqrt{2} \left[\frac{\operatorname{tg} \varphi}{2} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln |\operatorname{tg} \varphi + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}| \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{\rho_0 a^2}{3} (2 + \sqrt{2} \ln(1 + \sqrt{2})).
\end{aligned}$$

求由下列曲线所界均匀薄板的重心坐标:

4052. $ay = x^2, x + y = 2a$
($a > 0$).

解 密度 ρ 为常数. 积分域如图 8.51 所示. 质量

$$\begin{aligned}
M &= \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy \\
&= \frac{9}{2} \rho a^2.
\end{aligned}$$

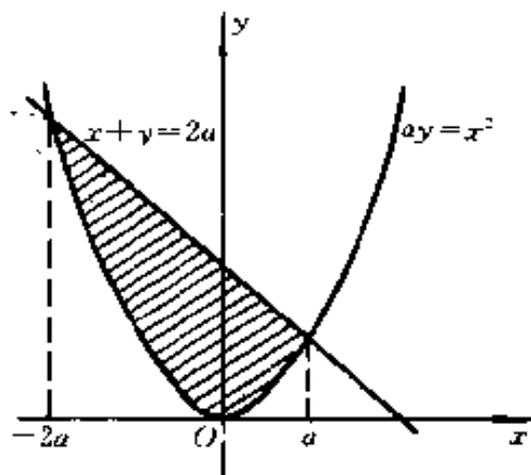


图 8.51

对于坐标轴的一次矩为

$$M_y = \rho \int_{-2a}^a x dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} dy = -\frac{9}{4} \rho a^3,$$

$$M_x = \rho \int_{-2a}^a dx \int_{\frac{x^2}{a}}^{2a-x} y dy = \frac{36}{5} \rho a^3.$$

于是,重心 (x_0, y_0) 为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{2}, y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{8}{5}a.$$

4053. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}, x = 0, y = 0.$

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^a dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{6} \rho a^2,$$

$$M_y = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2} dy = \frac{1}{30} \rho a^3.$$

于是,重心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{a}{5}.$$

由关于直线 $y = x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{a}{5}.$$

4054. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (x > 0, y > 0).$

解 质量和对 Oy 轴的一次矩分别为

$$M = \rho \int_0^a dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt^{**)}$$

$$= 3a^2 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt$$

$$= 3a^2 \rho \left(\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2 \rho}{32},$$

$$M_y = \rho \int_0^a x dx \int_0^{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}} dy = \rho \int_0^a x (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= 3a^3 \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^5 t dt = \frac{8a^3 \rho}{105}.$$

于是,重心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{256a}{315\pi}$$

由关于直线 $y = x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{256a}{315\pi}$$

*) 代作换 $x = a\cos^3 t$.

$$4055. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^3 = \frac{xy}{c^2} \text{ (线圈).}$$

解 此曲线在第一象限部分是一封闭曲线, 围成一图形 Ω . 作变量代

$$\begin{aligned} x &= \frac{a^2 b}{c^2} r \cos^4 \theta \sin^2 \theta, \\ y &= \frac{a b^2}{c^2} r \cos^2 \theta \sin^4 \theta, \end{aligned} \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$$

则原曲线方程变为 $r = 1$. 又容易算得

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{2a^3 b^3}{c^4} r (\sin^5 \theta \cos^7 \theta + \sin^7 \theta \cos^5 \theta),$$

故(利用 3856 题的结果)

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \rho dx dy \\ &= \frac{2a^3 b^3}{c^4} \rho \int_0^1 r dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^5 \theta \cos^7 \theta \\ &\quad + \sin^7 \theta \cos^5 \theta) d\theta \\ &= \frac{a^3 b^3}{c^4} \rho \left[\frac{1}{2} B(3, 4) + \frac{1}{2} B(4, 3) \right] \\ &= \frac{a^3 b^3}{c^4} \rho B(3, 4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \iint_{\Omega} \rho x dx dy \\ &= \frac{2a^5 b^4}{c^6} \rho \int_0^1 r^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \theta \sin^2 \theta (\sin^5 \theta \cos^7 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sin^7\theta\cos^5\theta)d\theta \\
& = \frac{2}{3} \frac{a^5b^4}{c^6} \rho \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7\theta\cos^{11}\theta d\theta \right. \\
& \quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9\theta\cos^9\theta d\theta \right) \\
& = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^5b^4}{c^6} \rho [B(4,6) + B(5,5)].
\end{aligned}$$

于是,

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2b}{3c^2} \cdot \frac{B(4,6) + B(5,5)}{B(3,4)}.$$

由于,

$$B(4,6) = \frac{\Gamma(4)\Gamma(6)}{\Gamma(10)} = \frac{3!5!}{9!},$$

$$B(5,5) = \frac{[\Gamma(5)]^2}{\Gamma(10)} = \frac{(4!)^2}{9!},$$

$$B(3,4) = \frac{\Gamma(3)\Gamma(4)}{\Gamma(7)} = \frac{2!3!}{6!},$$

代入,化简得

$$x_0 = \frac{a^2b}{3c^2} \cdot \frac{6![3!5! + (4!)^2]}{2!3!9!} = \frac{a^2b}{14c^2}.$$

同理,可求得重心的纵坐标为

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D \rho y dx dy}{\iint_D \rho dx dy} = \frac{ab^2}{14c^2}.$$

4056. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy (x > 0, y > 0).$

解 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \sin 2\varphi$$

质量和对 Oy 轴的一次矩为

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \rho dx dy \\
&= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r dr \\
&= \frac{\rho a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi = \frac{\rho a^2}{2}, \\
M_y &= \iint_D \rho x dx dy \\
&= \rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}} r \cdot r \cos \varphi dr \\
&= \frac{\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin^{\frac{3}{2}} 2\varphi d\varphi \\
&= \frac{2\sqrt{2}\rho a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{5}{2}} \varphi \sin^{\frac{3}{2}} \varphi d\varphi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \frac{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}{2\Gamma(3)} \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \rho a^3 \frac{\frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{1}{8\sqrt{2}} \rho a^3 \frac{\pi}{2\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16} \pi \rho a^3.
\end{aligned}$$

于是,重心的横坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{\pi a}{8}.$$

由关于直线 $y = x$ 的对称性知

$$x_0 = y_0 = \frac{\pi a}{8}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

4057. $r = a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi = 0$.

解 质量和一次矩分别为

$$\begin{aligned} M &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r dr \\ &= \frac{1}{2} \rho a^2 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = \frac{3}{4} \pi \rho a^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \cos\varphi dr \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 \cos\varphi d\varphi \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \left[\int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^4 d\varphi \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 d\varphi \right] \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \left[32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 t dt - 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t dt \right] \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \left[32 \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. - 16 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \right] = \frac{5\pi \rho a^3}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_x &= \rho \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r \cdot r \sin\varphi dr \\ &= \frac{\rho a^3}{3} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi \\ &= -\frac{\rho a^3}{3} \cdot \frac{(1 + \cos\varphi)^4}{4} \Big|_0^\pi = \frac{4\rho a^3}{3}. \end{aligned}$$

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{5}{6}a, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{16}{9\pi}a.$$

4058. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$), $y =$

解 质量和对 Ox 轴的一次矩为

$$M = \rho \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y dy = \rho \int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos t)^2 dt \\ = 3\pi \rho a^2.$$

$$M_x = \rho \int_0^{2\pi a} dx \int_0^y y dy = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} y^2 dx \\ = \frac{1}{2} \rho a^3 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5}{2} \pi \rho a^3.$$

于是,

$$y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{5}{6} a.$$

由对称性知: $x_0 = \pi a$.

4059. 求圆形薄板 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 的重心坐标, 设它在点 $M(x, y)$ 的密度与 M 点到 $A(a, 0)$ 点的距离成比例.

解 按题设, 密度

$$\rho = k \sqrt{(x-a)^2 + y^2} \quad (k \text{ 为常数}).$$

于是, 质量为

$$M = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} k \sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy \\ = k \int_{-a}^a [y \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x-a)^2 \\ \cdot \ln(y + \sqrt{(x-a)^2 + y^2})] \Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\ = k \int_{-a}^a \sqrt{2a}(a-x) \sqrt{a+x} dx \\ - k \int_{-a}^a \left[\frac{1}{2} \ln(a-x) \right] (a-x)^2 dx \\ + k \int_{-a}^a (a-x)^2 \ln(\sqrt{a+x} + \sqrt{2a}) dx$$

$$= I_1 - I_2 + I_3.$$

由于

$$\begin{aligned} I_1 &= k \int_{-a}^a \sqrt{2a} [-(a+x)^{\frac{3}{2}} + 2a(x+a)^{\frac{1}{2}}] dx \\ &= \sqrt{2a} k \cdot \left[-\frac{2}{5}(a+x)^{\frac{5}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4a}{3}(a+x)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{32}{15} k a^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{k}{2} \int_0^{2a} t^2 \ln t dt = \frac{k}{6} t^3 \ln t \Big|_0^{2a} - \frac{k}{6} \int_0^{2a} t^3 \cdot \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{4}{3} k a^3 \cdot \ln 2a - \frac{4}{9} k a^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= k \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2a}} t(2a - t^2) \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\ &= 8a^2 k \int_0^{\sqrt{2a}} t \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\ &\quad - 8ka \int_0^{\sqrt{2a}} t^3 \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\ &\quad + 2k \int_0^{\sqrt{2a}} t^5 \ln(t + \sqrt{2a}) dt \\ &= 8ka^2 \left(\frac{a}{2} + a \ln \sqrt{2a} \right) \\ &\quad - 8ka \left(\frac{7}{12} a^2 + a^2 \ln \sqrt{2a} \right) \\ &\quad + 2k \left(\frac{37}{45} a^3 + \frac{4}{3} a^3 \ln \sqrt{2a} \right) \\ &= \frac{44}{45} k a^3 + \frac{8}{3} k a^3 \ln \sqrt{2a} = \frac{44}{45} k a^3 + \frac{4}{3} k a^3 \ln 2a. \end{aligned}$$

因而最后得

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{32}{15}ka^3 - \left(\frac{4}{3}ka^3 \ln 2a - \frac{4}{9}ka^3 \right) \\
 &\quad + \left(\frac{44}{45}ka^3 + \frac{4}{3}ka^3 \ln 2a \right) \\
 &= \frac{32}{9}ka^3.
 \end{aligned}$$

仿照上述方法可求得一次矩

$$\begin{aligned}
 M_y &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} kx \sqrt{(x-a)^2 + y^2} dy \\
 &= -\frac{32}{45}ka^4.
 \end{aligned}$$

而由对称性知: $M_x = 0$.

于是,重心的坐标为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = -\frac{a}{5}, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = 0.$$

4060. 求由变动的面积的重心所描写出来的曲线,所指的变动面积是被曲线

$$y = \sqrt{2px}, \quad y = 0, \quad x = X$$

所界的.

解 变动面积的质量

$$M = \rho \int_0^X dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2p}}{3} X^{\frac{3}{2}},$$

而一次矩

$$M_y = \rho \int_0^X x dx \int_0^{\sqrt{2px}} dy = \rho \frac{2}{5} \frac{\sqrt{2p}}{5} X^{\frac{5}{2}},$$

$$M_x = \rho \int_0^X dx \int_0^{\sqrt{2px}} y dy = \rho \frac{1}{2} p X^2.$$

于是,变动面积的重心为

$$x_0 = \frac{M_y}{M} = \frac{3}{5}X, \quad y_0 = \frac{M_x}{M} = \frac{3}{4} \frac{\sqrt{pX}}{\sqrt{2}}.$$

因此,重心的轨迹方程为

$$y_0 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \sqrt{p \cdot \frac{5}{3}x_0} = \frac{1}{8} \sqrt{30px_0},$$

此即所求的曲线方程,其图形是抛物线的一半.

求由下列曲线所界的面只($\rho = 1$)对于坐标轴 Ox 和 Oy 的转动惯量 I_x 和 I_y :

4061. $\frac{x}{b_1} + \frac{y}{h} = 1, \quad \frac{x}{b_2} + \frac{y}{h} = 1, \quad y = 0 (b_1 > 0, b_2 > 0, h > 0).$

解 若设 $b_2 > b_1$, 则

$$I_x = \int_0^h y^2 dy \int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2} dx = (b_2 - b_1)$$

$$\cdot \int_0^h y^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) dy = \frac{(b_2 - b_1)h^3}{12},$$

$$I_y = \int_0^h dy \int_{(1-\frac{y}{h})b_1}^{(1-\frac{y}{h})b_2} x^2 dx = \frac{b_2^3 - b_1^3}{3} \int_0^h \left(1 - \frac{y}{h}\right)^3 dy$$

$$= \frac{h(b_2^3 - b_1^3)}{12};$$

若设 $b_1 > b_2$, 则

$$I_x = \frac{(b_1 - b_2)h^3}{12}, \quad I_y = \frac{h(b_1^3 - b_2^3)}{12}.$$

4062. $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2, \quad x = 0, \quad y = 0 (0 \leq x \leq a).$

解 $I_x = \int_0^a dx \int_0^{a - \sqrt{2ax - x^2}} y^2 dy$

$$\therefore = \frac{1}{3} \int_0^a [a^3 - 3a^2 \sqrt{2ax - x^2} + 3a(2ax - x^2) - (2ax - x^2)^{\frac{3}{2}}] dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left[a^3 x - 3a^2 \left(\frac{x-a}{2} \sqrt{2ax-x^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x-a}{2} \right) + 3a^2 x^2 - ax^3 \right] \Big|_0^a \\
&\quad - \frac{1}{3} \int_0^a (2ax-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
&= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 a^4 \cos^4 t dt \\
&= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4 t dt \\
&= a^4 \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{a^4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi).
\end{aligned}$$

5π).

利用图形的对称性, 即得 $I_y = I_x = \frac{a^4}{16} (16 - 5\pi)$.

*) 作代换 $x - a = a \sin t$.

4063. $r = a(1 + \cos \varphi)$.

解 曲线所界的平面域可表示为

$$-\pi \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq a(1 + \cos \varphi).$$

于是,

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} a^4 (1 + \cos \varphi)^4 \sin^2 \varphi d\varphi \\
&\quad - 2 \cdot \frac{1}{4} a^4 \int_0^{\pi} (1 + 4\cos \varphi + 6\cos^2 \varphi + 4\cos^3 \varphi \\
&\quad \quad + \cos^4 \varphi) \sin^2 \varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{2} \pi a^4 \cdot \frac{21}{16} = \frac{21}{32} \pi a^4. \\
I_y &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r dr d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}a^4 \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^4 \cos^2\varphi d\varphi \\
&= \frac{1}{2}a^4 \int_0^\pi (\cos^2\varphi + 4\cos^3\varphi + 6\cos^4\varphi \\
&\quad + 4\cos^5\varphi - \cos^6\varphi) d\varphi \\
&= \frac{49}{32}\pi a^4.
\end{aligned}$$

*) 对于任意自然数 n , 有

$$\int_0^\pi \cos^n \varphi d\varphi = \begin{cases} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \varphi d\varphi, & \text{当 } n \text{ 为偶数;} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

为算出 I_x, I_y 的值, 也可变换被积函数的形式, 直接用换元法计算, 这样较简单.

事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
I_x &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^4 \sin^2\varphi d\varphi \\
&= 2^6 a^4 \int_0^\pi \cos^{10} \frac{\varphi}{2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
&= 2^6 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x (1 - \cos^2 x) dx \\
&= 2^6 a^4 \frac{9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \left(1 - \frac{11}{12}\right) \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{21}{32} \pi a^4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y &= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^4 \cos^2\varphi d\varphi \\
&= \frac{a^4}{2} \int_0^\pi (1 + \cos\varphi)^4 d\varphi - \frac{21}{32} \pi a^4 \\
&= 2^4 a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx - \frac{21}{32} \pi a^4 \\
&= \frac{70}{32} \pi a^4 - \frac{21}{32} \pi a^4
\end{aligned}$$

$$= \frac{49}{32}\pi a^4.$$

4064. $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$.

解 曲线的图形关于两坐标轴和直线 $y = x$ 是对称的, 参看 1542 题的图形. 曲线的极坐标方程为

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

根据对称性, 只要算出从 $\varphi = 0$ 到 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ 部分面积的转动惯量再八倍起来即得结果, 并且显然有 $I_x = I_y$. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= 4 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi}}} r^3 dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{(1 - 2\sin^2\varphi \cos^2\varphi)^2} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a^4 d\varphi}{\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4\varphi\right)^2} \\ &= 16a^4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\varphi}{(3 + \cos 4\varphi)^2} \\ &= \frac{4a^4}{9} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\left(1 + \frac{1}{3}\cos x\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4a^4}{9} \left[\frac{\frac{1}{3} \sin x}{\left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{3} \cos x\right)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{9}\right)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}} \right) \right] \Big|_0^{\pi} \\
&= \frac{4a^4}{9} \cdot 2 \left(\frac{9}{8} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^4}{4\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

*) 作代换 $x = 4\varphi$.

**) 利用 2063 题的结果.

4065. $xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y \quad (x > 0, y > 0)$.

解 作代换 $xy = u, \frac{y}{x} = v$, 则 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}, y = \sqrt{uv}$

且雅哥比式的绝对值 $|I| = \frac{1}{2v}$, 曲线所界的面积即积分域变为

$$a^2 \leq u \leq 2a^2, \quad \frac{1}{2} \leq v \leq 2.$$

于是,

$$I_x = \iint_D y^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{uv}{2v} du = \frac{9a^4}{8},$$

$$I_y = \iint_D x^2 dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^2 dv \int_{a^2}^{2a^2} \frac{u}{2v^2} du = \frac{9a^4}{8}.$$

4066. 求面积 S 的极转动惯量

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2) dx dy,$$

面积 S 是由曲线

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

所界的.

解 引用极坐标, 则面积 S 的界线的极坐标方程为

$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi,$$

这是双纽线. 利用对称性, 得

$$\begin{aligned} I_0 &= \iint_S (x^2 + y^2) dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\sqrt{\cos 2\varphi}} r^3 dr \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^4 \cos^2 2\varphi d\varphi = \frac{\pi a^4}{8}. \end{aligned}$$

4067. 证明公式

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2,$$

其中 I_l, I_{l_0} 是面积 S 对于二平行轴 l 和 l_0 的转动惯量, 其中 l_0 是通过面积的重心, 而 d 为两轴间的距离.

证 取 l_0 轴为 Ox 轴, 面积的重心为坐标原点, 则

$$\begin{aligned} I_l &= \iint_S (y - d)^2 dx dy = \iint_S y^2 dx dy \\ &\quad - 2d \iint_S y dx dy + d^2 \iint_S dx dy. \end{aligned}$$

因为 l_0 通过面积 S 的重心, 故

$$y_0 = \frac{1}{S} \iint_S y dx dy = 0, \text{ 即 } \iint_S y dx dy = 0.$$

又

$$\iint_S y^2 dx dy = I_{l_0}, \quad \iint_S dx dy = S,$$

于是,

$$I_l = I_{l_0} + Sd^2.$$

4068. 证明面积 S 对于通过重心 $O(0,0)$ 并与 Ox 轴组成 α 角的直线的转动惯量等于

$$I = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha,$$

其中 I_x 和 I_y 为面积 S 对于 Ox 轴和 Oy 轴的转动惯量及 I_{xy} 为离心惯量:

$$I_{xy} = \iint_S \rho xy dx dy.$$

证 今取直角坐标系 $Ox'y'$, 使 Ox' 轴与 Ox 轴的夹角为 α , 则有

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha, y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha.$$

这就是旋转变换, 雅哥比式的绝对值

$$|I| = \left| \frac{D(x', y')}{D(x, y)} \right| = 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S y'^2 \rho dx' dy' = \iint_S (-x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 \rho dx dy \\ &= \cos^2 \alpha \iint_S y^2 \rho dx dy - 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ &\quad \cdot \iint_S \rho xy dx dy + \sin^2 \alpha \iint_S \rho x^2 dx dy \\ &= I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

4069. 求以 a 为边的正三角形的面积对于通过三角形重心并与它的高成 α 角的直线的转动惯量.

解 利用上题的结果. 取重心为坐标原点. 不妨取 Ox 轴平行于三角形的一条边, 则过重心与高成 α 角的直线, 即为过坐标原点与 Ox 轴成 α 角的直线. 于是, 要求的转动惯量为

$$I_o = I_x \cos^2 \alpha - 2I_{xy} \sin \alpha \cos \alpha + I_y \sin^2 \alpha.$$

由于三角形三边所在的直线方程为

$$y = -\frac{a}{2\sqrt{3}}, y = -\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$y = \sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}},$$

所以,根据对称性知:

$$\begin{aligned} I_x &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}} y^2 dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \frac{1}{3} \left[\left(-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right)^3 \right. \\ &\quad \left. - \left(-\frac{a}{2\sqrt{3}} \right)^3 \right] dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\sqrt{3}x^3 + \sqrt{3}ax^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}a^2x \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{3}}{24} \right) dx \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{3}a^4 \left(\frac{1}{48} - \frac{1}{64} \right) = \frac{a^4}{32\sqrt{3}};$$

$$I_{xy} = \iint_S xy dx dy = 0;$$

$$\begin{aligned} I_y &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2\sqrt{3}}}^{-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}}} x^2 dy \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} x^2 \left[\left(-\sqrt{3}x + \frac{a}{\sqrt{3}} \right) + \frac{a}{2\sqrt{3}} \right] dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(-\sqrt{3}x^3 + \frac{\sqrt{3}a}{2}x^2 \right) dx \end{aligned}$$

$$= \sqrt{3} a^4 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32} \right) = \frac{a^4}{32 \sqrt{3}}.$$

于是,

$$I_a = \frac{a^4}{32 \sqrt{3}} \cos^2 \alpha + \frac{a^4}{32 \sqrt{3}} \sin^2 \alpha = \frac{a^4}{32 \sqrt{3}}.$$

4070. 设有水平面为 $z = h$ 的圆柱形容器 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$, 求它侧壁上 ($x \geq 0$) 水的压力.

解 用 X 与 Y 分别表示压力在 Ox 轴与 Oy 轴上的投影. 由对称性, 显然有 $Y = 0$. 下面求 X . 由于 $dS = a d\theta dz$ ($-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$), 而在面元 dS 上的压力在 Ox 轴上的投影 dX 为 $(zdS)\cos\theta$. 于是,

$$\begin{aligned} X &= \iint_S z \cos\theta dS = \iint_S a z \cos\theta d\theta dz \\ &= a \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta d\theta \right] \cdot \left(\int_0^h z dz \right) = ah^2. \end{aligned}$$

4071. 半径为 a 的球体沉入密度为 δ 的液体中的深度为 h (由球心量起), 这里 $h \geq a$. 求在球表面的上部和下部的液体压力.

解 设球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 则在球面上的点 (x, y, z) 处沉入液体的深度 d 为

$$d = h - z \quad (-a \leq z \leq h).$$

于是, 上半球面 S_1 的点和下半球面 S_2 的点的深度分别为:

$$\begin{aligned} d &= h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}, \\ d &= h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}. \end{aligned}$$

根据对称性知, 压力在 Ox 轴上和 Oy 轴的射影均为零,

故只要计算压力在 Oz 轴上的射影. 液体作用于球面上部和下部的压力分别记以 p_1 和 p_2 , 并设 γ 为球上各点处压力的方向(即内法线方向)与 Oz 轴正向的夹角, 则

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \iint_{S_1} d\delta \cos\gamma ds \\
 &= - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \delta [h - \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy \\
 &= - h\pi a^2 \delta + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \sqrt{1 - r^2} r dr \\
 &= - h\pi a^2 \delta + \left[-\frac{2\pi\delta}{3} \sqrt{(a^2 - r^2)^3} \right] \Big|_0^a \\
 &= - \pi a^2 \delta \left(h - \frac{2a}{3} \right) \quad (p_1 < 0 \text{ 表示压力向下}).
 \end{aligned}$$

同理, 我们有

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \iint_{S_2} d\delta \cos\gamma dS \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \delta [h + \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)}] dx dy \\
 &= \pi a^2 \delta \left(h + \frac{2a}{3} \right) \quad (p_2 > 0 \text{ 表示压力向上}).
 \end{aligned}$$

4072. 底半径为 a 高为 b 的直圆柱完全沉入密度为 δ 的液体中, 其中心在液面下的深度为 h , 而圆柱的轴与铅垂线成 α 角, 求在圆柱上底和下底的液体压力.

解 取圆柱的中心为坐标原点, 取 Oxy 平面是水平的, 再取圆柱的轴(朝上的方向)在 Oxy 平面上的投影所在的方向为 Ox 轴, 取 Oz 轴垂直朝上, 最后取 Oy 轴使 Ox 轴 Oy 轴和 Oz 轴构成右手系.

于是, 液面方程为 $z = h$. 设圆柱上底为 S_1 , 下底为

S_2 , 则 S_1 所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = \frac{b}{2}, \quad (1)$$

S_2 所在平面的方程为

$$x \sin \alpha + z \cos \alpha = -\frac{b}{2}. \quad (2)$$

在点 (x, y, z) 处 ($z \leq h$) 液体的深度为 $h - z$. 用 X_1, Y_1 和 Z_1 分别表示液体在圆柱上底 S_1 上压力在 Ox 轴, Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 同样, 用 X_2, Y_2 和 Z_2 分别表示在 S_2 上压力在 Ox 轴, Oy 轴和 Oz 轴上的投影. 显然, $Y_1 = Y_2 = 0$. 我们有

$$X_1 = - \iint_{S_1} \delta(h - z) \sin \alpha dS = -\delta \sin \alpha \iint_{S_1} (h - z) dS, \quad (3)$$

$$Z_1 = - \iint_{S_1} \delta(h - z) \cos \alpha dS = -\delta \cos \alpha \iint_{S_1} (h - z) dS. \quad (4)$$

由(1)式知, 在 S_1 上有

$$z = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} - x \sin \alpha \right).$$

于是, 注意到 S_1 的面积为 πa^2 , 可知

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (h - z) dS &= \iint_{S_1} \left[h - \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} - x \sin \alpha \right) \right] dS \\ &= \left(h - \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \right) \iint_{S_1} dS + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS \\ &= \left(h - \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{\cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \iint_{S_1} x dS. \end{aligned}$$

由于 $\frac{1}{\pi a^2} \int_{S_1} x dS$ 是 S_1 的重心的 x 坐标, 也即 $\frac{b}{2} \sin \alpha$, 故

$$\int_{S_1} x dS = \frac{1}{2} \pi a^2 b \sin \alpha. \text{ 代入即得}$$

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (h - z) dS &= \left(h - \frac{b}{2 \cos \alpha} \right) \pi a^2 + \frac{1}{2} \pi a^2 b \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \\ &= \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2. \end{aligned}$$

以此代入(3)式与(4)式, 得

$$X_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha,$$

$$Z_1 = -\pi a^2 \delta \left(h - \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha.$$

同理, 我们有

$$X_2 = \iint_{S_2} \delta (h - z) \sin \alpha dS = \delta \sin \alpha \iint_{S_2} (h - z) dS,$$

$$Z_2 = \iint_{S_2} \delta (h - z) \cos \alpha dS = \delta \cos \alpha \iint_{S_2} (h - z) dS.$$

再注意到(2)式, 类似地可计算得

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (h - z) dS &= \iint_{S_2} \left[h + \frac{1}{\cos \alpha} \left(\frac{b}{2} + x \sin \alpha \right) \right] dS \\ &= \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \pi a^2. \end{aligned}$$

于是,

$$X_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \sin \alpha,$$

$$Z_2 = \pi a^2 \delta \left(h + \frac{b}{2} \cos \alpha \right) \cos \alpha.$$

4073. 求均匀的圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h$ 对质点 $P(0, 0,$

b) 的引力, 设圆柱的质量等于 M , 而点的质量等于 m .

解 根据对称性知, 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影等于零, 故只要计算引力在 Oz 轴上的射影 F_z . 今取圆环, 其体积为

$$dV = 2\pi r dr dz,$$

则相应的质量为

$$dM = \frac{2\pi r M dr dz}{\pi a^2 h} = \frac{2Mr}{a^2 h} dr dz,$$

吸引质点 P 的引力

$$dF_z = - \frac{2krmM(b-z)}{a^2 h \sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr dz.$$

于是, 所求的引力

$$\begin{aligned} F_z &= - \frac{2kmM}{a^2 h} \int_0^h \int_0^a \frac{r(b-z)}{\sqrt{[r^2 + (b-z)^2]^3}} dr dz \\ &= - \frac{2kmM}{a^2 h} \left[\int_0^h \operatorname{sgn}(b-z) dz \right. \\ &\quad \left. - \int_0^h \frac{b-z}{\sqrt{a^2 + (b-z)^2}} dz \right] \\ &= - \frac{2kmM}{a^2 h} [|b| - |b-h| + \sqrt{a^2 + (b-h)^2} \\ &\quad - \sqrt{a^2 + b^2}], \end{aligned}$$

其中 k 为引力常数.

4074. 物体在椭圆面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

上压力的分布由公式

$$p = p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

所给出. 求物体在此面上的平均压力.

解 物体在椭圆面上的平均压力

$$\begin{aligned}
 p_{cp} &= \frac{1}{\pi ab} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} p_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy \\
 &= \frac{4}{\pi ab} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 p_0 (1 - r^2) ab r dr \\
 &= \frac{4}{\pi ab} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{p_0 ab}{4} = \frac{p_0}{2}.
 \end{aligned}$$

4075. 草地的形状为以 a 和 b 为边的矩形, 均匀地盖上密度为 p 千克 / 平方米的砍倒的草. 假设运送 P 千克重到距离为 r 远的地方所化的功为 kPr ($0 < k < 1$). 要把所有的干草聚集在草地的中心, 最少必须化多少功?

解 不妨将坐标原点取在矩形的中心, Ox 轴平行于 a 边, Oy 轴平行于 b 边. 由于将面积 $dx dy$ 上的草移到中心要化的功为

$$dW = kp \sqrt{x^2 + y^2} dx dy,$$

并利用对称性, 便知所要求的功为

$$\begin{aligned}
 W &= 4kp \int_0^{\frac{b}{2}} \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\
 &= 4kp \left[\int_0^{\arctg \frac{b}{a}} \int_0^{\frac{a}{2 \cos \varphi}} r^2 dr d\varphi \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\arctg \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{b}{2 \sin \varphi}} r^2 dr d\varphi \right] \\
 &= \frac{kp}{6} \left[a^3 \int_0^{\arctg \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi \right. \\
 &\quad \left. + b^3 \int_{\arctg \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi \right].
 \end{aligned}$$

但是,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \frac{1}{\cos^3 \varphi} d\varphi &= \left(\frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} \\
&= \frac{b \sqrt{a^2 + b^2}}{2a^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a}, \\
\int_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi &= \left(-\frac{\cos \varphi}{2 \sin^2 \varphi} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right) \Big|_{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a \sqrt{a^2 + b^2}}{2b^2} + \frac{1}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b},
\end{aligned}$$

于是,我们有

$$\begin{aligned}
W &= \frac{k\rho}{12} \left(2ab \sqrt{a^2 + b^2} + a^3 \ln \frac{b + \sqrt{a^2 + b^2}}{a} \right. \\
&\quad \left. + b^3 \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{b} \right).
\end{aligned}$$

*) 利用 2000 题的结果.

**) 利用 1999 题的结果.

§ 6. 三重积分

1° 三重积分的直接算法 设函数 $f(x, y, z)$ 是连续的, 且有界域 V 由下列不等式确定出来:

$$\begin{aligned}
x_1 &\leq x \leq x_2, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \\
z_1(x, y) &\leq z \leq z_2(x, y),
\end{aligned}$$

其中 $y_1(x), y_2(x), z_1(x, y), z_2(x, y)$ 皆为连续函数. 则函数 $f(x, y, z)$

展布于域 V 内的三重积分可按公式

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \end{aligned}$$

来计算. 有时采用下面的公式也很方便

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz, \end{aligned}$$

其中 $S(x)$ 是用平面 $X = x$ 截域 V 所得的截断面.

2° 三重积分中的变量代换 若 $Oxyz$ 空间的有界三维闭域 V 借助于下列连续可微分的函数双方单值地反应到 $O'uvw$ 空间的域 V'

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w),$$

并且当 $(u, v, w) \in V'$ 时,

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \neq 0,$$

则下面的公式成立

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{V'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] |I| du dv dw. \end{aligned}$$

在特殊情况下, 有: 1) 圆柱坐标系 φ, r, h , 其中

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = h,$$

及

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, r, h)} = r,$$

2) 球坐标系 φ, ψ, r , 其中

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi,$$

及

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \psi, r)} = r^2 \cos \psi.$$

计算下列三重积分：

4076. $\iiint_V xy^2z^3 dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $z = xy, y = x, x = 1, z = 0$ 所界的区域.

解
$$\begin{aligned} \iiint_V xy^2z^3 dx dy dz &= \int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy \int_0^{xy} z^3 dz \\ &= \frac{1}{364}. \end{aligned}$$

4077. $\iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$, 此处 V 是由曲面 $x+y+z=1, x=0, y=0, z=0$ 所界的区域.

解
$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3} &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{2(1+x+y+z)^2} \right] \Big|_0^{1-x-y} dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{1}{8} + \frac{1}{2(1+x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{8}y + \frac{1}{2(1+x+y)} \right] \Big|_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{3}{8} + \frac{x}{8} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx \\ &= \left[-\frac{3}{8}x + \frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} \ln(1+x) \right] \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

4078. $\iiint_V xyz dx dy dz$, 此处 V 是由曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界的区域.

解
$$\begin{aligned} & \iiint_V xyz dx dy dz \\ &= \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y(1-x^2-y^2) dy \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 x(1-x^2)^2 dx = \frac{1}{48}. \end{aligned}$$

4079. $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz$, 此处 V 是由曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

所界的区域.

解 设 P_x, Q_y, R_z 分别表示立体 V 与平面 $x =$ 常数, $y =$ 常数, $z =$ 常数所截部分在 O_{yz}, O_{xz}, O_{xy} 平面上的射影, 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz \\ &= \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \iint_{P_x} dy dz + \int_{-b}^b \frac{y^2}{b^2} dy \iint_{Q_y} dz dx \\ &+ \int_{-c}^c \frac{z^2}{c^2} dz \iint_{R_z} dx dy \\ &= \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a x^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx + \frac{\pi ac}{b^2} \int_{-b}^b y^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} \right) dy \\ &+ \frac{\pi ab}{c^2} \int_{-c}^c z^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz \\ &= 3 \cdot \frac{4\pi abc}{15} = \frac{4\pi abc}{5}. \end{aligned}$$

*) P_x 在平面 $X = x$ 上的方程为

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)} = 1,$$

故其面积为

$$\pi b \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \cdot c \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} = \pi bc \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).$$

Q_x 及 R_x 的面积类推.

4080. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$, 其中 V 是由曲面

$$x^2 + y^2 = z^2, z = 1$$

所界的区域.

解 曲面在 Oxy 平面上的射影 Q 为圆盘 $x^2 + y^2 \leq 1$.

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz \\ &= \iint_Q dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \sqrt{x^2 + y^2} dz \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} [\sqrt{x^2 + y^2} - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r-r^2) r dr = \frac{\pi}{6}. \end{aligned}$$

于下列三重积分内用各种方法来配置积分的限:

4081. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$.

解 有界域 V 如图 8.52 所示.

如果先对 y 积分, 再对 z, x 积分, 如图 8.53 所示, 则积分域在 Oyz 平面上的射影域由诸直线

$$z = 0, z = x + y,$$

$$y = 0, y = 1 - x (x \text{ 固定})$$

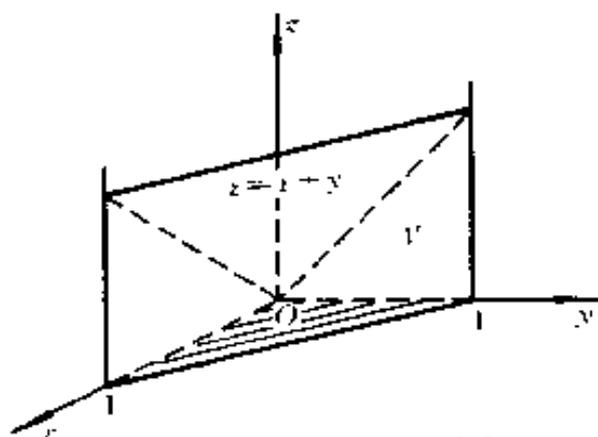


图 8.52

围成. 于是, 我们有

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$$

$$= \int_0^1 dx \left\{ \int_0^x dz \int_0^{1-z} f(x, y, z) dy \right. \\ \left. + \int_x^1 dz \int_{z-x}^{1-x} f(x, y, z) dy \right\}^{**}$$

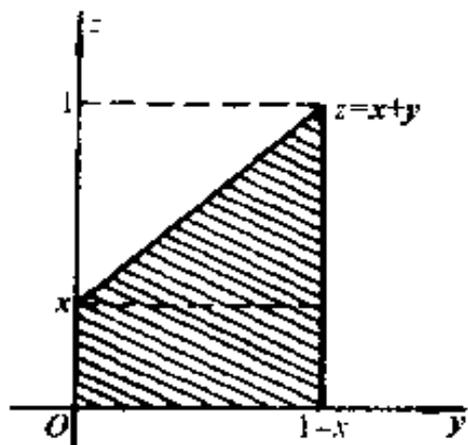


图 8.53

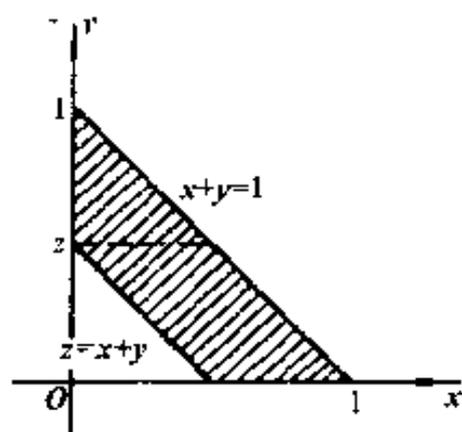


图 8.54

如果先对 x 积分, 再对 y, z 积分, 如图 8.54 所示, 则有

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x, y, z) dz$$

$$= \int_0^1 dz \left\{ \int_0^z dy \int_{z-y}^{1-y} f(x, y, z) dx \right. \\ \left. + \int_x^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y, z) dx \right\}.$$

*) 这里用的公式为 $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$

$$= \int_a^b dx \iint_{S(x)} f(x, y, z) dy dz.$$

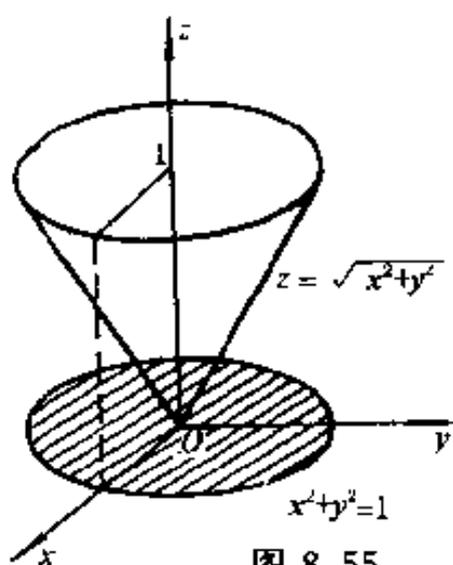


图 8.55

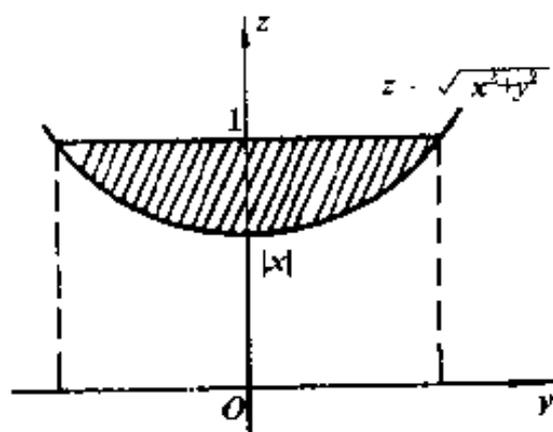


图 8.56

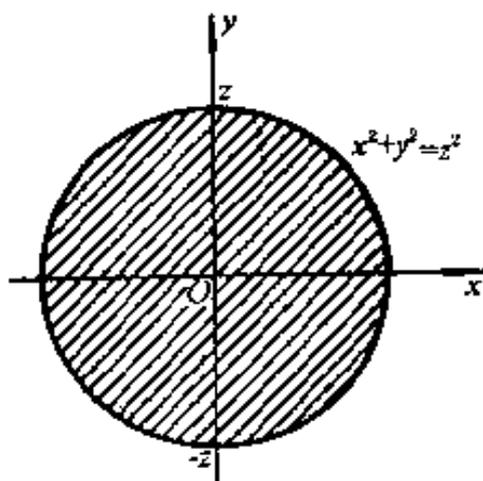


图 8.57

4082. $\int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz.$

解 有界域 V 如图 8.55 所示.

如果先对 y 积分, 再对 z, x 积分, 如图 8.56 所示, 则积分域在 Oyz 平面上的射影域由不等式

$|x| \leq z \leq 1, \sqrt{z^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2}$ (x 固定) 给出. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \\ &= \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^1 dz \int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}} f(x, y, z) dy. \end{aligned}$$

如果先对 x 积分, 再对 y, z 积分, 如图 8.57 所示, 则有

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dz \int_{-z}^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

4083. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$

解 如果先对 y 积分, 再对 z, x 积分, 则积分域在 Oxy 平面上的射影域 *) 由方程

$$x = 1, z = 0, z = x^2$$

及

$$x = 0, x = 1, z = x^2, z = x^2 + 1$$

所表示的线围成. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \left[\int_0^{x^2} dz \int_0^1 f(x, y, z) dy \right. \end{aligned}$$

$$+ \int_{x^2}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x, y, z) dy \}.$$

如果先对 x 积分, 再对 z, y 积分, 不难由轮换对称关系得出结果。

如果先对 x 积分, 再对 y, z 积分, 则积分域在 Oyz 平面上的射影域由方程

$$y = 1, z = 0, y = \sqrt{z}$$

及

$$y = 0, y = 1, y = \sqrt{z}, y = \sqrt{z-1}$$

所表示的线围成. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz \\ &= \int_0^1 dx \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx \right. \\ &+ \left. \int_{\sqrt{x}}^1 dy \int_0^1 f(x, y, z) dx \right\} \\ &+ \int_1^2 dz \int_{\sqrt{z-1}}^1 dy \int_{\sqrt{z-y^2}}^1 f(x, y, z) dx. \end{aligned}$$

*) 这里采用的投影方式与前两题不同, 系用结果

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\mathcal{I}} dx dz \int_{y_1}^{y_2} f(x, y, z) dy.$$

用一重积分以代替三重积分:

$$4084. \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\eta \int_0^\eta f(\zeta) d\zeta = \int_0^x d\xi \int_0^\xi d\zeta \int_\zeta^\xi f(\zeta) d\eta \\ &= \int_0^x d\xi \int_0^\xi f(\zeta) (\xi - \zeta) d\zeta \\ &= \int_0^x d\zeta \int_\zeta^x f(\zeta) (\xi - \zeta) d\xi \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 f(\xi)(x-\xi)^2 d\xi.$$

4085. $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz.$

解 化为先对 y 积分, 再对 x, z 积分, 可将原积分表示成如下两部分:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dz \left[\int_z^1 dx \int_0^1 f(z) dy - \int_0^z dx \int_{z-x}^1 f(z) dy \right] \\ &= \int_0^1 dz \int_x^1 f(z) dx + \int_0^1 dz \int_0^z f(z)(1-z+x) dx \\ &= \int_0^1 f(z)(1-z) dz + \int_0^1 f(z)(1-z)z dz + \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)z^2 dz \\ &= \int_0^1 f(z) \left(1 - \frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)(2-z^2) dz; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 dx \int_z^1 f(z) dy \\ &= \int_1^2 dz \int_{z-1}^1 f(z)(1-z+x) dx \\ &= \int_1^2 \left[f(z)(1-z)x + \frac{1}{2} f(z)x^2 \right] \Big|_{z-1}^1 dz \\ &= \int_1^2 f(z) \left[1-z + (z-1)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(z-1)^2 \right] dz \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 f(z)(z-2)^2 dz, \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x+y} f(z) dz &= \frac{1}{2} \int_0^1 f(z)(2-z^2) dz \\ &+ \frac{1}{2} \int_1^2 f(z)(z-2)^2 dz. \end{aligned}$$

4086. 设 $f(x, y, z) = F_{xyz}''(x, y, z)$ 及 a, b, c, A, B, C 为常数, 求:

$$\int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz.$$

解

$$\begin{aligned} & \int_a^A dx \int_b^B dy \int_c^C f(x, y, z) dz \\ &= \int_a^A dx \int_b^B [F'_{xy}(x, y, C) - F'_{xy}(x, y, c)] dy \\ &= \int_a^A [F'_x(x, B, C) - F'_x(x, b, C) - F'_x(x, B, c) \\ & \quad + F'_x(x, b, c)] dx \\ &= F(A, B, C) - F(a, B, C) - F(A, b, C) \\ & \quad + F(a, b, C) - F(A, B, c) + F(a, B, c) \\ & \quad + F(A, b, c) - F(a, b, c). \end{aligned}$$

变换为球坐标以计算积分：

4087. $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$, 此处 V 是由曲面

$$x^2 + y^2 + z^2 = z$$

所界的区域.

解 令 $x = r \cos \varphi \cos \psi$, $y = r \sin \varphi \cos \psi$, $z = r \sin \psi$, 则曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = z$ 化为 $r = \sin \psi$. 从而

$$V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sin \psi.$$

$$|I| = r^2 \cos \psi.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sin \psi} r \cdot r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \psi \cos \psi d\psi = \frac{\pi}{10}. \end{aligned}$$

$$4088. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

解 变换为球坐标, 积分域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{2}.$$

于是,

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \cos\psi \cdot$$

$$r^2 \sin^2\psi dr$$

$$= \frac{1}{5} 4 \sqrt{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin^2\psi d\psi$$

$$= \frac{\pi}{5} 2 \sqrt{2} \cdot \frac{1}{3} \sin^3\psi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{15} (2\sqrt{2} - 1).$$

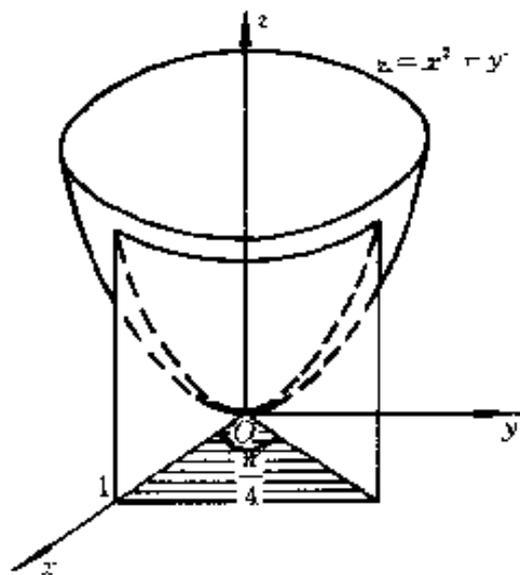


图 8.58

4089. 于积分中变换为球坐标

$$\iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz.$$

此处 V 是由曲面 $z = x^2 + y^2, x = y, x = 1, y = 0, z = 0$ 所界的区域.

解 引用球坐标, 由 $x = y, x = 1, y = 0$ 知: $0 \leq \varphi \leq$

$\frac{\pi}{4}$ (图 8.58).

又从原点引半射线,由曲面 $z = x^2 + y^2$ 穿进,平面 $x = 1$ 穿出,于是,得 r 的下限为 $r = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$, r 的上限为 $r = \frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$, 而 ψ 的变化域由 $z = 0$ 到 $z = x^2 + y^2$, $x = 1$ 所决定,即

$$0 \leq \psi \leq \operatorname{arctg} \frac{1}{\cos\varphi} \quad *)$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{1}{\cos\varphi}} \cos\psi d\psi \int_{\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}}^{\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}} r^2 f(r) dr \cdot \end{aligned}$$

*) 因为 $x = 1$ 对应 $r = \frac{1}{\cos\varphi\cos\psi}$, $z = x^2 + y^2$ 对应 $r = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$, 故 $\frac{1}{\cos\varphi\cos\psi} = \frac{\sin\psi}{\cos^2\psi}$, 即 $\psi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\cos\varphi}$.

4090. 进行适当的变量代换,以计算三重积分

$$\iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz,$$

此处 V 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的内部.

解 作变量代换

$x = a\cos\varphi\cos\psi$, $y = b\sin\varphi\cos\psi$, $z = c\sin\psi$, 则有 $|I| = abc r^2 \cos\psi$, 且对于 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分有

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1.$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \iiint_V \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos\psi \sqrt{1-r^2} dr \\
&= 4\pi \int_0^1 abc r^2 \sqrt{1-r^2} dr = 4\pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^2 t dt \\
&= \frac{\pi abc}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t) dt = \frac{\pi^2 abc}{4}.
\end{aligned}$$

4091. 变换为圆柱坐标, 以计算积分

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

此处 V 是由曲面 $x^2 + y^2 = 2z, z = 2$ 所界的区域.

解 令 $x = r \cos\varphi, y = r \sin\varphi, z = z$, 则 $x^2 + y^2 = 2z$ 化为 $r^2 = 2z$. 积分域

$$V: 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, \frac{r^2}{2} \leq z \leq 2.$$

$$|I| = r.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^2 \cdot r dr \int_{\frac{r^2}{2}}^2 dz \\
&= \frac{16\pi}{3}.
\end{aligned}$$

4092. 计算积分

$$\iiint_V x^2 dx dy dz$$

此处 V 是由曲面 $z = ay^2, z = by^2, y > 0 (0 < a < b), z = \alpha x, z = \beta x (0 < \alpha < \beta), z = h (h > 0)$ 所界的区域.

解 作变换 $\frac{z}{y^2} = u, \frac{z}{x} = v, z = \omega$, 则 $x = \frac{\omega}{v}, y =$

$\sqrt{\frac{\omega}{u}}, z = \omega$. 从而积分域变为

$$V: a \leq u \leq b, a \leq v \leq \beta, 0 \leq \omega \leq h,$$

且雅哥比行列式

$$I = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{\omega}{v^2} & \frac{1}{v} \\ -\frac{\sqrt{\omega}}{2u\sqrt{u}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{u\omega}} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-\omega\sqrt{\omega}}{2u\sqrt{u}v^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iiint_V x^2 dx dy dz &= \int_0^h \omega^{\frac{7}{2}} d\omega \int_a^\beta \frac{1}{v^4} dv \int_a^b \frac{1}{2u\sqrt{u}} du \\ &= \frac{2}{27} \left(\frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\beta^3} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right) h^4 \sqrt{h}. \end{aligned}$$

4093. 求积分

$$\iiint_V xyz dx dy dz.$$

其中 V 位于 $x > 0, y > 0, z > 0$ 这一卦限内且由下列曲面所界:

$$\begin{aligned} z = \frac{x^2 + y^2}{m}, z = \frac{x^2 + y^2}{n}, xy = a^2, xy = b^2, y = \alpha x, y \\ = \beta x (0 < a < b; 0 < \alpha < \beta; 0 < m < n), \end{aligned}$$

解 作变换 $\frac{z}{x^2 + y^2} = u, xy = v, \frac{y}{x} = \omega$, 则 $x = \sqrt{\frac{v}{\omega}}$,
 $y = \sqrt{v\omega}, z = uv \left(\omega - \frac{1}{\omega} \right)$, 且

$$I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2\sqrt{v\omega}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\omega\sqrt{\omega}} \\ 0 & \frac{\sqrt{\omega}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{\omega}} \\ v\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) & u\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right) & uv\left(1 - \frac{1}{\omega^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{v}{2\omega}\left(\omega + \frac{1}{\omega}\right),$$

$$V: \frac{1}{n} \leq u \leq \frac{1}{m}, a^2 \leq v \leq b^2, \alpha \leq \omega \leq \beta.$$

于是,

$$\iiint xyz dx dy dz$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{m}} \frac{u}{2} du \int_{a^2}^{b^2} v^3 dv \int_{\alpha}^{\beta} \left(\omega + \frac{1}{\omega^3} + \frac{2}{\omega}\right) d\omega$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) (b^8 - a^8) \left[(\beta^2 - \alpha^2) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \right) + 4 \ln \frac{\beta}{\alpha} \right].$$

4094. 求函数

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 内的平均值.

解 域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq x + y + z$ 即

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{3}{4},$$

$$\text{其体积 } V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi.$$

作变换: $x = r \cos \varphi \cos \psi + \frac{1}{2}, y = r \sin \varphi \cos \psi + \frac{1}{2}, z =$

$\frac{1}{2} + r \sin \psi$, 则有

$$\begin{aligned}
f_{\text{平均}} &= \frac{1}{V} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\
&= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos\psi \cdot \left(\frac{3}{4} + r^2 \right. \\
&\quad \left. + r\sin\psi + r\cos\varphi\cos\psi + r\sin\varphi\cos\psi \right) dr \\
&= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} r^2 \cos\psi \cdot \left(\frac{3}{4} + r^2 \right) dr \\
&= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sqrt{3}}{20} \cos\psi d\psi \\
&= \frac{1}{V} \int_0^{2\pi} \frac{3\sqrt{3}}{10} d\varphi \\
&= \frac{1}{V} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{5} \pi = \frac{2}{\sqrt{3}\pi} \cdot \frac{3\sqrt{3}\pi}{5} = \frac{6}{5}.
\end{aligned}$$

4095. 求函数

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}$$

$$f(x, y, z) = e$$

在域 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 内的平均值.

解 由于域 $V: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 为椭球, 其体积等于 $\frac{4}{3}\pi abc$, 故平均值

$$f_{\text{平均}} = \frac{3}{4\pi abc} \iiint_V e \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} dx dy dz.$$

若作变换: $x = a\cos\varphi\cos\psi, y = b\sin\varphi\cos\psi, z = c\sin\psi$, 并利用对称性, 则

$$\begin{aligned}
 f_{(V,E)} &= \frac{3}{4\pi abc} \cdot 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abce^r r^2 \cos\psi dr \\
 &= 3 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right) \left(\int_0^1 r^2 e^r dr \right) \\
 &= 3(e-2).
 \end{aligned}$$

4096. 利用中值定理, 估计积分

$$u = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

之值, 其中 $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$.

解 由积分中值定理, 有

$$\begin{aligned}
 u &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \frac{dx dy dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3, \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$. 由于函数

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

代表点 (x, y, z) 与点 (a, b, c) 之间的距离, 显然在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 中此距离的最小值是 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R$, 最大值是 $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R$, 并且只在一个点达到最小值, 也只在在一个点达到最大值. 因此, 函数

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 中的最大值是

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}, \text{ 最小值是 } \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R}, \text{ 并且}$$

只在一个点达到最大值, 也只在在一个点达到最小值. 我们证明(1)式中的中值不可能是函数的最大值, 也不可

能是函数的最小值,事实上,例如,若是最大值,即

$$\frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R},$$

则由(1)式知

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} f(x,y,z) dx dy dz = 0, \quad (2)$$

$$\text{其中 } f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}}.$$

显然,在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上 $f(x,y,z) \geq 0$ 且 $f(x,y,z)$ 为连续函数. 于是,由(2)式知在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上必有 $f(x,y,z) \equiv 0$,这显然是不可能的. 因此,

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R} < \frac{1}{\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}}$$

$$< \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R},$$

即

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} - R < \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}$$

$$< \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + R,$$

故

$$\sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 + (\zeta-c)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R,$$

其中 $|\theta| < 1$. 于是,由(1)式得

$$u = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{R^3}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + \theta R}.$$

4097. 证明:若函数 $f(x, y, z)$ 于域 V 内是连续的且对于任何的域 $\omega \subset V$

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz = 0,$$

则当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \equiv 0$.

证 用反证法. 若当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \not\equiv 0$. 不失一般性, 设对于 V 的某内点 (x_0, y_0, z_0) , 有 $f(x_0, y_0, z_0) > 0$, 则由于 $f(x, y, z)$ 的连续性, 故存在点 (x_0, y_0, z_0) 的某个闭邻域 $\omega' \subset V$, 使当 $(x, y, z) \in \omega'$ 时,

$$f(x, y, z) > 0.$$

这样一来, 利用中值定理, 即有

$$\iiint_{\omega'} f(x, y, z) dx dy dz = f(\xi, \eta, \zeta) \cdot V_{\omega'} > 0,$$

其中 $(\xi, \eta, \zeta) \in \omega' \subset V$. 这与假设

$$\iiint_{\omega} f(x, y, z) dx dy dz \equiv 0$$

矛盾. 因此, 当 $(x, y, z) \in V$ 时, $f(x, y, z) \equiv 0$.

4098. 求 $F(t)$, 设:

$$(a) F(t) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \text{ 其中 } f \text{ 为}$$

可微分函数;

$$(b) F(t) = \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f(xyz) dx dy dz, \text{ 其中 } f \text{ 为可微分函数.}$$

解 (a) 作球坐标变换得

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz \\
 &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\psi \int_0^t f(r^2) r^2 dr \\
 &= 4\pi \int_0^t (r^2) r^2 dr,
 \end{aligned}$$

于是,

$$F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

(σ) 作变换 $x = t\xi, y = t\eta, z = t\zeta$ 得

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} (xyz) dx dy dz \\
 &= \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f(t^3\xi\eta\zeta) t^3 d\xi d\eta d\zeta,
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 F'(t) &= 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} t^2 f(t^3\xi\eta\zeta) d\xi d\eta d\zeta \\
 &+ 3 \iiint_{\substack{0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1}} f(t^3\xi\eta\zeta) t^5 \xi\eta\zeta d\xi d\eta d\zeta \\
 &= \frac{3}{t} \left[F(t) + \iiint_{\substack{0 \leq x \leq t \\ 0 \leq y \leq t \\ 0 \leq z \leq t}} f'(xyz) xyz dx dy dz \right]
 \end{aligned}$$

($t > 0$).

4099. 求

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz,$$

其中 m, n, p 为非负整数.

解 分两种情况:

i) 设 m, n, p 中至少有一个是奇数. 例如, 设 p 为奇数. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz \\ &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz \\ &+ \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ z \leq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

今在积分 I_2 中作变量代换 $x = u, y = v, z = -\omega$, 则

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \omega)} = -1, \text{ 从而, 注意到 } p \text{ 为奇数, 可知}$$

$$I_2 = - \iiint_{\substack{x^2+y^2+\omega^2 \leq 1 \\ \omega \geq 0}} u^m v^n \omega^p du dv d\omega = -I_1$$

于是, $I = I_1 - I_1 = 0$.

ii) 设 m, n, p 均为偶数. 此时被积函数 $x^m y^n z^p$ 关于三个坐标平面皆对称. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz \\ &= 8 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz. \end{aligned}$$

引用球坐标, $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 得

$$\begin{aligned}
& \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} x^m y^n z^p dx dy dz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m+n+1} \psi \sin^p \psi d\psi \\
&\quad \cdot \int_0^1 r^{m+n+p+2} dr \\
&= \frac{1}{m+n+p+3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right)} \\
&\quad \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+n+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n+p+3}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{4(m+n+p+3)} \\
&\quad \cdot \frac{\frac{(m-1)!!}{2^{\frac{m}{2}}} \cdot \frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}} \cdot \frac{(p-1)!!}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \pi \sqrt{\pi}}{\frac{(m+n+p+1)!!}{2^{\frac{m+n+p+2}{2}}} \cdot \sqrt{\pi}} \\
&= \frac{\pi}{2(m+n+p+3)} \\
&\quad \cdot \frac{(m-1)!! \cdot (n-1)!! \cdot (p-1)!!}{(m+n+p+1)!!},
\end{aligned}$$

故

$$I = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} x^m y^n z^p dx dy dz$$

$$= \frac{4\pi}{m+p+n+3} \cdot \frac{(m-1)!! \cdot (n-1)!! \cdot (p-1)!!}{(m+n+p+1)!!}.$$

*) 利用 3856 题的结果.

4100. 计算迪里黑里积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz$$

$(p > 0, q > 0, r > 0, s > 0),$

此处 V 是由平面 $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界的区域, 假定

$$x + y + z = \xi, y + z = \xi\eta, z = \xi\eta\zeta.$$

解 由假设知

$$x = \xi(1-\eta), y = \xi\eta(1-\zeta), z = \xi\eta\zeta.$$

在此变换下可求得 $|I| = \xi^2\eta$, 并且积分域 V 变为:

$$0 \leq \xi \leq 1, 0 \leq \eta \leq 1, 0 \leq \zeta \leq 1.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dx dy dz \\ &= \int_0^1 \xi^{p+q+r+2} (1-\xi)^s d\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1} (1-\eta)^p d\eta \\ & \cdot \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^s d\zeta \\ &= B(p+q+r+3, s+1) \cdot B(q+r+2, p+1) \\ & \cdot B(r+1, q+1) \\ &= \frac{\Gamma(p+q+r+3) \cdot \Gamma(s+1) \cdot \Gamma(q+r+2)}{\Gamma(p+q+r+s+4) \cdot \Gamma(p+q+r+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \frac{\Gamma(p+1) \cdot \Gamma(r+1) \cdot \Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)} \\
 = & \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(s+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.
 \end{aligned}$$

§ 7. 利用三重积分计算体积法

域的体积 V 由下公式来表示

$$V = \iiint_V dx dy dz.$$

求由下列曲面所界的体积:

4101. $z = x^2 + y^2, z = 2x^2 + 2y^2, y = x, y = x^2.$

解 域 V 为

$$0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \leq z \leq 2x^2 + 2y^2,$$

$$\begin{aligned}
 \text{故体积为 } V &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 - \frac{1}{3}x^6 \right) dx \\
 &= \left(\frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{21}x^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{35}.
 \end{aligned}$$

4102. $z = x + y, z = xy, x + y = 1, x = 0, y = 0.$

解 域 V 为

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, xy \leq z \leq x+y,$$

故体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{xy}^{x+y} dz \\
 &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy) dy
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{(1-x)^3}{2} \right] dx = \frac{7}{24}$$

*) 因为 $0 \leq y \leq 1$, 故有 $xy \leq z \leq x + y$.

4103. $x^2 + z^2 = a^2, x + y = \pm a, x - y = \pm a$.

解
$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dz \\ &= 8 \int_0^a (a-x) \sqrt{a^2-x^2} dx \\ &= 8a \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \right] \Big|_0^a \\ &\quad + \frac{8}{3} (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^a \\ &= \frac{2a^3}{3} (3\pi-4). \end{aligned}$$

4104. $az = x^2 + y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2} (a > 0)$.

解 对立体 V 在 Oxy 平面上的射影作极坐标变换

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

则域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, \frac{r^2}{a} \leq z \leq r,$$

且有 $|I| = r$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \int_{\frac{x^2+y^2}{a}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{\frac{r^2}{a}}^r dz \\ &= 2\pi \int_0^a \left(r^2 - \frac{r^3}{a} \right) dr = \frac{\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

4105. $az = a^2 - x^2 - y^2, z = a - x - y, x = 0, y = 0, z = 0 (a > 0)$.

解 由 $az = a^2 - x^2 - y^2, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界的体积

为

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq a^2 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \left[\int_0^{\frac{a^2-x^2-y^2}{z}} dz \right] dx dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^a \frac{a^2-r^2}{a} r dr = \frac{\pi a^3}{8}. \end{aligned}$$

由 $z = a-x-y, x = 0, y = 0, z = 0$ 所界的体积为

$$V_2 = \iiint_{\substack{x+y+z \leq a \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0}} dx dy dz = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{a-x-y} dz = \frac{a^3}{6}.$$

于是,所求的体积为

$$V = V_1 - V_2 = \frac{a^3}{24}(3\pi - 4).$$

4106. $z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

解 引用圆柱坐标,则域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2, r \leq z \leq 6 - r^2.$$

于是,体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r dr \int_r^{6-r^2} dz \\ &= 2\pi \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

变换为球坐标或圆柱坐标,以计算曲面所界的体积:

4107. $x^2 + y^2 + z^2 = 2az, x^2 + y^2 \leq z^2.$

解 变换为圆柱坐标,则有

$$r^2 + z^2 = 2az \text{ 及 } r^2 \leq z^2.$$

因而域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a, r \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - r^2}.$$

于是,体积为

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz \\
 &= 2\pi \int_0^a r(a + \sqrt{a^2-r^2}-r) dr \\
 &= 2\pi \left[\frac{ar^2}{2} - \frac{1}{3}(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^a = \pi a^3.
 \end{aligned}$$

*) 球面的方程应该是 $z = a \pm \sqrt{a^2-r^2}$, 但因体积 V 的一部分为球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$ 的上半部, 故取

$$z = a + \sqrt{a^2-r^2}.$$

4108. $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2 - z^2)$.

解 变换为球坐标, 则域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq a \sqrt{\cos 2\psi}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned}
 V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\psi \int_0^{a\sqrt{\cos 2\psi}} r^2 \cos\psi dr \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\psi \cdot (\cos 2\psi)^{\frac{3}{2}} d\psi \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-2\sin^2\psi)^{\frac{3}{2}} d(\sin\psi) \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt^{*}) \\
 &= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

*) 作代换 $\sqrt{2}x = \sin t$.

4109. $(x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$.

解 立体在第一,第三,第六及第八卦限内,对于这些卦限分别有:

$$x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; x \leq 0, y \leq 0, z \geq 0;$$

$$x \leq 0, y \geq 0, z \leq 0; x \geq 0, y \leq 0, z \leq 0.$$

立体在这四个卦限内的各部分,一对一对地对称于坐标轴之一.这是因为左端及右端当 x, y, z 中的任何两个同时变号时等式不变.

变换为球坐标,计算得体积

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt{3\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi}} r^2 \cos\psi dr \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\psi \sin\psi d\psi \\ &= 4 \left(\frac{\sin^2\varphi}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \left(-\frac{1}{4} \cos^4\psi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4110. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 + z^2 = b^2, x^2 + y^2 = z^2 (z \geq 0) (0 < a < b).$

解 变换为球坐标,得域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{4} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad a \leq r \leq b.$$

于是,体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_a^b r^2 \cos\psi dr \\ &= 2\pi \left[\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right] \left(\int_a^b r^2 dr \right) \\ &= \frac{\pi(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)}{3}. \end{aligned}$$

在下列各例中最好利用普遍的极坐标

r, φ 及 ψ ($r \geq 0; 0 \leq \varphi \leq 2\pi; -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$),

根据下列各式来引入它们

$$x = ar \cos^{\alpha} \varphi \cos^{\beta} \psi,$$

$$y = br \sin^{\alpha} \varphi \cos^{\beta} \psi,$$

$$z = cr \sin^{\beta} \psi$$

(a, b, c, α, β 为常数), 并且

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \alpha \beta abc r^2 \cos^{\alpha-1} \varphi \sin^{\alpha-1} \varphi \cos^{2\beta-1} \psi \sin^{\beta-1} \psi.$$

计算下列曲面所界的体积:

$$4111. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x}{h}.$$

解 令 $x = ar \cos \varphi \cos \psi, y = br \sin \varphi \cos \psi, z = cr \sin \psi,$

则域的 $\frac{1}{4}$ 部分 (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{a}{h} \cos \varphi \cos \psi}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{h} \cos \varphi \cos \psi}} abc r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{4a^2 bc}{3h} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi \right) \\ &= \frac{\pi a^2 bc}{3h}. \end{aligned}$$

$$4112. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

解 令 $x = ar \cos \varphi \cos \psi, y = br \sin \varphi \cos \psi, z = cr \sin \psi,$ 并

利用对称性, 即得体积

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos \psi} abc r^2 \cos \psi dr$$

$$\begin{aligned}
&= 8 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{abc}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \psi d\psi \\
&= \frac{4\pi abc}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} abc.
\end{aligned}$$

4113. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}.$

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$, 则 r 满足方程 $r^4 + r^2 - 1 = 0$.

解得 $r = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} abrd r \int_{c^2}^{\sqrt{1-r^2}} dz \\
&= 2\pi abc \int_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} r(\sqrt{1-r^2} - r^2) dr \\
&= 2\pi abc \left[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}r^4 \right] \Big|_0^{\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\
&= \frac{5\pi abc(3-\sqrt{5})}{12}.
\end{aligned}$$

4114. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解 令 $x = ar\cos\varphi, y = br\sin\varphi, z = z$, 则得体积

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abrd r \int_{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}}^{c(1-r^2)^{\frac{1}{4}}} dz \\
&= 4\pi abc \int_0^1 r(1-r^2)^{\frac{1}{4}} dr \\
&= 4\pi abc \left[-\frac{2}{5}(1-r^2)^{\frac{5}{4}} \right] \Big|_0^1 = \frac{8}{5}\pi abc.
\end{aligned}$$

4115. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 + \frac{z^4}{c^4} = 1.$

解 令 $x = a \cos \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \psi, y = b r \sin \varphi \cos^{\frac{1}{2}} \psi,$
 $z = c r \sin^{\frac{1}{2}} \psi,$

则有 $|I| = \frac{1}{2} abc r^2 \sin^{-\frac{1}{2}} \psi$ 且 $\frac{1}{8}$ 域 V (第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 \frac{1}{2} abc r^2 \sin^{-\frac{1}{2}} \psi dr \\ &= \frac{2}{3} \pi abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \psi d\psi \\ &= \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)^{*}) \\ &= \frac{2}{3} \pi abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \pi abc \cdot \frac{\sqrt{\pi} \cdot \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{3} \pi abc \cdot \frac{\sqrt{\pi} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)^{**})}{\sqrt{2} \pi} \\ &= \frac{1}{3} abc \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

**) 利用余元公式: $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$.

利用适当的变量代换, 以计算由曲面所界的体积 (假定参数是正的):

$$4116. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

解 令 $x = ar\cos^2\varphi \cos^2\psi$, $y = br\sin^2\varphi \cos^2\psi$,
 $z = cr\sin^2\psi$, 则有 $|I| = 4abcr^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos^3\psi \sin\psi$, 且域
 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$0 \leq r \leq \left(\frac{a}{h} \cos^2\varphi + \frac{b}{k} \sin^2\varphi \right) \cos^2\psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{a}{h} \cos^2\varphi + \frac{b}{k} \sin^2\varphi\right) \cos^2\psi} 4abcr^2 \cos\varphi \sin\varphi \cos^3\psi \sin\psi dr \\ &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \left(\frac{a}{h} \cos^2\varphi + \frac{b}{k} \sin^2\varphi \right)^3 d\varphi \\ &\quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^9\psi \sin\psi d\psi \\ &= \frac{2}{15} abc \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{h^3} \cos^7\varphi \sin\varphi d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^3}{k^3} \cos\varphi \sin^7\varphi d\varphi \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \frac{a^2 b}{h^2 k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi \sin^3\varphi d\varphi \right. \\ &\quad \left. + 3 \cdot \frac{ab^2}{hk^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin^5\varphi d\varphi \right) \\ &= \frac{2}{15} abc \left(\frac{a^3}{8h^3} + \frac{b^3}{8k^3} + 3 \cdot \frac{a^2 b}{h^2 k} \cdot \frac{1}{24} + 3 \cdot \frac{ab^2}{hk^2} \cdot \frac{1}{24} \right)^* \\ &= \frac{1}{60} abc \left(\frac{a}{h} + \frac{b}{k} \right) \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2} \right). \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

$$4117. \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^4 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$$

解 令 $x = a \cos^2 \varphi \cos^2 \psi, y = b r \sin^2 \varphi \cos^2 \psi,$

$z = c r \sin^2 \psi,$ 则有 $|I| = 4abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi,$ 且域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^4 \psi \sin^2 \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \cos^4 \psi \sin^2 \psi} r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos^3 \psi \sin \psi dr \\ &= \frac{4}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \sin^4 \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{15} \psi \sin^7 \psi d\psi \\ &= \frac{4}{3} abc \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(4)\Gamma(4)}{\Gamma(8)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(8)\Gamma(4)^*}{\Gamma(12)} \\ &= \frac{1}{3} abc \cdot \frac{3!3!}{7!} \cdot \frac{7! \cdot 3!}{11!} = \frac{abc}{554400}. \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

4118. $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

解 令 $x = a \cos^2 \varphi \cos \psi, y = b r \sin^2 \varphi \cos \psi, z = c r \sin \psi,$
则有 $|I| = 2abc r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi,$ 且域 V 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 1.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 2abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos \varphi \sin \varphi \cos \psi dr \\ &= \frac{2}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi = \frac{1}{3} abc. \end{aligned}$$

4119. $z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y,$
 $2x = y (x > 0, y > 0).$

解 令 $z = u(x^2 + y^2), xy = v, x = yw,$ 则

$$x = \sqrt{vw}, y = \sqrt{\frac{v}{w}}, z = u\left(vw + \frac{v}{w}\right).$$

变换的雅哥比式为

$$I = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\sqrt{w}}{2\sqrt{v}} & \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{vw}} & -\frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{w^3}} \\ vw + \frac{v}{w} & u\left(w + \frac{1}{w}\right) & u\left(v - \frac{v}{w^2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= -\left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}\right),$$

而域 V 为

$$1 \leq u \leq 2, a^2 \leq v \leq 2a^2, \frac{1}{2} \leq w \leq 2.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 du \int_{a^2}^{2a^2} dv \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{v}{2} + \frac{v}{2w^2}\right) dw \\ &= \frac{3a^4}{4} \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{w^2}\right) dw \\ &= \frac{9a^4}{4}. \end{aligned}$$

4120. $x^2 + z^2 = a^2, x^2 + z^2 = b^2, x^2 - y^2 - z^2 = 0 (x > 0).$

解 令 $x = r\cos\varphi, y = y, z = r\sin\varphi$, 则域 V 为

$$a \leq r \leq b, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4},$$

$$-r\sqrt{\cos 2\varphi} \leq y \leq r\sqrt{\cos 2\varphi}$$

于是, 体积为

$$V = \int_a^b r dr \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}} dy$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4}{3}(b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos 2\varphi} d\varphi \\
&= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos \varphi} d\varphi \\
&= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{4})^{**})}{\Gamma(\frac{5}{4})} \\
&= \frac{2}{3}(b^3 - a^3) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right). \quad ***)
\end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

**) 利用余元公式有

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}\pi.$$

$$4121. (x^2 + y^2 + z^2)^3 = \frac{a^6 z^2}{x^2 + y^2}.$$

解 采用球坐标: $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 则域 V 的 $\frac{1}{8}$ 部分(第一卦限内)为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq a \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned}
V &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a \operatorname{tg}^{\frac{1}{3}} \psi} r^2 \cos \psi dr \\
&= \frac{4\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi d\psi = \frac{4\pi a^3}{3}.
\end{aligned}$$

$$4122. \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) = \frac{z}{h} \cdot e^{-\frac{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}{h}}.$$

解 令 $x = ar \cos \varphi \cos \psi, y = br \sin \varphi \cos \psi, z = cr \sin \psi$,

则域 V 的 $\frac{1}{4}$ 部分(第一卦限内) 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

这是由于 $z \geq 0$, 故域 V 在 Oxy 平面的上方.

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\left(\frac{c}{h} \sin \psi e^{-\sin^2 \psi}\right)^{\frac{1}{3}}} abc r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{4c^2 ab}{3h} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \psi \cos \psi e^{-\sin^2 \psi} d\psi \\ &= -\frac{\pi abc^2}{3h} e^{-\sin^2 \psi} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi abc^2}{3h} (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

$$4123. \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}} = \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right), \frac{x}{a} + \frac{y}{b} =$$

$$1, x = 0, x = a.$$

解 令 $u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, w = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$,

则

$$\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \end{vmatrix} = \frac{1}{abc},$$

且域 V 变为

$$0 \leq u \leq 1, \frac{2}{\pi} \omega \arcsin \omega \leq v \leq 1, -1 \leq \omega \leq 1.$$

于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = abc$, 且体积为

$$\begin{aligned}
V &= abc \int_0^1 du \int_{-1}^1 d\omega \int_{\frac{2}{\pi} \arcsin \omega}^1 dv \\
&= 2abc \int_0^1 \left[1 - \frac{2}{\pi} \omega \arcsin \omega \right] d\omega \\
&= 2abc - \frac{2abc}{\pi} \int_0^1 \arcsin \omega d(\omega^2) \\
&= abc + \frac{2abc}{\pi} \int_0^1 \omega^2 (1 - \omega^2)^{\frac{1}{2}} d\omega \\
&= abc + \frac{abc}{\pi} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= abc + \frac{abc}{\pi} B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} abc.
\end{aligned}$$

4124. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \ln \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - \frac{z}{c}}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}, x = 0, z = 0,$

$$\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

解 令 $u = \frac{x}{a}, v = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, \omega = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}$, 则

$$\frac{D(u, v, \omega)}{D(x, y, z)} = \frac{1}{abc},$$

且域 V 变为

$$0 \leq u \leq \omega, \omega e^{-\omega} \leq v \leq \omega, 0 \leq \omega \leq 1.$$

于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, \omega)} = abc$, 且体积为

$$\begin{aligned}
V &= abc \int_0^1 d\omega \int_0^{\omega} du \int_{\omega e^{-\omega}}^{\omega} dv \\
&= abc \int_0^1 (\omega^2 - \omega^2 e^{-\omega}) d\omega \\
&= abc \left(\frac{1}{3} - 2 + 5e^{-1} \right)
\end{aligned}$$

$$= 5abc \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{3} \right).$$

4125. 求曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 将球 $x^2 + y^2 + z^2 = 4az$ 分成两部分的体积的比.

解 曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 与球面 $x^2 + y^2 + (z - 2a)^2 = 4a^2$ 的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a^2 \\ z = a, \end{cases}$$

且有公共的顶点 $(0, 0, 4a)$. 球内位于曲面 $x^2 + y^2 + az = 4a^2$ 下方部分的体积为

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^a dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 4az - z^2} dx dy \\ &\quad + \int_a^{4a} dz \iint_{x^2 + y^2 \leq 4a^2 - az} dx dy \\ &= \int_0^a \pi(4az - z^2) dz + \int_a^{4a} \pi(4a^2 - az) dz \\ &= 2\pi a^3 - \frac{1}{3}\pi a^3 + 12\pi a^3 - \frac{15}{2}\pi a^3 \\ &= \frac{37}{6}\pi a^3. \end{aligned}$$

从而, 另一部分的体积

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi(2a)^3 - \frac{37}{6}\pi a^3 = \frac{27}{6}\pi a^3.$$

于是, 球被曲面所分的两部分体积之比为

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{27}.$$

4126. 求由曲面

$$x^2 + y^2 = az, z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (a > 0)$$

所界的体积和表面积.

解 两曲面的交线为圆周

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ z = a. \end{cases}$$

又曲面 $z = 2a - \sqrt{x^2 + y^2}$ 的顶点为 $(0, 0, 2a)$. 于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a dz \iint_{x^2+y^2 \leq az} dx dy + \int_a^{2a} dz \iint_{x^2+y^2 \leq (2a-z)^2} dx dy \\ &= \int_0^a \pi a z dz + \int_a^{2a} \pi (2a-z)^2 dz \\ &= \frac{\pi a^3}{2} + \frac{\pi a^3}{3} = \frac{5\pi a^3}{6}. \end{aligned}$$

由两曲面方程分别可得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{a}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{a},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2}.$$

于是, 曲面的表面积为

$$\begin{aligned} S &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\ &\quad + \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{2} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} a^2 r dr + \sqrt{2} \pi a^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi a^2}{6} (6\sqrt{2} + 5\sqrt{5} - 1).$$

4127. 求由平面

$$a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3.$$

所界平行六面体的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解 令

$$a_1x + b_1y + c_1z = u,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = v,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = w,$$

则有 $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$. 于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$, 且体积为

$$V = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{1}{|\Delta|} dw = \frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}.$$

4128. 求由曲面

$$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_3y + c_3z)^2 = h^2$$

所界的体积, 设

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

解 令

$$a_1x + b_1y + c_1z = u,$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = v,$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = w.$$

则有 $\frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)} = \Delta$. 于是, $\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\Delta}$, 且体积为

$$V = \frac{1}{|\Delta|} \iiint_{u^2 + v^2 + w^2 \leq h^2} dudvdw = \frac{4\pi h^3}{3|\Delta|}.$$

4129. 求曲面

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^n + \frac{z^{2n}}{c^{2n}} = \frac{z}{h} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^{n-1} \quad (n > 1)$$

所界的体积.

解 令 $x = ar\cos\varphi\cos\psi$, $y = br\sin\varphi\cos\psi$, $z = cr\sin\psi$, 则

有 $|I| = abcr^2\cos\psi$, 且域 V 的 $\frac{1}{4}$ 为

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin\psi \cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi + \sin^{2n}\psi}}.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{c}{h} \cdot \frac{\sin\psi \cos^{2n-4}\psi}{\cos^{2n}\psi + \sin^{2n}\psi}}} abcr^2 \cos\psi dr \\ &= \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\psi \cos^{2n-3}\psi d\psi}{\cos^{2n}\psi + \sin^{2n}\psi} \\ &= \frac{2}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-3} dt}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\ &= -\frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{t^{2n-4} d(1-t^2)}{t^{2n} + (1-t^2)^n} \\ &= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{(1-x)^{n-2} dx}{(1-x)^n + x^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^1 \frac{1}{(1-x)^2} dx \\
&= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^n} \quad *) \\
&= \frac{1}{3h} \pi abc^2 \cdot \frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}} \quad **) \\
&= \frac{\pi^2}{3n \sin \frac{\pi}{n}} \cdot \frac{abc^2}{h}.
\end{aligned}$$

*) 作代换 $t = \frac{x}{1-x}$.

**) 利用 3851 题的结果.

4130. 求在正卦限 $Oxyz (x > 0, y > 0, z > 0)$ 内由曲面

$$\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^p}{c^p} = 1 \quad (m > 0, n > 0, p > 0)$$

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

所界的体积.

解 令

$$x = ar^{\frac{2}{m}} \cos^{\frac{2}{m}} \varphi \cos^{\frac{2}{m}} \psi,$$

$$y = br^{\frac{2}{n}} \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi,$$

$$z = cr^{\frac{2}{p}} \sin^{\frac{2}{p}} \psi,$$

则

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)} = \frac{8abc}{mnp} r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p} - 1} \cos^{\frac{2}{m} - 1} \varphi$$

$$\cdot \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - 1} \psi \sin^{\frac{2}{p} - 1} \psi.$$

于是, 体积为

$$\begin{aligned}
V &= \frac{8abc}{mnp} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \\
&\quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{2}{m}-1} \psi \sin^{\frac{2}{p}-1} \psi d\psi \int_0^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p}-1} r^{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p}-1} dr \\
&= \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}, \frac{1}{p}\right) \\
&\quad \cdot \frac{1}{\frac{2}{m} + \frac{2}{n} + \frac{2}{p}} \quad *) \\
&= \frac{8abc}{mnp} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{1}{2} \\
&\quad \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)} \\
&\quad \cdot \frac{mnp}{2(mn + np + mp)} \\
&= \frac{abc}{mn + np + mp} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}\right)}.
\end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

§ 8. 三重积分在力学上的应用

1° 物体的质量 若一物体占有体积 V , $\rho = \rho(x, y, z)$ 为在点 (x, y, z) 的密度, 则该物体的质量等于

$$M = \iiint_V \rho dx dy dz.$$

2° 物体的重心 物体的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 按下列公式来计算

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho x dx dy dz, \\ y_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho y dx dy dz, \\ z_0 &= \frac{1}{M} \iiint_V \rho z dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

若物体是均匀的,则在公式(1)中可令 $\rho = 1$.

3° 转动惯量 积分

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \iiint_V \rho z^2 dx dy dz, \\ I_{yz} &= \iiint_V \rho x^2 dx dy dz, \\ I_{zx} &= \iiint_V \rho y^2 dx dy dz. \end{aligned}$$

分别称为物体对于坐标平面的转动惯量.

积分

$$I_l = \iiint_V \rho r^2 dx dy dz$$

(其中 r 为物体的动点 (x, y, z) 与轴 l 的距离)称为物体对于某轴 l 的转动惯量.特别是,对于坐标轴 Ox, Oy, Oz 分别有

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, I_y = I_{yz} + I_{xy}, I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

积分

$$I_0 = \iiint_V \rho(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

称为物体对于坐标原点的转动惯量.

显而易见,有

$$I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

4° 引力场的位 积分

$$u(x, y, z) = \iiint_V \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}$$

(其中 V 为物体的体积, $\rho = \rho(\xi, \eta, \zeta)$ 为物体的密度及

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

称为物体在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿位.

质量为 m 的质点被物体吸引的力在坐标轴 Ox, Oy, Oz 上的射影 X, Y, Z 等于

$$X = km \frac{\partial u}{\partial x} = km \iiint_V \rho \frac{\xi - x}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Y = km \frac{\partial u}{\partial y} = km \iiint_V \rho \frac{\eta - y}{r^3} d\xi d\eta d\zeta,$$

$$Z = km \frac{\partial u}{\partial z} = km \iiint_V \rho \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta d\zeta.$$

其中 k 为引力定律常数.

4131. 设物体在点 $M(x, y, z)$ 的密度由公式 $\rho = x + y + z$ 所给出, 求占有单位体积 $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ 之物体的质量.

解 质量以 M 表示, 则按题设有

$$M = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 (x + y + z) dz = \frac{3}{2}.$$

4132. 若物体的密度按规律 $\rho = \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ (其中 $\rho_0 > 0$ 及 $k > 0$ 为常数) 而变更, 求占有无限域 $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ 的物体的质量.

解 若令 $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 则质量为

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq 1} \rho_0 e^{-k\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_1^{\infty} r^2 \rho_0 e^{-kr} \cos \psi dr \\ &= 4\pi \rho_0 \int_1^{\infty} r^2 e^{-kr} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{4\pi\rho_0}{k} \int_1^{+\infty} r^2 e^{-kr} \\
&= -\frac{4\pi\rho_0}{k} r^2 e^{-kr} \Big|_1^{+\infty} \\
&\quad + \frac{4\pi\rho_0}{k} \int_1^{+\infty} 2re^{-kr} dr \\
&= \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \Big|_1^{+\infty} r de^{-kr} \\
&= \frac{4\pi\rho_0}{k} e^{-k} - \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \gamma e^{-kr} \Big|_1^{+\infty} \\
&\quad + \frac{8\pi\rho_0}{k^2} \int_1^{+\infty} e^{-kr} dr \\
&= 4\pi\rho_0 e^{-k} \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3} \right).
\end{aligned}$$

求由下列曲面所界的均匀物体的重心坐标:

4133. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, z = c.$

解 若令 $x = a \cos\varphi, y = b \sin\varphi, z = z$, 则质量为

$$M = ab \int_c^c dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r dr = \frac{\pi abc}{3}.$$

设重心坐标为 x_0, y_0, z_0 , 由对称性知 $x_0 = y_0 = 0$,

而

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{ab}{M} \int_0^c z dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{z}{c}} r dr \\
&= \frac{3}{\pi abc} \cdot \frac{\pi abc^2}{4} = \frac{3c}{4}.
\end{aligned}$$

于是, 重心为点 $\left(0, 0, \frac{3c}{4}\right)$.

4134. $z = x^2 + y^2, x + y = a, x = 0, y = 0, z = 0.$

解 物体的质量为

$$M = \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz = \frac{1}{6}a^4.$$

重心的横坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^a x dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \\ &= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{a^5}{15} = \frac{2a}{5}. \end{aligned}$$

同理可求得 $y_0 = \frac{2a}{5}$, 而

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^a dx \int_0^{a-x} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz \\ &= \frac{1}{M} \int_0^a \left(\frac{a^5}{10} - \frac{1}{2}a^4x + \frac{4}{3}a^3x^2 \right. \\ &\quad \left. - 2a^2x^3 + 2ax^4 - \frac{14}{15}x^5 \right) dx \\ &= \frac{6}{a^4} \cdot \frac{7}{180}a^6 = \frac{7}{30}a^2. \end{aligned}$$

于是, 重心的坐标为 $x_0 = y_0 = \frac{2}{5}a, z_0 = \frac{7}{30}a^2$.

4135. $x^2 = 2pz, y^2 = 2px, x = \frac{p}{2}, z = 0.$

解 物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz \\ &= \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{p^3}{28}. \end{aligned}$$

重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} x dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz \\ &= \frac{p^4}{72} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{18}p. \end{aligned}$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} y dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} dz = 0.$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{p}{2}} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dy \int_0^{\frac{x^2}{2p}} z dz \\ &= \frac{p^4}{704} \cdot \frac{28}{p^3} = \frac{7}{176} p. \end{aligned}$$

4136. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$

解 若令

$$x = a r \cos \varphi \cos \psi, y = b r \sin \varphi \cos \psi, z = c r \sin \psi,$$

则质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi dr \\ &= \frac{1}{6} \pi abc. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 abc r^2 \cos \psi \\ &\quad \cdot a r \cos \varphi \cos \psi dr \\ &= \frac{1}{M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \psi d\psi \int_0^1 a^2 b c r^3 dr \\ &= \frac{1}{16} \pi a^2 b c \cdot \frac{6}{\pi abc} = \frac{3}{8} a. \end{aligned}$$

利用对称性知重心的坐标为 $x_0 = \frac{3}{8} a, y_0 = \frac{3}{8} b, z_0 = \frac{3}{8} c.$

4137. $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2 (z > 0).$

解 物体的质量为

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^a dz \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dx \\
 &= 4 \int_0^a (a^2 - z^2) dz = \frac{8a^3}{3}.
 \end{aligned}$$

于是,

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_0^a dz \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} x dx = 0.$$

同理可得 $y_0 = 0$, 而

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^a z dz \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dx \\
 &= a^4 \cdot \frac{3}{8a^3} = \frac{3}{8}a.
 \end{aligned}$$

于是, 重心的坐标为 $x_0 = y_0 = 0, z_0 = \frac{3}{8}a$.

4138. $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z.$

解 由 $x^2 + y^2 = 2z, x + y = z$ 所围成的立体在平面 $z = 0$ 上的投影为圆 $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 2$.

若引用代换

$$x = 1 + r \cos \theta, y = 1 + r \sin \theta,$$

则质量为

$$\begin{aligned}
 M &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2-1+r(\cos\theta+\sin\theta)} dz \\
 &= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} (1 - \frac{r^2}{2}) r dr = \pi.
 \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
 x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \\
 &\quad \int_{1+r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2-1+r(\cos\theta+\sin\theta)} (1 + r \cos \theta) dz
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{M} \left[\pi + \int_0^{2\pi} \cos\theta d\theta \right] \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \left(1 - \frac{r^2}{2} \right) dr \\
&= \frac{\pi}{M} = 1.
\end{aligned}$$

同理可得 $y_0 = 1$, 而

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{1-r(\cos\theta+\sin\theta)+\frac{r^2}{2}}^{2+r(\cos\theta+\sin\theta)} z dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \left[3 + (\sin\theta + \cos\theta)(2r - r^3) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4}r^4 - r^2 \right] r dr \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{10\pi}{3} = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

于是, 重心坐标为 $x_0 = y_0 = 1, z_0 = \frac{5}{3}$.

4139. $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = \frac{xyz}{abc} \quad (x > 0, y > 0, z > 0).$

解 作代换: $x = a \cos\varphi \cos\psi, y = b r \sin\varphi \cos\psi,$
 $z = c r \sin\psi,$ 则物体的质量为

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{\cos\varphi \sin\psi} abc r^2 \cos\psi dr \\
&= \frac{1}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi \sin^3\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7\psi \sin^3\psi d\psi \\
&= \frac{1}{3} abc \cdot \frac{1}{2} B(2, 2) \cdot \frac{1}{2} B(4, 2) \\
&= \frac{1}{12} abc \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} \cdot \frac{\Gamma(4)\Gamma(2)}{\Gamma(6)} \\
&= \frac{abc}{1440}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{M} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \\
&\quad \int_c^{\cos\varphi \sin\psi \cos^2\psi \sin\psi} r^3 \cos^2\psi \cos\varphi dr \\
&= \frac{a^2 bc}{4M} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi \sin^4\varphi d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10}\psi \sin^4\psi d\psi \\
&= \frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} B\left(3, \frac{5}{2}\right) B\left(\frac{11}{2}, \frac{5}{2}\right) \\
&= \frac{a^2 bc}{4M} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\Gamma(3)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{11}{2}\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma(8)} \\
&= \frac{18a^2 bc \pi}{16 \cdot 16 \cdot 7!} \cdot \frac{1440}{abc} = \frac{9\pi}{448} a.
\end{aligned}$$

由对称性知,重心坐标为 $x_0 = \frac{9\pi}{448} a$,

$$y_0 = \frac{9\pi}{448} b, \quad z_0 = \frac{9\pi}{448} c.$$

4140. $z = x^2 + y^2, \quad z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \quad x + y = \pm 1,$

$$x - y = \pm 1.$$

解 作代换: $x - y = u, \quad x + y = v$, 则有

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{v-u}{2},$$

$$z = \frac{u^2+v^2}{4} \quad \text{及} \quad z = \frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|I| = \frac{1}{2}$ 及域 V 为: $-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$,

$\frac{u^2+v^2}{4} \leq z \leq \frac{u^2+v^2}{2}$. 于是,

$$M = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2+v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{2}} dz = \frac{1}{3}.$$

$$x_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2-v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{4}} (u+v) dz = 0,$$

$$y_0 = \frac{1}{4M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2-v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{4}} (v-u) dz = 0,$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{2M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 dv \int_{\frac{u^2-v^2}{4}}^{\frac{u^2+v^2}{4}} z dz \\ &= \frac{3}{64} \cdot \frac{1}{M} \int_{-1}^1 du \int_{-1}^1 (u^4 + 2u^2v^2 + v^4) dv \\ &= \frac{3}{64M} \int_{-1}^1 \left(2u^4 + \frac{4u^2}{3} + \frac{2}{5} \right) du \\ &= \frac{7}{20}, \end{aligned}$$

即重心坐标为 $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = \frac{7}{20}$.

4141. $\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} + \frac{z^n}{c^n} = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

($n > 0$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$).

解 作代换:

$$x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{1}{n}} \psi, \quad y = b r \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{1}{n}} \psi,$$

$$z = c r \sin^{\frac{1}{n}} \psi,$$

则有 $|I| = \frac{4}{n^2} abc r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \cdot \sin^{\frac{1}{n}-1} \psi$. 于

是,

$$\begin{aligned} M &= \frac{4}{n^2} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \\ &\quad \cos^{\frac{1}{n}-1} \psi \sin^{\frac{1}{n}-1} \psi dr \\ &= \frac{4}{n^2} abc \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{2}{n}, \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{abc}{3n^2} \cdot \frac{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

重心坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \cdot \frac{4}{n^2} a^2 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \\ &\quad \cdot \int_0^1 r \cos^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{2}{n}} \psi r^2 \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi \cos^{\frac{2}{n}-1} \psi \\ &\quad \cdot \cos^{\frac{4}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi dr \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \cos^{\frac{4}{n}-1} \varphi d\varphi \\ &\quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{6}{n}-1} \psi \sin^{\frac{2}{n}-1} \psi d\psi \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{n^2} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{M} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \\ &= \frac{3n^2}{abc} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma^3\left(\frac{1}{n}\right)} \cdot \frac{a^2 bc}{4n^2} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} a,$$

同理可求得

$$y_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} b,$$

$$z_0 = \frac{3}{4} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \Gamma\left(\frac{3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right)} c.$$

4142. 求形状为立方体:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

的物体的重心坐标, 设此物体在点 (x, y, z) 的密度等于

$$\rho = x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}},$$

其中 $0 < \alpha < 1$, $0 < \beta < 1$, $0 < \gamma < 1$.

解 物体的质量为

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz \\ &= \frac{1-\alpha}{\alpha} x^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Big|_0^1 \cdot \frac{1-\beta}{\beta} y^{\frac{\beta}{1-\beta}} \Big|_0^1 \\ &\quad \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} z^{\frac{\gamma}{1-\gamma}} \Big|_0^1 \\ &= \frac{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}$$

于是, 重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \int_0^1 x^{\frac{2\alpha-1}{1-\alpha}+1} dx \int_0^1 y^{\frac{2\beta-1}{1-\beta}} dy \\ &\quad \cdot \int_0^1 z^{\frac{2\gamma-1}{1-\gamma}} dz \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha\beta\gamma}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)} \cdot (1-\alpha) \frac{(1-\beta)(1-\gamma)}{\beta\gamma} = \alpha,$$

同理可求得 $y_0 = \beta$, $z_0 = \gamma$.

求由下列曲面(参变量是正的)所界均匀物体对于坐标平面的转动惯量:

4143. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

解
$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy \int_0^{c(1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b})} z^2 dz \\ &= \frac{c^3}{3} \int_0^a dx \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^3 dy \\ &= -\frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)^4 \Big|_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx \\ &= \frac{bc^3}{12} \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^4 dx \\ &= \frac{abc^3}{60}. \end{aligned}$$

利用对称性可得

$$I_{yx} = \frac{a^3bc}{60}, \quad I_{zx} = \frac{ab^3c}{60}.$$

4144. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

解 若令 $x = a \cos\varphi \cos\psi$, $y = b \sin\varphi \cos\psi$,
 $z = c \sin\psi$, 则有

$$\begin{aligned} I_{xy} &= abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^4 \cos\psi \sin^2\psi dr \\ &= \frac{abc^3}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin^2\psi d\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{abc^3}{15} \cdot 2\pi \cdot \sin^3\psi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{4}{15}\pi abc^3.
\end{aligned}$$

利用对称性可得

$$I_{yz} = \frac{4}{15}\pi a^3bc, \quad I_{xz} = \frac{4}{15}\pi ab^3c.$$

4145. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \quad z = c.$

解 若令 $x = a\cos\varphi, y = br\sin\varphi$, 则有

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abrd r \int_{cr}^c z^2 dz \\
&= \frac{1}{5}\pi abc^3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 abrd r \int_{cr}^c (\cos\varphi)^2 dz \\
&= a^3bc \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^1 (1-r)r^3 dr \\
&= \frac{1}{20}\pi a^3bc.
\end{aligned}$$

利用对称性可得

$$I_{xz} = \frac{1}{20}\pi ab^3c.$$

4146. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{a}.$

解 若令 $x = a\cos\varphi, y = br\sin\varphi$, 则得域 V 为

$$\begin{aligned}
-\frac{\pi}{2} &\leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \cos\varphi, \\
-c\sqrt{1-r^2} &\leq z \leq c\sqrt{1-r^2}.
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abrd r \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} z^2 dz \\
&= \frac{2}{3} abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} r dr \\
&= \frac{2}{15} abc^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [1 - (\sin^2\varphi)^{\frac{5}{2}}] d\varphi \\
&= \frac{4}{15} abc^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^5\varphi) d\varphi \\
&= \frac{4}{15} abc^3 \left(\varphi + \cos\varphi - \frac{2}{3} \cos^3\varphi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{5} \cos^5\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2abc^3}{225} (15\pi - 16).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos\varphi} abrd r \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} (\arccos\varphi)^2 dz \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 dr \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi d\varphi \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi \left\{ \int_{\varphi}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} d\varphi \\
&= 2a^3bc \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{15} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\varphi}^0 |\sin t| \sin t \cos^3 t dt \right\} \cos^2\varphi d\varphi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} \right. \\
&\quad + \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(- \int_{\varphi}^0 \sin^2 t \cos^3 t dt \right) \cos^2 \varphi d\varphi \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varphi}^0 \sin^2 t \cos^2 t dt \right) \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \\
&= 2a^3bc \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \varphi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \cos^2 \varphi d\varphi \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \\
&= 2a^3bc \left(\frac{\pi}{15} - \frac{92}{1575} \right) \\
&= \frac{2a^3bc}{1575} (105\pi - 92),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{zz} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_c^{\cos \varphi} abrd r \int_{-c\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} (br \sin \varphi)^2 dz \\
&= 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\cos \varphi} \sqrt{1-r^2} r^3 \sin^2 \varphi dr \\
&= 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} |\sin t| \\
&\quad \cdot \sin t \cos^3 t dt \\
&= 2ab^3c \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{2}{15} \right. \\
&\quad \left. + \int_{\varphi}^0 |\sin t| \cdot \sin t \cos^3 t \cdot dt \right\} \sin^2 \varphi d\varphi \\
&= 2ab^3c \left\{ \frac{\pi}{15} + \int_0^{-\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{5} \sin^5 \varphi \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \Big) \sin^2 \varphi d\varphi \\
& + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{5} \sin^5 \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right\} \sin^2 \varphi d\varphi \Big\} \\
& = 2ab^3c \left(\frac{\pi}{15} - \frac{272}{1575} \right) \\
& = \frac{2ab^3c}{1575} (105\pi - 272).
\end{aligned}$$

4147. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2 \frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$

解 两曲面在 Oxy 平面上的投影为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 2 \frac{x}{a} -$

$2 \frac{y}{b} = 0$, 即 $\left(\frac{x}{a} - 1 \right)^2 + \left(\frac{y}{b} - 1 \right)^2 = 2$. 若令

$$\frac{x}{a} = 1 + r \cos \varphi, \quad \frac{y}{b} = 1 + r \sin \varphi,$$

则得域 V 为

$$\begin{aligned}
& 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{2}, \\
& c \left[1 + \frac{r^2}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \right] \\
& \leq z \leq c [2 + r(\cos \varphi + \sin \varphi)].
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
I_{xy} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} abrd r \\
&\quad \int_{c \left(1 + \frac{r^2}{2} + r(\cos \varphi + \sin \varphi) \right)}^{c [2 + r(\cos \varphi + \sin \varphi)]} z^2 dz \\
&= \frac{1}{3} abc^3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r [8 + 12r(\cos \varphi + \sin \varphi) \\
&\quad + 6r^2(\cos \varphi + \sin \varphi)^2 - \left(1 + \frac{r^2}{2} \right)^3]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot 3\left(1 + \frac{r^2}{2}\right)^2 r(\cos\varphi - \sin\varphi) \\
& - 3\left(1 + \frac{r^2}{2}\right) r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)^2 \Big] dr \\
& = \frac{7}{2} \pi abc^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yz} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} a^3 br(1 + r\cos\varphi)^2 dr \\
& \int_{c(1 + \frac{r^2}{2} + r(\cos\varphi + \sin\varphi))}^{r(2 + r(\cos\varphi + \sin\varphi))} dz \\
& = a^3 bc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_c^{\sqrt{z}} r(1 + 2r\cos\varphi \\
& \quad + r^2\cos^2\varphi) \left(1 - \frac{r^2}{2}\right) dr \\
& = \frac{4}{3} \pi a^3 bc.
\end{aligned}$$

利用对称性得 $I_{zx} = \frac{4}{3} \pi ab^3 c$.

求由下列曲面所界均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量:

4148. $z = x^2 + y^2, x + y = \pm 1, x - y = \pm 1, z = 0$.

解 曲面所界的均匀物体对于 Oz 轴的转动惯量记以 I_z , 则

$$I_z = I_{zx} + I_{zy}.$$

若令 $x + y = u, x - y = v$, 则有

$$x = \frac{u+v}{2}, \quad y = \frac{u-v}{2}, \quad z = \frac{u^2+v^2}{2},$$

且 $|J| = \frac{1}{2}$. 于是,

$$I_z = \int_1^{-1} du \int_{-1}^1 dv \int_0^{\frac{u^2+v^2}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 \Big\} dz \\
& = \int_1^1 du \int_1^1 \frac{(u^2+v^2)^2}{8} dv = \frac{14}{45}.
\end{aligned}$$

4149. $x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 = z^2 (z > 0)$.

解 若令 $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, 则有

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r \leq z \leq \sqrt{2-r^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{\sqrt{2-r^2}} r^2 dz \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r^3 \sqrt{2-r^2} - r^4) dr \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{8}{15} \sqrt{2} - \frac{7}{5} - \frac{1}{5} \right) d\varphi \\
&= \frac{4\pi}{15} (4\sqrt{2} - 5).
\end{aligned}$$

*) 作代换 $r = \sqrt{2} \sin t$.

4150. 设球在动点 $P(x, y, z)$ 的密度与该点至球心距离成比例, 求质量为 M 的非均匀球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 对于其直径的转动惯量.

解 不失一般性, 取 Oz 轴在球内的一段作为直径.

若令

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, \quad y = r \sin \varphi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi,$$

则质量为

$$M = \int_c^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos \psi \cdot k r dr = k\pi R^4,$$

由此得 $k = \frac{M}{\pi R^2}$. 从而密度 $\rho = \frac{Mr}{\pi R^4}$. 于是, 所求的转动

惯量为

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^2 \cos^2 \psi \cdot \frac{Mr^3}{\pi R^4} \cos \psi dr \\
 &= \frac{2M}{R^4} \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi d\psi \right] \left(\int_0^R r^5 dr \right) = \frac{4MR^2}{9}.
 \end{aligned}$$

4151. 证明等式

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

其中 I_l 为物体对于某轴 l 的转动惯量, I_{l_0} 为对于平行于 l 并通过物体重心的轴 l_0 的转动惯量, d 为轴

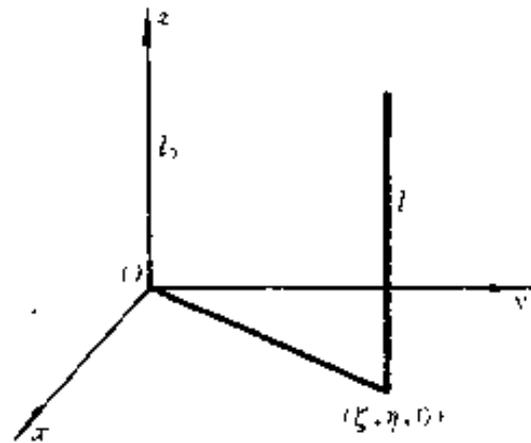


图 8.59

与轴之间的距离及 M 为物体的质量.

证 以重心为坐标原点 O , z 轴与 l_0 重合, l 与 Oxy 平面的交点为 $(\zeta, \eta, 0)$, 如图 8.59 所示, 则

$$\begin{aligned}
 I_l &= \iiint_V [(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2] \rho dv \\
 &= \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dv + (\zeta^2 + \eta^2) \\
 &\quad \cdot \iiint_V \rho dv - 2\zeta \iiint_V x \rho dv - 2\eta \iiint_V y \rho dv \quad (1)
 \end{aligned}$$

由于重心在原点, 故 $x_0 = y_0 = 0$, 即

$$x_0 = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho dv = 0$$

及

$$y_0 = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho dv = 0,$$

并且 $M = \iiint_V \rho dv, d^2 = \zeta^2 + \eta^2$, 代入(1)式, 最后得

$$I_l = I_{l_0} + Md^2.$$

4152. 证明: 体积为 V 的物体对于过其重心 $O(0,0,0)$ 并与坐标轴成角 α, β, γ 的轴 l 的转动惯量等于

$$\begin{aligned} I_l = & I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta \\ & + I_z \cos^2 \gamma - 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ & - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2K_{xz} \cos \alpha \cos \gamma. \end{aligned}$$

其中 I_x, I_y, I_z 为物体对于坐标轴的转动惯量及

$$K_{xy} = \iiint_V \rho xy dx dy dz,$$

$$K_{xz} = \iiint_V \rho xz dx dy dz,$$

$$K_{yz} = \iiint_V \rho yz dx dy dz$$

为离心距.

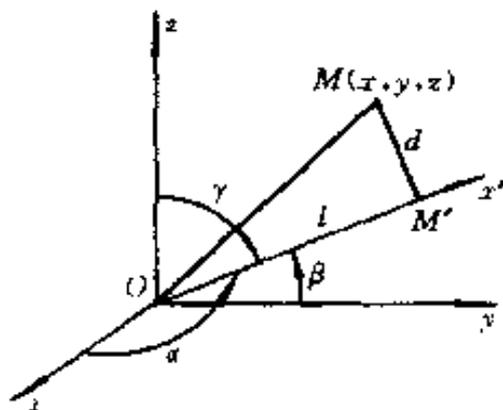


图 8.60

证 如图 8.60 所示, 距离

$$d = \frac{|\vec{OM} \times \vec{OM}'|}{|\vec{OM}|}$$

$$= \frac{1}{r} \sqrt{\left| \begin{array}{cc} y & z \\ r \cos \beta & r \cos \gamma \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} z & x \\ r \cos \gamma & r \cos \alpha \end{array} \right|^2 + \left| \begin{array}{cc} x & y \\ r \cos \alpha & r \cos \beta \end{array} \right|^2}$$

其中 $r = |\vec{OM}|$. 由于 $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, 故有

$$d^2 = (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma + (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha$$

$$+ (z^2 + x^2) \cos^2 \beta - 2xy \cos \alpha \cos \beta$$

$$- 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma.$$

于是,

$$I_t = \iiint_V \rho d^2 \cdot dx dy dz$$

$$= \cos^2 \gamma \iiint_V \rho \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$+ \cos^2 \alpha \iiint_V \rho \cdot (y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$+ \cos^2 \beta \iiint_V \rho \cdot (x^2 + z^2) dx dy dz$$

$$- 2 \cos \alpha \cos \beta \iiint_V \rho xy dx dy dz$$

$$- 2 \cos \beta \cos \gamma \iiint_V \rho yz dx dy dz$$

$$- 2 \cos \gamma \cos \alpha \iiint_V \rho xz dx dy dz$$

$$= I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma$$

$$- 2K_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2K_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

$$- 2K_{xz} \cos \gamma \cos \alpha.$$

证毕.

4153. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2, z = \pm h$ 对于直线 $x = y = z$ 的转动惯量.

解 直线 $x = y = z$ 通过圆柱的重心 $O(0, 0, 0)$ 且具有方向余弦 $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 若取极坐标, 则有

$$I_x = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \sin^2 \varphi + z^2) dz \\ = \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0,$$

$$I_y = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 (r^2 \cos^2 \varphi + z^2) dz \\ = \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 \right) \rho_0,$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 dz = \pi h a^4 \rho_0,$$

$$K_{xy} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r^2 \cos\varphi \sin\varphi dz = 0,$$

$$K_{yz} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 r \sin\varphi \cdot z dz = 0,$$

$$K_{zx} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_{-h}^h \rho_0 \cdot r \cos\varphi \cdot z dz = 0,$$

于是, 根据 4152 题结果即得

$$I_t = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \\ - 2k_{xy} \cos\alpha \cos\beta - 2K_{yz} \cos\beta \cos\gamma \\ - 2K_{zx} \cos\alpha \cos\gamma \\ = \frac{\rho_0}{3} \left(\frac{1}{2} \pi a^4 h + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \frac{1}{2} \pi a^4 h \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \pi a^2 h^3 + \pi a^4 h \right) = \frac{2}{3} \pi \rho_0 a^2 h \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right)$$

$$= \frac{M}{3} \left(a^2 + \frac{2}{3} h^2 \right),$$

其中 $M = 2\pi\rho_0 a^2 h$ 为圆柱的质量.

4154. 求密度为 ρ_0 , 由曲面

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

所界的均匀物体对于坐标原点的转动惯量.

解 若令 $x = r\cos\varphi\cos\psi, y = r\sin\varphi\cos\psi, z = r\sin\psi$, 则对坐标原点的转动惯量为

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{a\cos\psi} \rho_0 \cdot r^2 \cdot r^2 \cos\psi dr \\ &= \frac{4\pi\rho_0 a^5}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\psi d\psi \\ &= \frac{4\pi\rho_0 a^5}{5} \cdot \frac{5\pi^*}{32} = \frac{\pi^2 a^5 \rho_0}{8}. \end{aligned}$$

*) 利用 2282 题的结果.

4155. 求密度为 ρ_0 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 在点 (x, y, z) 的牛顿位.

解 由对称性显然可知, 所求的牛顿位与 ξ, η, ζ 轴取的方向无关. 今取 $O\zeta$ 轴通过点 $P(x, y, z)$, 即得牛顿位

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \rho_0 \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}} \\ &= \rho_0 \int_{-R}^R d\zeta \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}}, \end{aligned}$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

积分之, 得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= 2\pi\rho_0 \int_{-R}^R (\sqrt{R^2 - 2r\zeta + r^2} - |\zeta - r|) d\zeta. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - 2r\xi + r^2} d\xi \\ &= \frac{1}{3}r[(R+r)^3 - |R-r|^3] \\ &= \begin{cases} \frac{2}{3}R^3 \frac{1}{r} + 2rR, & (r > R); \\ \frac{2}{3}r^2 - R^2, & (r \leq R), \end{cases} \end{aligned}$$

及

$$\int_{-R}^R |\xi - r| d\xi = \begin{cases} 2Rr & (r > R), \\ r^2 + R^2 & (r \leq R). \end{cases}$$

因而,最后得

$$u(x, y, z) = \begin{cases} \frac{4}{3r} \pi R^3 \rho_0 & (r > R), \\ 2\pi\rho_0 \cdot \left(R^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) & (r \leq R). \end{cases}$$

由以上结果可以得到下面两个推论:

1. 在球外一点上的牛顿位,与将球的全部质量集中在它的中心处时一样;

2. 如考察一个内半径为 R_1 而外半径为 R_2 的空心球,则它在位于其空隙处的一点 ($r < R$) 上的牛顿位可表示成差

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_2(x, y, z) - u_1(x, y, z) \\ &= \left(R_2^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) 2\pi\rho_0 \\ &\quad - \left(R_1^2 - \frac{1}{3}r^2 \right) 2\pi\rho_0 \\ &= 2\pi(R_2^2 - R_1^2)\rho_0. \end{aligned}$$

它与 r 无关,故空心球体在其空隙范围内的位势保持一个常数值.

4156. 设密度 $\rho = f(R)$, 其中 f 为已知函数, 且 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, 求球壳层 $R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2$ 在点 $P(x, y, z)$ 的牛顿位.

解 取 $O\xi$ 轴通过点 $P(x, y, z)$, 即得牛顿位

$$u(x, y, z) = \iiint_{R_1^2 \leq \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2} f(\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}) \cdot \frac{d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - r)^2}},$$

其中 $r = x^2 + y^2 + z^2$.

若引入球坐标, 即得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \cos\psi \\ &\quad \cdot \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2} \cdot 2\rho r \sin\psi} \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 f(\rho) \cdot \frac{\cos\psi d\psi}{\sqrt{\rho^2 + r^2} \cdot 2\rho r \sin\psi} \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \\ &\quad \cdot \left(-\frac{1}{\rho r} \sqrt{\rho^2 + r^2} - 2\rho r \sin\psi \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\rho \\ &= 2\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho^2 f(\rho) \left\{ -\frac{1}{\rho r} [|\rho - r| - (\rho + r)] \right\} d\rho \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \rho f(\rho) d\rho, & \text{当 } \rho > r; \\ 4\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho^2}{r} f(\rho) d\rho, & \text{当 } \rho \leq r. \end{cases}$$

合并之,最后得

$$u(x, y, z) = 4\pi \int_{R_1}^{R_2} f(\rho) \min\left\{\frac{\rho^2}{r}, \rho\right\} d\rho.$$

4157. 求有固定密度 ρ_0 的圆柱 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$ 在点 $P(0, 0, z)$ 的牛顿位.

解 若引用柱坐标,即得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h d\zeta \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2}} \\ &= 2\pi\rho_0 \int_0^h \left. \sqrt{r^2 + (\zeta - z)^2} \right|_0^a d\zeta \\ &= 2\pi\rho_0 \int_0^h (\sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} - |\zeta - z|) d\zeta \\ &= 2\pi\rho_0 \left[\frac{(\zeta - z)}{2} \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{a^2}{2} \ln |(\zeta - z) + \sqrt{a^2 + (\zeta - z)^2}| \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\zeta - z)|\zeta - z|}{2} \right] \Big|_0^h \\ &= \pi\rho_0 \left\{ (h - z) \sqrt{a^2 + (h - z)^2} + z \sqrt{a^2 + z^2} \right. \\ &\quad \left. - [(h - z)|h - z| + z|z|] \right. \\ &\quad \left. + a^2 \ln \left| \frac{h - z + \sqrt{a^2 + (h - z)^2}}{-z + \sqrt{a^2 + z^2}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

4158. 半径为 R 和质量为 M 的均匀球体 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2$ 以怎样的力吸引质量为 m 的质点 $P(0, 0, a)$?

解 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零, 即 $X = Y = 0$, 而在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned}
 Z &= k\rho_0 m \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R^2} \frac{(\zeta - a) d\xi d\eta d\zeta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= km\rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) d\zeta \iint_{\xi^2 + \eta^2 \leq R^2 - \zeta^2} \frac{d\xi d\eta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= km\rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) d\zeta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{R^2 - \zeta^2}} \frac{r dr}{[r^2 + (\zeta - a)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
 &= 2\pi km\rho_0 \int_{-R}^R (\zeta - a) \left(\frac{1}{|\zeta - a|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \right) d\zeta \\
 &= 2\pi km\rho_0 \int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta - 2\pi km\rho_0 \int_{-R}^R \frac{(\zeta - a) d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}}
 \end{aligned}$$

其中 $\rho_0 = \frac{3M}{4\pi R^3}$,

分别求上述两个积分:

当 $a \geq R$ 时,

$$\int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta = - \int_{-R}^R d\zeta = -2R,$$

当 $a < R$ 时,

$$\int_{-R}^R \operatorname{sgn}(\zeta - a) d\zeta = - \int_{-R}^a d\zeta + \int_a^R d\zeta = -2a;$$

而

$$\begin{aligned}
 & \int_{-R}^R \frac{(\zeta - a)d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \\
 &= -\frac{1}{2a} \int_{-R}^R \frac{R^2 + a^2 - 2a\zeta - (R^2 + a^2)}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} d\zeta \\
 & \quad - a \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 - 2a\zeta + a^2}} \\
 &= -\frac{1}{2a} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} d\zeta \\
 & \quad + \left(\frac{R^2 + a^2}{2a} - a \right) \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta}} \\
 &= -\frac{1}{2a} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} d\zeta \\
 & \quad + \frac{R^2 - a^2}{2a} \int_{-R}^R \frac{d\zeta}{\sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta}},
 \end{aligned}$$

当 $a \geq R$ 时, 将上式右端分别积分, 得结果:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{4a^2} (R^2 + a^2 - 2a\zeta)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{R^2 - a^2}{2a} \left(-\frac{1}{2a} \right) \right. \\
 & \quad \left. \cdot 2 \sqrt{R^2 + a^2 - 2a\zeta} \right] \Big|_{-R}^R \\
 &= \frac{1}{6a^2} [(a - R)^3 - (a + R)^3] \\
 & \quad - \frac{R^2 - a^2}{2a^2} [(a - R) - (a + R)] \\
 &= \frac{2R^3}{3a^2} - 2R;
 \end{aligned}$$

当 $a < R$ 时, 积分得结果:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{6a^2} [(R - a)^3 - (a + R)^3] \\
 & \quad - \frac{R^2 - a^2}{2a^2} [(R - a) - (R + a)]
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{4a}{3}.$$

于是,当 $a \geq R$ 时,则

$$\begin{aligned} Z &= 2\pi km\rho_0 \left(-2R - \frac{2R^3}{3a^2} + 2R \right) \\ &= -\frac{4}{3a^2}\pi km\rho_0 R^3 = -\frac{kMm}{a^2}; \end{aligned}$$

当 $a < R$ 时,则

$$\begin{aligned} Z &= 2\pi km\rho_0 \left(-2a + \frac{4a^3}{3} \right) \\ &= -\frac{4}{3}\pi akm\rho_0 = -\frac{kMm}{R^3}a. \end{aligned}$$

从以上结果可以得到两个推论:

1. 位于球外的一点 ($a \geq R$) 因球体而受到的吸引力相当于将球体的全部质量 $M = \frac{4}{3}\pi R^3\rho_0$ 集中在它的中心处时受到的引力,引力的方向朝向球心;

2. 对于在球里面的一点 ($a < R$) 来说,吸引力与 R 无关,其大小与 $R = a$ 时的情况一样,即在点 P 外面的球壳部分对 P 点的引力为零.

4159. 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱 $\xi^2 + \eta^2 \leq a^2, 0 \leq \zeta \leq h$ 对具有单位质量的质点 $P(0, 0, z)$ 的吸引力.

解 由对称性知,引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零,即 $X = Y = 0$. 若引用柱坐标,即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned} Z &= k\rho_0 \iint_{\xi^2 + \eta^2 = a^2} d\xi d\eta \int_0^h \frac{(\zeta - z)d\zeta}{[\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r dr \int_0^h \frac{(\zeta - z)d\zeta}{[r^2 + (\zeta - z)^2]^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi k\rho_0 \int_0^a r \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (h-z)^2}} \right) dr \\
&= 2\pi k\rho_0 [\sqrt{a^2 + z^2} - \sqrt{a^2 + (h-z)^2} - |z| + |h-z|].
\end{aligned}$$

易知,

当 $0 \leq z < \frac{h}{2}$ 时, $z > 0$, 此时吸引力朝着向上的铅垂线;

当 $\frac{h}{2} < z \leq h$ 时, $z < 0$, 此时吸引力朝着向下的铅垂线;

当 $Z = \frac{h}{2}$ 时, $Z = 0$, 引力为零.

4160. 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对于在其顶点为一单位质量的质点的吸引力, 设球的半径为 R , 而轴截面的扇形的角等于 $2a$.

解 由对称性知, 引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影为零, 即 $X = Y = 0$. 若引用球坐标, 即得引力在 Oz 轴上的射影为

$$\begin{aligned}
Z &= \iiint_V \frac{k\rho_0 z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} dx dy dz \\
&= k\rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}-a}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi \sin\psi d\psi \int_0^R dr \\
&= k\pi R\rho_0 \sin^2 a.
\end{aligned}$$

§ 9. 二重和三重广义积分

1° 无界限域的情形 若二维的域 Ω 是无界的及函数 $f(x, y)$ 在域 Ω 上连续, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} f(x, y) dx dy, \quad (1)$$

其中 Ω_n 为域 Ω 中可求积的有界封闭子域的任意序列, 这个序列可以盖满域 Ω . 若在右端的极限存在且与序列 Ω_n 的选择无关, 则对应的积分称为收敛的; 在相反的情形称为发散的.

同样定义出连续函数展布在无界的三维域上的三重广义积分.

2° 不连续函数的情形 若函数 $f(x, y)$ 在有界封闭域 Ω 内除了点 $P(a, b)$ 而外处处是连续的, 则定义:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega \setminus U_{\varepsilon}} f(x, y) dx dy, \quad (2)$$

其中 U_{ε} 是点 P 的 ε 邻域, 当极限存在的情形, 所研究的积分称为收敛的; 在相反的情形称为发散的.

假定在点 $P(a, b)$ 的邻近有等式

$$f(x, y) = \frac{\varphi(x, y)}{r^{\alpha}},$$

其中函数 $\varphi(x, y)$ 的绝对值是介于二正数 m 和 M 之间, 且

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

则 1) 当 $\alpha < 2$ 时, 积分(2)收敛; 2) 当 $\alpha \geq 2$ 时, 积分(2)发散.

若函数 $f(x, y)$ 有不连续的线, 同样可定义出广义积分(2).

不连续函数的广义积分定义易于引伸到三重积分的情形.

研究下列具有无界积分域的广义积分的收敛性

$$(0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M):$$

$$4161. \iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy.$$

解 由于

$$\frac{m}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2+y^2)^p} \leq \frac{M}{(x^2+y^2)^p},$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$$

与积分 $\iint_{x^2+y^2>1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ 同时收敛同时发散. 由

于 $\frac{1}{(x^2+y^2)^p}$ 是正的, 故引用极坐标, 得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2>1} \frac{1}{(x^2+y^2)^p} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^{+\infty} \frac{r}{r^{2p}} dr = \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & \text{若 } p > 1; \\ +\infty, & \text{若 } p \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

由此可知, 原积分 $\iint_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+y^2)^p} dx dy$ 当 $p > 1$ 时

收敛, 当 $p \leq 1$ 时发散.

$$4162. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}.$$

解 由于被积函数是正的, 并且关于 Ox 轴和 Oy 轴都对称, 故

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx dy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)} \end{aligned}$$

$$= 4 \left(\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} \right).$$

由于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p \cdot \frac{1}{1+x^p} = 1$, 故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p}$

当 $p > 1$ 时收敛, $p < 1$ 时发散, $p = 1$ 时显然也发散

($\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty$). 因此,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^p} = \begin{cases} \text{有限数, 当 } p > 1 \text{ 时;} \\ +\infty, & \text{当 } p \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

同理有

$$\int_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^q} = \begin{cases} \text{有限数, 当 } q > 1 \text{ 时;} \\ +\infty, & \text{当 } q \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$ 仅当 $p > 1$

且 $q > 1$ 时收敛, 其它情形均发散.

4163. $\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2+y^2)^p} dxdy$

解 仿 4161 题, 可知积分 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dxdy$

与积分 $\iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p}$ 同时收敛同时发散. 由于

被积函数是正的, 故

$$\begin{aligned} & \iint_{0 \leq x \leq 1} \frac{dxdy}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &= \int_0^1 dy \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &= 2 \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p}; \end{aligned}$$

由于, 当 $0 \leq y \leq 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p \geq 0), \\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &\geq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (\text{若 } p < 0), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(2+x^2)^p} &\leq \iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p} \\ &\leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^p} \quad (p \geq 0), \end{aligned}$$

若 $p < 0$, 则有相反的不等式.

对于 $a > 0$, 由于

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{2p} \frac{1}{(a^2+x^2)^p} = 1,$$

故积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^p}$ 当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛, $p < \frac{1}{2}$ 时发散. 实际上, 此积分当 $p = \frac{1}{2}$ 时也发散, 因为

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) \Big|_0^{+\infty} = +\infty.$$

由此可知: 积分 $\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{dx dy}{(1+x^2+y^2)^p}$, 从而积分

$$\iint_{0 \leq y \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p} dx dy \quad \text{当 } p > \frac{1}{2} \text{ 时收敛, 当 } p \leq \frac{1}{2} \text{ 时发散.}$$

4164. $\iint_{|x|+|y| \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$

解 由对称性及被积函数的非负性,有

$$\begin{aligned} \iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q} &= 4 \iint_{\substack{x\geq 0, y\geq 0 \\ x+y\geq 1}} \frac{dxdy}{x^p+y^q} \\ &= 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dxdy}{x^p+y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dxdy}{x^p+y^q}, \end{aligned}$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1, x^p + y^q \leq 2\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \geq 1, x^p + y^q \geq 2\}$, 令 $\Omega_3 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \geq 2\}$, 易知, 当 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \geq 2$ 时必有 $x + y \geq 1$ (因若 $x + y < 1$, 则必有 $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$, 从而 $0 \leq x^p < 1, 0 \leq y^q < 1$, 这就会得出 $x^p + y^q < 2$), 故 $\Omega_2 = \Omega_3$. 由于 Ω_1 是有界闭区域, 故(1)式右端第一个积分为常义积分, 因此广义积分

$$\iint_{|x|+|y|\geq 1} \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$$

的敛散性取决于广义积分 $\iint_{\Omega_3} \frac{dxdy}{x^p+y^q}$ 的敛散性, 在此

积分中作变量代换

$$x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{q}} \theta, y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta,$$

则易知

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p}-\frac{2}{q}-1} \sin^{\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta.$$

于是, 注意到被积函数是非负的, 得

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_3} \frac{dxdy}{x^p+y^q} &= \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta d\theta \\ &\quad \cdot \int_{\sqrt{2}}^{-\infty} r^{\frac{2}{p}+\frac{2}{q}-3} dr. \end{aligned}$$

由 3856 题的结果知,右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛,且其值为 $\frac{1}{2} B(\frac{1}{q}, \frac{1}{p})$; 而第二个积分

$$\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr$$

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 < -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p}$

+ $\frac{2}{q} - 3 \geq -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$) 时发散.

综上所述,可知广义积分

$$\iint_{x|1, y \geq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$$

仅当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$ 时收敛.

4165. $\iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy.$

解 设此积分收敛. 以 I 表其值. 先设 $p < 1$.

令 $\Omega_n = \{(x, y) | 1 \leq x - y \leq 2n\pi,$
 $-2n\pi \leq x - y \leq 2n\pi\},$

$\Omega'_n = \{(x, y) | 1 \leq x + y \leq 2n\pi - \frac{\pi}{4},$
 $-2n\pi \leq x - y \leq 2n\pi\},$

$\omega_n = \{(x, y) | 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x + y \leq 2n\pi,$
 $-2n\pi \leq x - y \leq 2n\pi\},$

其中 $n = 1, 2, 3, \dots$, 则显然有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\Omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = I,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\tilde{D}_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = I.$$

从而

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\iint_{\tilde{D}_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \right. \\ & \quad \left. - \iint_{\tilde{D}_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \right) \\ &= I - I = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

由于 $\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, 今在 (1) 式左端的积分中作变量代换 $x+y=u, x-y=v$ (即 $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$), 并注意到 $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = -\frac{1}{2}$, 得

$$\begin{aligned} & \iint_{\omega_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \\ &= \frac{1}{4} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} du \int_{-2n\pi}^{2n\pi} \frac{\cos v - \cos u}{u^p} dv \\ &= -n\pi \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du; \end{aligned}$$

而

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{du}{u^p}$$

$$\geq \begin{cases} \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p}, & \text{当 } p > 0 \text{ 时;} \\ \frac{\pi}{4\sqrt{2}}, & \text{当 } p \leq 0 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知(注意前面假定 $p < 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty,$$

此显然与(1)式矛盾.

现设 $p \geq 1$. 令

$$\omega'_n = \left\{ (x, y) \mid 2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq x + y \leq 2n\pi, \right. \\ \left. -2\pi n^{[p]+2} \leq x - y \leq 2\pi n^{[p]+2} \right\},$$

仿上, 应有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = 0. \quad (2)$$

但另一方面, 和上面一样, 作代换 $x + y = u, x - y = v$ 后, 有

$$\iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy \\ = -\pi n^{[p]-2} \int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du.$$

同样, 由

$$\int_{2n\pi - \frac{\pi}{4}}^{2n\pi} \frac{\cos u}{u^p} du \geq \frac{\pi}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{(2n\pi)^p},$$

即得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\omega'_n} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy = -\infty,$$

此显然与(2)式矛盾.

综上所述,可知:不论 p 为何值,积分

$$\iint_{x+y \geq 1} \frac{\sin x \sin y}{(x+y)^p} dx dy$$

都发散.

4166. 证明:若连续函数 $f(x, y)$ 不为负及 $S_n (n = 1, 2, \dots)$ 为有界闭域的任一叙列,这个叙列可以盖满域 S , 则

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy,$$

这里左端与右端同时有意义或同时无意义.

证 取定一有界闭域的叙列 S'_n , 它盖满 S 并且 $S'_1 \subset S'_2 \subset \dots \subset S'_n \subset \dots \subset S$. 由于 $f(x, y)$ 在 S 上非负, 故

积分叙列 $\iint_{S'_n} f(x, y) dx dy$ 是递增的, 从而极限

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy \quad (1)$$

存在(是有限数或是 $+\infty$). 我们要证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f(x, y) dx dy = I. \quad (2)$$

先设 I 为有限数. 任给 $\epsilon > 0$, 由(1)式知, 存在 N , 使当 $n \geq N$ 时, 恒有

$$I - \epsilon < \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy < I + \epsilon. \quad (3)$$

又存在 n_0 , 使当 $n \geq n_0$ 时, $S_n \supset S'_N$. 从而, 根据 $f(x, y)$ 的非负性以及(3)式, 得

$$\iint_{S_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S'_N} f(x, y) dx dy > I - \epsilon.$$

另一方面, 对每个固定的 $n \geq n_0$ 又必存在某个充分大的

$k_n (\geq N)$ 使 $S'_{k_n} \supset S_n$. 于是, 再由 (3) 式得

$$\iint_{S'_n} f(x, y) dx dy \leq \iint_{S'_{k_n}} f(x, y) dx dy < I + \epsilon.$$

由此可知, 当 $n \geq n_0$ 时, 恒有

$$I - \epsilon < \iint_{S'_n} f(x, y) dx dy < I + \epsilon,$$

故 (2) 式成立.

次设 $I = +\infty$. 任给 $M > 0$, 由 (1) 式知, 存在 N_1 , 使

$$\iint_{S'_{N_1}} f(x, y) dx dy > M.$$

又存在 n_1 , 使当 $n \geq n_1$ 时, 恒有 $S_n \supset S'_{N_1}$, 从而此时

$$\iint_{S'_n} f(x, y) dx dy \geq \iint_{S'_{N_1}} f(x, y) dx dy > M,$$

故 (2) 式成立. 证毕.

4167. 证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy = \pi,$$

但

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0$$

(n 为自然数).

证 利用极坐标, 我们有

$$\iint_{x^2 + y^2 \leq 2n\pi} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2\pi n}} r \sin r^2 dr \\
&= \pi(1 - \cos 2n\pi) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),
\end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{x^2 + y^2 \leq 2\pi n} \sin(x^2 + y^2) dx dy = 0.$$

但由对称性,有

$$\begin{aligned}
&\iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy \\
&= 4 \iint_{\substack{0 \leq x \leq n \\ 0 \leq y \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy \\
&= 4 \int_0^n dy \int_0^n (\sin x^2 \cos y^2 + \cos x^2 \sin y^2) dx \\
&= 4 \left(\int_0^n \cos y^2 dy \right) \left(\int_0^n \sin x^2 dx \right) \\
&\quad + 4 \left(\int_0^n \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^n \sin y^2 dy \right) \\
&= 8 \left(\int_0^n \cos x^2 dx \right) \left(\int_0^n \sin x^2 dx \right).
\end{aligned}$$

根据 3830 题的结果,可知

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \sin x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

从而,得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{\substack{|x| \leq n \\ |y| \leq n}} \sin(x^2 + y^2) dx dy$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

4168. 证明纵使累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

及 $\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$

收敛, 但积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

发散.

证 先证两个累次积分收敛. 我们有

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy \\ &= \int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2y} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} - \int_1^{+\infty} \frac{y}{2} \cdot \frac{2y dy}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= -\frac{x^2}{2y(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2 + y^2)} \\ & \quad + \frac{y}{2(x^2 + y^2)} \Big|_{y=1}^{y=+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{dy}{2(x^2 + y^2)} \\ &= \frac{x^2}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) dy \\ & \quad - \frac{1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x^2 - 1}{2(x^2 + 1)} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

故 $\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$

$$= -\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1} = -\frac{\pi}{4};$$

同理(利用已算得的结果)

$$\begin{aligned} & \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \\ &= - \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx \\ &= - \int_1^{+\infty} \left(-\frac{1}{y^2 + 1} \right) dy = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

故两个累次积分都收敛.

次证积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \quad (1)$$

发散. 为此只要证积分

$$\iint_{x \geq 1, 1 \leq y \leq x} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \quad (2)$$

发散即可(因为如果积分(1)收敛, 则绝对值积分

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy \quad (3)$$

必收敛. 从而在小一点的区域上的积分

$$\iint_{x \geq 1, 1 \leq y \leq x} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy$$

更收敛. 由此可知, 积分(2)收敛). 由于,

$$\begin{aligned} I_n &= \iint_{\substack{1 \leq x \leq n \\ 1 \leq y \leq x}} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\ &= \int_1^n dx \int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy, \end{aligned}$$

仿上, 利用部分积分法, 容易算得

$$\int_1^x \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{x^2}{2y(x^2+y^2)} \Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{x^2 dy}{2y^2(x^2+y^2)} \\
&\quad + \frac{y}{2(x^2+y^2)} \Big|_{y=1}^{y=x} - \int_1^x \frac{dy}{2(x^2+y^2)} \\
&= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2x},
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_1^n \left(-\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2x} \right) dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctgn} n + \frac{1}{2} \ln n \rightarrow +\infty \text{ (当 } n \rightarrow \infty \text{ 时)},
\end{aligned}$$

由此可知积分(2) 发散.

注意, 也可用反证法证明积分(1) 发散. 假定积分(1) 收敛. 于是积分(3) 收敛. 但恒有

$$\begin{aligned}
&\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx dy \\
&= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dy \\
&= \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| dx, \tag{4}
\end{aligned}$$

故(4) 式中两个累次积分都收敛. 又由前面已证不取绝对值的两个累次积分

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

与

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

都收敛, 故知

$$\iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = -\frac{\pi}{4}, \\
&\quad \iint_{x \geq 1, y \geq 1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy \\
&= \int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx = \frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

这是不可能的. 证毕.

计算下列积分:

$$4169. \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q}.$$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q}.$$

而当 $q > 1$ 时,

$$\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty} \frac{dy}{y^q} = \frac{x^{q-1}}{q-1}.$$

(注意, 当 $q \leq 1$ 时, 此积分发散, 从而 $I = +\infty$); 又当 $p > q$ 时,

$$I = \frac{1}{q-1} \int_1^{+\infty} x^{q-p-1} dx = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

(注意, 当 $p \leq q$ 时, 此积分发散, $I = +\infty$).

综上所述, 可知: 当 $p > q > 1$ 时,

$$\iint_{\substack{xy \geq 1 \\ x \geq 1}} \frac{dx dy}{x^p y^q} = \frac{1}{(p-q)(q-1)}.$$

$$4170. \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dx dy}{(x+y)^p}.$$

解 由于被积函数非负, 故

$$I = \iint_{\substack{x+y \geq 1 \\ 0 \leq x \leq 1}} \frac{dxdy}{(x+y)^p}$$

$$= \int_0^1 dx \int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p}$$

当 $p > 1$ 时,

$$\int_{1-x}^{+\infty} \frac{dy}{(x+y)^p}$$

$$= -\frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{(x+y)^{p-1}} \Big|_{y=1-x}^{y=+\infty} = \frac{1}{p-1}$$

(注意, 当 $p \leq 1$ 时, 积分发散, $I = +\infty$), 故

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{p-1} = \frac{1}{p-1} \quad (\text{当 } p > 1 \text{ 时}).$$

4171. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

解 采用极坐标. 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr$$

$$= 2\pi (-\sqrt{1-r^2}) \Big|_{r=0}^{r=1} = 2\pi.$$

4172. $\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p}$

解 采用极坐标. 由于被积函数非负, 故有

$$\iint_{x^2+y^2 \geq 1} \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^p} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-1}}$$

$$= \begin{cases} \frac{\pi}{p-1}, & \text{当 } p > 1 \text{ 时;} \\ -\infty, & \text{当 } p \leq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

$$4173. \iint_{y \geq x^2+1} \frac{dx dy}{x^4 + y^2}.$$

解 由于被积函数非负,故

$$\begin{aligned} I &= \iint_{y \geq x^2+1} \frac{dy}{x^4 + y^2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4 + y^2} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} dx \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dx dy}{x^4 + y^2}. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \int_{x^2+1}^{+\infty} \frac{dy}{x^4 + y^2} &= \frac{1}{x^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x^2} \Big|_{y=x^2+1}^{y=+\infty} \\ &= \frac{1}{x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right), \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) dx \\ &= -\frac{2}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \right) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\ &\quad + 2 \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{2}{x^3}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^2} dx \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{x}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{-\frac{2}{x^3}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^2} \\
&= \lim_{x \rightarrow +0} \left[-\frac{x}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} \right] = 0.
\end{aligned}$$

下面计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}}$. 为简单计, 记

$$a = \sqrt{\sqrt{2} - 1}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\left(x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - (\sqrt{2} - 1)x^2} \\
&= \frac{1}{(x^2 + b)^2 - (ax)^2} \\
&= \frac{1}{(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + b)} \\
&= \frac{1}{2ab} \left[\frac{x + a}{x^2 + ax + b} - \frac{x - a}{x^2 - ax + b} \right] \\
&= \frac{1}{4ab} \left[\frac{2x + a}{x^2 + ax + b} + \frac{a}{x^2 + ax + b} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2x - a}{x^2 - ax + b} + \frac{a}{x^2 - ax + b} \right].
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{4ab} \int_0^{+\infty} \left(\frac{2x+a}{x^2+ax+b} - \frac{2x-a}{x^2-ax+b} \right) dx \\
&\quad + \frac{1}{4b} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+ax+b} + \frac{1}{x^2-ax+b} \right) dx \\
&= \frac{1}{4ab} \left(\ln \frac{x^2+ax+b}{x^2-ax+b} \right) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\
&\quad + \frac{1}{4b} \left(\frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+a}{\sqrt{4b-a^2}} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\sqrt{4b-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x-a}{\sqrt{4b-a^2}} \right) \Big|_{x=0}^{x=+\infty} \\
&= 0 + \frac{1}{4b} \frac{2\pi}{\sqrt{4b-a^2}} = \frac{\pi}{2b\sqrt{4b-a^2}} \\
&= \frac{\pi}{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2}-1)}} \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}+1}} \\
&= \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2} \sqrt{\sqrt{2}+1} \sqrt{\sqrt{2}-1}} \\
&= \frac{\pi \sqrt{\sqrt{2}-1} \sqrt{2}}{2} = \frac{\pi \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2},
\end{aligned}$$

故

$$I = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + x^2 + \frac{1}{2}} = \pi \sqrt{2}(\sqrt{2}-1).$$

$$4174. \iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy.$$

解 由于被积函数非负,故

$$\begin{aligned} \iint_{0 \leq x \leq y} e^{-(x+y)} dx dy &= \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} e^{-(x+y)} dy \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

变换为极坐标而计算积分:

$$4175. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

解 由于被积函数非负,故采用极坐标就有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=0}^{r=+\infty} = \pi. \end{aligned}$$

$$4176. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy.$$

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)},$$

而 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ 收敛(参看 4175 题),

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy$ 收敛. 从而, 采用极坐标就有

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \cos(x^2+y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \cos r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt \\ &= \pi \left(\frac{\sin t - \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$4177. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy.$$

解 由于

$$|e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)| \leq e^{-(x^2+y^2)},$$

而积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ 收敛(参看 4175 题),

故积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy$ 收敛.

从而,采用极坐标就有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r e^{-r^2} \sin r^2 dr = \pi \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt \\ &= \pi \left(\frac{-\sin t - \cos t}{(-1)^2 + 1^2} e^{-t} \right) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

计算积分:

$$4178. \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f} dx dy,$$

其中 $a < 0, ac - b^2 > 0$.

解 我们有(令 $\delta = ac - b^2 > 0, t = x + \frac{b}{a}y$)

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left(x^2 + \frac{2b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}y^2 \right) \\ &\quad + \frac{ac - b^2}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= a \left(x + \frac{b}{a}y \right)^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2dx + 2ey + f \\ &= at^2 + \frac{\delta}{a}y^2 + 2d \left(t - \frac{b}{a}y \right) + 2ey + f \\ &= a \left(t^2 + \frac{2d}{a}t + \frac{d^2}{a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{d^2}{a} + \frac{\delta}{a} \left(y^2 + \frac{2}{\delta} (ae - bd)y \right. \\
& \left. + \frac{(ae - bd)^2}{\delta^2} \right) - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} + f \\
& = a \left(t + \frac{d}{a} \right)^2 + \frac{\delta}{a} \left(y + \frac{ae - bd}{\delta} \right)^2 + \beta,
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\beta &= f - \frac{d^2}{a} - \frac{(ae - bd)^2}{a\delta} \\
&= \frac{1}{a\delta} [af(ac - b^2) - d^2(ac - b^2) \\
&\quad - (ae - bd)^2] \\
&= \frac{1}{\delta} (acf - b^2f - cd^2 - ae^2 + 2bde) = \frac{\Delta}{\delta},
\end{aligned}$$

这里

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}.$$

今作变量代换

$$\begin{cases} u = \sqrt{-a}x + \frac{b\sqrt{-a}}{a}y + \frac{d\sqrt{-a}}{a} \\ v = \sqrt{-\frac{\delta}{a}}y + \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \cdot \frac{ae - bd}{\delta}, \end{cases} \quad (1)$$

则 $\varphi(x, y) = -u^2 - v^2 + \beta$. 又

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{D(x, y)}$$

$$= \frac{1}{\begin{vmatrix} \sqrt{-a} & \frac{b}{a} \sqrt{-a} \\ 0 & \sqrt{-\frac{\delta}{a}} \end{vmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} > 0.$$

故线性变换(1)是非退化的,它将 (x, y) 平面的点与 (u, v) 平面的点一一对应.于是,利用4175题的结果,得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha(x,y)} dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2 - v^2 + \beta} \frac{1}{\sqrt{\delta}} du dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}} e^{\frac{\Delta}{\delta}}. \end{aligned}$$

4179. $\iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy.$

解 作广义极坐标变换

$$x = a \cos \theta, y = b r \sin \theta,$$

由于被积函数非负,故

$$\begin{aligned} & \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1} e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^{+\infty} ab r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi ab \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_{r=1}^{r=+\infty} = \frac{\pi}{e} ab. \end{aligned}$$

4180. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y e^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\varepsilon \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy (0 < |\varepsilon| < 1).$

解 作广义极坐标变换

$$x = a \cos \theta, y = b r \sin \theta,$$

则有

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xye^{-\left(\frac{x^2}{a^2} + 2\epsilon\frac{x}{a}\cdot\frac{y}{b} + \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} a^2 b^2 r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr d\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

由于 $|r^3 \sin 2\theta e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)}| \leq r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)}$,
而积分

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)} dr \\ &= 2\pi \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1-|\epsilon|)} dr < +\infty, \end{aligned}$$

故(1)式中的二重广义积分收敛. 于是,

$$I = \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \sin 2\theta d\theta \int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr. \quad (2)$$

但是

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} r^3 e^{-r^2(1+\epsilon \sin 2\theta)} dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt \\ &= -\frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)} \left[t e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt \right] \\ &= \frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)} \int_0^{+\infty} e^{-t(1+\epsilon \sin 2\theta)} dt \\ &= \frac{1}{2(1+\epsilon \sin 2\theta)^2}, \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\theta}{(1+\epsilon \sin 2\theta)^2} d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} a^2 b^2 \int_0^\pi \frac{\sin 2\theta}{(1 + \epsilon \sin 2\theta)^2} d\theta \\
&= \frac{1}{4} a^2 b^2 \int_0^{2\pi} \frac{\sin u}{(1 + \epsilon \sin u)^2} du \\
&= \frac{1}{4} a^2 b^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1 + \epsilon \sin u)^2} du \right. \\
&\quad + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{\sin u}{(1 + \epsilon \sin u)^2} du \\
&\quad + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin u}{(1 + \epsilon \sin u)^2} du \\
&\quad \left. + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{\sin u}{(1 + \epsilon \sin u)^2} du \right] \\
&= \frac{1}{2} a^2 b^2 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 + \epsilon \sin u)^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 - \epsilon \sin u)^2} \right]. \tag{3}
\end{aligned}$$

但是(作代换 $u = \frac{\pi}{2} - v$)

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 + \epsilon \sin u)^2} \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1 + \epsilon \sin u} - \frac{1}{(1 + \epsilon \sin u)^2} \right] du \\
&= \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1 + \epsilon \cos v} - \frac{1}{(1 + \epsilon \cos v)^2} \right] dv,
\end{aligned}$$

同理,有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 - \epsilon \sin u)^2} \\
&= -\frac{1}{\epsilon} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{1 - \epsilon \cos v} - \frac{1}{(1 - \epsilon \cos v)^2} \right] dv.
\end{aligned}$$

根据 2028 题(a) 和 2063 题的结果,可知(当 $0 < |\epsilon| < 1$)

时)

$$\int \frac{dx}{1 + \varepsilon \cos x}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] + C, \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(1 - \varepsilon \cos x)^2}$$

$$= -\frac{\varepsilon \sin x}{(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon \cos x)}$$

$$+ \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right] + C. \quad (5)$$

(注意, 2028 题(a) 和 2063 题中假定 $0 < \varepsilon < 1$, 但从其推导过程可以看出公式(4)、(5) 当 $-1 < \varepsilon < 0$ 时也成立).

于是,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 + \varepsilon \sin u)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} + \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - \varepsilon}{1 + \varepsilon}} \right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u du}{(1 - \varepsilon \sin u)^2}$$

$$= \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{2}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} - \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right.$$

$$\left. - \frac{2}{(1 - \varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \right].$$

从而,由(3)式得

$$I = \frac{1}{\varepsilon} a^2 b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \left[\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} \right].$$

但对任何的 $x > 0$, 有

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

故最后得

$$I = \frac{1}{\varepsilon} a^2 b^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} - \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}} \right] \cdot \frac{\pi}{2} \\ = - \frac{\pi \varepsilon a^2 b^2}{2(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

研究不连续函数的二重广义积分的收敛性 ($0 < m \leq |\varphi(x, y)| \leq M$):

4181. $\iint_{\Omega} \frac{dxdy}{x^2+y^2}$, 式中域 Ω 是由条件 $|y| \leq x^2; x^2+y^2 \leq 1$ 所确定.

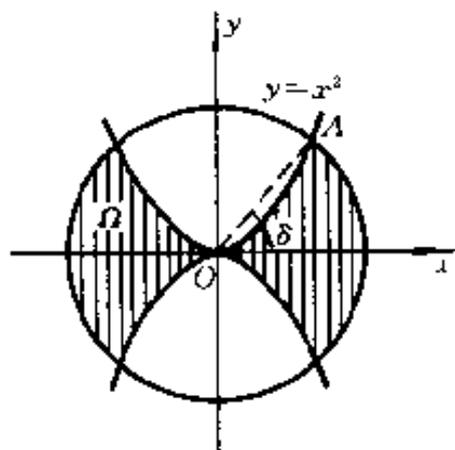


图 8.61

解 显然, Ω 为图 8.61 中的阴影部分. 由于对称性以及

被积函数的非负性,采用极坐标就有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \frac{dxdy}{x^2 + y^2} \\ &= 4 \int_0^{\delta} d\theta \int_{\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}}^1 \frac{dr}{r} = 4 \int_0^{\delta} \ln \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta. \end{aligned}$$

其中 δ 表图 8.61 中射线 OA 与 Ox 轴之间的夹角,抛物线 $y = x^2$ 的极坐标方程为 $r = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$. 由于

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow +0} \theta^{\frac{1}{2}} \ln \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{\theta}{\sin\theta} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \cos\theta \cdot \frac{\ln \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}}{\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} \right)^{\frac{1}{2}}} = 0, \end{aligned}$$

故积分 $\int_0^{\delta} \ln \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} d\theta$ 收敛,从而原积分 $\iint_{\Omega} \frac{dxdy}{x^2 + y^2}$ 收敛.

4182. $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dxdy.$

解 由于

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}(x+y)^2 > 0 \\ & \text{(当 } (x,y) \neq (0,0) \text{ 时)}, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \frac{m}{(x^2 + xy + y^2)^p} \leq \frac{|\varphi(x,y)|}{(x^2 + xy + y^2)^p} \\ & \leq \frac{M}{(x^2 + xy + y^2)^p} \text{ (当 } (x,y) \neq (0,0) \text{ 时)}, \end{aligned}$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛,即知积分

$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{x^2+xy+y^2} dx dy$ 与积分

$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2+xy+y^2)^p}$ 同时收敛或同时发散.

由于 $\frac{1}{(x^2+xy+y^2)^p} > 0$ (当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时), 采用极坐标即得

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(x^2+xy+y^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p} \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}}, \end{aligned}$$

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^p}$ 为常义积分, 其值为有限数,

而

$$\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-1}} = \begin{cases} \frac{1}{2(1-p)}, & \text{当 } p < 1 \text{ 时;} \\ +\infty, & \text{当 } p \geq 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此可知: 原积分 $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(x^2+xy+y^2)^p} dx dy$

当 $p < 1$ 时收敛, 当 $p \geq 1$ 时发散.

4183. $\iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q} \quad (p > 0, q > 0).$

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0 \\ x+y \leq 1}} \frac{dx dy}{x^p + y^q} \\
&= 4 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy}{x^p + y^q} + 4 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy}{x^p + y^q}, \quad (1)
\end{aligned}$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x^p + y^q \geq 2^{-p-q}\}$, $\Omega_2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$. 令 $\Omega_3 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}\}$. 易知, 当 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq 2^{-p-q}$ 时, 必有 $x + y \leq 1$ (因为 $x \geq 0, y \geq 0, x^p + y^q \leq \frac{1}{2^{p+q}}$, 故 $x^p \leq \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^p}, y^q = \frac{1}{2^{p+q}} \leq \frac{1}{2^q}$, 从而 $x \leq \frac{1}{2}, y \leq \frac{1}{2}$, 由此知 $x + y \leq 1$), 故 $\Omega_3 = \Omega_2$. 由于函数

$\frac{1}{x^p + y^q}$ 在有界闭区域 Ω_1 上连续, 故(1)式右端第一

个积分为常义积分. 因此, 广义积分 $\iint_{|x|+|y| \leq 1} \frac{dx dy}{|x|^p + |y|^q}$ 的敛散性取决于广义积分 $\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q}$ 的

敛散性. 在此积分中作变量代换

$$x = r^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \theta, y = r^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \theta,$$

则易知

$$\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \frac{4}{pq} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta.$$

于是, 注意到被积函数是非负的, 得

$$\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy}{x^p + y^q} = \frac{4}{pq} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \theta \cos^{\frac{2}{p} - 1} \theta d\theta$$

$$\cdot \int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3} dr.$$

由 3856 题的结果知右端第一个积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q}-1} \theta \cos^{\frac{2}{p}-1} \theta d\theta \quad (p > 0, q > 0)$$

恒收敛, 且其值为 $\frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right)$; 而第二个积分

$$\int_0^{(\sqrt{2})^{-p-q}} r^{\frac{2}{q} + \frac{2}{p} - 3} dr$$

当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 > -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 3 \leq -1$ (即 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} \leq 1$) 时发散.

综上所述, 可知原积分 $\iint_{|x|+|y|\leq 1} \frac{dxdy}{|x|^p + |y|^q}$ 当 $\frac{1}{p}$

+ $\frac{1}{q} > 1$ 时收敛, 当

$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ 时发散.

4184. $\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x-y|^p} dx dy.$

解 由于

$$\frac{m}{|x-y|^p} \leq \frac{|\varphi(x, y)|}{|x-y|^p} \leq \frac{M}{|x-y|^p},$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知积分

$\int_0^a \int_0^a \frac{\varphi(x, y)}{|x-y|^p} dx dy$ 与积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dxdy}{|x-y|^p}$ 同时收敛或同

时发散. 由对称性及被积函数的非负性, 可知

$$\int_0^a \int_0^a \frac{dxdy}{|x-y|^p} = 2 \int_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dxdy}{(x-y)^p}, \quad (1)$$

当 $p < 1$ 时,

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{(x-y)^p} \\ &= \int_0^a \frac{x^{1-p}}{1-p} dx = \frac{a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}. \end{aligned}$$

从而,由(1)式知

$$\iint_{0 \leq x, y \leq a} \frac{dx dy}{|x-y|^p} = \frac{2a^{2-p}}{(1-p)(2-p)}.$$

因此,当 $p < 1$ 时积分 $\iint_{0 \leq x, y \leq a} \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 收敛.

现设 $p \geq 1$. 首先,我们有

$$\begin{aligned} &\iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p}. \end{aligned} \quad (2)$$

若 $p = 1$, 则

$$\begin{aligned} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} &= \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x-\epsilon} \frac{dy}{x-y} \\ &= \int_{\epsilon}^a (\ln x - \ln \epsilon) dx = a \ln a - a + \epsilon - a \ln \epsilon, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} &\lim_{\epsilon \rightarrow 1^0} \iint_{\substack{\epsilon \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x-\epsilon}} \frac{dx dy}{(x-y)^p} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 1^0} (a \ln a - a + \epsilon - a \ln \epsilon) = +\infty. \end{aligned}$$

由此可知,此时 $\iint_{0 \leq x, y \leq a} \frac{dx dy}{|x-y|^p}$ 发散;若 $p = 2$, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{\epsilon < x < a \\ 0 \leq y < x - \epsilon}} \frac{dx dy}{(x - y)^p} = \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x - \epsilon} \frac{dy}{(x - y)^2} \\ &= \int_{\epsilon}^a \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{a}{\epsilon} - 1 - \ln a + \ln \epsilon, \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon < x < a \\ 0 \leq y < x - \epsilon}} \frac{dx dy}{(x - y)^2} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \left(\frac{a + \epsilon \ln \epsilon}{\epsilon} - 1 - \ln a \right) = +\infty. \end{aligned}$$

由此可知,此时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x - y|^p}$ 发散;最后,若 $p > 1, p \neq 2$, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{\epsilon < x < a \\ 0 \leq y < x - \epsilon}} \frac{dx dy}{(x - y)^p} = \int_{\epsilon}^a dx \int_0^{x - \epsilon} \frac{dy}{(x - y)^p} \\ &= \frac{1}{p - 1} \int_{\epsilon}^a (\epsilon^{1-p} - x^{1-p}) dx \\ &= \frac{1}{(p - 1)\epsilon^{p-1}} \left(a - \frac{p-1}{2}\epsilon \right) \\ & \quad + \frac{1}{(p - 1)(p - 2)a^{p-2}}. \end{aligned}$$

从而,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{\substack{\epsilon < x < a \\ 0 \leq y < x - \epsilon}} \frac{dx dy}{(x - y)^p} = +\infty.$$

由此可知,此时积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x - y|^p}$ 发散.

综上所述,可知积分 $\int_0^a \int_0^a \frac{dx dy}{|x - y|^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛, $p \geq 1$ 时发散.

$$4185. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy.$$

解 由于

$$\begin{aligned} \frac{m}{(1-x^2-y^2)^p} &\leq \frac{|\varphi(x, y)|}{(1-x^2-y^2)^p} \\ &\leq \frac{M}{(1-x^2-y^2)^p}, \end{aligned}$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x, y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy \text{ 与积分}$$

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p} \text{ 同时收敛同时发散. 采用极坐}$$

标, 由于被积函数 $\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}$ 是正的, 故

$$\begin{aligned} &\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dx dy}{(1-x^2-y^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r}{(1-r^2)^p} dr \\ &= 2\pi \int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{r \rightarrow 1-0} (1-r)^p \cdot \frac{r}{(1-r)^p (1+r)^p} = 2^{-p},$$

故积分 $\int_0^1 \frac{r dr}{(1-r)^p (1+r)^p}$ 当 $p < 1$ 时收敛, $p > 1$ 时发散; 当 $p = 1$ 时, 有

$$\int_0^1 \frac{r dr}{1-r^2} = -\frac{1}{2} \ln(1-r^2) \Big|_0^1 = +\infty,$$

故积分也发散. 由此可知, 积分

$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p} dx dy$ 当 $p < 1$ 时收敛; 当

$p \geq 1$ 时发散.

4186. 证明, 如果: 1) 函数 $\varphi(x, y)$ 在有界域 $a \leq x \leq A, b \leq y \leq B$ 内是连续的; 2) 函数 $f(x)$ 在闭区间 $a \leq x \leq A$ 上连续; 3) $p < 1$, 则积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$$

收敛.

证 首先注意, 由于 $p < 1$, 故积分 $\int_b^B \frac{dy}{|f(x) - y|^p}$ 对每个固定的 $x \in [a, A]$ 恒收敛 (若 $f(x) \in [b, B]$, 此为瑕积分, 点 $f(x)$ 是瑕点, 由于 $p < 1$, 它收敛; 若 $f(x) \notin [b, B]$, 则为常义积分, 当然收敛). 再根据 $\varphi(x, y)$ 的有界性, 即知: 对每个固定的 $x \in [a, A]$, 积分 \int_b^B

$\frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy$ 都收敛. 令

$$F(x) = \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy \quad (a \leq x \leq A).$$

下面我们证明 $F(x)$ 是 $a \leq x \leq A$ 上的连续函数. 若已获证, 则积分

$$\int_a^A dx \int_b^B \frac{\varphi(x, y)}{|f(x) - y|^p} dy = \int_a^A F(x) dx$$

显然是收敛的 (右端为常义积分), 于是本题即获证. 令 $c = \max_{a \leq x \leq A} |f(x)|$. 今将函数 $\varphi(x, y)$ 连续地延拓到有界闭矩形 $R(a \leq x \leq A, b - 2c \leq y \leq B + 2c)$ 上 (只要规定

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, B), & \text{当 } a \leq x \leq A, \\ & B < y \leq B + 2c \text{ 时,} \\ \varphi(x, b), & \text{当 } a \leq x \leq A, \\ & b - 2c \leq y < b \text{ 时} \end{cases}$$

即可). 延拓后的函数仍记为 $\varphi(x, y)$. 由于 $\varphi(x, y)$ 及 $|f(x) - y|^{1-p}$ 都在 R 上连续, 故有界且一致连续:

存在常数 M , 使对一切 $(x, y) \in R$, 有

$$|\varphi(x, y)| \leq M, |f(x) - y|^{1-p} \leq M. \quad (1)$$

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta_1 > 0$ (取 $\delta_1 < (\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{1}{1-p}}$), 使当 $|x_1 - x_2| < \delta_1, |y_1 - y_2| < \delta_1$ ($(x_1, y_1) \in R, (x_2, y_2) \in R$) 时, 恒有

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| < \varepsilon, \quad (2)$$

$$||f(x_1) - y_1|^{1-p} - |f(x_2) - y_2|^{1-p}| < \varepsilon. \quad (3)$$

又由 $f(x)$ 在 $[a, A]$ 上的一致连续性可知, 存在 $\delta_2 > 0$, 使当 $|x_1 - x_2| < \delta_2$ ($x_1, x_2 \in [a, A]$) 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \delta_1. \quad (4)$$

令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. 于是, 由 (2) 式可知: 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ ($x_1, x_2 \in [a, A]$) 时, 对一切 $b - c \leq y \leq B + c$, 恒有 $|\varphi(x_1, y + f(x_1)) - \varphi(x_2, y + f(x_2))| < \varepsilon$. (5)

现设 $|x_1 - x_2| < \delta, (x_1, x_2 \in [a, A])$. 不失一般性, 设 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 我们有

$$\begin{aligned} & F(x_1) - F(x_2) \\ &= \int_b^B \frac{\varphi(x_1, y)}{|f(x_1) - y|^p} dy - \int_b^B \frac{\varphi(x_2, y)}{|f(x_2) - y|^p} dy \\ &= \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_1)} \frac{\varphi(x_1, u + f(x_1))}{|u|^p} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{b-f(x_2)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u + f(x_2))}{|u|^p} du \\
= & \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1, u + f(x_1)) - \varphi(x_2, u + f(x_2))}{|u|^p} du \\
& - \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{\varphi(x_1, u + f(x_1))}{|u|^p} du \\
& + \int_{b-f(x_1)}^{b-f(x_2)} \frac{\varphi(x_2, u + f(x_2))}{|u|^p} du \\
= & I_1 - I_2 + I_3, \tag{6}
\end{aligned}$$

其中 I_1, I_2, I_3 分别表示上式中的三个积分。易知 ($p < 1$)

$$\begin{aligned}
& \int_a^\beta \frac{du}{|u|^p} \\
= & \begin{cases} \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} - \alpha^{1-p}], \text{ 当 } 0 \leq \alpha \leq \beta \text{ 时;} \\ \frac{1}{1-p} [(-\alpha)^{1-p} - (-\beta)^{1-p}], \text{ 当 } \alpha \leq \beta \leq 0 \text{ 时;} \\ \frac{1}{1-p} [\beta^{1-p} + (-\alpha)^{1-p}], \text{ 当 } \alpha < 0 < \beta \text{ 时.} \end{cases}
\end{aligned}$$

从而,在任何情形下均有

$$\int_a^\beta \frac{du}{|u|^p} \leq \frac{1}{1-p} (|\beta|^{1-p} + |\alpha|^{1-p}); \tag{7}$$

而当 α, β 同号时,有

$$\int_a^\beta \frac{du}{|u|^p} = \frac{1}{1-p} |\beta|^{1-p} - |\alpha|^{1-p}. \tag{8}$$

于是,由(5)式、(1)式及(7)式,得

$$\begin{aligned}
|I_1| & < \epsilon \int_{b-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \\
& \leq \frac{\epsilon}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |b-f(x_1)|^{1-p})
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2M\varepsilon}{1-p}. \quad (9)$$

下面估计 I_2 : 若 $B - f(x_2)$ 与 $B - f(x_1)$ 同号, 则由(1)式、(8)式及(3)式, 有

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \\ &= \frac{M}{1-p} \left| |B-f(x_2)|^{1-p} - |B-f(x_1)|^{1-p} \right| \\ &< \frac{M\varepsilon}{1-p}; \end{aligned}$$

若 $B - f(x_2)$ 与 $B - f(x_1)$ 异号, 即 $B - f(x_1) < 0 < B - f(x_2)$. 由于

$[B - f(x_2)] - [B - f(x_1)] = f(x_1) - f(x_2) < \delta_1$, 故有 $|B - f(x_1)| < \delta_1$, $|B - f(x_2)| < \delta_1$.

于是, 由(7)式并注意到 $\delta_1 < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{1-p}}$, 即得

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq M \int_{B-f(x_1)}^{B-f(x_2)} \frac{du}{|u|^p} \\ &\leq \frac{M}{1-p} (|B-f(x_2)|^{1-p} + |B-f(x_1)|^{1-p}) \\ &< \frac{M}{1-p} (\delta_1^{1-p} + \delta_1^{1-p}) < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \end{aligned}$$

所以, 在任何情形下均有

$$|I_2| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \quad (10)$$

同理, 可得(在任何情形下)

$$|I_3| < \frac{M\varepsilon}{1-p}. \quad (11)$$

于是, 由(6)式、(9)式、(10)式及(11)式, 即得

$$|F(x_1) - F(x_2)| < |I_1| + |I_2| + |I_3|$$

$$< \frac{4M\epsilon}{1-p}.$$

由此可知, $F(x)$ 在 $a \leq x \leq A$ 上(一致)连续, 证毕.

计算下列积分:

$$4187. \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy.$$

解 采用极坐标, 由于被积函数非负, 故有

$$\begin{aligned} & \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \ln \frac{1}{r} dr = -2\pi \int_0^1 r \ln r dr \\ &= -2\pi \left(\frac{r^2}{2} \ln r \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{r}{2} dr \right) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$4188. \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}} \quad (a > 0).$$

$$\text{解} \quad \int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$

$$= \int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx.$$

作变量代换 $x = au$, 则

$$\int_0^a \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{a-x}} dx = 2a \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} (1-u)^{-\frac{1}{2}} du$$

$$= 2a B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2a \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$= 2a \cdot \frac{1}{2} \left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi a.$$

$$4189. \iint_{\Omega} \ln \sin(x-y) dx dy, \text{ 这里域 } \Omega \text{ 是由直线 } y=0, y=x,$$

$x = \pi$ 所界.

解 作变量代换 $x = u + v, y = u - v$, 则 Oxy 平面上的域 Ω 变为 uv 平面上的域 Ω' . 显然 Ω' 由直线 $u = v, v = 0, u + v = \pi$ 所界. 又有 $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = -2$.

于是, 再注意到被积函数非正, 即有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \ln \sin(x - y) dx dy \\ &= 2 \iint_{\Omega'} \ln \sin 2v du dv = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dv \int_v^{\pi-v} \ln \sin 2v du \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin 2v dv = 2 \ln 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) dv \\ &\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v dv + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \cos v dv \\ &= \pi^2 \ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - 2v) \ln \sin v dv \\ &\quad + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t \ln \sin t dt \\ &= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin v dv \\ &= \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + 2\pi \left(-\frac{\pi}{2} \ln 2 \right)^{*}) = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

*) 利用 2353 题(a) 的结果.

4190. $\iint_{x^2+y^2 \leq x} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

解 由关于 Ox 轴的对称性与被积函数的非负性, 采用极坐标, 有

$$\begin{aligned}
& \iint_{x^2+y^2 \leq r} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= 2 \iint_{\substack{x^2+y^2 \leq r \\ y > 0}} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{r \cos \theta} dr = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2.
\end{aligned}$$

研究下列三重积分的收敛性:

4191.
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz, \text{ 这里 } 0 < m \leq \varphi(x, y, z) \leq M.$$

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{m}{(x^2+y^2+z^2)^p} &\leq \frac{|\varphi(x,y,z)|}{(x^2+y^2+z^2)^p} \\
&\leq \frac{M}{(x^2+y^2+z^2)^p},
\end{aligned}$$

再注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 可知积分

$$\begin{aligned}
& \iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz \text{ 与积分} \\
& \iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} \text{ 同时收敛或同时发散.}
\end{aligned}$$

由于被积函数 $\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^p}$ 是正的, 采用球坐标 $x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi, z = r \sin \psi$, 得

$$\begin{aligned}
& \iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} \\
&= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \psi d\psi \int_1^{\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}
\end{aligned}$$

$$= 4\pi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}.$$

显然, $\int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散;

由此可知, $\iiint_{r^2+y^2+z^2>1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$

当 $p > \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \leq \frac{3}{2}$ 时发散.

4192. $\iiint_{r^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$, 这里 $0 < m \leq |\varphi(x,y,z)| \leq M$.

解 和 4191 题完全类似(请参看 4191 题的解题过程), 易得

$$\begin{aligned} & \iiint_{r^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(x^2+y^2+z^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}} \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}. \end{aligned}$$

显然, $\int_0^1 \frac{dr}{r^{2p-2}}$ 当 $p < \frac{3}{2}$ 时收敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时发散;

故 $\iiint_{r^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{\varphi(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^p} dx dy dz$ 当 $p < \frac{3}{2}$ 时收

敛, 当 $p \geq \frac{3}{2}$ 时发散.

4193. $\iiint_{|x|+|y|+|z|>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r} (p > 0, q > 0, r > 0)$.

解 由对称性及被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned}
& \iint_{x_1+|y|^q+|z|^r>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r} \\
= & 8 \iint_{\substack{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \\ x+y+z > 1}} \frac{dx dy dz}{x^p+y^q+z^r} \\
= & 8 \iint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p+y^q+z^r} + 8 \iint_{\Omega_2} \frac{dx dy dz}{x^p+y^q+z^r}.
\end{aligned}$$

其中 $\Omega_1 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z > 1, x^p + y^q + z^r \leq 3\}$, $\Omega_2 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z > 1, x^p + y^q + z^r > 3\}$. 令 $\Omega_3 = \{(x, y, z) | x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3\}$. 由于当 $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^p + y^q + z^r > 3$ 时必有 $x + y + z > 1$ (否则, $x + y + z \leq 1$, 就有 $x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1$, 从而 $x^p \leq 1, y^q \leq 1, z^r \leq 1$, 于是 $x^p + y^q + z^r \leq 3$), 故 $\Omega_2 = \Omega_3$. 显然,

$\iint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p+y^q+z^r}$ 为常义积分, 故积分

$\iint_{|x|+|y|^q+|z|^r>1} \frac{dx dy dz}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}$ 的敛散性取决于

$\iint_{\Omega_3} \frac{dx dy dz}{x^p+y^q+z^r}$ 的敛散性. 对此积分, 作变量代换

$$x = R^{\frac{2}{p}} \cos^{\frac{2}{p}} \varphi \cos^{\frac{2}{r}} \psi,$$

$$y = R^{\frac{2}{q}} \sin^{\frac{2}{q}} \varphi \cos^{\frac{2}{q}} \psi,$$

$$z = R^{\frac{2}{r}} \sin^{\frac{2}{r}} \psi,$$

则易知

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \psi)}$$

$$= \frac{8}{pqr} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 1} \cos^{\frac{2}{p} - 1} \varphi \sin^{\frac{2}{q} - 1} \psi \\ \cdot \sin^{\frac{2}{r} - 1} \phi \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \psi.$$

于是, 由被积函数的非负性, 并利用 3856 题的结果, 得

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r} \\ &= \frac{8}{pqr} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{r} - 1} \psi \cos^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} - 1} \psi d\psi \\ & \quad \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{2}{q} - 1} \phi \cos^{\frac{2}{p} - 1} \phi d\phi \\ & \quad \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR \\ &= \frac{8}{pqr} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \\ & \quad \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR \\ &= \frac{2}{pqr} B\left(\frac{1}{r}, \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) B\left(\frac{1}{q}, \frac{1}{p}\right) \\ & \quad \cdot \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR. \end{aligned}$$

由于积分 $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} R^{\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3} dR$ 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 < -1$ (即 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$) 时收敛, 当 $\frac{2}{p} + \frac{2}{q} + \frac{2}{r} - 3 \geq -1$ 时发散, 故积分 $\iiint_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{x^p + y^q + z^r}$ (从

而积分 $\iiint_{|x| + |y| + |z| > 1} \frac{dx dy dz}{|x|^p + |y|^q + |z|^r}$) 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$

$+\frac{1}{r} < 1$ 时收敛, 当 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq 1$ 时发散.

4194. $\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}}$, 其中 $0 < m \leq$
 $|f(x, y, z)| \leq M$, 而 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 是在闭区间 $[0, a]$ 上
 的连续函数.

解 由于

$$\begin{aligned} & \frac{f(x, y, z)}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}} \\ & \leq \frac{|f(x, y, z)|}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}} \\ & \leq \frac{M}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}} \end{aligned}$$

并注意到广义重积分收敛必绝对收敛, 即知积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}}$$
 与积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}}$$
 同时收敛或同

时发散. 由被积函数 $\frac{1}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}}$ 的
 非负性, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}} \\ & = \int_0^a F(x) dx, \end{aligned}$$

其中

$$F(x) = \int_0^a \int_0^a \frac{dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^{\frac{m}{p}}} \quad (0 \leq x \leq a).$$

作变量代换

$$u = y - \varphi(x), v = z - \psi(x) \quad (x \text{ 固定}),$$

则

$$\frac{D(y, z)}{D(u, v)} = \frac{1}{\frac{D(u, v)}{D(y, z)}} = 1.$$

从而,有

$$F(x) = \iint_{\substack{\varphi(x) \leq u \leq a - \varphi(x) \\ \psi(x) \leq v \leq a - \psi(x)}} \frac{dudv}{(u^2 + v^2)^p}. \quad (1)$$

先设 $p < 1$. 令 $c = \max_{0 \leq x \leq a} (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)$, 则由

(1) 式知

$$\begin{aligned} 0 < F(x) &\leq \int_{\substack{-c \leq u \leq a+c \\ -c \leq v \leq a+c}} \frac{dudv}{(u^2 + v^2)^p} \\ &< \iint_{u^2 + v^2 \leq 2(a+c)^2} \frac{dudv}{(u^2 + v^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}(a+c)} \frac{dr}{r^{2p-1}} \\ &= \frac{\pi}{1-p} [\sqrt{2}(a+c)]^{2-2p}, \end{aligned}$$

即 $F(x)$ 有界(实际上,仿 4186 题的证明过程还可证明 $F(x)$ 在 $0 \leq x \leq a$ 上连续),从而 $\int_0^a F(x)dx$ 是常义积分,显然收敛.由此可知,此时积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p} \quad (2)$$

收敛.

次设 $p \geq 1$, 这时积分(2)可能收敛也可能发散,分两种情况讨论:

i) 若不存在这样的 $x \in [0, a]$ 使 $0 \leq \varphi(x) \leq a, 0 \leq$

$\varphi(x) \leq a$ 同时成立(例如, $\varphi(x)$ 或 $\psi(x)$ 的值完全位于 $[0, a]$ 之外;这时,对一切 $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$, 均有:连续函数 $\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p > 0$. 从而,积分(2)收敛(这时是常义积分).

ii) 若存在这样的点 $x \in [0, a]$ 使 $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$ 同时成立;由 $\varphi(x)$ 与 $\psi(x)$ 的连续性,必存在正数 ε 及闭区间 $I_0 \subset [0, a]$, 使当 $x \in I_0$ 时,恒有 $\varepsilon \leq \varphi(x) \leq a - \varepsilon, \varepsilon \leq \psi(x) \leq a - \varepsilon$. 从而由(1)式知:当 $x \in I_0$ 时,有

$$\begin{aligned} F(x) &\geq \iint_{\substack{\varepsilon \leq u \leq a-\varepsilon \\ \varepsilon \leq v \leq a-\varepsilon}} \frac{dudv}{(u^2 + v^2)^p} \\ &\geq \iint_{u^2 + v^2 \leq \varepsilon^2} \frac{dudv}{(u^2 + v^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\varepsilon \frac{dr}{r^{2p-1}} \\ &= 2\pi \int_0^\varepsilon \frac{dr}{r^{2p-1}} = +\infty \quad (\text{注意 } p \geq 1), \end{aligned}$$

即当 $x \in I_0$ 时恒有 $F(x) = +\infty$, 由此可知,积分 $\int_0^a F(x)dx$ 发散. 于是,积分(2)发散.

综上所述,可知:积分

$$\int_0^a \int_0^a \int_0^a \frac{f(x, y, z) dx dy dz}{\{[y - \varphi(x)]^2 + [z - \psi(x)]^2\}^p}$$

当 $p < 1$ 时收敛;当 $p \geq 1$ 时,若不存在 $x \in [0, a]$ 使 $0 \leq \varphi(x) \leq a, 0 \leq \psi(x) \leq a$, 则收敛;若存在 $x \in [0, a]$, 使 $0 < \varphi(x) < a, 0 < \psi(x) < a$, 则发散.

$$4195. \iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x + y - z|^p}.$$

解 我们有(注意被积函数的非负性)

$$\begin{aligned} & \iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x + y - z|^p} \\ &= 2 \iiint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1 \\ x + y - z \geq 0}} \frac{dx dy dz}{(x + y - z)^p} \\ &= 2 \iint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ -1 \leq x + y \leq 1}} dx dy \int_1^{x+y} \frac{dz}{(x + y - z)^p} \\ & \quad + 2 \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \\ x + y \geq 1}} dx dy \int_{-1}^1 \frac{dz}{(x + y - z)^p} \\ &= 2I_1 + 2I_2, \end{aligned}$$

其中 I_1 表第一个积分, I_2 表第二个积分.

若 $p < 1$, 则

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{(x + y - z)^p} = \frac{(x + y + 1)^{1-p}}{1-p}, \\ & \int_{-1}^1 \frac{dz}{(x + y - z)^p} \\ &= \frac{(x + y + 1)^{1-p} - (x + y - 1)^{1-p}}{p-1} (x + y \geq 1), \end{aligned}$$

故

$$I_1 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{|x| \leq 1, |y| \leq 1 \\ -1 \leq x+y \leq 1}} (x + y + 1)^{1-p} dx dy,$$

$$I_2 = \frac{1}{1-p} \iint_{\substack{0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ x+y < 1}} [(x+y+1)^{1-p} - (x+y-1)^{1-p}] dx dy.$$

显然, I_1 与 I_2 均为常义(二重)积分, 当然收敛. 因此,

积分 $\iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}$ 收敛.

若 $p \geq 1$, 则当 $x+y > -1$ 时,

$$\int_{-1}^{x+y} \frac{dz}{|x+y-z|^p} = +\infty,$$

故 $I_1 = +\infty$, 又显然有 $I_2 > 0$, 故此时积分

$$\iiint_{\substack{|x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \\ |z| \leq 1}} \frac{dx dy dz}{|x+y-z|^p}$$

发散.

计算积分:

4196. $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r}$.

解 由于被积函数非负, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^p} \int_0^1 \frac{dy}{y^q} \int_0^1 \frac{dz}{z^r} \\ &= \frac{1}{(1-p)(1-q)(1-r)} \quad (\text{若 } p < 1, q < 1, r < 1). \end{aligned}$$

注意, 若 $p \geq 1$ 或 $q \geq 1$ 或 $r \geq 1$, 则

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy dz}{x^p y^q z^r} = +\infty.$$

$$4197. \iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

解 采用球坐标. 由于被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 > 1} \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_1^{+\infty} \frac{dr}{r^4} \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

$$4198. \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p}$$

解 采用球坐标. 由于被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \int_0^1 \frac{r^2}{(1 - r^2)^p} dr \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{(1 - r^2)^p} dr. \end{aligned}$$

作代换 $t = r^2$, 则当 $p < 1$ 时有

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{r^2}{(1 - r^2)^p} dr = \frac{1}{2} \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1 - t)^{-p} dt \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{3}{2}, 1 - p\right). \end{aligned}$$

从而, 当 $p < 1$ 时有

$$\begin{aligned} & \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dx dy dz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^p} \\ &= 2\pi B\left(\frac{3}{2}, 1 - p\right). \end{aligned}$$

注意,若 $p \geq 1$, 则 $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p} dt = +\infty$, 故

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} \frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p} = +\infty.$$

4199. $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz.$

解 采用球坐标. 由被积函数的非负性, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi d\phi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr \\ &= 4\pi \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr. \end{aligned}$$

作代换 $r^2 = t$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} r^2 e^{-r^2} dr &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}} e^{-t} dt \\ &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2+z^2)} dxdydz = \pi^{\frac{3}{2}}.$$

4200. 计算积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3,$$

其中 $P(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为正定形.

解 用 A 表矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

由于二次型 $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_i x_j$ 是正定的, 故由高等代数中关于二次型的理论知: 存在正交矩阵

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\text{使 } B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

其中 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$; 也即在线性(正交)变换

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x'_1 + b_{12}x'_2 + b_{13}x'_3 \\ x_2 = b_{21}x'_1 + b_{22}x'_2 + b_{23}x'_3 \\ x_3 = b_{31}x'_1 + b_{32}x'_2 + b_{33}x'_3 \end{cases} \quad (3)$$

之下, 二次型 $P(x_1, x_2, x_3)$ 化为平方和:

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_i x_j \\ &= \lambda_1 x_1'^2 + \lambda_2 x_2'^2 + \lambda_3 x_3'^2. \end{aligned} \quad (4)$$

注意, 由于 B 是正交矩阵, 故 $B^{-1} = B'$ (B' 表 B 的转置矩阵), 从而 $|B| = |b_{ij}| = \pm 1$. 显然,

$$\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(x'_1, x'_2, x'_3)} = |b_{ij}| = \pm 1.$$

由(4)式, 有

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x_1'^2 - \lambda_2 x_2'^2 - \lambda_3 x_3'^2} dx'_1 dx'_2 dx'_3. \end{aligned} \quad (5)$$

再作变量代换 $x'_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}u_1, x'_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}u_2, x'_3 =$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} u_3, \text{ 则 } \frac{D(x'_1, x'_2, x'_3)}{D(u_1, u_2, u_3)} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}.$$

于是(注意 4199 题的结果)

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 x'^2_1 - \lambda_2 x'^2_2 - \lambda_3 x'^2_3} dx'_1 dx'_2 dx'_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}} \\ & \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)} du_1 du_2 du_3 \\ &= \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3}}. \end{aligned} \quad (6)$$

但由(2)式知(记 $\Delta = |a_{ij}| = |A|$, 注意, 由于

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i x_j \text{ 是正定的, 故 } \Delta > 0)$$

$$\Delta = |A| = |B^{-1}| \cdot |A| \cdot |B| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3. \quad (7)$$

于是, 根据(5), (6), (7) 诸式, 最后得

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \sqrt{\frac{\pi^3}{\Delta}}. \end{aligned}$$

§ 10. 多重积分

1° 多重积分的直接算法 若函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在由下列不等式所确定的有界域 Ω 内是连续的:

$$\begin{cases} x_1 \leq x_1 \leq x_1'', \\ x_2'(x_1) \leq x_2 \leq x_2''(x_1) \\ \dots\dots\dots \\ x_n'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \leq x_n \leq x_n''(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \end{cases}$$

其中 x_1' 和 x_1'' 为常数及 $x_2'(x_1), x_2''(x_1), \dots, x_n'(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), x_n''(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ 为连续函数, 则对应的多重积分可按下列公式来计算:

$$\begin{aligned} & \int\limits_{\Omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_{x_1'}^{x_1''} dx_1 \int_{x_2'(x_1)}^{x_2''(x_1)} dx_2 \dots \\ & \int_{x_n'(x_1, \dots, x_{n-1})}^{x_n''(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

2° 重积分中的变量代换 若 1) 函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在有界可测的域 Ω 内是均匀连续的; 2) 连续可微分的函数

$$x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) (i = 1, 2, \dots, n),$$

把 Ox_1, x_2, \dots, x_n 空间的域 Ω 双方单值地映射成 $O\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 空间内的有界域 Ω' ; 3) 在域 Ω' 内雅可比式

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \neq 0,$$

则下面的公式正确

$$\begin{aligned} & \int\limits_{\Omega} \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int\limits_{\Omega'} \dots \int f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) |I| d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n. \end{aligned}$$

特别是, 根据公式

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \varphi_1, \\ x_2 &= r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2, \\ &\dots\dots\dots \\ x_{n-1} &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1}, \\ x_n &= r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1} \end{aligned}$$

变换成极坐标时 $(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$, 有

$$I = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})}$$

$$= r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

4201. 设 $K(x, y)$ 为域 $R[a \leq x \leq b, a \leq y \leq b]$ 内的连续函数及

$$K_n(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \cdots$$

$$\cdot K(t_n, y) dt_1 dt_2 \cdots dt_n,$$

证明:

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

证

$$K_{n+m+1}(x, y) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2)$$

$$\cdots K(t_n, t) K(t, z_1) K(z_1, z_2) \cdots K(z_m, y) dt_1 dt_2$$

$$\cdots dt_n dt dz_1 dz_2 \cdots dz_m$$

$$= \int_x^b \left\{ \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, t_1) K(t_1, t_2) \right. \right.$$

$$\left. \cdots K(t_n, t) dt_1 dt_2 \cdots dt_n \right]$$

$$\cdot \left[\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K(t, z_1) K(z_1, z_2) \right.$$

$$\left. \cdots K(z_m, y) dz_1 dz_2 \cdots dz_m \right] \Big\} dt$$

$$= \int_x^b K_n(x, t) K_m(t, y) dt.$$

4202. 设 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为域 $0 \leq x_i \leq x (i = 1, 2, \dots, n)$ 内的连续函数, 证明等式

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n,$$

$$= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^x f dx_1 (n \geq 2).$$

证 考虑下面三个有界闭域:

$$\Omega = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_i \leq x, \\ i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$\Omega_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_1 \leq x, \\ 0 \leq x_2 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1}\},$$

$$\Omega_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid 0 \leq x_n \leq x, \\ x_n \leq x_{n-1} \leq x, \dots, x_2 \leq x_1 \leq x\}.$$

由假定 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在域 Ω 上连续, 显然, $\Omega_1 \subset \Omega, \Omega_2 \subset \Omega$, 故 $f(x_1, \dots, x_n)$ 在 Ω_1 与 Ω_2 上连续. 根据化 n 重积分为累次积分的公式, 我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_1} \dots \int f dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_2} \dots \int f dx_1 \dots dx_n \\ &= \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \dots \int_{x_2}^x f dx_1. \end{aligned} \quad (2)$$

下证 $\Omega_1 = \Omega_2$, 事实上, 若 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$, 则

$$0 \leq x_1 \leq x, 0 \leq x_2 \leq x_1, \dots, 0 \leq x_n \leq x_{n-1}, \quad (3)$$

从而

$$0 \leq x_n \leq x_{n-1} \leq x_{n-2} \leq \dots \leq x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (4)$$

于是,

$$0 \leq x_n \leq x, x_n \leq x_{n-1} \leq x, \dots, x_2 \leq x_1 \leq x. \quad (5)$$

由此可知 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$. 反之, 若 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_2$, 则 (5) 式成立, 从而 (4) 式显然成立, 由此又知 (3) 式成立, 故 $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega_1$, 于是 $\Omega_1 = \Omega_2$ 获证. 由此, 再根

据(1)式与(2)式,即得

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n \\ = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_n}^x f dx_1.$$

证毕.

4203. 证明

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n \\ = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n,$$

其中 f 为连续函数.

证 证法一:

我们有

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n \\ = \int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \\ \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n.$$

令 $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$. 由于 f 是连续函数, 故 $F'(s) = f(s)$. 我们有(注意到 $F(0) = 0$)

$$\int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n \\ = \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) f(t_{n-1}) dt_{n-1} \\ = \int_0^{t_{n-2}} F(t_{n-1}) F'(t_{n-1}) dt_{n-1} \\ = \frac{1}{2} [F(t_{n-1})]^2 \Big|_{t_{n-1}=0}^{t_{n-1}=t_{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2,$$

由此

$$\int_0^{t_{n-3}} f(t_{n-2}) dt_{n-2} \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1}$$

$$\int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \int_0^{t_{n-3}} \frac{1}{2} [F(t_{n-2})]^2 F(t_{n-2}) dt_{n-2}$$

$$= \frac{1}{3!} [F(t_{n-3})]^3,$$

.....

这样继续下去,显然有

$$\int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-2}} f(t_{n-1}) dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1}.$$

于是,

$$\int_0^t f(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n$$

$$= \int_0^t \frac{1}{(n-1)!} [F(t_1)]^{n-1} f(t_1) dt_1$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t [F(t_1)]^{n-1} F(t_1) dt_1$$

$$= \frac{1}{n!} [F(t)]^n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n.$$

从而

$$\int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_n) dt_n$$

$$= \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^n. \text{证毕.}$$

证法二:

用归纳法证明所述公式. 当 $n = 1$ 时此公式显然成立, 今设 $n = k$ 时成立, 要证 $n = k + 1$ 时也成立, 我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \\ &= \int_0^t f(t_1) \left[\int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \right] dt_1. \end{aligned}$$

由于假定公式当 $n = k$ 时成立, 故

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \\ &= \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k. \end{aligned}$$

从而 (令 $F(s) = \int_0^s f(\tau) d\tau$, 则 $F'(s) = f(s)$)

$$\begin{aligned} & \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_k} f(t_1) f(t_2) \cdots f(t_{k+1}) dt_{k+1} \\ &= \int_0^t f(t_1) \cdot \frac{1}{k!} \left\{ \int_0^{t_1} f(\tau) d\tau \right\}^k dt_1 \\ &= \frac{1}{k!} \int_0^t [F(t_1)]^k F(t_1) dt_1 \\ &= \frac{1}{(k+1)!} [F(t)]^{k+1} \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\}^{k+1}, \end{aligned}$$

因此, 所述公式当 $n = k + 1$ 时成立. 于是, 由归纳法知所述公式对一切自然数 n 均成立. 证毕.

计算下列多重积分:

4204. (a) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n;$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$

解 (a) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) dx_n$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + \frac{1}{3}) dx_{n-1}$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}) dx_{n-2}$$

$$= \cdots \cdots$$

$$= \frac{n}{3}.$$

(b) $\int_0^1 \int_0^1 \cdots \int_0^1 (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)$$

$$+ 2(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + x_2 x_3$$

$$+ \cdots + x_2 x_n + x_3 x_4 + \cdots + x_3 x_n + \cdots$$

$$+ x_{n-1} x_n)] dx_n$$

$$= \frac{n^3}{3} - 2 \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 [(x_1 x_2 + \cdots$$

$$+ x_1 x_n) + (x_2 x_3 + \cdots + x_2 x_n)$$

$$+ \cdots + x_{n-1} x_n] dx_n$$

$$= \frac{n}{3} + 2 \left(\frac{n-1}{4} + \frac{n-2}{4} + \cdots + \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{n(3n+1)}{12}.$$

*) 利用本题(a)的结果.

$$4205. I_n = \iiint \cdots \int_{\substack{x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_n > 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n < a}} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 解法一:

化为累次积分,有

$$I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n,$$

我们又知

$$\begin{aligned} & \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n \\ &= \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-2}} (a-x_1-\dots-x_{n-2}-x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= -\frac{1}{2} (a-x_1-\dots \\ & \quad \dots-x_{n-2}-x_{n-1})^2 \Big|_{x_{n-1}=0}^{x_{n-1}=a-x_1-\dots-x_{n-2}} \\ &= \frac{1}{2} (a-x_1-\dots-x_{n-2})^2, \\ & \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-3}} dx_{n-2} \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-2}} dx_{n-1} \\ & \quad \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-1}} dx_n \\ &= \int_0^{a-x_1-\dots-x_{n-3}} \frac{1}{2} (a-x_1-\dots-x_{n-2})^2 dx_{n-2} \\ &= \frac{1}{3!} (a-x_1-\dots-x_{n-3})^3, \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

这样继续下去,显然有

$$\int_0^{a-x_1} dx_2 \int_0^{a-x_1-x_2} dx_3$$

$$\cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_{n-1} \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-1}} dx_n \\ = \frac{1}{(n-1)!} (a-x_1)^{n-1}.$$

于是,

$$I_n = \int_0^a \frac{1}{(n-1)!} (a-x_1)^{n-1} dx_1 = \frac{a^n}{n!}.$$

解法二:

我们有

$$I_n = \int_0^a dx_1 \int_0^{a-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{a-x_1-\cdots-x_{n-2}} dx_n.$$

在右端的逐次积分中作代换:

$$x_1 = a\xi_1, x_2 = a\xi_2, \cdots, x_n = a\xi_n,$$

即得

$$I_n = a^n \int_0^1 d\xi_1 \int_0^{1-\xi_1} d\xi_2 \cdots \int_0^{1-\xi_1-\cdots-\xi_{n-1}} d\xi_n \\ = a^n \int\limits_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq 1}} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \\ = a^n \cdot I_n(1),$$

其中 $I_n(1)$ 表示当 $a = 1$ 时积分 I_n 的值.

另一方面, 我们有

$$I_n(1) = \int_0^1 d\xi_n \int\limits_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{n-1} \leq 1 - \xi_n}} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_{n-1} \\ = I_{n-1}(1) \int_0^1 (1 - \xi_n)^{n-1} d\xi_n \\ = \frac{I_{n-1}(1)}{n}.$$

反复运用上述循环公式, 可得

$$I_n(1) = \frac{1}{n!},$$

于是,最后得

$$I_n = \frac{a^n}{n!}.$$

4206. $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n.$

解 $\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n.$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-2}} \frac{1}{2} x_1 x_2 \cdots x_{n-1} dx_{n-1}$$

$$= \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-3}} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} x_1 x_2 \cdots x_{n-2} dx_{n-2}$$

$$= \cdots \cdots$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{2(n-1)} \int_0^1 x_1^{2^n-1} dx_1$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots 2n} = \frac{1}{2^n \cdot n!}.$$

注:也可利用 4203 题的结果直接得

$$\int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} x_1 x_2 \cdots x_n dx_n$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\int_0^1 \tau d\tau \right)^n = \frac{1}{n! 2^n}.$$

4207. $\iint_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \cdots \int \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$

解 作变换 $x_1 = u_1(1 - u_2),$

$$x_2 = u_1 u_2(1 - u_3),$$

$$\cdots \cdots \cdots,$$

$$x_{n-1} = u_1 u_2 \cdots u_{n-1}(1 - u_n),$$

$$x_n = u_1 u_2 \cdots u_n,$$

则由 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0, x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$ 知

$$0 \leq u_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

且有

$$I = \begin{vmatrix} 1-u_2 & u_2(1-u_3) & \dots & u_2 u_3 \dots u_{n-1}(1-u_n) & u_2 u_3 \dots u_n \\ -u_1 & u_1(1-u_3) & \dots & u_1 u_3 \dots u_{n-1}(1-u_n) & u_1 u_3 \dots u_n \\ 0 & -u_1 u_2 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_1 u_2 \dots u_{n-2}(1-u_n) & u_1 \dots u_{n-2} u_n \\ 0 & 0 & \dots & -u_1 \dots u_{n-1} & u_1 \dots u_{n-1} \end{vmatrix}.$$

如在每一列的元素上加上所有以后各列相应的元素,则在对角线下面的全部元素都等于零,而在对角线上的元素就等于 $1, u_1, u_1 u_2, \dots, u_1 \dots u_{n-1}$. 因此,得

$$I = u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1}.$$

于是,最后得

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} \sqrt{x_1 + x_2 + \dots + x_n} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 u_1^{n-1} u_2^{n-2} \dots u_{n-1} du_1 du_2 \dots du_{n-1} du_n \\ &= \frac{2}{(n-1)!(2n+1)}. \end{aligned}$$

4208. 求由平面

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \pm h_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

所界的 n 维平行 $2n$ 面体的体积,这里设 $\Delta = |a_{ij}| \neq 0$.

解 令 $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \xi_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$,

即得 $2n$ 面体的体积

$$V = \int_{-h_1}^{h_1} \int_{-h_2}^{h_2} \cdots \int_{-h_n}^{h_n} \frac{1}{|\Delta|} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \\ = \frac{2^n h_1 \cdots h_n}{|\Delta|}.$$

4209. 求 n 维角锥

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n} \leq 1, x_i \geq 0 (i = 1, 2, \cdots, n) \\ (a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

的体积.

解 令 $x_i = a_i \xi_i, (i = 1, 2, \cdots, n)$ 即得体积

$$V = a_1 a_2 \cdots a_n \int_{\substack{\xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0 \\ \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq 1}} \cdots \int d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n \\ = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{n!}.$$

*) 利用 4205 题的结果.

4210. 求由曲面

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \cdots + \frac{x_{n-1}^2}{a_{n-1}^2} = \frac{x_n^2}{a_n^2}, x_n = a_n$$

所界的 n 维锥的体积.

解 作代换:

$$x_1 = a_1 r \cos \varphi_1,$$

$$x_2 = a_2 r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

.....

$$x_{n-2} = a_{n-2} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \cos \varphi_{n-2},$$

$$x_{n-1} = a_{n-1} r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-3} \sin \varphi_{n-2},$$

$$x_n = a_n x'_n,$$

则域 V 为

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq \varphi_1 \leq \pi, 0 \leq \varphi_2 \leq \pi, \dots,$$

$$0 \leq \varphi_{n-3} \leq \pi, 0 \leq \varphi_{n-2} \leq 2\pi, r \leq x'_n \leq 1,$$

并且 $|I| = a_1 a_2 \cdots a_n r^{n-2} \sin^{n-3} \varphi_1 \sin^{n-4} \varphi_2 \sin \varphi_{n-3}$.

于是, 体积为

$$\begin{aligned} V &= a_1 a_2 \cdots a_n \int_0^1 r^{n-2} dr \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \\ &\quad \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-2} \int_r^1 dx'_n \\ &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \\ &\quad \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \\ &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-3} \varphi_1 d\varphi_1 \\ &\quad \cdots 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi_{n-3} d\varphi_{n-3} \\ &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \\ &\quad \cdot B\left(\frac{n-2}{2}, \frac{1}{2}\right) B\left(\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &\quad \cdots B\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-3}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
&= \frac{2\pi a_1 a_2 \cdots a_n}{n(n-1)} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-3}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
&= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\frac{n-1}{2} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
&= \frac{a_1 a_2 \cdots a_n \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{n \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a_1 a_2 \cdots a_n.
\end{aligned}$$

*) 利用等式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi d\varphi (a > 0)$,

即得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi} \sin^{a-1} \varphi d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^{a-1} \varphi d\varphi \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1} \varphi d\varphi \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1} \varphi d\varphi.
\end{aligned}$$

**) 利用 3856 题的结果.

4211. 求 n 维球体

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$$

的体积.

解 令 $x_i = a\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$, 即得体积

$$V_n = \iiint_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_n = a^n V_n(1),$$

其中 $V_n(1)$ 表示 $a = 1$ 时的 n 维球体的体积. 但是,

$$\begin{aligned} V_n(1) &= \iiint_{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \leq 1} \dots \int d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n \\ &= \int_{-1}^1 d\xi_n \iiint_{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2} d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{n-1} \\ &= V_{n-1}(1) \int_{-1}^1 (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n \\ &= 2V_{n-1}(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \varphi d\varphi \\ &= 2V_{n-1}(1) \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)} \\ &= V_{n-1}(1) \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}, \end{aligned}$$

因为 $V_1(1) = 2$, 故由上述循环公式可得

$$V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)}.$$

因而, 所求的体积为

$$V_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} a^n.$$

对于 n 为偶数及奇数, 分别可得公式

$$V_{2m} = \frac{\pi^m}{m!} a^{2m},$$

$$V_{2m+1} = \frac{2 \cdot (2\pi)^m}{(2m+1)!} a^{2m+1}.$$

特别是, 对于 V_1, V_2, V_3 可求得熟知的值: $2a, \pi a^2,$

$$\frac{4}{3} \pi a^3.$$

4212. 求 $\iiint_{\Omega} \cdots \int_a^{\infty} x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, 其中域 Ω 是由下列不等式所确定:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2, \quad -\frac{h}{2} \leq x_n \leq \frac{h}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \iiint_{\Omega} \cdots \int_a^{\infty} x_n^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} x_n^2 dx_n \iint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq a^2} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \\ &= \frac{h^3}{12} \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} a^{n-1}. \end{aligned}$$

*) 利用 4211 题的结果.

4213. 计算

$$\begin{aligned} & \iiint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}} \\ \text{解} \quad & \iiint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1} \frac{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2}} \\ &= \iiint \cdots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}}^{\sqrt{1-x_1^2-\dots-x_{n-1}^2}} \frac{dx_n}{\sqrt{1-x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2}} \\
&= \pi \int_{x_1^2+x_2^2+\dots+x_{n-1}^2 \leq 1} \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_{n-1} \\
&= \pi \cdot \frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2} + 1\right)} = \frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

*) 利用 4211 题的结果.

4214. 证明等式

$$\begin{aligned}
& \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\
&= \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{证} \quad & \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \dots \int_{x_2}^x dx_1^{*}) \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \\
&\quad \dots \int_{x_3}^x (x-x_2) dx_2 \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \\
&\quad \dots \int_{x_4}^x \frac{1}{2} (x-x_3)^2 dx_3 \\
&= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \int_{x_{n-1}}^x dx_{n-2} \\
&\quad \dots \int_{x_5}^x \frac{1}{2 \cdot 3} (x-x_4)^3 dx_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^x f(x_n) dx_n \int_{x_n}^x \frac{1}{(n-2)!} (x-x_{n-1})^{n-2} dx_{n-1} \\
 &= \int_0^x \frac{(x-x_n)^{n-1}}{(n-1)!} f(x_n) dx_n.
 \end{aligned}$$

在上述积分中,将 x_n 代之以 u ,不影响积分的值,故得

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \\
 &= \int_0^x f(u) \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!} du.
 \end{aligned}$$

*) 利用 4202 题的结果.

4215. 证明等式

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} \\
 &= \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du.
 \end{aligned}$$

证 利用 4202 题的结果,即得

$$\begin{aligned}
 &\int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} \\
 &= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \\
 &\quad \cdots \int_{x_2}^x x_1 dx_1 \\
 &= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1} \\
 &\quad \cdots \int_{x_3}^x \frac{1}{2} (x^2 - x_2^2) x_2 dx_2 \\
 &= \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x x_n dx_n \int_{x_n}^x x_{n-1} dx_{n-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdots \int_{x_4}^x \frac{1}{2^2 \cdot 2} (x^2 - x_3^2)^2 x_3 dx_3 \\ & = \dots\dots\dots \\ & = \int_0^x f(x_{n+1}) dx_{n+1} \int_{x_{n+1}}^x \frac{1}{2^{n-1} (n-1)!} \\ & \quad \cdot (x^2 - x_n^2)^{n-1} x_n dx_n, \\ & = \int_0^x \frac{1}{2^n n!} f(x_{n+1}) (x^2 - x_{n+1})^n dx_{n+1}. \end{aligned}$$

于是, 将 x_{n+1} 代之以 u , 不影响积分的值, 故得

$$\begin{aligned} & \int_0^x x_1 dx_1 \int_0^{x_1} x_2 dx_2 \cdots \int_0^{x_n} f(x_{n+1}) dx_{n+1} \\ & = \frac{1}{2^n n!} \int_0^x (x^2 - u^2)^n f(u) du. \end{aligned}$$

4216. 证明迪里黑里公式

$$\begin{aligned} & \iint \cdots \int_{\substack{r_1, r_2, \dots, r_n \geq 0, \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq 1}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \\ & \quad \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ & = \frac{\Gamma(p_1) \Gamma(p_2) \cdots \Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 1)} \\ & \quad (p_1, p_2, \dots, p_n > 0). \end{aligned}$$

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n = 1$ 时, 公式显然成立, 即

$$\int_{0 \leq x_1 \leq 1} x_1^{p_1-1} dx_1 = \frac{1}{p_1} = \frac{\Gamma(p_1)}{\Gamma(p_1 + 1)}.$$

其次, 设公式对 $n - 1$ 成立, 今证公式对 n 也成立.

为此, 将公式左端写为

$$\int_0^1 x_n^{p_n-1} dx_n \iint \cdots \int_{\substack{r_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} \leq 1 - x_n}} x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1}$$

$$\cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}.$$

在上面的 $n-1$ 重积分中进行代换:

$$x_1 = (1-x_n)\xi_1, x_2 = (1-x_n)\xi_2, \cdots,$$

$$x_{n-1} = (1-x_n)\xi_{n-1},$$

$$\text{即得 } \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot \int_0^1 x_n^{p_n-1} (1-x_n)^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}} dx_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot B(p_n, p_1+\cdots+p_{n-1}+1)$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}$$

$$\cdot \frac{\Gamma(p_n) \cdot \Gamma(p_1+\cdots+p_{n-1}+1)}{\Gamma(p_1+\cdots+p_n+1)}$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n+1)}.$$

这样一来,我们得知公式对 n 重积分也正确. 从而对 n 为任意的自然数时,迪里黑里公式均成立.

4217. 证明柳维耳公式

$$\iint \cdots \int_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1}} f(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

$$\cdot x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)}$$

$$\cdot \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du$$

$$(p_1, p_2, \dots, p_n > 0),$$

式中 $f(u)$ 为连续函数.

证 我们应用数学归纳法证明之.

当 $n = 1$ 时, 公式显然成立, 当 $n = 2$ 时, 公式也成立, 即

$$\begin{aligned} & \int_{\substack{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \\ x_1 + x_2 \leq 1}} f(x_1 + x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2-1} du. \end{aligned}$$

事实上, 令 Ω 表域: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1$.

作代换:

$$x_1 = \xi_1, x_1 + x_2 = \xi_2, \text{ 及 } t = \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

则有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} f(x_1 + x_2) x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} dx_1 dx_2 \\ &= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^{\xi_2} \xi_1^{p_1-1} (\xi_2 - \xi_1)^{p_2-1} d\xi_1 \\ &= \int_0^1 f(\xi_2) d\xi_2 \int_0^1 t^{p_1-1} (1-t)^{p_2-1} \xi_2^{p_1+p_2-1} dt \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \int_0^1 f(\xi_2) \xi_2^{p_1+p_2-1} d\xi_2 \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)}{\Gamma(p_1 + p_2)} \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2-1} du. \end{aligned}$$

其次, 设公式对于 $n-1$ 成立, 今证对于 n 公式也成立, 为此, 将公式左端写为

$$\iiint_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \geq 0 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq 1}} \dots \int x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \dots x_{n-1}^{p_{n-1}-1} dx_1 dx_2 \dots$$

$$\cdots dx_n \int_0^{1-(x_1+x_2+\cdots+x_{n-1})} f(x+x_2+\cdots+x_n) \\ \cdot x_n^{p_n-1} dx_n.$$

如令

$$\psi(t) = \int_0^{1-t} f(t+x_n) x_n^{p_n-1} dx_n$$

代入上式, 并利用公式对 $n-1$ 成立的假定, 得知上式为

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \\ \cdot \int_0^1 \psi(t) t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} dt.$$

利用上面已证的 $n=2$ 时的公式, 于是即得

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\ x_1+x_2+\cdots+x_n \leq 1}} \cdots \int f(x_1+x_2+\cdots+x_n) \\ & \cdot x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \cdots x_n^{p_n-1} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \int_0^1 dt \int_0^{1-t} f(t+x_n) \\ & \cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \iint_{\substack{t, x_n \geq 0 \\ t+x_n \leq 1}} f(t+x_n) \\ & \cdot t^{p_1+p_2+\cdots+p_{n-1}-1} x_n^{p_n-1} dt dx_n \\ &= \frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_{n-1})}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})} \\ & \cdot \frac{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_{n-1})\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \\ & \cdot \int_0^1 f(u) u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(p_1)\Gamma(p_2)\cdots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\cdots+p_n)} \cdot \int_0^1 f(u)u^{p_1+p_2+\cdots+p_n-1} du,$$

即公式对于 n 成立. 从而, 公式对于任意自然数均成立.

4218⁺ 将展布于域 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$ 上的 n 重积分 ($n \geq 2$)

$$\int \cdots \int_n f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

化为单积分, 其中 $f(u)$ 为连续函数

解 作代换:

$$x_1 = Rr \cos \varphi,$$

$$x_2 = Rr \sin \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

.....

$$x_{n-1} = Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \cos \varphi_{n-1},$$

$$x_n = Rr \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2} \sin \varphi_{n-1}.$$

则有

$$I = R^n r^{n-1} \sin^{n-2} \varphi_1 \sin^{n-3} \varphi_2 \cdots \sin \varphi_{n-2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int_0 f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= R^n \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi_1 d\varphi_1 \\ & \quad \cdot \int_0^\pi \sin^{n-3} \varphi_2 d\varphi_2 \cdots \int_0^\pi \sin \varphi_{n-2} d\varphi_{n-2} \int_0^{2\pi} d\varphi_{n-1} \\ &= 2\pi R^n \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdots \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\
& \cdot \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \\
& = R^n \frac{2\pi \cdot \pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 r^{n-1} f(Rr) dr \\
& = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 (r^2)^{\frac{n}{2}-1} f(Rr) d(r^2) \\
& = R^n \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^1 u^{\frac{n}{2}-1} f(R\sqrt{u}) du.
\end{aligned}$$

*) 参看 4210 题的计算过程.

4219. 计算半径为 R , 密度为 ρ_0 的均匀球对自己的位, 即求积分

$$u = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2} \iiint_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

式中 $r_{1,2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

解 我们有

$$\begin{aligned}
u & = \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{x_1^2+y_1^2+z_1^2 \leq R^2} dx_1 dy_1 dz_1 \\
& \quad \iiint_{x_2^2+y_2^2+z_2^2 \leq R^2} \frac{dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}}.
\end{aligned}$$

由 4155 题的结果可知

$$\iiint_{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2} \frac{dx_1 dy_1 dz_1}{r_{1,2}} = 2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2,$$

其中 $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. 于是(利用球坐标)

$$\begin{aligned} u &= \frac{\rho_0^2}{2} \iiint_{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq R^2} (2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r_1^2) dx_1 dy_1 dz_1 \\ &= \frac{\rho_0^2}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \\ &\quad \cdot \int_0^R \left(2\pi R^2 - \frac{2}{3}\pi r^2 \right) r^2 dr \\ &= \frac{16}{15}\pi^2 \rho_0^2 R^5. \end{aligned}$$

4220. 设 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 为正定形, 计算 n 重积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^n b_i x_i + c\right)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n.$$

解 作变量代换

$$x_i = y_i + a_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

其中诸常数 a_i 以下再确定. 于是易得(注意到 $a_{ij} = a_{ji}$)

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_i y_j + 2\sum_{i=1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}a_j \right) + b_i \right] y_i \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}a_i a_j + 2\sum_{i=1}^n b_i a_i + c. \end{aligned}$$

由于 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ 是正定形, 故必有 $\delta = |a_{ij}| > 0$, 从而线性方程组

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

有唯一的一组解 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, 今取变换(1)式中的诸 α_i 即为方程组(2)的解. 于是,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + 2 \sum_{i=1}^n b_ix_i + c \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_iy_j + c', \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{其中 } c' &= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij}\alpha_j \right\} \alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i + c \\ &= - \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i + 2 \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i + c \\ &= \sum_{i=1}^n b_i\alpha_i + c. \end{aligned} \quad (4)$$

下面我们用诸 a_{ij} 和 b_i 及 c 来表出 c' 令

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix}$$

($n+1$ 阶行列式, 即 $|a_{ij}|$ 的加边行列式). 将此行列式的行 i -列乘上 α_i , 第二列乘上 α_2, \dots , 第 n 列乘上 α_n 都加到第 $n+1$ 列上去, 并注意到(2)式与(4)式, 得

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \cdots & b_n & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & \sum_{j=1}^n a_{1j}\alpha_j + b_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \cdots & b_n & \sum_{j=1}^n b_j\alpha_j + c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & \vdots & c \end{vmatrix} = c' |a_{ij}| = c' \delta,$$

故

$$c' = \frac{\Delta}{\delta}. \quad (5)$$

由于 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_iy_j$ 是正定二次型, 故由高等代数中二次型的理论知, 存在正交矩阵

$$P = (p_{ij}) = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix},$$

使在线性变换

$$y_i = \sum_{j=1}^n p_{ij}z_j, (i = 1, 2, \cdots, n) \quad (6)$$

下, 二次型变为平方和:

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}y_iy_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2, \quad (7)$$

其中 $\lambda_i > 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$; 也即

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (8)$$

其中 $A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. 由于 P 为正交矩阵,

故 $P^{-1} = P'$ (P' 表 P 的转置矩阵), 且 $|P| = |p_{ij}| = \pm$

1. 由(8)式又知

$$\delta = |a_{ij}| = |P^{-1}| \cdot |A| \cdot |P| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n. \quad (9)$$

根据(1)式与(6)式,可知

$$\frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} = 1.$$

$$\frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(z_1, \cdots, z_n)} = |p_{ij}| = |P| = \pm 1.$$

于是,利用广义 n 重积分的变量代换公式,并注意到被积函数的非负性,得(注意(3)式、(5)式与(7)式)

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i y_i \right\}} \\ &\quad \cdot dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 + 2 \right\}} \\ &\quad \left| \frac{D(x_1, \cdots, x_n)}{D(y_1, \cdots, y_n)} \right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= e^{-\frac{4}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left\{ \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 \right\}} dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= e^{-\frac{4}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2} \\ &\quad \left| \frac{D(y_1, \cdots, y_n)}{D(z_1, \cdots, z_n)} \right| dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\ &= e^{-\frac{4}{\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i z_i^2} dz_1 dz_2 \cdots dz_n \\ &= e^{-\frac{4}{\delta}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_1 z_1^2} dz_1 \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_2 z_2^2} dz_2 \right) \\ &\quad \cdots \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda_n z_n^2} dz_n \right). \end{aligned}$$

作代换 $z_i = -\frac{u}{\sqrt{\lambda_i}}$ (i 固定), 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda z_i^2} dz_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

以此代入上式,并注意到(9)式,最后得

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i x_i + c\right)}$$

$$\cdot dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

$$= e^{-\frac{c}{\delta}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}} = \sqrt{\frac{\pi^n}{\delta}} e^{-\frac{c}{\delta}}.$$

§ 11. 曲线积分

1° 第一型的曲线积分 若 $f(x, y, z)$ 在平滑曲线 C

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (t_0 \leq t \leq T) \quad (1)$$

的各点上有定义并且是连续的函数, ds 为弧的微分, 则

$$\int_C f(x, y, z) ds$$

$$= \int_{t_0}^T f[x(t), y(t), z(t)] \cdot \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

这个积分的特性在于它与曲线 C 的方向无关.

2° 第一型曲线积分在力学方面的应用 若 $\rho = \rho(x, y, z)$ 为曲线 C 在流动点 (x, y, z) 的线密度, 则 曲线 C 的质量 等于

$$M = \int_C \rho(x, y, z) ds.$$

此曲线的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 由下面的公式来表示

$$x_0 = \frac{1}{M} \int_C x \rho(x, y, z) ds,$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \int_C y \rho(x, y, z) ds,$$

$$z_0 = \frac{1}{M} \int_C z \rho(x, y, z) ds.$$

3° 第二型的曲线积分 若函数 $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ 在曲线(1)上的各点是连续的, 这曲线的方向是使参数 t 增加的方向, 则

$$\begin{aligned} & \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_{t_0}^T \{P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &+ R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\} dt. \end{aligned} \quad (2)$$

当曲线 C 环行的方向变更时此积分的符号也变更. 在力学上积分(2)是当其作用点描绘出曲线 C 时 变力 (P, Q, R) 所作的功.

4° 全微分的情形 若

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = du,$$

式中 $u = u(x, y, z)$ 为域 V 内的单值函数, 则与完全位于域 V 内的曲线 C 的形状无关, 而有:

$$\int_C P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1),$$

式中 (x_1, y_1, z_1) 为路径的始点, (x_2, y_2, z_2) 为路径的终点. 最简单的情况是域 V 是单联通的而函数 P, Q, R 有连续的一级偏导函数, 对于此事的充分而且必要的条件为: 在域 V 内, 下列条件恒满足:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

这时, 函数 u 可按下面的公式来求得

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \int_{x_0}^x P(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y, z) dy \\ &+ \int_{z_0}^z R(x_0, y_0, z) dz, \end{aligned}$$

其中 (x_0, y_0, z_0) 为域 V 内某一固定的点.

在力学上这个情况对应于位力所作的功.

计算下列第一型的曲线积分：

4221. $\int_C (x+y)ds$, 其中 C 为以 $O(0,0)$, $A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_C (x+y)ds \\ &= \int_{OA} (x+y)ds + \int_{AB} (x+y)ds + \int_{BO} (x+y)ds \\ &= \int_0^1 xdx + \int_0^1 \sqrt{2}dx + \int_0^1 ydy = 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

4222. $\int_C y^2 ds$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一拱.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \\ &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C y^2 ds &= 2a^3 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} (1 - \cos t)^2 dt \\ &= 8a^3 \int_0^{2\pi} \sin^5 \frac{t}{2} dt = 32a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 u du \\ &= \frac{256}{15} a^3. \end{aligned}$$

4223. $\int_C (x^2 + y^2) ds$, 其中 C 为曲线 $x = a(\cos t + t \sin t)$, $y = a(\sin t - t \cos t)$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 t^2 \cos^2 t + a^2 t^2 \sin^2 t} dt = at dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_c (x^2 + y^2) ds \\ &= \int_0^{2\pi} [a^2(\cos t + t \sin t)^2 + a^2(\sin t - t \cos t)^2] a dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^3 t(1 + t^2) dt = 2\pi^2 a^3 (1 + 2\pi^2). \end{aligned}$$

4224. $\int_c xy ds$, 其中 C 为双曲线 $x = a \operatorname{ch} t, y = a \operatorname{sh} t (0 \leq t \leq t_0)$ 的弧.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2 \operatorname{ch}^2 t} dt = a \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_c xy ds &= a^3 \int_0^{t_0} \operatorname{ch} t \operatorname{sh} t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt \\ &= \frac{a^3}{2} \int_0^{t_0} \operatorname{sh} 2t \sqrt{\operatorname{ch} 2t} dt \\ &= \frac{a^3}{4} \int_0^{t_0} \sqrt{\operatorname{ch} 2t} d(\operatorname{ch} 2t) \\ &= \frac{a^3}{6} (\sqrt{\operatorname{ch}^3 2t_0} - 1). \end{aligned}$$

4225. $\int_c (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$, 其中 C 为内摆线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的弧.

解 方法一:

按直角坐标方程计算, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{3}{2}}} dx.$$

于是,

$$\int_c (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^a [x^{\frac{4}{3}} + (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^2] \frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} dx \\
&= 4a^{\frac{1}{3}} \int_0^a (2x + a^{\frac{4}{3}} x^{-\frac{1}{3}} - 2a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{1}{3}}) dx = 4a^{\frac{7}{3}}.
\end{aligned}$$

方法二:

按参数方程计算. 若令 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$,

则

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t} dt \\
&= 3a \cos t \sin t dt \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \right).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int_C (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds \\
&= 4a^{\frac{4}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 t + \sin^4 t) \cdot 3a \cos t \sin t dt \\
&= 24a^{\frac{7}{3}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 t d(\sin t) = 4a^{\frac{7}{3}}.
\end{aligned}$$

4226. $\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 C 为由曲线 $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$ (r 和 φ 为极坐标) 所界的凸围线.

解 凸围线由三段组成, 分别是: 直线段 $\varphi = 0 (0 \leq r \leq a)$; 圆弧段 $r = a (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4})$; 直线段 $\varphi = \frac{\pi}{4} (0 \leq r \leq a)$, 弧长的微分相应地是: $ds = dr; ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = ad\varphi; ds = dr$. 于是,

$$\begin{aligned}
\int_C e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds &= \int_0^a e^r dr + \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^a a d\varphi + \int_0^a e^r dr \\
&= 2(e^a - 1) + \frac{\pi a e^a}{4}.
\end{aligned}$$

4227. $\int_C |y| ds$, 其中 C 为双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ 的弧.

解 双纽线的极坐标方程为 $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$. 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C |y| ds &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a \sqrt{\cos 2\varphi} \sin \varphi \cdot \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\ &= 4a^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2a^2(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4228. $\int_C x ds$, 其中 C 为对数螺线 $r = ae^{k\varphi}$ ($k > 0$) 在圆 $r = a$ 内的部分.

解 弧长的微分为

$$ds = ae^{k\varphi} \sqrt{1 + k^2} d\varphi \quad (-\infty < \varphi < 0).$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C x ds &= \int_{-\infty}^0 ae^{k\varphi} \cos \varphi \cdot ae^{k\varphi} \sqrt{1 + k^2} d\varphi \\ &= a^2 \sqrt{1 + k^2} \frac{2k \cos \varphi + \sin \varphi}{1 + 4k^2} e^{2k\varphi} \Big|_{-\infty}^0 \\ &= \frac{2ka^2 \sqrt{1 + k^2}}{1 + 4k^2}. \end{aligned}$$

4229. $\int_C \sqrt{x^2 + y^2} ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

解 对于上半圆周, 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{a - 2x}{2y}\right)^2} dx = \frac{a}{2y} dx$$

$$= \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx (0 \leq x \leq a).$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{x^2+y^2} ds &= 2 \int_0^a \sqrt{ax} \cdot \frac{a}{2\sqrt{ax-x^2}} dx \\ &= a\sqrt{a} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a-x}} = 2a^2. \end{aligned}$$

4230. $\int_C \frac{ds}{y^2}$, 其中 C 为悬链线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C \frac{ds}{y^2} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{x}{a}}{a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a}} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\operatorname{sh} \frac{x}{a}\right)}{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\operatorname{sh} \frac{x}{a} \right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{a}. \end{aligned}$$

求下列空间曲线的弧长 (参数是正的):

4231. $x = 3t, y = 3t^2, z = 2t^3$ 从 $O(0,0,0)$ 到 $A(3,3,2)$.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = 3(2t^2 + 1) dt.$$

于是, 弧长为

$$s = \int_0^1 3(2t^2 + 1) dt = 5.$$

4232. $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t, z = e^{-t}$, 当 $0 < t < +\infty$.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{e^{-2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{-2t}(\cos t + \sin t)^2 + e^{-2t}} dt \\ &= \sqrt{3} e^{-t} dt. \end{aligned}$$

于是, 弧长为

$$s = \sqrt{3} \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \sqrt{3}.$$

4233. $y = a \arcsin \frac{x}{a}, z = \frac{a}{4} \ln \frac{a-x}{a+x}$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{1 + \frac{a^2}{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{4(a^2 - x^2)^2}} dx \\ &= \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx \quad (|x_0| < a). \end{aligned}$$

于是, 当 $x_0 \geq 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_0} \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx \\ &= \frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} + x_0 = |z_0| + |x_0|; \end{aligned}$$

当 $x_0 < 0$ 时, 有

$$\begin{aligned} s &= \int_{x_0}^0 \frac{3a^2 - 2x^2}{2(a^2 - x^2)} dx \\ &= -\frac{a}{4} \ln \frac{a+x_0}{a-x_0} - x_0 = |z_0| + |x_0|. \end{aligned}$$

总之, 当 $|x_0| < a$, 有 $s = |z_0| + |x_0|$.

4234. $(x-y)^2 = a(x+y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 由 $(x - y)^2 = a(x + y), x^2 - y^2 = \frac{9}{8}z^2$ 可解得

$$x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^4} + \sqrt{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right],$$

$$y = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^4} - \sqrt{\frac{9a}{8}} \sqrt[3]{z^2} \right].$$

由于

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2 \\ &= \frac{8}{9a^2} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^4} \sqrt[3]{z^2} + \frac{2}{9} \sqrt{\left(\frac{9a}{8}\right)^2} \sqrt[3]{z^{-2}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^{-2}}, \end{aligned}$$

故弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} \sqrt[3]{z^2} + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \sqrt[3]{z^{-2}} + 1} dz \\ &= \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6} \frac{1}{t} + 1} \\ &\quad \cdot \frac{3\sqrt{t}}{2} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{9a}}{2a} t^2 + t + \frac{\sqrt[3]{3a^2}}{6}} dt \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt[3]{z_0^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{3}{a} t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{a}{3}} \right] dt \\ &= \frac{3}{4\sqrt{2}} \left[\sqrt{\frac{3z_0^4}{a}} + 2\sqrt{\frac{az_0^2}{3}} \right]. \end{aligned}$$

4235. $x^2 + y^2 = cz, \frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{z}{c}$ 从 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(x_0, y_0, z_0)$.

解 取曲线的参数方程为

$$x = \sqrt{cz} \cos \frac{z}{c}, y = \sqrt{cz} \sin \frac{z}{c}, z = z,$$

则弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \left[\left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \cos \frac{z}{c} - \sqrt{\frac{z}{c}} \sin \frac{z}{c} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} \sin \frac{z}{c} + \sqrt{\frac{z}{c}} \cos \frac{z}{c} \right)^2 + 1 \right]^{\frac{1}{2}} dz \\ &= \sqrt{\frac{c}{4z} + \frac{z}{c} + 1} dz = \frac{2z + c}{\sqrt{4cz}} dz. \end{aligned}$$

于是,弧长为

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{z_0} \frac{2z + c}{\sqrt{4cz}} dz = \int_0^{z_0} \sqrt{\frac{z}{c}} dz + \int_0^{z_0} \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{z}} dz \\ &= \sqrt{cz_0} \left(1 + \frac{2z_0}{3c} \right). \end{aligned}$$

4236. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ch} \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) = a$ 从点 $A(a, 0, 0)$ 到点 $B(x, y, z)$.

解 令 $x = \sqrt{a^2 - z^2} \cos \varphi$, $y = \sqrt{a^2 - z^2} \sin \varphi$, 不妨设 $z > 0$, 则有

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{a^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi} \right)} = a \operatorname{th} \varphi. \end{aligned}$$

而 $\sqrt{a^2 - z^2} = \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{th}^2 \varphi)} = \frac{a}{\operatorname{ch} \varphi}$, 故

$x = \frac{a \cos \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}$, $y = \frac{a \sin \varphi}{\operatorname{ch} \varphi}$, $z = a \operatorname{th} \varphi$ 为曲线的参数方程, 弧长的微分为

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2} d\varphi \\
 &= a \sqrt{\frac{\operatorname{ch}^2\varphi + \operatorname{sh}^2\varphi + 1}{\operatorname{ch}^4\varphi}} d\varphi \\
 &= \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi}.
 \end{aligned}$$

于是,弧长为

$$\begin{aligned}
 s &= \int_0^\varphi \sqrt{2} a \frac{d\varphi}{\operatorname{ch}\varphi} = \sqrt{2} a \int_0^\varphi \frac{2}{e^\varphi + e^{-\varphi}} d\varphi \\
 &= 2 \sqrt{2} a \int_0^\varphi \frac{1}{1 + (e^\varphi)^2} d(e^\varphi) \\
 &= 2 \sqrt{2} a \operatorname{arctg} e^\varphi \Big|_0^\varphi \\
 &= 2 \sqrt{2} a \left(\operatorname{arctg} \frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}} - \frac{\pi}{4} \right)^{*)} \\
 &= \sqrt{2} a \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}. **)
 \end{aligned}$$

容易推证,当 $z < 0$ 时,弧长为

$$s = \sqrt{2} a \operatorname{arctg} \frac{-z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

总之,最后得

$$s = \sqrt{2} a \operatorname{arctg} \frac{|z|}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

*) 由 $z = a \operatorname{th}\varphi$ 知:

$$z(e^\varphi + e^{-\varphi}) = a(e^\varphi - e^{-\varphi}),$$

$$z(e^{2\varphi} - 1) = a(e^{2\varphi} - 1),$$

从而

$$e^{2\varphi} = \frac{a+z}{a-z} \text{ 或 } e^\varphi = \frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

**) 由于

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{a - \sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

$$= \frac{a - \sqrt{a^2-z^2}}{z},$$

故在主值范围内有

$$\operatorname{arctg} \frac{a+z}{\sqrt{a^2-z^2}} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}.$$

计算沿空间曲线所取的第一型曲线积分:

4237. $\int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 C 为螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t,$

$z = bt (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的一段.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 + b^2} dt.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt \\ &= \frac{2\pi}{3} (3a^2 + 4\pi^2 b^2) \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

4238. $\int_C x^2 ds$, 其中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$.

解 方法一

作代换:

$$u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, v = \frac{x+y-2z}{\sqrt{6}},$$

$$w = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}},$$

则圆周 C 化为

$$u^2 + v^2 + w^2 = a^2, w = 0.$$

于是,

$$\begin{aligned} \int_C x^2 ds &= \int_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} + \frac{w}{\sqrt{3}} \right)^2 ds \\ &= \int_C \left(\frac{u}{\sqrt{2}} + \frac{v}{\sqrt{6}} \right)^2 ds \\ &= \frac{1}{6} \int_C (3u^2 + v^2) ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds \\ &= \frac{1}{6} \int_C a^2 ds + \frac{1}{3} \int_C u^2 ds + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_C uv ds \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} a^3 \cos^2 \varphi d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} a^3 \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \pi a^3 + \frac{1}{3} \pi a^3 = \frac{2}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

方法二

由对称性知:

$$\int_C x^2 ds = \int_C y^2 ds = \int_C z^2 ds.$$

于是,

$$\int_C x^2 ds = \frac{1}{3} \int_C (x^2 + y^2 + z^2) ds$$

$$= \frac{a^2}{3} \int_c ds = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

4239. $\int_c z ds$, 其中 C 为圆锥螺线 $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t$ ($0 \leq t \leq t_0$).

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \sqrt{2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_c z ds = \int_0^{t_0} t \sqrt{2 + t^2} dt = \frac{1}{3} [(2 + t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}].$$

4240. $\int_c z ds$, 其中 C 为曲线 $x^2 + y^2 = z^2, y^2 = ax$ 上从点 $O(0, 0, 0)$ 到点 $A(a, a, a\sqrt{2})$ 的弧.

解 由曲线方程得

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^4}{a^2} + y^2} = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}.$$

从而, 曲线的参数方程可取为

$$x = \frac{y^2}{a}, y = y, z = \frac{y}{a} \sqrt{y^2 + a^2}.$$

弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{2y}{a}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2y^2 + a^2}{a\sqrt{y^2 + a^2}}\right)^2} dy \\ &= \sqrt{\frac{8y^4 + 9a^2y^2 + 2a^4}{a^2(y^2 + a^2)}} dy. \end{aligned}$$

于是,

$$\int_c z ds$$

$$= \frac{a^2}{256 \sqrt{2}} \left[100 \sqrt{38} - 72 - 17 \ln \frac{25 + 4 \sqrt{38}}{17} \right].$$

4241⁺. 设曲线 $x = a \cos t, y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 在点 (x, y) 的线密度等于 $\rho = |y|$, 求其质量.

解 质量 $m = \int_C |y| ds$, 其中 C 为椭圆 $x = a \cos t, y = b \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$).

先设 $a > b$. 这时

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= a \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. 于是,

$$\begin{aligned} m &= \int_0^\pi a b \sin t \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &\quad + \int_\pi^{2\pi} a (-b \sin t) \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= -ab \int_0^\pi \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} d(\cos t) \\ &\quad + ab \int_\pi^{2\pi} \sqrt{1 - \epsilon^2 \cos^2 t} d(\cos t) \\ &= ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du + ab \int_{-1}^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du \\ &= 4ab \int_0^1 \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} du \\ &= \frac{4ab}{\epsilon} \left[\frac{1}{2} \epsilon u \sqrt{1 - \epsilon^2 u^2} + \frac{1}{2} \arcsin(\epsilon u) \right] \Big|_{u=0}^{u=1} \\ &= 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}. \end{aligned}$$

次设 $a < b$. 这时

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\ &= a \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt, \end{aligned}$$

其中 $\epsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$. 仿前, 有

$$\begin{aligned} m &= \int_0^\pi absint \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt \\ &\quad + \int_\pi^{2\pi} a(-bsint) \sqrt{1 + \epsilon_1^2 \cos^2 t} dt \\ &= 4ab \int_0^1 \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2} du \\ &= \frac{4ab}{\epsilon_1} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon_1 u \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln(\epsilon_1 u + \sqrt{1 + \epsilon_1^2 u^2}) \right\} \Big|_{u=0}^{u=1} \\ &= 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\epsilon_1 + \sqrt{1 + \epsilon_1^2})}{\epsilon_1}. \end{aligned}$$

最后, 若 $a = b$, 则椭圆退化成圆, 这时 $ds = a dt$, 故

$$m = \int_0^\pi a^2 \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} (-a \sin t) a dt = 4a^2$$

综上所述, 可知

$$m = \begin{cases} 2b^2 + 2ab \frac{\arcsin \epsilon}{\epsilon}, & \text{若 } a > b; \\ 2b^2 + 2ab \frac{\ln(\epsilon_1 + \sqrt{1 + \epsilon_1^2})}{\epsilon_1}, & \text{若 } a < b; \\ 4a^2, & \text{若 } a = b, \end{cases}$$

其中 $\epsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} (a > b)$,

$$\epsilon_1 = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a} (a < b).$$

4242. 求曲线 $x = at, y = \frac{a}{2}t^2, z = \frac{a}{3}t^3 (0 \leq t \leq 1)$ 的弧之质

量, 其密度依规律 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}}$ 而变化.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2 + a^2t^2 + a^2t^4} dt \\ &= a \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt, \end{aligned}$$

而密度 $\rho = \sqrt{\frac{2y}{a}} = t$. 于是, 质量为(作代换 $u = t^2$)

$$\begin{aligned} m &= \int_0^1 \sqrt{\frac{2y}{a}} ds = a \int_0^1 t \sqrt{1 + t^2 + t^4} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + u + u^2} du \\ &= \frac{a}{2} \left[\frac{u + \frac{1}{2}}{2} \sqrt{1 + u + u^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \ln \left(u + \frac{1}{2} + \sqrt{1 + u + u^2} \right) \right] \Big|_0^1 \\ &= \frac{a}{8} \left[(3\sqrt{3} - 1) + \frac{3}{2} \ln \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3} \right]. \end{aligned}$$

4243. 计算均匀的曲线 $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ 从点 $A(0, a)$ 到点 $B(b, h)$ 的弧的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x}{a}} dx = \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx.$$

质量为

$$m = \rho_0 \int_0^b \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = a\rho_0 \operatorname{sh} \frac{b}{a} = \rho_0 \sqrt{h^2 - a^2} \quad *)$$

于是,重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\rho_0}{m} \int_0^b x \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx \\ &= \frac{\rho_0}{m} \left[ab \operatorname{sh} \frac{b}{a} - a^2 \left(\operatorname{ch} \frac{b}{a} - 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left[b \sqrt{h^2 - a^2} - a^2 \left(\frac{h}{a} - 1 \right) \right] \\ &= b - a \sqrt{\frac{h-a}{h+a}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\rho_0}{m} \int_0^b y \operatorname{ch} \frac{x}{a} dx = \frac{a\rho_0}{m} \int_0^b \operatorname{ch}^2 \frac{x}{a} dx \\ &= \frac{a\rho_0}{m} \int_0^b \frac{1 + \operatorname{ch} 2x}{2} dx \\ &= \frac{a\rho_0}{m} \left[\frac{x}{2} + \frac{a}{4} \operatorname{sh} \frac{2x}{a} \right] \Big|_0^b \\ &= \frac{a\rho_0}{m} \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{4} \operatorname{sh} \frac{2b}{a} \right) \\ &= \frac{a}{\sqrt{h^2 - a^2}} \left(\frac{b}{2} + \frac{h}{2} \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a} \right) \\ &= \frac{h}{2} + \frac{ab}{2\sqrt{h^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

*) 由 $h = a \operatorname{ch} \frac{b}{a}$ 知: $\operatorname{ch} \frac{b}{a} = \frac{h}{a}$. 从而

$$\operatorname{sh} \frac{b}{a} = \sqrt{\operatorname{ch}^2 \frac{b}{a} - 1} = \frac{\sqrt{h^2 - a^2}}{a}.$$

4244. 求摆线

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq \pi)$ 的弧的重心.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2a \sin \frac{t}{2} dt. \end{aligned}$$

质量为

$$m = 2a\rho_0 \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt = 4a\rho_0.$$

于是,重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_0^\pi \rho_0 a (t - \sin t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_0^\pi t \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin t \sin \frac{t}{2} dt \\ &= -at \cos \frac{t}{2} \Big|_0^\pi + a \int_0^\pi \cos \frac{t}{2} dt \\ &\quad + \frac{a}{4} \int_0^\pi \left(\cos \frac{3t}{2} - \cos \frac{t}{2} \right) dt \\ &= \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \int_0^\pi \rho_0 a (1 - \cos t) \cdot 2a \sin \frac{t}{2} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_0^\pi \sin \frac{t}{2} dt - \frac{a}{4} \int_0^\pi \left(\sin \frac{3t}{2} - \sin \frac{t}{2} \right) dt \\ &= \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

4245. 计算球面上的三角形 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2; x > 0, y > 0, z > 0$ 的围线的重心的坐标.

解 作球坐标变换:

$$x = r \cos \varphi \cos \psi, y = r \sin \varphi \cos \psi,$$

$$z = r \sin \psi,$$

则球面上的三角形三条曲边的方程分别是:

$$x = a\cos\varphi, y = a\sin\varphi, z = 0; 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x = a\cos\psi, y = 0, z = a\sin\psi; 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2};$$

$$x = 0, y = a\cos\phi, z = a\sin\phi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

又因围线的周长为

$$s = 3 \cdot \frac{\pi a}{2} = \frac{3\pi a}{2}.$$

于是,重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\varphi \cdot a d\varphi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\psi \cdot a d\psi}{\frac{3\pi a}{2}} \\ &= \frac{2a^2}{3\pi a} = \frac{4a}{3\pi}. \end{aligned}$$

利用对称性知: $x_0 = y_0 = z_0 = \frac{4a}{3\pi}$.

4246. 求均匀的弧 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t (-\infty < t \leq 0)$ 的重心的坐标.

解 弧长的微分为

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2 + e^{2t}} dt \\ &= \sqrt{3} e^t dt. \end{aligned}$$

质量为

$$m = \int_{-\infty}^0 \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3}.$$

于是,重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_{-\infty}^0 e^t \cos t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} \cos t dt \\ &= \frac{2\cos t + \sin t}{5} e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$y_3 = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^0 e^t \sin t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} \sin t dt$$

$$= \frac{2 \sin t - \cos t}{5} e^{2t} \Big|_{-\infty}^0 = -\frac{1}{5}.$$

$$z_0 = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^0 e^t \cdot \sqrt{3} e^t dt = \int_{-\infty}^0 e^{2t} dt = \frac{1}{2}.$$

4247. 求螺线 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = \frac{h}{2\pi} t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的一枝对于坐标轴的转动惯量.

解 弧长的微分为

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2}} dt$$

$$= \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt.$$

于是, 转动惯量为

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2) ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \sin^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right) \frac{\sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}}{2\pi} dt$$

$$= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi$$

$$+ \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3$$

$$= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.$$

$$I_y = \int_C (x^2 + z^2) ds$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(a^2 \cos^2 t + \frac{h^2}{4\pi^2} t^2 \right)$$

$$\cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a^2}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \pi \\
&\quad + \frac{h^2}{4\pi^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} \cdot \frac{1}{3} (2\pi)^3 \\
&= \left(\frac{a^2}{2} + \frac{h^2}{3} \right) \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_C (x^2 + y^2) ds \\
&= \int_0^{2\pi} a^2 \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2} dt \\
&= a^2 \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}.
\end{aligned}$$

4248. 计算第二型的曲线积分

$$\int_{OA} xdy - ydx,$$

式中 O 为坐标原点, A 点的坐标为 $(1, 2)$ 并设: (a) OA 为直线段; (b) OA 为抛物线, 其轴为 Oy ; (c) OA 为由 Ox 轴上的线段 OB 和平行于 Oy 轴的线段 BA 所组成的折线.

解 (a) 直线段的方程为 $y = 2x$. 于是,

$$\int_{OA} xdy - ydx = \int_0^1 (2x - 2x) dx = 0.$$

(b) 抛物线的方程为 $y = 2x^2$. 于是,

$$\int_{OA} xdy - ydx = \int_0^1 (4x^3 - 2x^2) dx = \frac{2}{3}.$$

(c) 线段 OB 的方程为 $y = 0$, BA 的方程为 $x = 1$. 于是,

$$\int_{OA} xdy - ydx = \int_0^1 0 \cdot dx + \int_0^2 1 \cdot dy = 2.$$

4249. 对于上题中所指示的路径(a), (b), (c), 计算

$$\int_{OA} xdy + ydx.$$

$$\text{解} \quad (\text{a}) \int_{OA} xdy + ydx = \int_0^1 (2x + 2x)dx = 2.$$

$$(\text{b}) \int_{OA} xdy + ydx = \int_0^1 (4x^2 + 2x^2)dx = 2.$$

$$(\text{c}) \int_{OA} xdy + ydx = \int_0^2 dy = 2.$$

在参数增加的方向,沿所指示的曲线来计算下列第二型曲线积分:

$$4250. \int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy, \text{其中} C \text{为抛物线 } y = x^2 (-1 \leq x \leq 1).$$

解 由题设 $y = x^2$, 从而 $dy = 2xdx$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy \\ &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 2x^3) + 2x(x^4 - 2x^3)]dx \\ &= -\frac{14}{15}. \end{aligned}$$

$$4251. \int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy, \text{其中} C \text{为曲线}$$

$$y = 1 - |1 - x| (0 \leq x \leq 2).$$

解 当 $0 \leq x \leq 1$ 时, $y = 1 - (1 - x) = x$, 从而 $dy = dx$; 当 $1 \leq x \leq 2$ 时, $y = 1 - (x - 1) = 2 - x$, 从而 $dy = -dx$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy \\ &= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 [x^2 + (2 - x)^2 - x^2 + (2 - x)^2]dx \\ &= \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

4252. $\oint_C (x+y)dx + (x-y)dy$, 其中 C 为依反时针方向通过的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 利用椭圆的参数方程

$$x = a\cos t, y = a\sin t (0 \leq t \leq 2\pi),$$

则有

$$\begin{aligned} & \oint_C (x+y)dx + (x-y)dy \\ &= \int_0^{2\pi} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) \\ & \quad + (a\cos t - b\sin t)b\cos t] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(ab\cos 2t - \frac{a^2 + b^2}{2} \sin 2t \right) dt = 0. \end{aligned}$$

4253. $\int_C (2a-y)dx + xdy$, 其中 C 为摆线 $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t) (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的一拱.

解 由题设知: $dx = a(1 - \cos t)dt, dy = a\sin tdt$.

于是,

$$\begin{aligned} & \int_C (2a-y)dx + xdy \\ &= \int_0^{2\pi} \{ [2a - a(1 - \cos t)]a(1 - \cos t) \\ & \quad + a(t - \sin t)a\sin t \} dt \\ &= \int_0^{2\pi} a^2 t \sin t dt \\ &= -a^2 (t \cos t - \sin t) \Big|_0^{2\pi} = -2\pi a^2. \end{aligned}$$

4254. $\oint_C \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 C 为依反时针方向通过的圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 利用圆的参数方程

$$x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq 2\pi).$$

则有

$$\begin{aligned} & \oint \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{(a \cos t + a \sin t)a \sin t - (a \cos t - a \sin t)a \cos t}{a^2} dt \\ &= - \int_0^{2\pi} dt = -2\pi. \end{aligned}$$

4255. $\oint_{ABCD} \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$, 其中 ABCDA 为以 $A(1,0), B(0,1), C(-1,0), D(0,-1)$ 为顶点的正方形的围线.

解 正方形各边的方程分别为

$$\begin{aligned} AB: y &= 1 - x; & BC: y &= 1 - x; \\ CD: y &= -1 - x; & DA: y &= -1 + x. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \oint_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|} \\ &= \int_{AB} \frac{dx + dy}{x + y} + \int_{BC} \frac{dx + dy}{-x + y} \\ & \quad + \int_{CD} \frac{dx + dy}{-x - y} + \int_{DA} \frac{dx + dy}{x - y} \\ &= \int_1^0 (1 - 1)dx + \int_0^{-1} 2dx \\ & \quad + \int_{-1}^0 (1 - 1)dx + \int_0^1 2dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

4256. $\int_{AB} \sin y dx + \sin x dy$, 其中 AB 为界于点 $A(0, \pi)$ 和点 $B(\pi, 0)$ 之间的直线段.

解 AB 的方程为 $y = \pi - x$. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{AB} \sin y dx + \sin x dy \\ &= \int_0^\pi \sin(\pi - x) dx + \sin x dx \\ &= \int_0^\pi (\sin x + \sin x) dx = 0. \end{aligned}$$

注：原题为 $\int_{AB} dx \sin y - dy \sin x$ ，若把它理解为 $\int_{AB} d(x \sin y) + d(y \sin x)$ ，其值仍为零，与原答案也符合。

4257. $\oint_{OmAnO} \arctg \frac{y}{x} dy - dx,$

其中 OmA 为抛物线段 $y = x^2$, OnA 为直线段 $y = x$.

解 如图 8.62 所示, 我们有

$$\begin{aligned} & \oint_{OmAnO} \arctg \frac{y}{x} dy - dx \\ &= \int_{OmA} \arctg \frac{y}{x} dy - dx \\ &+ \int_{AnO} \arctg \frac{y}{x} dy - dx \\ &= \int_0^1 2x \arctg x dx - \int_0^1 dx \\ &+ \int_1^0 (\arctg 1 - 1) dx \\ &= x^2 \arctg x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx \end{aligned}$$

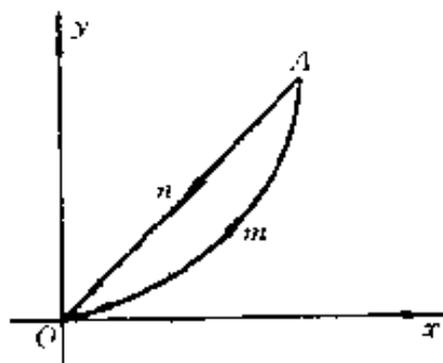


图 8.62

$$\begin{aligned}
& -1 + \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) x \Big|_1^0 \\
&= \frac{\pi}{4} - (x - \operatorname{arctg} x) \Big|_0^1 - 1 - \left(\frac{\pi}{4} - 1 \right) \\
&= \frac{\pi}{4} - 1.
\end{aligned}$$

注：原题为 $\oint_{O \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow O} d\left(y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - dx \right)$ ，若把它理解为

$$\oint_{O \rightarrow M \rightarrow A \rightarrow O} d\left(y \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \right) - dx, \text{ 则其值为零, 与原答案不符.}$$

验证被积函数为全微分, 并计算下列曲线积分:

$$4258. \int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx.$$

解 显然, $xdy + ydx = d(xy)$ 是全微分. 于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{(-1,2)}^{(2,3)} xdy + ydx \\
&= \int_{(-1,2)}^{(2,3)} d(xy) = xy \Big|_{(-1,2)}^{(2,3)} = 8.
\end{aligned}$$

$$4259. \int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy.$$

解 显然, $xdx + ydy = d\left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right)$ 是全微分.

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{(0,1)}^{(3,-4)} xdx + ydy \\
&= \int_{(0,1)}^{(3,-4)} d\left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \\
&= \frac{x^2 + y^2}{2} \Big|_{(0,1)}^{(3,-4)} = 12.
\end{aligned}$$

$$4260. \int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy.$$

解 显然, 我们有

$$\begin{aligned}
& (x+y)dx + (x-y)dy \\
&= (ydx + xdy) + (x dx - y dy) \\
&= d(xy) + d\left(\frac{x^2 - y^2}{2}\right) \\
&= d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right),
\end{aligned}$$

即是全微分. 于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{(0,1)}^{(2,3)} (x+y)dx + (x-y)dy \\
&= \int_{(0,1)}^{(2,3)} d\left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) \\
&= \left(xy + \frac{x^2 - y^2}{2}\right) \Big|_{(0,1)}^{(2,3)} = 4.
\end{aligned}$$

4261. $\int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx - dy).$

解 显然, $(x-y)(dx - dy) = d\frac{(x-y)^2}{2}$ 是全微分. 于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{(1,-1)}^{(1,1)} (x-y)(dx - dy) \\
&= \int_{(1,-1)}^{(1,1)} d\frac{(x-y)^2}{2} \\
&= \frac{(x-y)^2}{2} \Big|_{(1,-1)}^{(1,1)} = -2.
\end{aligned}$$

4262. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)(dx + dy)$, 其中 $f(u)$ 为连续函数.

解 令 $F(x,y) = \int_0^{x+y} f(u)du$. 由于 $f(u)$ 连续, 故

$$F'_x(x,y) = f(x+y), F'_y(x,y) = f(x+y),$$

并且它们都是 x, y 的连续函数. 因此, $F(x,y)$ 可微, 且

$$dF(x,y) = F'_x(x,y)dx + F'_y(x,y)dy$$

$$= f(x+y)(dx+dy),$$

故 $f(x+y)(dx+dy)$ 是全微分, 并且

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x,y)(dx+dy) \\ &= F(a,b) - F(0,0) = \int_c^{a+b} f(u)du. \end{aligned}$$

4263. $\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 显然, 当 $x \neq 0$ 时,

$$\frac{ydx - xdy}{x^2} = d\left(-\frac{y}{x}\right)$$

是全微分. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2} \\ &= \int_{(2,1)}^{(1,2)} d\left(-\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x} \Big|_{(2,1)}^{(1,2)} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

4264. $\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ 沿着不通过坐标原点的路径.

解 显然, 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时,

$$\frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = d(\sqrt{x^2 + y^2})$$

是全微分. 于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \int_{(1,0)}^{(6,8)} d(\sqrt{x^2 + y^2}) \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \Big|_{(1,0)}^{(6,8)} = 9. \end{aligned}$$

4265. $\int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy$, 其中 φ 和 ψ 为连续函数.

解 由于 φ, ψ 是连续函数, 故显然有

$$\begin{aligned} & \varphi(x)dx + \psi(y)dy \\ &= dF(x) + dG(y) = d[F(x) + G(y)], \end{aligned}$$

其中 $F(x) = \int_{x_1}^x \varphi(u)du, G(y) = \int_{y_1}^y \psi(v)dv$. 于是,

$\varphi(x)dx + \psi(y)dy$ 是函数 $F(x) + G(y)$ 的全微分, 从而有

$$\begin{aligned} & \int_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy \\ &= [F(x) + G(y)] \Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} \\ &= [F(x_2) + G(y_2)] - [F(x_1) + G(y_1)] \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u)du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v)dv. \end{aligned}$$

4266. $\int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy,$

解 $P = x^4 + 4xy^3, Q = 6x^2y^2 - 5y^4.$

显然, P, Q 在全平面上具有连续偏导数, 并且

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 12xy^2, \frac{\partial P}{\partial y} = 12xy^2.$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. 由于全平面是单连通区域, 故在整个平面上表达式 $Pdx + Qdy$ 是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 并且线积分 $\int_1 Pdx + Qdy$ 与路径无关, 因而可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\ &= \int_{-2}^3 (x^4 + 4x \cdot 0^3)dx + \int_{-1}^0 [6(-2)^2y^2 - 5y^4]dy \\ &= 55 + 7 = 62. \end{aligned}$$

注:也可利用简单的技巧求出函数 $u(x, y)$ 来, 我们有

$$\begin{aligned} & (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\ &= d\left(\frac{x^5}{5}\right) + 2y^3d(x^2) + 2x^2d(y^3) - d(y^5) \\ &= d\left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right), \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} & \int_{(-2, -1)}^{(3, 0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy \\ &= \left(\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5\right)\Big|_{(-2, -1)}^{(3, 0)} = 62. \end{aligned}$$

4267. $\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{xdy - ydx}{(x - y)^2}$ 沿着不与直线 $y = x$ 相交的路径.

解 $P = -\frac{y}{(x - y)^2}, Q = \frac{x}{(x - y)^2} (x \neq y).$

容易验证

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x + y}{(x - y)^3} \quad (x \neq y).$$

考虑平面上的区域 $\Omega = \{(x, y) | x > y\}$. 由于 Ω 是单连通区域且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故在 Ω 上, $Pdx + Qdy$ 是某

函数 $u = u(x, y)$ 的全微分, 从而在 Ω 上线积分 $\int_c Pdx + Qdy$ 与路径无关. 因此, 可按平行于坐标轴的直线段来计算所给积分, 得

$$\begin{aligned} & \int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{xdy - ydx}{(x - y)^2} \\ &= \int_0^1 \frac{-(-1)dx}{(x + 1)^2} + \int_{-1}^0 \frac{dy}{(1 - y)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

注:也可利用简单的技巧求出函数 $u(x, y)$ 来. 我们有

$$\begin{aligned}\frac{xdy - ydx}{(x - y)^2} &= \frac{(x - y)dy - yd(x - y)}{(x - y)^2} \\ &= d\left(\frac{y}{x - y}\right),\end{aligned}$$

从而

$$\int_{(0, -1)}^{(1, 0)} \frac{xdy - ydx}{(x - y)^2} = \frac{y}{x - y} \Big|_{(0, -1)}^{(1, 0)} = 1.$$

4268. $\int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x}\right) dy$ 沿着不与 Oy 轴相交的路径.

解 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$P = 1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}, Q = \sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} - \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}$$

$$= -\frac{2y}{x^2} \cos \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^3} \sin \frac{y}{x}.$$

考虑右半平面 $\Omega = \{(x, y) | x > 0\}$. 由于 Ω 是单连通区域, 且在其上 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 故在 Ω 上必是某函数 $u(x, y)$ 的全微分, 且可取

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \int_1^x \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x}\right) dx \\ &\quad + \int_x^y (\sin y + y \cos y) dy \\ &= \left(x + y \sin \frac{y}{x}\right) \Big|_1^x + y \sin y \Big|_x^y\end{aligned}$$

$$= x - 1 + y \sin \frac{y}{x}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2} \cos \frac{y}{x} \right) dx \\ & + \left(\sin \frac{y}{x} + \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} \right) dy \\ & = \left(x - 1 + y \sin \frac{y}{x} \right) \Big|_{(1, \pi)}^{(2, \pi)} = \pi + 1. \end{aligned}$$

4269. $\int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy).$

解 显然,有

$$e^x (\cos y dx - \sin y dy) = d(e^x \cos y),$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(0,0)}^{(a,b)} e^x (\cos y dx - \sin y dy) \\ & = \int_{(0,0)}^{(a,b)} d(e^x \cos y) = (e^x \cos y) \Big|_{(0,0)}^{(a,b)} \\ & = e^a \cos b - 1. \end{aligned}$$

4270. 证明:若 $f(u)$ 为连续函数且 C 为逐段光滑的封闭围线, 则

$$\oint_C f(x^2 + y^2) (x dx + y dy) = 0.$$

证 令 $F(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^{x^2+y^2} f(u) du$. 由于 $f(u)$ 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y) = x f(x^2 + y^2),$$

$$F'_y(x, y) = y f(x^2 + y^2),$$

并且显然 $F'_x(x, y), F'_y(x, y)$ 都是 x, y 的连续函数. 因此, $F(x, y)$ 可微, 且

$$\begin{aligned} dF(x, y) &= F'_x(x, y)dx + F'_y(x, y)dy \\ &= f(x^2 + y^2)(xdx - ydy). \end{aligned}$$

于是,任取 C 上一点 (x_0, y_0) , 有

$$\begin{aligned} &\oint_C f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) \\ &= F(x, y) \Big|_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y_0)} \\ &= F(x_0, y_0) - F(x_0, y_0) = 0. \end{aligned}$$

证毕.

求原函数 z , 设

$$4271. dz = (x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad z &= \int_0^x (x^2 + 2xy - y^2)dx \\ &\quad + \int_0^y (0 - 0 - y^2)dy + C \\ &= \frac{x^3}{3} + x^2y - xy^2 - \frac{1}{3}y^3 + C. \end{aligned}$$

$$4272. dz = \frac{ydx - xdy}{3x^2 - 2xy + 3y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad z &= \int_0^x \frac{ydx}{3x^2 - 2xy + 3y^2} + \int_1^y 0dy + C \\ &= \frac{y}{3} \int_0^x \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{3}y\right)^2 + \frac{8y^2}{9}} + C \\ &= \frac{y}{3} \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}y} \operatorname{arctg} \frac{3\left(x - \frac{y}{3}\right)}{2\sqrt{2}y} \Big|_0^x + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{3x - y}{2\sqrt{2}y} + C_1. \end{aligned}$$

$$4273. dz = \frac{(x^2 + 2xy + 5y^2)dx + (x^2 - 2xy + y^2)dy}{(x + y)^3}$$

解
$$z = \int_0^x \frac{x^2 + 2xy + 5y^2}{(x+y)^3} dx$$

$$+ \int_1^y \frac{0 - 0 + y^2}{(0+y)^3} dy + C$$

$$= \int_0^x \frac{(x+y)^2 + 4y^2}{(x+y)^3} dx + \int_1^y \frac{dy}{y} + C$$

$$= [\ln|x+y|] \Big|_0^x - \frac{2y^2}{(x+y)^2} \Big|_0^x$$

$$+ [\ln|y|] \Big|_1^y + C$$

$$= \ln|x+y| - \frac{2y^2}{(x+y)^2} + C_1.$$

4274. $dz = e^x[e^y(x-y+2) + y]dx + e^x(e^y(x-y) + 1)dy.$

解
$$z = \int_0^x [(x-y+2)e^{x+y} + ye^x] dx$$

$$+ \int_0^y (1 - ye^y) dy + C$$

$$= [(x-y+1)e^{x+y} + ye^x] \Big|_0^x$$

$$+ [y - ye^y + e^y] \Big|_0^y + C$$

$$= (x-y+1)e^{x+y} + ye^x + C_1.$$

4275. $dz = \frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m} dx + \frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}} dy.$

解 因为

$$dz = \frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}\partial y^m} dx + \frac{\partial^{m+1}u}{\partial x^n\partial y^{m+1}} dy$$

$$= d\left(\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m}\right)$$

故有

$$z = \frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n\partial y^m} + C.$$

$$4276. dz = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx \\ - \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dy, \text{ 其中 } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解 易知(当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{y}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{r^2 - 2x^2}{r^4},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = -\frac{r^2 - 2y^2}{r^4},$$

故(当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) = 0. \quad (1)$$

令

$$P = \frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right),$$

$$Q = -\frac{\partial^{n+m+1}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right),$$

则当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 由(1)式知

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \\ = \frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] = 0.$$

因此, 在任何不含原点 $(0, 0)$ 的单连通区域中, $Pdx + Qdy$ 都是某函数 z 的全微分, 并且对上半平面的点 (x, y) (即 $y > 0$), 可取

$$z(x, y) = \int_0^x P(x, y) dx + \int_1^y Q(0, y) dy + C$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^x \frac{\mathcal{J}^{+m-1}}{\partial x^{n+2} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dx \\
&\quad - \int_{-1}^y \left[\frac{\mathcal{J}^{+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{n+2}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} dy + C \\
&= \frac{\mathcal{J}^{+n}}{\partial x^{n+1} \partial y^{m-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \\
&\quad - \left[\frac{\mathcal{J}^{+m}}{\partial x^{n+1} \partial y^{n-1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} \\
&\quad - \left[\frac{\mathcal{J}^{+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} \\
&\quad + \left[\frac{\mathcal{J}^{+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} + C \\
&= \frac{\mathcal{J}^{+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{r} \right) \\
&\quad - \frac{\mathcal{J}^{+m-2}}{\partial x^{n-1} \partial y^{n-1}} \left[\frac{\mathcal{J}}{\partial x^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\mathcal{J}}{\partial y^2} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{x=0} + C_1 \\
&= \frac{\mathcal{J}^{+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left(-\frac{x}{r^2} \right) + C_1 \\
&= \frac{\mathcal{J}^{+m-1}}{\partial x^n \partial y^{m-1}} \left(\frac{\partial}{\partial y} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + C_1 \\
&= \frac{\mathcal{J}^{+m}}{\partial x^n \partial y^n} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + C_1,
\end{aligned}$$

其中 $C_1 = \left[\frac{\mathcal{J}^{+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{\substack{x=0 \\ y=1}} + C$ 是任意常数.

同理,对下半平面的点 (x, y) (即 $y < 0$),可取

$$z(x, y) = \int_0^x P(x, y) dx + \int_{-1}^y Q(0, y) dy + C.$$

经过和前面完全类似的计算,可得

$$z(x, y) = \frac{\mathcal{F}^{+m}}{\partial x^n \partial y^m} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right) + C_2,$$

其中

$$C_2 = \left[\frac{\mathcal{F}^{+m}}{\partial x^{n-1} \partial y^{m+1}} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right] \Big|_{z=0}^{y=-1} + C$$

也是任意常数.

4277. 证明下面的估计对于曲线积分是正确的:

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq LM,$$

式中 L 为积分路径的长及 $M = \max \sqrt{P^2 + Q^2}$ (在弧 C 上).

证 由于

$$\begin{aligned} & \left| \int_C P dx + Q dy \right| \\ &= \left| \int_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) ds \right| \\ &\leq \int_C |P \cos \alpha + Q \sin \alpha| ds, \end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned} & (P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \\ &= P^2 \cos^2 \alpha + Q^2 \sin^2 \alpha + 2PQ \sin \alpha \cos \alpha, \\ &0 \leq (P \sin \alpha - Q \cos \alpha)^2 \\ &= P^2 \sin^2 \alpha + Q^2 \cos^2 \alpha - 2PQ \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

故有 $(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)^2 \leq P^2 + Q^2$. 从而

$$|P \cos \alpha + Q \sin \alpha| \leq \sqrt{P^2 + Q^2} \leq M.$$

于是,

$$\left| \int_C P dx + Q dy \right| \leq M \int_C ds = LM.$$

4278. 估计积分

$$I_R = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{(x^2 + xy + y^2)^2}.$$

证明 $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

解 在圆 $x^2 + y^2 = R^2$ 上, 有

$$\begin{aligned} P^2 + Q^2 &= \frac{y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \\ &\quad + \frac{x^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \\ &= \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + xy + y^2)^4} \\ &= \frac{R^2}{(R^2 + xy)^4} \leq \frac{R^2}{(R^2 - |xy|)^4} \\ &\leq \frac{R^2}{\left(R^2 - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} \\ &= \frac{16}{R^6}. \end{aligned}$$

于是, $M \leq \frac{4}{R^3}$. 利用 4277 题的结果, 即得 I_R 的估计式:

$$|I_R| \leq \frac{4}{R^3} \cdot 2\pi R = \frac{8\pi}{R^2}.$$

由此可知: $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R = 0$.

计算沿空间曲线所取的线积分(假定坐标系是右手的):

4279. $\int_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz$, 式中 C 为依参数增加的方向进行的曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3 (0 \leq t \leq 1)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad &\int_C (y^2 - z^2)dx + 2yzdy - x^2dz \\ &= \int_0^1 [t^4 - t^6] + 2t^5 \cdot 2t - t^2 \cdot 3t^2 dt \\ &= \int_0^1 (3t^6 - 2t^4) dt = \frac{1}{35}. \end{aligned}$$

4280. $\int_C ydx + zdy - xdz$, 式中 C 为依参数增加方向进行的
 纽形螺线 $x = acost, y = asint, z = bt (0 \leq t \leq 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad & \int_C ydx + zdy + xdz \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t \cos t + abt \cos t + abt \cos t) dt \\ &= \left(-\frac{at^2}{2} + \frac{a^2 \sin 2t}{4} + abt \sin t \right. \\ &\quad \left. + abt \cos t + ab \sin t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi a^2. \end{aligned}$$

4281. $\int_C (y-z)dx - (z-x)dy + (x-y)dz$, 式中 C 为圆
 周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y = xtga (0 < \alpha < \pi)$, 若从 Ox 轴
 的正向看去, 这圆周是沿逆时针方向进行的.

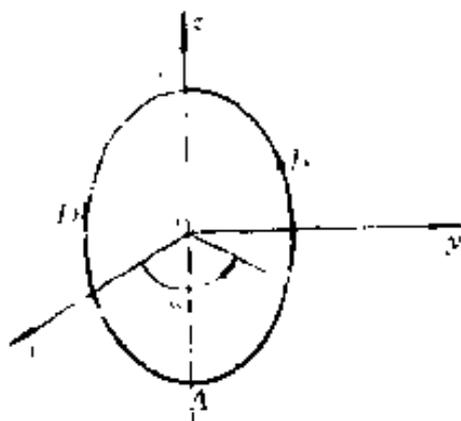


图 8.63

解 如图 8.63 所示, 利于球面的参数方程 $x = a \cos \varphi \cos \psi, y = a \sin \varphi \cos \psi, z = a \sin \varphi$. 在 \widehat{ABC} 上, $\varphi = \alpha$, 因而有

$$x = a \cos \alpha \cos \psi, dx = -a \cos \alpha \sin \psi d\psi,$$

$$y = a \sin \alpha \cos \psi, dy = -a \sin \alpha \sin \psi d\psi,$$

$$z = a \sin \alpha, dz = a \cos \alpha d\psi,$$

且

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{ABC}} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [-(\sin\alpha\cos\psi - \sin\psi)\cos\alpha\sin\psi \\ &\quad - (\sin\psi - \cos\alpha\cos\psi)\sin\alpha\sin\psi \\ &\quad + (\cos\alpha\cos\psi - \sin\alpha\cos\psi)\cos\psi] d\psi \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\alpha - \sin\alpha) d\psi = \pi a^2 (\cos\alpha - \sin\alpha) \\ &= \sqrt{2} a^2 \pi \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \end{aligned}$$

在 \widehat{CDA} 上, $\varphi = \alpha + \pi$. 同样可得

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{CDA}} (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= -a^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin\alpha - \cos\alpha) d\psi \\ &= \sqrt{2} \pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \end{aligned}$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned} & \int_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= 2\sqrt{2} \pi a^2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right). \end{aligned}$$

4282. $\int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 式中 C 为维维安尼曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax (z \geq 0, a > 0)$, 若从 Ox 轴的正的部分 ($x > a$) 看去, 此曲线是沿逆时针方向进行的.

解 柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 可变为

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

故若令 $x = \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t (0 \leq t \leq 2\pi)$, 则

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt{a^2 - \left[\frac{a^2(1 + \cos t)^2}{4} + \frac{a^2 \sin^2 t}{4} \right]} \\ &= a \sin \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

从而, 曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1 + \cos t)}{2}, y = \frac{a \sin t}{2},$$

$$z = a \sin \frac{t}{2} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a^3 \sin^3 t}{8} + \frac{a^3 \sin^2 \frac{t}{2} \cos t}{2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{a^3 \cos^3 \frac{t}{2}}{2} \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{a^3}{8} (1 - \cos^3 t) d(\cos t) \\ & \quad + \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos t}{2} \cos t dt \\ & \quad + a^3 \int_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2 \frac{t}{2} \right) d\left(\sin \frac{t}{2} \right) \\ &= \frac{a^3}{8} \left(\cos t - \frac{1}{3} \cos^3 t \right) \Big|_0^{2\pi} \\ & \quad + \frac{a^3}{4} \left[\sin t - \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \right] \Big|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a^3 \left(\sin \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \sin^3 \frac{t}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} \\
& = -\frac{\pi a^3}{4}.
\end{aligned}$$

4283. $\int_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz$, 式中 C 为球面的一部分 $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x > 0, y > 0, z > 0$ 的围线, 当沿着它的正向进行时该曲面的外面保持在左方.

解 围线在 Oxy 平面部分的方程为

$$x = \cos\varphi, y = \sin\varphi, z = 0 \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right).$$

根据轮换对称性知, 只要沿这部分计算线积分, 再三倍之, 便得要求的结果, 即

$$\begin{aligned}
& \int_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz \\
& = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi \cdot (-\sin\varphi) - \cos^2\varphi \cdot \cos\varphi) d\varphi \\
& = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2\varphi) d(\cos\varphi) \\
& \quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\varphi) d(\sin\varphi) \\
& = 3 \left(\cos\varphi - \frac{1}{3} \cos^3\varphi - \sin\varphi + \frac{1}{3} \sin^3\varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
& = -4.
\end{aligned}$$

利用全微分计算下列曲线积分:

4284. $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} xdx + y^2dy - z^3dz.$

解 $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} xdx + y^2dy - z^3dz$

$$= \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}z^4 \right) \Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,-4)}$$

$$= -53 \frac{7}{12}.$$

4285. $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz.$

解 $\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx + xzdy + xydz$
 $= xyz \Big|_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} = 0.$

4286. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, 其中点 (x_1, y_1, z_1) 位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 之上, 而点 (x_2, y_2, z_2) 位于球 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 之上 ($a > 0, b > 0$).

解 由题设知:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = a^2, x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = b^2.$$

于是,

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)}$$

$$= \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} - \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

$$= b - a.$$

4287. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz$, 式中 φ, ψ, χ 为连续函数.

解 因为

$$\varphi(x)dx + \psi(y)dy + \chi(z)dz$$

$$= d \left(\int_{x_1}^x \varphi(u)du + \int_{y_1}^y \psi(v)dv + \int_{z_1}^z \chi(\omega)d\omega \right),$$

故有

$$\begin{aligned} & \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \varphi(x) dx + \psi(y) dy + \chi(z) dz \\ &= \left[\int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv \right. \\ & \quad \left. + \int_{z_1}^{z_2} \chi(\omega) d\omega \right] \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(u) du + \int_{y_1}^{y_2} \psi(v) dv + \int_{z_1}^{z_2} \chi(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

4288. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz)$, 其中 f 为连续函数.

解 令 $F(x, y, z) = \int_0^{x+y+z} f(u) du$. 由于 $f(u)$ 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = f(x+y+z),$$

$$F'_y(x, y, z) = f(x+y+z),$$

$$F'_z(x, y, z) = f(x+y+z),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此, $F(x, y, z)$ 可微, 且

$$\begin{aligned} & dF(x, y, z) \\ &= F'_x(x, y, z) dx + F'_y(x, y, z) dy \\ & \quad + F'_z(x, y, z) dz \\ &= f(x+y+z)(dx+dy+dz). \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(x+y+z)(dx+dy+dz) \\ &= F(x, y, z) \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{x_2+y_2+z_2} f(u)du - \int_0^{x_1+y_1+z_1} f(u)du \\
&= \int_{x_1+y_1+z_1}^{x_2+y_2+z_2} f(u)du.
\end{aligned}$$

4289. $\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})xdx + ydy + zdz$, 式中 f 为连续函数.

解 令 $F(x, y, z) = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} f(\sqrt{v})dv$. 由于 f 是连续函数, 故

$$F'_x(x, y, z) = xf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

$$F'_y(x, y, z) = yf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

$$F'_z(x, y, z) = zf(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}),$$

并且这些偏导数都是连续的. 因此, $F(x, y, z)$ 可微, 且

$$\begin{aligned}
&dF(x, y, z) \\
&= F'_x(x, y, z)dx + F'_y(x, y, z)dy \\
&\quad + F'_z(x, y, z)dz \\
&= f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(xdx + ydy + zdz).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \\
&\quad \cdot (xdx + ydy + zdz) \\
&= F(x_2, y_2, z_2) - F(x_1, y_1, z_1) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} f(\sqrt{v})dv^*) \\
&= \int_{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}^{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} uf(u)du,
\end{aligned}$$

*) 这里已作代换 $\sqrt{v} = u (v = u^2, dv = 2udu)$. 求原

函数 u , 若:

$$4290. du = (x^2 - 2yz)dx + (y^2 - 2xz)dy + (z^2 - 2xy)dz.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } du &= (x^2 dx + y^2 dy + z^2 dz) \\ &\quad - 2(yz dx + xz dy + xy dz) \\ &= d\left(\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} - 2xyz\right).\end{aligned}$$

于是,

$$u = \frac{1}{3}(x^3 + y^3 + z^3) - 2xyz + C.$$

$$4291. du = \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{y}{z}\right)dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{x}{y^2}\right)dy - \frac{xy}{z^2}dz.$$

$$\begin{aligned}\text{解 } du &= dx + \left(-\frac{1}{y}dx + \frac{x}{y^2}dy\right) \\ &\quad + \frac{1}{z}(ydx + xdy) - \frac{xy}{z^2}dz \\ &= dx + \left[-\frac{1}{y}dx + xd\left(-\frac{1}{y}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{z}d(xy) + xy d\left(\frac{1}{z}\right) \\ &= dx + d\left(-\frac{x}{y}\right) + d\left(\frac{xy}{z}\right) \\ &= d\left(x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z}\right).\end{aligned}$$

$$\text{于是, } u = x - \frac{x}{y} + \frac{xy}{z} + C.$$

$$4292. du = \frac{(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz}{x^2 + y^2 + z^2 + 2xy}.$$

解 由于

$$\begin{aligned}&(x+y-z)dx + (x+y-z)dy + (x+y+z)dz \\ &= (x dx + y dy) + (y dx + x dy) + (x+y)dz \\ &\quad - z(dx + dy) + z dz\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}d[(x^2 + y^2 + 2xy) + z^2] \\ + (x + y)dz - zd(x + y),$$

故

$$du = \frac{1}{2} \frac{d[(x + y)^2 + z^2]}{(x + y)^2 + z^2} \\ + \frac{(x + y)dz - zd(x + y)}{(x + y)^2 + z^2} \\ = \frac{1}{2}d\ln[(x + y)^2 + z^2] \\ + d\left(\operatorname{arctg} \frac{z}{x + y}\right) \\ = d\left[\ln \sqrt{(x + y)^2 + z^2} \right. \\ \left. + \operatorname{arctg} \frac{z}{x + y}\right].$$

于是,

$$u = \ln \sqrt{(x + y)^2 + z^2} \\ + \operatorname{arctg} \frac{z}{x + y} + C.$$

4293. 求当质量为 m 的点从位置 (x_1, y_1, z_1) 移动到位置 (x_2, y_2, z_2) 时,重力所产生的功(Oz 轴的方向垂直向上).

解 设 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 为各坐标轴上的单位矢量,则重力

$\vec{F} = -mg\vec{k}$, 而

$$d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}.$$

从而功的微分为

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = -mgdz = d(-mgz).$$

于是,重力的功为

$$A = \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} -mgdz$$

$$\begin{aligned}
 &= (-mgz) \Big|_{\{x_1, y_1, z_1\}}^{\{x_2, y_2, z_2\}} \\
 &= -mg(z_2 - z_1).
 \end{aligned}$$

4294⁺. 弹性力的方向向着坐标原点, 力的大小与质点距坐标原点的距离成比例. 设此点依反时针方向描绘出椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的正四分之一, 求弹性力所作的功.

解 弹性力

$$\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j}),$$

功的微分为

$$\begin{aligned}
 dA &= \vec{F} \cdot d\vec{s} \\
 &= -k(x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (dx\vec{i} + dy\vec{j}) \\
 &= -k(xdx + ydy) \\
 &= d\left[-\frac{k}{2}(x^2 + y^2)\right].
 \end{aligned}$$

于是, 功为

$$\begin{aligned}
 A &= -k \int_{(a,0)}^{(0,b)} xdx + ydy \\
 &= -\frac{k}{2}(x^2 + y^2) \Big|_{(a,0)}^{(0,b)} \\
 &= \frac{k}{2}(a^2 - b^2).
 \end{aligned}$$

4295⁺. 当单位质量从点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 移动到点 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 时, 求作用于单位质量的引力 $F = \frac{k}{r^2}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 所做的功.

解 引力指向坐标原点, 故它的方向余弦为

$$\cos\alpha = -\frac{x}{r} \quad \cos\beta = -\frac{y}{r},$$

$$\cos\gamma = -\frac{z}{r},$$

而引力的射影为

$$X = -\frac{kx}{r^3}, Y = -\frac{ky}{r^3},$$

$$Z = -\frac{kz}{r^3}.$$

于是,功为

$$\begin{aligned} A &= -k \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{r^3} \\ &= -\frac{k}{2} \int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Big|_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} \\ &= k \left[\frac{1}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \right]. \end{aligned}$$

当然,这里假设从 M_1 点到 M_2 点的路径是不经过原点的,上式表明功与路径无关,仅决定于起始点的坐标.

§ 12. 格林公式

1° 曲线积分与二重积分的关系 设 C 为逐段光滑的简单封闭围线,它围成单联通的有界域 S ,这围线的方向是这样的:域 S 保持在左边,函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 与它们自己的一阶偏导函数在域 S 内及其边缘上皆是连续的,则有格林公式

$$\begin{aligned} &\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy. \end{aligned} \quad (1)$$

若把域 S 的边界 C 了解为一切边界围线的和, 而围线绕转的方向是选择来使得域 S 保持在左边, 则公式(1) 对于由几个简单围线所界的有界域 S 也真确.

2° 平面域的面积 由逐段光滑的简单围线 C 所界的面积 S 等于:

$$S = \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx.$$

在这一节中, 若没有相反的约定, 则假定积分的封闭围线是简单的(无自交点), 并选择它们的正方向使所界不含无穷远点的域是保持在曲线的左边.

4296. 利用格林公式变换曲线积分

$$I = \oint_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + y(xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})) dy,$$

式中围线 C 包含有界的域 S .

解 此处 $P = \sqrt{x^2 + y^2}$, $Q = xy^2 + y \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. 从而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = y^2 + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = y^2.$$

于是,

$$I = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \iint_S y^2 dx dy.$$

注: 这里应假定 C 不与 Ox 轴的左半部分(即 $x \leq 0, y = 0$) 相交, 从而这时在 S 中 $x + \sqrt{x^2 + y^2} > 0$.

4297. 应用格林公式, 计算曲线积分

$$I = \oint_C (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy.$$

其中 k 依正方向经过以 $A(1,1), B(3,2), C(2,5)$ 为顶点的三角形 ABC 的围线. 直接计算积分, 以验证所求得的结果.

解 如图 8.64 所示. AB, BC 及 CA 的方程分别为 $y = \frac{1}{2}(x+1), y = -3x+11, y = 4x-3$.

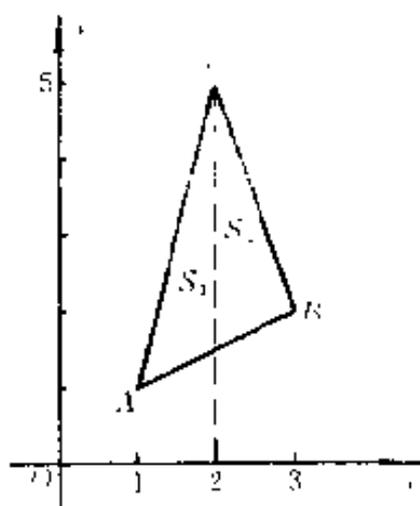


图 8.64

由于 $P = (x+y)^2, Q = -(x^2+y^2)$, 故

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2x - 2 \cdot (x+y) = -4x - 2y.$$

通过顶点 C 引直线垂直于 Ox 轴, 它把三角形域 S 分成 S_1 和 S_2 两部分. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (-4x - 2y) dx dy \\ &= \iint_{S_1} (-4x - 2y) dx dy + \iint_{S_2} (-4x - 2y) dx dy \\ &= \int_1^2 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (-4x - 2y) dy \\ &\quad + \int_2^3 dx \int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{3x+11} (-4x - 2y) dy \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{119}{4}x^2 + \frac{77}{2}x - \frac{35}{4} \right) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_2^3 \left(\frac{21}{4}x^2 + \frac{49}{2}x - \frac{483}{4} \right) dx \\
& = -\frac{245}{12} - \frac{105}{4} = -46\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

如果直接计算,则

$$\begin{aligned}
I & = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \\
& = \int_1^3 \left[\left(x + \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(x^2 + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right] dx \\
& \quad + \int_3^2 [(x - 3x + 11)^2 - (-3)(x^2 + 9x^2 \\
& \quad - 66x + 121)] dx \\
& \quad + \int_2^1 [(x + 4x - 3)^2 - 4(x^2 + 16x^2 - 24x + 9)] dx \\
& = \int_1^3 \left(\frac{13}{8}x^2 + \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} \right) dx \\
& \quad + \int_3^2 (34x^2 - 242x + 484) dx \\
& \quad + \int_2^1 (-43x^2 + 66x - 27) dx \\
& = \frac{58}{3} - \frac{283}{3} + \frac{5}{3} = -46\frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

应用格林公式计算下列曲线积分:

4298. $\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$.

解 由于 $P = -x^2 y, Q = xy^2$, 故有

$$\begin{aligned}
\oint_C xy^2 dy - x^2 y dx & = \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) dx dy \\
& = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi a^4}{2}.
\end{aligned}$$

如果直接计算,可令 $x = a \cos t, y = a \sin t$, 则

$$\begin{aligned} \oint_C xy^2 dy - x^2 y dx &= a^4 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t \sin^2 t \\ &\quad + \cos^2 t \sin^2 t) dt \\ &= \frac{a^4}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{\pi a^4}{2}. \end{aligned}$$

4299. $\oint_C (x+y)dy - (x-y)dx$, 式中 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

解 由于 $P = x+y, Q = -(x-y)$, 故有

$$\begin{aligned} \oint_C (x+y)dx - (x-y)dy \\ = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} (-1-1)dxdy = -2\pi ab. \end{aligned}$$

如果直接计算, 则

$$\begin{aligned} \oint_C (x+y)dy - (x-y)dx \\ = \int_0^{2\pi} [(a\cos t + b\sin t)(-a\sin t) - (a\cos t - b\sin t) \\ \cdot (b\cos t)] dt \\ = \int_0^{2\pi} [(b^2 - a^2)\cos t \sin t - ab] dt = -2\pi ab. \end{aligned}$$

4300. $\oint_C e^x [(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy]$, 其中 C 为域 $0 < x < \pi, 0 < y < \sin x$ 的正方向的围线.

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x(\sin y - y) - e^x \sin y = -ye^x,$$

故有

$$\oint_C e^x [(1 - \cos y)dx - (y - \sin y)dy]$$

$$\begin{aligned}
&= - \iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x}} ye^x dx dy = - \int_0^\pi e^x dx \int_0^{\sin x} y dy \\
&= - \frac{1}{2} \int_0^\pi e^x \sin^2 x dx \\
&= - \frac{1}{4} \left(\int_0^\pi e^x dx - \int_0^\pi e^x \cos 2x dx \right) \\
&= - \frac{1}{4} \left[(e^x - 1) - \frac{\cos 2x}{5} + \frac{2 \sin 2x}{5} e^x \right]_0^\pi \\
&= - \frac{1}{5} (e^\pi - 1).
\end{aligned}$$

4301. $\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy).$

解 由于

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= e^{-(x^2-y^2)} [(-2x \sin 2xy + 2y \cos 2xy) \\
&\quad - (2y \cos 2xy - 2x \sin 2xy)] = 0,
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\oint_{x^2+y^2=R^2} e^{-(x^2-y^2)} (\cos 2xy dx + \sin 2xy dy) \\
= \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} 0 dx dy = 0.
\end{aligned}$$

4302. 积分

$$I_1 = \int_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

和

$$I_2 = \int_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$$

(其中 AmB 为连接点 $A(1,1)$ 和点 $B(2,6)$ 的直线, AnB 是其轴为垂直的抛物线, 并通过 A, B 及坐标原点) 相差多少?

解 由于

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -2(x-y) - 2(x+y) = -4x,$$

故 I_1 与 I_2 之差为(利用格林公式)

$$\begin{aligned} I_2 - I_1 &= \oint_{AmBmA} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy \\ &= \iint_S (-4x) dx dy = \int_1^2 dx \int_{2x^2}^{3x^2} (-4x) dy \\ &= - \int_1^2 4x(-2x^2 + 6x - 4) dx \\ &= (2x^4 - 8x^3 + 8x^2) \Big|_1^2 = -2, \end{aligned}$$

或 $I_1 - I_2 = 2$.

4303. 计算曲线积分

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy,$$

其中 AmO 为由点 $A(a, 0)$ 至点 $O(0, 0)$ 的上半圆周 $x^2 + y^2 = ax$.

解 在 Ox 轴上连接点 $O(0, 0)$ 与点 $A(a, 0)$, 这样, 便构成封闭的半圆形 $AmOA$, 且在线段 OA 上,

$$\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0.$$

从而

$$\oint_{AmOA} = \int_{AmO} + \int_{OA} = \int_{AmO}.$$

另一方面, 利用格林公式可得

$$\begin{aligned} \oint_{AmOA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy \\ = \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} m dx dy = \frac{\pi m a^2}{8}. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{AmB} (e^y \sin y - my) dx + (e^y \cos y - m) dy \\ &= \frac{\pi m a^2}{8}. \end{aligned}$$

4304. 计算曲线积分

$$\int_{AmB} [\varphi(y)e^y - my] dx + [\varphi'(y)e^y - m] dy,$$

式中 $\varphi(y)$ 和 $\varphi'(y)$ 为连续函数, AmB 为连接点 $A(x_1, y_1)$ 和点 $B(x_2, y_2)$ 的任何路径, 但与线段 AB 围成已知大小为 S 的面积 $AmBA$.

解 首先, 我们有

$$\oint_{AmBA} = \int_{AmB} + \int_{BA},$$

而

$$\begin{aligned} & \oint_{AmBA} [\varphi(y)e^y - my] dx + [\varphi'(y)e^y - m] dy \\ &= \iint_S m dx dy = mS. \end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned} & \int_{BA} [\varphi(y)e^y - my] dx + [\varphi'(y)e^y - m] dy \\ &= \int_{BA} d[e^y \varphi(y)] - \int_{BA} m(y dx + dy) \\ &= e^y \varphi(y) \Big|_{(x_2, y_2)}^{(x_1, y_1)} - m \int_{x_2}^{x_1} \left[y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right. \\ & \quad \left. \cdot (x - x_1) + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right] dx \\ &= e^{y_1} \varphi(y_1) - e^{y_2} \varphi(y_2) - m \left(y_1 + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (x_2 - x_1) + \frac{m}{2} \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x_2 - x_1)^2 \\
& = e^{y_1} \varphi(y_1) - e^{y_2} \varphi(y_2) + m(y_2 - y_1) \\
& = \frac{m}{2} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1).
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
& \int_{AmB} [\varphi(y)e^x - my]dx + [\varphi'(y)e^x - m]dy \\
& = mS + e^{y_2} \varphi(y_2) - e^{y_1} \varphi(y_1) - m(y_2 - y_1) \\
& = \frac{m}{2} (x_2 - x_1)(y_2 + y_1).
\end{aligned}$$

注:利用此题的结果可计算 4303 题.事实上,由于 $\varphi(y) = \sin y, x_1 = a, y_1 = 0, x_2 = y_2 = 0, S = \frac{\pi a^2}{8}$, 代入即得

$$\int_{AmO} (e^x \sin y - my)dx + (e^x \cos y - m)dy = \frac{\pi m a^2}{8}.$$

4305. 求两个二次连续地可微分的函数 $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$, 使得线积分

$$I = \oint_C P(x + \alpha, y + \beta)dx + Q(x + \alpha, y + \beta)dy$$

对于任何封闭的围线 C 与常数 α 和 β 无关.

解 由格林公式,得

$$\begin{aligned}
I = \iint_S \left(\frac{\partial Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial x} - \frac{\partial P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial y} \right) \\
\cdot dx dy = \tau. \quad (1)
\end{aligned}$$

由假定 τ 为一常数,它与 α, β 无关(只与围线 C 有关), 上式中的 S 表围线 C 所围成的闭区域. 由假定 P, Q 具有连续的二阶偏导数,故(1)式中二重积分的被积函数具有关于 α, β 的一阶连续偏导数. 因此,可以在积分

号下关于 α, β 求偏导数, 得

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial^2 Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \alpha \partial x} - \frac{\partial^2 P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \alpha \partial y} \right\} \cdot dx dy = \frac{\partial}{\partial \alpha} \tau = 0. \quad (2)$$

$$\iint_S \left\{ \frac{\partial^2 Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \beta \partial y} \right\} \cdot dx dy = \frac{\partial}{\partial \beta} \tau = 0. \quad (3)$$

于是, (2) 式和 (3) 式对任何 α, β 以及任何 S 都成立. 再注意到 (2) 式和 (3) 式中二重积分的被积函数都是连续的, 故被积函数必恒为零 (参看 4097 题, 此题对二重积分也成立):

$$\frac{\partial^2 Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \alpha \partial x} - \frac{\partial^2 P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \alpha \partial y} \equiv 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \beta \partial x} - \frac{\partial^2 P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \beta \partial y} \equiv 0 \quad (5)$$

(对任何 x, y, α, β). 记 $x + \alpha = u, y + \beta = v$, 显然有

$$\frac{\partial^2 Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \alpha \partial x} = \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \alpha \partial y} = \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \beta \partial x} = \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u},$$

$$\frac{\partial^2 P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial \beta \partial y} = \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2}.$$

于是, (4) 式与 (5) 式为

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right\}$$

$$= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial u \partial v} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \right\}$$

$$= \frac{\partial^2 Q(u, v)}{\partial v \partial u} - \frac{\partial^2 P(u, v)}{\partial v^2} = 0$$

(对任何 u, v), 由此可知:

$$\frac{\partial Q(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial P(u, v)}{\partial v} \equiv k(\text{常数}).$$

将 u, v 改记为 x, y , 则上式为

$$\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = k(\text{常数}). \quad (6)$$

令 $u(x, y) = \int_0^x P(t, y) dt$, 则 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数, 且

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y). \quad (7)$$

由(6)式知:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} &= k + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \\ &= k + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right\} \\ &= k + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right\}. \end{aligned}$$

两端积分, 得

$$Q(x, y) = kx + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \varphi(y), \quad (8)$$

其中 $\varphi(y)$ 为具有二阶连续导数的任意函数. 由(7), (8)两式又知 $u(x, y)$ 具有连续的三阶偏导数.

反之, 若 $u(x, y)$ 是任一具有三阶连续偏导数的函数, 而 $\varphi(y)$ 是任一具二阶连续导数的函数, 则由(7)

式和(8)式确定的 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 必具连续二阶偏导数, 且使(6)式成立, 从而使

$$\begin{aligned} I &= \oint_C P(x + \alpha, y + \beta) dx + Q(x + \alpha, y + \beta) dy \\ &= \iint_S \left\{ \frac{\partial Q(x + \alpha, y + \beta)}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial P(x + \alpha, y + \beta)}{\partial y} \right\} dx dy \\ &= \iint_S k dx dy = kS, \end{aligned}$$

故 I 是与 α, β 无关的常数(对于任意固定的 C).

综上所述, 可知: 使线积分 I 对于任何封闭围线 C 与常数 α, β 无关的二阶连续地可微的函数 $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 的全体由公式(7)与(8)给出, 其中 k 为常数, $u(x, y)$ 为三阶连续地可微的任一函数, $\varphi(y)$ 为二阶连续地可微的任意一个一元函数.

4306. 为了使线积分

$$\int_{AmB} F(x, y)(y dx + x dy)$$

与积分路径的形状无关, 则可微分函数 $F(x, y)$ 应满足怎样的条件?

解 由于 $P = yF(x, y), Q = xF(x, y)$, 故由格林公式知所求的条件为

$$\frac{\partial}{\partial x} [xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y} [yF(x, y)],$$

即

$$xF'_x(x, y) = yF'_y(x, y).$$

4307. 计算

$$I = \oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2},$$

其中 C 为依正方向进行而不经过坐标原点的简单封闭围线.

解 令 $P = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$. 易知, 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时, 恒有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

今分两种情况讨论:

(1) 坐标原点在围线 C 之外, 这时, 在由 C 围成的有界闭区域 S 上, P 与 Q 以及它们的偏导数都连续, 故可应用格林公式, 得

$$I = \oint_C Pdx + Qdy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0.$$

(2) 围线 C 包围坐标原点. 这时, 由于 P, Q 在原点无定义, 故不能直接对由 C 围成的区域应用格林公式. 今取 $a > 0$ 充分小, 使中心在原点半径为 a 的圆周 $L_a (L_a: x^2 + y^2 = a^2)$ 完全位于围线 C 之内. 用 S_a 表介于 C 和 L_a 之间的环形闭区域. 显然, 在 S_a 上, P, Q 及其偏导数均连续, 故可应用格林公式, 得

$$\begin{aligned} & \left(\oint_C + \oint_{-L_a} \right) Pdx + Qdy \\ &= \iint_{S_a} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0, \end{aligned}$$

其中 $-L_a$ 表沿 L_a 的负方向 (即顺时针方向).

于是,

$$I = \oint_C Pdx + Qdy = \oint_{L_a} Pdx + Qdy,$$

其中 L_+ 沿正方向(即逆时针方向). 利用 L_+ 的参数方程 $x = acost, y = asint (0 \leq t \leq 2\pi)$, 即得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L_+} Pdx + Qdy = \oint_{L_+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{2\pi} [(acost)(acost) - asint(-asint)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \end{aligned}$$

利用曲线积分计算由下列曲线所界的面积:

4308. 椭圆 $x = acost, y = bsint (0 \leq t \leq 2\pi)$.

解 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab. \end{aligned}$$

4309. 星形线 $x = acos^3 t, y = bsin^3 t (0 \leq t \leq 2\pi)$.

解 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx \\ &= \frac{3ab}{2} \int_0^{2\pi} (\cos^4 t \sin^2 t + \cos^2 t \sin^4 t) dt \\ &= \frac{3}{8} ab \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi ab. \end{aligned}$$

4310. 抛物线 $(x+y)^2 = ax (a > 0)$ 和轴 Ox .

解 作代换 $y = tx$, 则原方程化为 $x^2(1+t)^2 = ax$.

从而得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a}{(1+t)^2}, y = \frac{at}{(1+t)^2} (0 \leq t < +\infty).$$

它与 Ox 轴的交点为 $(a, 0)$ 与 $(0, 0)$. 在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(a, 0)$ 的一段上, 有

$$xdy - ydx = 0.$$

在抛物线上,有

$$xdy - ydx = \frac{a^2}{(1+t)^3} dt.$$

于是,面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^3} \\ &= -\frac{a^2}{6} \cdot \frac{1}{(1+t)^2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{a^2}{6}. \end{aligned}$$

4311. 笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$ ($a > 0$).

解 作代换 $y = tx$, 则得曲线的参数方程为

$$x = \frac{3at}{1+t^3}, y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

由于

$$dx = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} dt, dy = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} dt,$$

从而

$$xdy - ydx = \frac{9a^2 t^2}{(1+t^3)^2} dt.$$

于是,面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{9a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \\ &= \frac{3a^2}{2} \left[-\frac{1}{1+t^3} \right]_0^{+\infty} = \frac{3a^2}{2}. \end{aligned}$$

4312. 双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

解 利用极坐标 $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, 得双纽线的方程为 $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, 故

$$x = a\cos\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}, y = a\sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

从而 $xdy - ydx = a^2\cos 2\varphi d\varphi$. 于是,面积为

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \cdot \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi = a^2.
 \end{aligned}$$

4313. 曲线 $x^3 + y^3 = x^2 + y^2$ 及坐标轴.

解 作代换 $y = tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{1+t^2}{1+t^3}, y = \frac{t(1+t^2)}{1+t^3} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

曲线的起点为 $(1, 0)$, 终点为 $(0, 1)$. 在曲线上,

$$xdy - ydx = \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \quad (0 \leq t < +\infty).$$

在 Ox 轴上从点 $(0, 1)$ 到点 $(0, 0)$ 一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到点 $(1, 0)$ 一段上, 均有

$$xdy - ydx = 0.$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2)^2}{(1+t^3)^2} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} \frac{t^4}{(1+t^3)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2} dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^2} dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} B\left(2 - \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} B(1, 1) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3} B\left(\frac{1}{3}, 2 - \frac{1}{3}\right) \right] \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{\Gamma(2)} \\
 &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{4\pi}{9\sqrt{3}}.$$

*) 利用 3853 题的结果.

4314. 计算由曲线

$$(x+y)^{n+m+1} = ax^ny^m \quad (a > 0, n > 0, m > 0)$$

所界的面积.

解 作代换 $y = tx$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{at^m}{(1+t)^{n+m+1}}, y = \frac{at^{m+1}}{(1+t)^{n+m+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

从而

$$xdy - ydx = \frac{a^2 t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt \quad (0 \leq t < +\infty)$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C xdy - ydx = \frac{a^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2m}}{(1+t)^{2n+2m+2}} dt \\ &= \frac{a^2}{2} B(2m+1, 2n+1). \end{aligned}$$

*) 利用 3852 题的结果.

4315. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1 \quad (a > 0, b > 0, n > 0)$$

和坐标轴所界的面积.

解 作代换 $x = a \cos^{\frac{2}{n}} \varphi, y = b \sin^{\frac{2}{n}} \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2})$,

即得

$$xdy - ydx = \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{2}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi.$$

曲线与坐标轴交于点 $(a, 0)$ 和点 $(0, b)$. 在 Oy 轴上, 从点 $(0, b)$ 到点 $(0, 0)$ 一段, 以及在 Ox 轴上从点 $(0, 0)$ 到

点 $(a, 0)$ 一段上,显然有

$$x dy - y dx = 0.$$

于是,面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2ab}{n} \cos^{\frac{1}{n}-1} \varphi \sin^{\frac{2}{n}-1} \varphi d\varphi \\ &= \frac{ab}{n} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{ab}{2n} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}. \end{aligned}$$

*) 利用 3856 题的结果.

4316. 计算由曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = \left(\frac{x}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{n-1}$$

$(a > 0, b > 0, n > 0)$ 和坐标轴所界的面积.

解 作代换 $y = \frac{b}{a}t$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{a(1+t^{n-1})}{1+t^n}, y = \frac{bt(1+t^{n-1})}{1+t^n} \quad (0 < t < +\infty).$$

易知

$$x dy - y dx = ab \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt.$$

又在两坐标轴上,显然有 $x dy - y dx = 0$. 于是,面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{ab}{2} \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^{n-1})^2}{(1+t^n)^2} dt \\ &= \frac{ab}{2} \left(\int_0^{+\infty} \frac{t^{2n-2}}{(1+t^n)^2} dt + 2 \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^n)^2} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^n)^2} dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab}{2} \left[\frac{1}{n} B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + \frac{2}{n} B(1, 1) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right) \right] \\
&= \frac{ab}{n} \left[1 + B\left(2 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \right] \\
&= \frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma(1)} \right] \\
&= \frac{ab}{n} \left[1 + \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right) \pi}{\sin \frac{\pi}{n}} \right].
\end{aligned}$$

*) 利用 3853 题的结果.

4317. 计算由纽形曲线

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1} = c \left(\frac{x}{a}\right)^n \left(\frac{y}{b}\right)^n$$

($a > 0, b > 0, c > 0, n > 0$) 所界的面积.

解 作代换 $y = \frac{b}{a}xt$, 即得曲线的参数方程为

$$x = \frac{act^n}{1+t^{2n+1}}, y = \frac{bct^{n+1}}{1+t^{2n+1}} \quad (0 \leq t < +\infty).$$

易知

$$x dy - y dx = \frac{abc^2 t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt.$$

于是, 面积为

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = \frac{abc^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(1+t^{2n+1})^2} dt \\
&= \frac{abc^2}{2(2n+1)} \cdot \frac{1}{1+t^{2n+1}} \Big|_0^{+\infty} = \frac{abc^2}{2(2n+1)}.
\end{aligned}$$

4318. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆外面圆周滚动 (而不滑动) 时, 由动圆上的一点所描绘出来的曲线称

为外摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数 ($n \geq 1$), 求外摆线所界的面积. 研究特殊情况 $r = R$ (心脏形线).

解 取定圆的中心 O 作坐标原点, 取 Ox 轴通过点 A , 点 A 是动点的始点, 即为两圆的公切点时的位置 (图 8.65). 当动圆滚到如图的新位置时, 点 A 移到点 M . 动点 M 的轨迹便是外摆线, 其方程推导如下: 设动圆的圆心为 C , 两圆的切点为 B , 记 $\angle MCB = t$ (运动开始时, 设 t 等于零). 切点在定圆上所移过的弧 \widehat{AB} 应等于它在动圆上所移过的弧 \widehat{MB} , 即

$$R \cdot \angle AOB = \frac{R}{n} \cdot \angle MCB = \frac{R}{n} t.$$

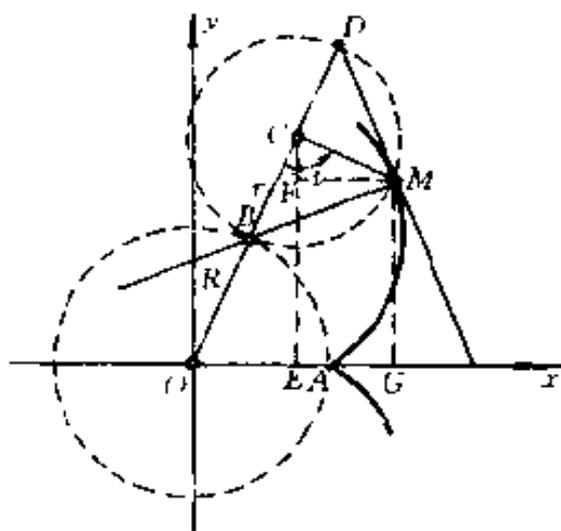


图 8.65

从而 $\angle AOB = \frac{t}{n}$, 设动点 M 的坐标为 (x, y) , 则

$$\begin{aligned}x &= OG = OE + FM \\ &= \left(R + \frac{R}{n} \right) \cos \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \sin \angle FCM,\end{aligned}$$

但 $\angle FCM = \angle BCM - \angle OCE$, 且 $\angle OCE = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{n}$,

从而

$$\begin{aligned}\angle FCM &= \left(1 + \frac{1}{n} \right) t - \frac{\pi}{2}, \\ \sin \angle FCM &= -\cos \left(1 + \frac{1}{n} \right) t.\end{aligned}$$

于是, 最后得

$$x = R \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cos \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \cos \left(1 + \frac{1}{n} \right) t.$$

类似地, 可求得

$$y = R \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sin \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \sin \left(1 + \frac{1}{n} \right) t.$$

若记 $\varphi = \frac{t}{n}$, 并注意到 $R = nr$, 则外摆线可用如下的参数方程表示:

$$\begin{aligned}x &= (n+1)r \cos \varphi - r \cos(n+1)\varphi, \\ y &= (n+1)r \sin \varphi - r \sin(n+1)\varphi.\end{aligned}$$

由 $R = nr$ 知, 当动圆滚 n 圈后, 起点与终点重合, 即 φ 的变化范围为 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. 由于

$$x dy - y dx = r^2 (n+1)(n+2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

故所求的面积为

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx \\ &= \frac{r^2 (n+1)(n+2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi \\ &= \pi r^2 (n+1)(n+2).\end{aligned}$$

特别是,当 $r = R$ 时,即 $n = 1$,则得心脏形线的面积为 $S = 6\pi r^2$.

4319. 一个半径为 r 的圆沿着半径为 R 的定圆内面圆周滚动(而不滑动)时,由动圆上的一点所描绘出来的曲线称为内摆线. 假定比值 $\frac{R}{r} = n$ 是整数($n \geq 2$),求内摆线所界的面积. 研究特殊情况 $r = \frac{R}{4}$ (星形线).

解 仿上题,容易求得内摆线的参数方程为

$$\begin{aligned}x &= R \left(1 - \frac{1}{n} \right) \cos \frac{t}{n} + \frac{R}{n} \cos \left(1 - \frac{1}{n} \right) t, \\y &= R \left(1 - \frac{1}{n} \right) \sin \frac{t}{n} - \frac{R}{n} \sin \left(1 - \frac{1}{n} \right) t\end{aligned}$$

若以 $\varphi = \frac{t}{n}$ 为参数,并注意到 $R = nr$,则得

$$\begin{aligned}x &= r(n-1)\cos\varphi + r\cos(n-1)\varphi, \\y &= r(n-1)\sin\varphi - r\sin(n-1)\varphi.\end{aligned}$$

由于

$$x dy - y dx = r^2(n-1)(n-2)(1 - \cos n\varphi) d\varphi,$$

故面积为

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \oint_c x dy - y dx \\&= \frac{r^2(n-1)(n-2)}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos n\varphi) d\varphi \\&= \pi r^2(n-1)(n-2).\end{aligned}$$

特别是,当 $\frac{R}{r} = 4$ 时,即 $n = 4$,则得星形线所界的面积为 $S = 6\pi r^2$.

4320. 计算圆柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 被曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 所截那部分的面积.

解 两曲面的交线为

$$x^2 + y^2 = ax, z^2 = a^2 - ax.$$

若将 Oxy 平面上的圆周 $x^2 + y^2 = ax$ 记以 C , 其弧长记以 s , 则所求的面积显然可表为

$$S = 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} ds.$$

由于 $x^2 + y^2 = ax$ 即为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2$, 故令

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \varphi, y = \frac{a}{2} \sin \varphi,$$

从而弧长的微分为 $ds = \frac{a}{2} d\varphi$, 于是, 面积为

$$\begin{aligned} S &= 2 \oint_C \sqrt{a^2 - ax} ds = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{a^2}{2} (1 - \cos \varphi)} \cdot \frac{a}{2} d\varphi \\ &= 2 \int_0^{2\pi} a^2 \sin \frac{\varphi}{2} d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 4a^2. \end{aligned}$$

4321. 计算

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2},$$

若 $X = ax + by, Y = cx + dy$, 且 C 为包围坐标原点的简单的封闭围线 ($ad - bc \neq 0$).

解 首先注意, 由于 $ad - bc \neq 0$, 故只有原点 $(0, 0)$ 使 $X^2 + Y^2 = 0$. 易知

$$\begin{aligned} XdY - YdX &= (ax + by)(cdx + ddy) \\ &\quad - (cx + dy)(adx + bdy) \\ &= (ad - bc)(xdy - ydx), \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

其中

$$P = - \frac{(ad - bc)y}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2},$$

$$Q = \frac{(ad - bc)x}{(ax + by)^2 + (cx + dy)^2}.$$

容易算得

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ &= - \frac{(ad - bc)[(a^2 + c^2)x^2 - (b^2 + d^2)y^2]}{[(ax + by)^2 + (cx + dy)^2]^2} \\ &((x, y) \neq (0, 0) \text{ 时}), \end{aligned}$$

故由格林公式知

$$\begin{aligned} &\oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &= \oint_{C'} P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \end{aligned}$$

其中 C' 可为包围原点 $(0, 0)$ 的任一位于 C 内的围线. 特别是, 可取 C' 为围线 $(ax + by)^2 + (cx + dy)^2 = r^2$ (即 $X^2 + Y^2 = r^2$), $r > 0$ 充分小. 于是, 得 (利用格林公式)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} XdY - YdX \\ &= \frac{ad - bc}{2\pi r^2} \oint_{X^2 + Y^2 = r^2} xdy - ydx \\ &= \frac{ad - bc}{2\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 \leq r^2} 2dxdy \end{aligned}$$

$$= \frac{ad - bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 < r^2} \left| \frac{D(x, y)}{D(X, Y)} \right| dXdY.$$

由于 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} = ad - bc$, 故 $\frac{D(x, y)}{D(X, Y)} = \frac{1}{ad - bc}$. 于是, 代入上式得

$$\begin{aligned} I &= \frac{ad - bc}{\pi r^2} \iint_{X^2 + Y^2 < r^2} \frac{1}{|ad - bc|} dXdY \\ &= \frac{ad - bc}{\pi r^2} \cdot \frac{1}{|ad - bc|} \cdot \pi r^2 = \operatorname{sgn}(ad - bc). \end{aligned}$$

4322. 若简单的围线 C 包围坐标原点, $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$, 而曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 和 $\psi(x, y) = 0$ 在围线 C 内面有几个单交点, 计算积分 I (参阅前题).

解 设 $\varphi(x, y) = 0, \psi(x, y) = 0$ 在 C 内的交点为 $P_i(x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)$. 首先注意, 本题应假定函数 $\varphi(x, y)$ 与 $\psi(x, y)$ 在 C 围成的区域内具有连续的二阶偏导数, 并且在各点 $P_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 处有 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} =$

$\varphi'_x \psi'_y - \varphi'_y \psi'_x \neq 0$. 容易算得

$$XdY - YdX = (\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi)dx + (\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi)dy,$$

从而

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \oint_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy, \end{aligned}$$

其中

$$P = \frac{\varphi\psi'_x - \varphi'_x\psi}{\varphi^2 + \psi^2}, Q = \frac{\varphi\psi'_y - \varphi'_y\psi}{\varphi^2 + \psi^2}.$$

又可算得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{(\varphi^2 + \psi^2)^2} [(\varphi\psi''_{xy} - \varphi''_{xy}\psi)(\varphi^2 + \psi^2) -$$

$$- (\varphi_r' \psi_s' + \varphi_s' \psi_r') \varphi^2 + (\varphi_r' \psi_s' + \varphi_s' \psi_r') \psi^2 + 2(\varphi_r' \varphi_s' - \psi_r' \psi_s') \varphi \psi]$$

$$((x, y) \neq (x_i, y_i) (i = 1, 2, \dots, m)).$$

围绕点 $P_i(x_i, y_i)$ 作围线 $C_i: [\varphi(x, y)]^2 + [\psi(x, y)]^2 = r^2$ (即 $X^2 + Y^2 = r^2$), 取 $r > 0$ 充分小, 使诸 C_i 互不相交且都位于 C 内 (这是办得到的, 因为在各点 $P_i, \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$. 从而由连续性知在 P_i 的某邻域内 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \neq 0$ 且保持定号, 于是根据隐函数存在定理知变换 $X = \varphi(x, y), Y = \psi(x, y)$ 在点 $(x, y) = (x_i, y_i)$ 邻近及点 $(X, Y) = (0, 0)$ 邻近是双方单值双方连续的) 并使 $\frac{D(X, Y)}{D(x, y)}$ 在 P_i 的邻近 $X^2 + Y^2 \leq r^2$ (记为 S_i) 上保持定号, 将格林公式应用于诸围线 C, C_1, \dots, C_m 之间的区域, 可得

$$\begin{aligned} & \oint_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} P(x, y) dx + Q(x, y) dy, \end{aligned}$$

故

$$I = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^m \oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2}. \quad (1)$$

但

$$\begin{aligned} & \oint_{C_i} \frac{XdY - YdX}{X^2 + Y^2} \\ &= \frac{1}{r^2} \oint_{C_i} XdY - YdX \\ &= \frac{1}{r^2} \oint_{C_i} (\varphi\psi'_{,r} - \psi'_{,r}\varphi) dx + (\varphi\psi'_{,s} - \psi'_{,s}\varphi) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r^2} \iint_{S_r} 2(\varphi', \psi'_{xy} - \varphi''_y \psi'_x) dx dy \\
&= \frac{2}{r^2} \iint_S \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy \\
&= \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{r'} \iint_{S_r} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} dx dy \\
&= \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{r'} \iint_{X^2+Y^2 \leq r^2} dX dY \\
&= \frac{2}{r^2} \left(\operatorname{sgn} \frac{D(X, Y)}{D(x, y)} \right)_{r'} \cdot \pi r^2 \\
&= 2\pi \left(\operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{r'}
\end{aligned}$$

代入(1)式,即得

$$I = \sum_{i=1}^n \left(\operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} \right)_{r_i}$$

或写为

$$I = \sum \operatorname{sgn} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)}$$

其中的 \sum 是对曲线 $\varphi(x, y) = 0$ 与 $\psi(x, y) = 0$ 在 C 内的各交点相加.

注:显然,4321题是4322题的特例.这时,曲线 $ax + by = 0$ 与 $cx + dy = 0$ 在 C 内只有一个交点,即原点 $(0, 0)$, 而 $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, y)} = ad - bc$.

4323. 证明,若 C 为封闭的围线且 \vec{l} 为任意的方向,有

$$\oint_C \cos(\vec{l}, \vec{n}) ds = 0,$$

式中 n 为围线 C 的外法线.

证 如图 8.66 所示, 不妨规定 C 的方向为逆时针的, 以 \vec{l} 表示. 由于夹角

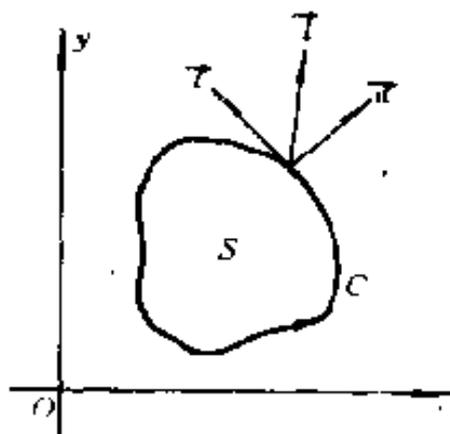


图 8.66

$$(\vec{l}, \vec{n}) = (\vec{l}, x) - (\vec{n}, x),$$

故得

$$\begin{aligned} \cos(\vec{l}, \vec{n}) &= \cos(\vec{l}, x)\cos(\vec{n}, x) \\ &\quad - \sin(\vec{l}, x)\sin(\vec{n}, x). \end{aligned}$$

$$\text{但 } \sin(\vec{n}, x) = \sin\left[(\vec{l}, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\vec{l}, x),$$

$$\cos(\vec{n}, x) = \cos\left[(\vec{l}, x) - \frac{\pi}{2}\right] = \sin(\vec{l}, x), \text{ 且}$$

$$\cos(\vec{l}, x) = \frac{dx}{ds}, \sin(\vec{l}, x) = \frac{dy}{ds},$$

因此, 有

$$\cos(\vec{l}, \vec{n})ds = \cos(\vec{l}, x)dy - \sin(\vec{l}, x)dx.$$

再利用格林公式, 并注意到 $\sin(\vec{l}, x)$ 和 $\cos(\vec{l}, x)$ 均为常数, 即得

$$\begin{aligned}
& \oint_C \cos(\vec{l}, \vec{n}) ds \\
&= \oint_C [-\sin(\vec{l}, x) dx + \cos(\vec{l}, x)] dy \\
&= \iint_S 0 dx dy = 0.
\end{aligned}$$

4324. 求积分

$$I = \oint_C [x \cos(\vec{n}, x) + y \cos(\vec{n}, y)] ds$$

之值, 式中 C 为包围有界域 S 的简单封闭曲线, n 为它的外法线.

解 如上题所述, 已知

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{n}, x) &= \cos\left[(\vec{l}, x) - \frac{\pi}{2}\right] \\
&= \sin(\vec{l}, x) = \frac{dy}{ds}, \\
\cos(\vec{n}, y) &= \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\vec{l}, x)\right] = \sin(\vec{l}, x) \\
&= \sin\left[(\vec{l}, x) - \frac{\pi}{2}\right] = -\cos(\vec{l}, x) = -\frac{dx}{ds}.
\end{aligned}$$

于是,

$$I = \oint_C x dy - y dx = 2 \cdot \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx = 2S,$$

这里 S 表示有界域 S 面积的数值.

4325. 求

$$\lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (\vec{F}, \vec{n}) ds,$$

其中 S 为包含点 (x_0, y_0) 的围线 C 所界的面积, $d(S)$ 为域 S 的直径, \vec{n} 为围线 C 的外法线上的单位向量, $\vec{F}(x, y)$ 为在 $S + C$ 上连续地可微分的向量.

解 由 4321 题的推导过程中知, 矢量 \vec{n} 在坐标轴上的射影为

$$n_x = \cos(\vec{n}, x) = \frac{dy}{ds}, n_y = \cos(\vec{n}, y) = -\frac{dx}{ds}.$$

于是,

$$(\vec{F}, \vec{n})ds = (Xn_x + Yn_y)dx = Xdy - Ydx.$$

因此, 利用格林公式知

$$\begin{aligned} \oint_C (\vec{F}, \vec{n})ds &= \oint_C Xdy - Ydx \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} \cdot S, \end{aligned}$$

其中点 $(\xi, \eta) \in$ 域 S . 于是,

$$\begin{aligned} \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C (\vec{F}, \vec{n})ds &= \lim_{d(S) \rightarrow 0} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) \Big|_{(\xi, \eta)} \\ &= X'(x_0, y_0) + Y'(x_0, y_0). \end{aligned}$$

§ 13. 曲线积分的物理应用

4326. 均匀分布在圆 $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$ 的上半部的质量 M 以怎样的力吸引质量为 m 位于 $(0, 0)$ 的质点?

解 由对称性知, 引力在 Ox 轴上的射影 $X = 0$, 故只要计算引力在 Oy 轴上的射影.

设圆心角为 θ , 由 $ds = ad\theta$ 知, 对于长为 ds 一段圆弧吸引质量为 m 的质点的力在 Oy 轴上的射影为

$$dY = -\frac{km}{a^2} \frac{M}{\pi a} \sin\theta \cdot a d\theta = -\frac{kmM}{\pi a^2} \sin\theta d\theta,$$

其中 k 为引力常数.

于是, 所求的引力在 Oy 轴上的射影为

$$Y = \frac{kmM}{\pi a^2} \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{2kmM}{\pi a^2}.$$

4327. 计算单层的对数位

$$u(x, y) = \oint_C k \ln \frac{1}{r} ds,$$

式中 k = 常数 = 密度, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$,
设围线 C 是圆周 $\xi^2 + \eta^2 = R^2$.

解 由对称性知, 对数位

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2k \int_0^\pi \ln \frac{1}{r} \cdot R d\theta \\ &= 2Rk \int_0^\pi \ln \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2R\rho \cos\theta + \rho^2}} d\theta \\ &= -Rk \int_0^\pi \ln R^2 \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta, \end{aligned}$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\xi x + \eta y = R\rho \cos\theta$, 而 θ 是矢量 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ 与 $\vec{r}' = \xi\vec{i} + \eta\vec{j}$ 的正向夹角.

利用 3733 题(或 2192 题)的结果, 可得

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \ln \left[1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos\theta + \left(\frac{\rho}{R} \right)^2 \right] d\theta \\ &= \begin{cases} 0, & \rho \leq R; \\ 2\pi \ln \frac{\rho}{R}, & \rho > R. \end{cases} \end{aligned}$$

于是, 我们有

$$u(x, y) = -2Rk \int_0^\pi \ln R d\theta$$

$$\begin{aligned}
& -Rk \int_0^\pi \left(1 - 2 \frac{\rho}{R} \cos \theta + \left| \frac{\rho}{R} \right|^2 \right) d\theta \\
& = \begin{cases} 2\pi Rk \ln \frac{1}{R}, & \rho \leq R, \\ 2\pi Rk \ln \frac{1}{\rho}, & \rho > R. \end{cases}
\end{aligned}$$

4328. 采用极坐标系 ρ 和 φ , 计算单层的对数位

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi$$

和

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln \frac{1}{r} d\psi.$$

式中 r 为点 (ρ, φ) 与动点 $(1, \psi)$ 间的距离, m 为自然数.

解 由于

$$\begin{aligned}
r & = \sqrt{(\rho \cos \varphi - \cos \psi)^2 + (\rho \sin \varphi - \sin \psi)^2} \\
& = \sqrt{1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2},
\end{aligned}$$

于是, 当 $\rho < 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
I_1 & = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \ln(1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2) d\psi \\
& = -\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos(mu + m\varphi) \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& = -\frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \cos m\varphi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& \quad + \frac{1}{2} \int_{\varphi}^{\varphi+2\pi} \sin m\varphi \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du.
\end{aligned}$$

因为上述右端两个积分中被积函数均为以 2π 为周期的函数, 并注意到奇偶函数在对称区间上的积分性质, 则有

$$I_1 = -\cos m\varphi \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sin m\varphi}{2} \int_{\pi}^{\pi} \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& = -\cos m\varphi \int_0^{\pi} \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& = -(\cos m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi.
\end{aligned}$$

同理, 我们有

$$\begin{aligned}
I_2 & = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi \ln[1 - 2\rho \cos(\psi - \varphi) + \rho^2] d\psi \\
& = -\frac{1}{2} \int_{-\varphi}^{\varphi-2\pi} \sin(mu + m\varphi) \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& = -\frac{\cos m\varphi}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& \quad - \sin m\varphi \int_0^{\pi} \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& = -\sin m\varphi \int_0^{\pi} \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& = -(\sin m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m} \rho^m \right) = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi.
\end{aligned}$$

当 $\rho > 1$ 时, 则有

$$\begin{aligned}
I_1 & = -\cos m\varphi \int_0^{\pi} \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du \\
& = -\cos m\varphi \int_0^{\pi} \cos mu \ln \rho \left(1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\
& = -\cos m\varphi \int_0^{\pi} \cos mu \ln \left(1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\
& = -(\cos m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m \rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi.
\end{aligned}$$

同理, 我们有

$$\begin{aligned}
I_2 & = -\sin m\varphi \int_0^{\pi} \cos mu \ln \left(1 - 2 \frac{1}{\rho} \cos u + \frac{1}{\rho^2} \right) du \\
& = -(\sin m\varphi) \left(-\frac{\pi}{m \rho^m} \right) = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi.
\end{aligned}$$

对于 $\rho = 0$, 显然有

$$I_1 = I_2 = 0.$$

现在来研究当 $\rho = 1$ 的情况. 首先, 积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

对于 ρ 在区间 $[1, 1 + \delta]$ 上是一致收敛的, 其中 δ 为很小的正数. 事实上, 对于充分小的 η , 当 u 在 $(0, \eta)$ 内取值时, 有

$$\begin{aligned} 1 > 1 - 2\rho \cos u + \rho^2 &= (1 - \rho)^2 + 2\rho(1 - \cos u) \\ &\geq 2(1 - \cos u) > 0. \end{aligned}$$

于是, 当 $1 \leq \rho \leq 1 + \delta, u \in (0, \eta)$ 时, 有

$$|\cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2)| \leq |\ln 2(1 - \cos u)|.$$

而积分

$$\int_0^\eta |\ln 2(1 - \cos u)| du$$

是收敛的. 这是由于当 $0 < 2\beta < 1$, 有

$$\begin{aligned} &\lim_{u \rightarrow +0} u^{2\beta} |\ln 2(1 - \cos u)| \\ &= \lim_{u \rightarrow +0} \frac{[2(1 - \cos u)]^\beta \ln[2(1 - \cos u)]}{u^{2\beta}} \\ &= 0.1 = 0. \end{aligned}$$

于是, 积分

$$\int_0^\eta \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

在 $1 \leq \rho \leq 1 + \delta$ 上一致收敛, 故知积分

$$I_1 = \int_0^\pi \cos mu \ln(1 - 2\rho \cos u + \rho^2) du$$

在 $1 \leq \rho \leq 1 + \delta$ 上一致收敛从而, I_1 作为参数 ρ 的函

数在 $\rho = 1$ 是右连续的. 由此, 根据上面已求出 $\rho > 1$ 时

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi, \text{ 得知; 当 } \rho = 1 \text{ 时,}$$

$$I_1 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi = \frac{\pi}{m} \cos m\varphi.$$

同理, 可得

$$I_2 = \lim_{\rho \rightarrow 1+0} \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi = \frac{\pi}{m} \sin m\varphi.$$

综上所述, 得

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^m \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^m \sin m\varphi, \quad \text{当 } 0 \leq \rho \leq 1;$$

$$I_1 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \cos m\varphi, \quad I_2 = \frac{\pi}{m} \rho^{-m} \sin m\varphi, \quad \text{当 } \rho > 1.$$

*) 参看 И. В. 雷日克、И. С. 格拉德什坦编著“函数表与积分表”3.765 公式 1.

$$\int_0^\pi \ln(1 - 2p \cos x + p^2) \cos \alpha x dx = -\frac{\pi}{\alpha} p^\alpha (p^2 < 1).$$

**) 根据上面公式, 当 $p^2 > 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \ln(1 - 2p \cos x + p^2) \cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi \ln p^2 \left(1 - 2 \frac{1}{p} \cos x + \frac{1}{p^2} \right) \cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi 2 \ln p \cdot \cos \alpha x dx + \int_0^\pi \ln \left(1 - 2 \frac{1}{p} \cos x \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{p^2} \right) \cos \alpha x dx \\ &= \int_0^\pi \ln \left(1 - 2 \frac{1}{p} \cos x + \frac{1}{p^2} \right) \cos \alpha x dx \\ &= -\frac{\pi}{\alpha} p^{-\alpha}, \end{aligned}$$

其中 α 为自然数.

4329. 计算高斯积分

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds,$$

式中 $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为向量 \vec{r} 的长度, 此向量是连接点 $A(x, y)$ 和简单封闭光滑围线 C 上的动点 $M(\xi, \eta)$ 而得的, (\vec{r}, \vec{n}) 为向量 \vec{r} 与在曲线 C 上 M 点的外法线 \vec{n} 所夹的角.

解 设 \vec{n} 与 Ox 轴的夹角为 α , \vec{r} 与 Ox 轴的夹角为 β , 则 $(\vec{r}, \vec{n}) = \alpha - \beta$. 于是,

$$\begin{aligned} \cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\sin\alpha. \end{aligned}$$

代入高斯积分, 得

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \oint_C \left(\frac{\eta - y}{r^2}\sin\alpha + \frac{\xi - x}{r^2}\cos\alpha \right) ds \\ &= \oint_C \frac{\xi - x}{r^2} d\eta - \frac{\eta - y}{r^2} d\xi. \end{aligned}$$

令

$$P = -\frac{\eta - y}{r^2}, \quad Q = \frac{\xi - x}{r^2},$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \eta} &= \frac{-(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{r^4}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= \frac{-(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}{r^4}, \end{aligned}$$

因而 P, Q 的偏导数除去点 A (此处 $r = 0$) 外, 在全平面上是连续的, 并且 $\frac{\partial Q}{\partial \xi} = \frac{\partial P}{\partial \eta}$. 于是, 利用格林公式知: 当点 A 在曲线 C 之外时, 有

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = 0.$$

当点 A 在曲线 C 之内时, 则在曲线 C 内以 A 为圆心, R 为半径作一圆 l , 即得

$$u(x, y) = \oint_l \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = \oint_l \frac{1}{R} ds = 2\pi.$$

当点 A 在曲线 C 上时, 不妨利用关系式

$$\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = d\varphi^{**},$$

其中 $d\varphi$ 为从点 A 看曲线 C 上弧长的微分 ds 所张的角度. 今以 A 为圆心, r_1 为半径作一小圆, 交 C 于 B_1 及 B_2 两点, 将曲线 C 除去小圆内的部分记以 $\widehat{B_1 B_2}$, 则有

$$\int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = \int_{\widehat{B_1 B_2}} d\varphi = \angle B_1 A B_2.$$

于是, 我们有

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow +0} \int_{\widehat{B_1 B_2}} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds \\ &= \lim_{r_1 \rightarrow +0} \angle B_1 A B_2 = \pi. \end{aligned}$$

综上所述, 得高斯积分

$$u(x, y) = \oint_C \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} ds = \begin{cases} 0, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 外;} \\ \pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 上;} \\ 2\pi, & \text{点 } A \text{ 在 } C \text{ 内.} \end{cases}$$

*) 参看 Г. М. 菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》538 目.

4330. 采用极坐标系 ρ 和 φ , 计算双层的对数位

$$K_1 = \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} d\psi$$

和

$$K_2 = \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} d\psi.$$

式中 r 为点 $A(\rho, \varphi)$ 和动点 $M(1, \psi)$ 之间的距离, (\vec{r}, \vec{n}) 为方向 $\overrightarrow{AM} = \vec{r}$ 与从点 $O(0, 0)$ 所引的半径 $\overrightarrow{OM} = \vec{n}$ 二者之间的夹角, m 为自然数.

解 由题意知:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} \\ &= \frac{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)\cos\psi + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)\sin\psi}{(\cos\psi - \rho\cos\varphi)^2 + (\sin\psi - \rho\sin\varphi)^2} \\ &= \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)}. \end{aligned}$$

从而, 当 $\rho = 1$ 时, $\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r} = \frac{1}{2}$. 又因 m 为自然数, 故此时有

$$K_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi d\psi = 0,$$

$$K_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin m\psi d\psi = 0.$$

当 $\rho < 1$ 时, 因为级数(利用 2968 题的结果)

$$\frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi)$$

在 $[0, 2\pi]$ 上一致收敛, 乘 $\cos m(\psi - \varphi)$ 和 $\sin m(\psi - \varphi)$ 以后在 $[0, 2\pi]$ 上也一致收敛, 故可逐项积分. 于是

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - \rho\cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho\cos(\psi - \varphi)} d\psi \\ &= \int_0^{2\pi} [\cos m(\psi - \varphi)\cos m\varphi - \sin m(\psi - \varphi)\sin m\varphi] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho^n \cos n(\psi - \varphi) \right) d\psi \\
&= \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos m(\psi - \varphi) \rho^m \cos m(\psi - \varphi) d\psi \\
&= \rho^m \cos m\varphi \int_0^{2\pi} \cos^2 m(\psi - \varphi) d\psi \\
&= \pi \rho^m \cos m\varphi.
\end{aligned}$$

同理,容易求得

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1 - \rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \pi \rho^m \sin m\varphi.
\end{aligned}$$

当 $\rho > 1$ 时,我们有

$$\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - \rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \\
&\quad \cdot \frac{[1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)] + (1 - \rho^2)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos m\psi \\
&\quad \cdot \frac{(1 - r^2) + [1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)]}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= -\int_0^{2\pi} \cos m\psi \frac{1 - r \cos(\psi - \varphi)}{1 + r^2 - 2r \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\
&= -\pi r^m \cos m\varphi = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi,
\end{aligned}$$

其中 $r = \rho^{-1} < 1$.

同理, 可求得

$$\begin{aligned} K_2 &= \int_0^{2\pi} \sin m\psi \frac{1 - \rho \cos(\psi - \varphi)}{1 + \rho^2 - 2\rho \cos(\psi - \varphi)} d\psi \\ &= -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi. \end{aligned}$$

综上所述, 得

$$K_1 = \pi \rho^m \cos m\varphi, \quad K_2 = \pi \rho^m \sin m\varphi, \quad \text{当 } \rho < 1,$$

$$K_1 = K_2 = 0, \quad \text{当 } \rho = 1,$$

$$K_1 = -\frac{\pi}{\rho^m} \cos m\varphi, \quad K_2 = -\frac{\pi}{\rho^m} \sin m\varphi, \quad \text{当 } \rho > 1.$$

4331. 若 $\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则称可微分两次的函数 $u = u(x, y)$ 为调和函数. 证明: 当且仅当

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$$

(式中 C 为任意封闭围线, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿此围线之外法线的导函数) 时, u 是调和函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\vec{n}, x),$$

而(参看 4324 题的推导)

$$\cos(\vec{n}, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \sin(\vec{n}, x) = -\frac{dx}{ds},$$

故利用格林公式(注意, 题中应假定 $u(x, y)$ 具有连续的二阶偏导数), 得

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy \\
&= \iint_S (\Delta u) dx dy,
\end{aligned}$$

其中 S 表由封闭围线 C 围成的区域. 由此式知:

$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (对任何封闭围线 C) 当且仅当 $\iint_S (\Delta u) \cdot dx dy = 0$ (对任何区域 S). 但易知这又相当于 $\Delta u \equiv 0$. 事实上, 若 $\Delta u \equiv 0$, 则对任何 S , 有 $\iint_S (\Delta u) \cdot dx dy = 0$;

反之, 若对任何 S , 有 $\iint_S (\Delta u) dx dy = 0$, 则必 $\Delta u \equiv 0$. 因为, 若不然, 在某点 (x_0, y_0) , $\Delta u \neq 0$. 例如, 设在此点, $\Delta u > 0$, 则由连续性可知, 必存在以 (x_0, y_0) 为中心, 半径为 r_0 (充分小) 的圆域 S_0 , 使其上每一点, 都有 $\Delta u > 0$. 由此可知, $\iint_{S_0} (\Delta u) dx dy > 0$. 矛盾, 证毕.

4332. 证明:

$$\begin{aligned}
&\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\
&= - \iint_S u \Delta u dx dy + \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds,
\end{aligned}$$

式中光滑围线 C 包围着有界域 S .

证 由于

$$\begin{aligned}
\oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C u \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\vec{n}, x) \right] ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \oint_C u \frac{\partial u}{\partial x} dy - u \frac{\partial u}{\partial y} dx \\
&= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\
&= \iint_S u \Delta u dx dy + \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy &= - \iint_S u \Delta u dx dy \\
&+ \oint_C u \frac{\partial u}{\partial n} ds.
\end{aligned}$$

4333. 证明: 在有界域 S 内及其周界 C 为调和的函数, 则此函数单值地由它在围线 C 上的数值确定 (参照习题 4332).

证 由题意知, 我们只要证明: 如有界域 S 上的两个调和函数 u_1 和 u_2 , 在其周界 C 上有相同的数值, 则它们在整个域上恒等. 这也就是要证明: 若调和函数 $u = u_1 - u_2$ 在周界 C 上等于零, 则它在整个域上恒为零. 事实上, 利用 4332 题的结果, 得

$$\iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = 0.$$

于是, 在整个域 S 上, 有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

这表明, 在 S 上 u 为常数. 但在周界 C 上 $u = 0$, 故在域 S 上 $u \equiv 0$, 即 $u_1 = u_2$.

4334. 证明平面上的格林第二公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds,$$

式中光滑的围线 C 包围着有界线 S , $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿 C 的外法线方向的导函数.

证 我们有

$$\begin{aligned} \oint_C v \frac{\partial u}{\partial n} ds &= \oint_C v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\vec{n}, x) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial u}{\partial y} \sin(\vec{n}, x) \right) ds \\ &= \oint_C v \frac{\partial u}{\partial x} dy - v \frac{\partial u}{\partial y} dx \\ &= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S v \Delta u dx dy. \end{aligned}$$

同理, 有

$$\begin{aligned} \oint_C u \frac{\partial v}{\partial n} ds &= \oint_C u \frac{\partial v}{\partial x} dy - u \frac{\partial v}{\partial y} dx \\ &= \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(-u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy + \iint_S u \Delta v dx dy. \end{aligned}$$

于是,

$$\oint_C \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds = \oint_C \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S v \Delta u dx dy - \iint_S u \Delta v dx dy \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy.
\end{aligned}$$

4335. 利用格林第二公式证明, 若 $u = u(x, y)$ 是有界闭域 S 内的调和函数, 则

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

式中 C 为域 S 的边界, \vec{n} 为围线 C 的外法线方向, (x, y) 为域 S 内的点, $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$ 为点 (x, y) 与围线 C 上的动点 (ξ, η) 间的距离.

证 先证 $v = \ln r$ 为 (ξ, η) ($(\xi, \eta) \neq (x, y)$) 的调和函数. 事实上, 我们有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial \xi} &= \frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} &= \frac{(\eta - y)^2 - (\xi - x)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}, \\
\frac{\partial v}{\partial \eta} &= \frac{\eta - y}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}, \\
\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} &= \frac{(\xi - x)^2 - (\eta - y)^2}{[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2}.
\end{aligned}$$

因此,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0, \text{ 即 } \Delta v = 0.$$

今以点 (x, y) (当 $(\xi, \eta) \neq (x, y)$ 时) 为中心, ρ 为半径画一圆 C_0 , 使此圆包含在围线 C 内, C_0 及 C 的正向如图 8.67 所示. 曲线 C 的法线向外, C_0 的法线指向点 (x, y) . 因此, 在 C_0 上, 我们有

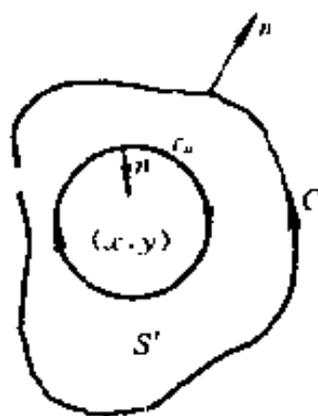


图 8.67

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln r}{\partial n} \Big|_{r=\rho} &= - \frac{\partial \ln r}{\partial r} \Big|_{r=\rho} \\ &= - \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = - \frac{1}{\rho}. \end{aligned}$$

现将格林第二公式应用到由 C_0 及 C 所界的域 S' 上去, 即得

$$\iint_{S'} \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta \ln r \\ u & \ln r \end{vmatrix} d\xi d\eta = \oint_{C_0+C} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n} \\ u & \ln r \end{vmatrix} ds.$$

由于 $\Delta \ln r = 0, \Delta u = 0$, 故得

$$\oint_{C_0+C} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n} \\ u & \ln r \end{vmatrix} ds = 0.$$

将行列式展开, 并利用线积分性质, 即得

$$\begin{aligned} &\oint_C \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds \\ &= - \oint_{C_0} \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds. \end{aligned}$$

但由于

$$\begin{aligned} &\oint_{C_0} \left(\ln r \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right) ds \\ &= \oint_{C_0} \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} ds - \oint_{C_0} u \left(- \frac{1}{\rho} \right) ds \\ &= 0 \cdot \ln \rho^{(*)} + \frac{1}{\rho} \oint_{C_0} u ds \\ &= \frac{1}{\rho} u(\xi', \eta') \oint_{C_0} ds^{**}) = 2\pi u(\xi', \eta'), \end{aligned}$$

其中 $u(\xi', \eta')$ 为 u 在圆 C_0 上某点的值, 故得

$$u(\xi', \eta') = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

两端令 $\rho \rightarrow +0$ 取极限, 并注意到函数 u 在点 (x, y) 的连续性, 即得

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds.$$

*) 利用 4331 题的结果.

**) 利用第一型曲线积分的中值定理, 其证明方法与普通定积分的中值定理类似.

4336.*) 证明对于调和函数 $u(M) = u(x, y)$ 的 中值定理:

$$u(M) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds;$$

式中 C_ρ 是以 M 点为中心 ρ 为半径的圆周.

证 利用 4335 题的结果 (取 C 为 C_ρ), 得

$$u(M) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left(u \frac{\partial \ln r}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds;$$

但在 C_ρ 上, 有

$$r = \rho,$$

$$\frac{\partial \ln r}{\partial n} \Big|_{r=\rho} = \frac{\partial \ln r}{\partial r} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{r} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho},$$

由此, 再注意到 $\oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (这是利用 4331 题的结果), 得

$$\begin{aligned} u(M) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\rho} \left(\frac{u}{\rho} - \ln \rho \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds \\ &= \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u ds - \frac{\ln \rho}{2\pi} \oint_{C_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) ds. \end{aligned}$$

证毕.

*) 原题中漏掉了 ρ , 即应将 $\frac{1}{2\pi}$ 改为 $\frac{1}{2\pi\rho}$.

4337. 证明在有界闭域内是调和的且于此域内不为常数的函数 $u(x, y)$ 在此域的内点不能达到其最大或最小值(极大值原则).

证 设有界闭域为 $\bar{\Omega}$, 它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明: 如果 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0)$ 达到其最大值或最小值(例如, 设达到最大值), 则 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数. 下分三步证之.

i) 先证: 若圆域 $S_\rho = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \rho^2\}$ 完全属于 Ω , 则 $u(x, y)$ 在 S_ρ 上为常数.

对任何 $0 < r \leq \rho$, 用 C_r 表圆周 $\{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$. 由 4336 题的结果可知

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} u(\xi, \eta) ds,$$

故

$$\frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds = 0. \quad (1)$$

但因 $u(x_0, y_0)$ 为最大值, 故在 C_r 上恒有

$$u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \geq 0.$$

由此, 根据(1), 即易知在 C_r 上 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \equiv 0$.

因为, 若有某点 $(\xi_0, \eta_0) \in C_r$ 使 $u(x_0, y_0) - u(\xi_0, \eta_0) = \tau > 0$, 则由 $u(x, y)$ 的连续性可知, 必有以 (ξ_0, η_0) 为中心的某小圆域 σ 存在, 使当 $(\xi, \eta) \in \sigma$ 时, 恒有 $u(x_0, y_0)$

$u(\xi, \eta) \geq \frac{\tau}{2}$. 用 C' 表 C_r 含于 σ 内的部分, 则

$$\oint_{C_r} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] ds \geq \int_{C'} [u(x_0, y_0)$$

$$-u(\xi, \eta)] ds \geq \int_{C_r} \frac{\tau}{2} ds = \frac{1}{2} \tau l_r > 0,$$

其中 l_r 表圆弧 C_r 之长, 此显然与(1)式矛盾.

于是, 在 C_r 上恒有 $u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta) \equiv 0$. 再根据 r 的任意性 ($0 < r \leq \rho$), 即知对任何 $(\xi, \eta) \in S_\rho$, 都有 $u(\xi, \eta) = u(x_0, y_0)$. 换句话说, $u(x, y)$ 在 S_ρ 上是常数.

ii) 次证: 设 $P^*(x^*, y^*)$ 为 $\bar{\Omega}$ 的任一内点 (即 $P^* \in \Omega$), 则必 $u(x^*, y^*) = u(x_0, y_0)$.

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0, y_0)$ 与点 $P^*(x^*, y^*)$ 连接起来 (图 8.68). 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的

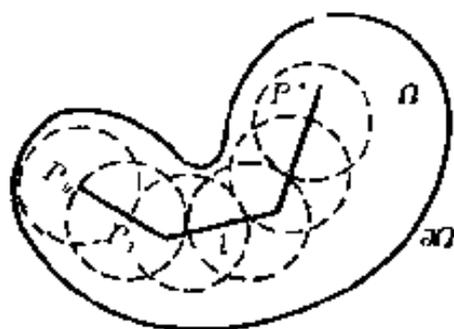


图 8.68

距离, 即 $\delta = \min \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, 其中的 \min 是对一切 $(x, y) \in \partial\Omega, (x', y') \in l$ 来取的 (由于 $\partial\Omega, l$ 是互不相交的有界闭集, 可证 \min 一定能达到, 从而 $\delta > 0$). 取 $0 < \delta' < \delta$. 以点 P_0 为中心, δ' 为半径作一圆, 得圆域 $S_{\delta'} = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq \delta'^2\}$, 此圆域完全含于 Ω 内, 由 i) 段已证的结论知 $u(x, y)$ 在 $S_{\delta'}$ 中为常数. 特别 $u(x_1, y_1) = u(x_0, y_0)$, 这里点 $P_1(x_1, y_1)$

代表圆周 $C_0 = \{(x, y) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \delta'^2\}$ 与折线 l 的交点. 又以点 P_1 为中心, δ' 为半径作一圆, 得圆域 $S_1 = \{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 \leq \delta'^2\}$. 由于 $u(x, y)$ 在点 $P_1(x_1, y_1)$ 也达到最大值, 而 S_1 完全含于 Ω 内, 故将 i) 段结果用于 S_1 可知 $u(x, y)$ 在 S_1 上为常数, 特别 $u(x_2, y_2) = u(x_1, y_1)$, 这里点 $P_2(x_2, y_2)$ 表圆周 $C_1 = \{(x, y) | (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = \delta'^2\}$ 与 l 的交点 (除 P_0 外的另一交点). 再以点 P_2 为中心, δ' 为半径作一圆域 S_2, \dots , 这样继续作下去, 显然, 至多经过 n 次 (n 表大于 $\frac{s}{\delta'}$ 的最小正整数, s 表 l 的长), 点 $P^*(x^*, y^*)$ 必属于 S_{n-1} , 从而

$$\begin{aligned} u(x^*, y^*) &= u(x_{n-1}, y_{n-1}) = \dots = u(x_1, y_1) \\ &= u(x_0, y_0). \end{aligned}$$

iii) 由 ii) 段的结果可知, $u(x, y)$ 在 Ω 上是常数; 根据 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性, 通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限, 即知 $u(x, y)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注: 从证明过程中看出, 需假定区域 Ω (从而 $\bar{\Omega}$) 是连通的. 事实上, 若 Ω 不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设 $\bar{\Omega} = S_1 + S_2$, 其中 S_1 与 S_2 是两个互无公共点的闭圆域, 而令

$$u(x, y) = \begin{cases} c_1, & (x, y) \in S_1; \\ c_2, & (x, y) \in S_2, \end{cases}$$

其中 $c_1 \neq c_2$ 是两个常数, 则显然 $u(x, y)$ 是 $\bar{\Omega}$ 上的调和函数且在 $\bar{\Omega}$ 上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

4338. 证明黎曼公式

$$\iint_S \begin{vmatrix} L(u) & M(v) \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

式中

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} - cu,$$

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - a \frac{\partial v}{\partial x} - b \frac{\partial v}{\partial y} + cv$$

(a, b, c 为常数), P 和 Q 为某些确定的函数, 围线 C 包围着有界域 S .

证 因为

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L(u) & M(v) \\ u & v \end{vmatrix} &= vL(u) - uM(v) \\ &= v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + av \frac{\partial u}{\partial x} + bv \frac{\partial u}{\partial y} + cuv \\ &\quad - u \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + au \frac{\partial v}{\partial x} + bu \frac{\partial v}{\partial y} - cuv \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + a \frac{\partial}{\partial x} (vu) \\ &\quad + b \frac{\partial}{\partial y} (uv) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} + auv \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - buv \right), \end{aligned}$$

故利用格林公式, 即得

$$\iint_S \begin{vmatrix} L(u) & M(v) \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \oint_C P dx + Q dy,$$

其中

$$P = u \frac{\partial v}{\partial x} - buv, \quad Q = v \frac{\partial u}{\partial y} + auv.$$

4339. 设 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 为液体的速度的分量.

求在单位时间内流过以围线 C 为界的域 S 的液体的量 (即液体流出量与流入量的差). 若液体不能压缩且在域 S 内没有源泉和漏孔, 则函数 u 和 v 满足怎样的方程式?

解 设液体的速度为 \vec{W} , 则 $\vec{W} = u \vec{i} + v \vec{j}$, 又 $d\vec{s} = dx \vec{i} + dy \vec{j}$. 于是, 所求的液体量

$$\begin{aligned} Q &= \oint_C \vec{w} \cdot \vec{n} ds = \oint_C [u \cos(\vec{n}, x) + v \sin(\vec{n}, x)] ds \\ &= \oint_C (u dy - v dx) = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

其中 \vec{n} 表示曲线 C 的外法线上的单位矢量, 并且此处已假定流体的面密度等于 1. 若液体是不可压缩的, 且在域 S 内无源泉和漏孔, 则液体流出量与流入量的差 Q 应等于零, 即

$$\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

又显然, 对于任意的围线 C , 上述结果均正确. 于是, 连续函数 u, v 应满足方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

*) 参看 4323 题的题解.

4340.† 根据比奥沙伐耳 (BIO — SAVAR) 定律通过线元 ds 的电流 i 在空间的点 $M(x, y, z)$ 处产生一磁场, 其应力为

$$d\vec{H} = ki \frac{(\vec{r} \times d\vec{s})}{r^3},$$

其中 \vec{r} 为连接元素 $d\vec{s}$ 与点 M 的向量, k 为比例系数. 对于封闭导线 C 的情形求磁场 \vec{H} 在点 M 之应力的射影 H_x, H_y, H_z .

解 由题意知:若设导线 C 上的动点为 (ξ, η, ζ) , 则

$$\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k}.$$

又 $d\vec{s} = d\xi\vec{i} + d\eta\vec{j} + d\zeta\vec{k}$. 于是, 磁场强度

$$\begin{aligned} \vec{H} &= ki \oint_C \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \xi - x & \eta - y & \zeta - z \\ d\xi & d\eta & d\zeta \end{vmatrix} \\ &= ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y)d\zeta - (\zeta - z)d\eta] \vec{i} \\ &\quad + ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\zeta - z)d\xi - (\xi - x)d\zeta] \vec{j} \\ &\quad + ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi] \vec{k}, \end{aligned}$$

从而射影

$$H_x = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\eta - y)d\zeta - (\zeta - z)d\eta],$$

$$H_y = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\zeta - z)d\xi - (\xi - x)d\zeta],$$

$$H_z = ki \oint_C \frac{1}{r^3} [(\xi - x)d\eta - (\eta - y)d\xi],$$

§ 14. 曲面积分

1° 第一型的曲面积分 若 S 为逐片光滑的双面曲面

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

$$((u, v) \in Q),$$

(1)

而 $f(x, y, z)$ 为在曲面 S 上的各点上有定义并且是连续的函数, 则

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_Q f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$\cdot \sqrt{EG - F^2} du dv, \quad (2)$$

式中

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

特别情形,若曲面的方程式的形状为

$$z = z(x, y) \quad ((x, y) \in \sigma),$$

其中 $z(x, y)$ 为单值连续地可微分函数,则

$$\begin{aligned} \iint_S f(x, y, z) ds &= \iint_{\sigma} f(x, y, z(x, y)) \\ &\cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy. \end{aligned}$$

此积分与曲面 S 的方向的选择无关.

若把函数 $f(x, y, z)$ 当作曲面 S 在点 (x, y, z) 的密度,则积分(2)是此曲面的质量.

2° 第二型的曲面积分 若 S 为平滑的双面曲面; S^+ 为它的正面,由法线的方向 $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 所确定的一面, $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ 为在曲面 S 上有定义而且连续的三个函数,则

$$\begin{aligned} &\iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_S (P \cos\alpha + Q \cos\beta + R \cos\gamma) dS. \end{aligned} \quad (3)$$

若曲面 S 的方程为参数式(1),则法线 \vec{n} 的方向余弦由下列公式来确定:

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

其中 $A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},$

$$C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)},$$

且方根前的符号用适当的方法来选择.

当变换为曲面 S 的另一面 S^{-} 时, 积分(3)的符号变为相反的符号.

4341. 积分

$$I_1 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

和 $I_2 = \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP,$

(式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的表面, P 为内接于此球的八面体 $|x| + |y| + |z| = a$ 的表面) 相差若干?

解 若令

$$x = a \sin\varphi \cos\theta, \quad y = a \sin\varphi \sin\theta, \quad z = a \cos\varphi,$$

则有

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} a^2 \cdot a^2 \sin\varphi d\theta \\ &= 4\pi a^4. \end{aligned}$$

为求 I_2 , 只要注意到 $|z| = a - (|x| + |y|)$, 并利用对称性, 即得

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_P (x^2 + y^2 + z^2) dP = 8 \int_0^a dx \int_0^{a-x} \sqrt{3} \\ &\quad \cdot (x^2 + y^2 - (a - x - y)^2) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 16\sqrt{3} \int_0^a dx \int_0^a [x^2 + y^2 + xy + \frac{a^2}{2} \\
&\quad - a(x+y)] dy \\
&= 16\sqrt{3} \int_0^a [x^2(a-x) - \frac{1}{6}(a-x)^3 \\
&\quad - ax(a-x) + \frac{a^2}{2}(a-x)] dx \\
&= 16\sqrt{3} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) a^4 \\
&= 2\sqrt{3} a^4.
\end{aligned}$$

于是,两积分之差

$$I_1 - I_2 = 2(2\pi - \sqrt{3})a^4.$$

4342. 计算

$$\iint_S z dS,$$

式中 S 为曲面 $x^2 + z^2 = 2ax (a > 0)$ 被曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 所割下的部分.

解 作变换

$$x = a \sin \theta, \quad y = y, \quad z = a + a \cos \theta,$$

则两曲面分别化为

$$r = 1, \text{ 和 } y^2 = 2a^2 \cos \theta (1 + \cos \theta)$$

两曲面交线的参数方程为

$$\begin{aligned}
x &= a \sin \theta, \quad y = \pm \sqrt{2a} \sqrt{\cos \theta (1 + \cos \theta)}, \\
z &= a + a \cos \theta \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right).
\end{aligned}$$

于是,

$$\iint_S z dS = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{-\frac{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}}^{\frac{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}{\sqrt{2}a\sqrt{\cos\theta(1+\cos\theta)}}} (a + a \cos \theta) a dy$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2\sqrt{2}a^3 \sqrt{\cos\theta} \sqrt{(1+\cos\theta)^3} d\theta \\
&= 4\sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta} \sqrt{(1+\cos\theta)^3}}{\sin\theta} d(\cos\theta) \\
&= 4\sqrt{2}a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos\theta}(1+\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos\theta}} d(\cos\theta) \\
&= 4\sqrt{2}a^3 \int_0^1 [t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{3}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}] dt \\
&= 4\sqrt{2}a^3 \left[B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) + B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) \right] \\
&= \frac{7}{2} \sqrt{2} \pi a^3.
\end{aligned}$$

计算下列第一型曲面积分：

4343. $\iint_S (x+y+z)dS$, 式中 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,
 $z \geq 0$.

解 由于

$$\begin{aligned}
\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2} + \frac{y^2}{z^2}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
\iint_S (x+y+z)dS &= \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \\
&\quad \cdot [x+y+\sqrt{a^2-x^2-y^2}] dy \\
&= \int_{-a}^a (\pi ax + 2a\sqrt{a^2-x^2}) dx \\
&= 4a \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx
\end{aligned}$$

$$= 4a \cdot \frac{\pi a^2}{4} = \pi a^3.$$

4344. $\iint_S (x^2 + y^2) dS$, 式中 S 为体积 $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1$ 的边界.

解 面积 S 由两部分组成. 一部分为 $S_1: z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 它在 Oxy 平面上的射影为 $x^2 + y^2 = 1$; 另一部分为 $S_2: z = 1$, 它在 Oxy 平面上的射影也是 $x^2 + y^2 = 1$. 对于这两部分分别有

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{2},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = 1.$$

若利用极坐标, 则

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2) dS &= \iint_{S_1} (x^2 + y^2) dS \\ &\quad + \iint_{S_2} (x^2 + y^2) dS \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^3 dr \\ &= \frac{\pi}{2} (1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

4345. $\iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2}$, 式中 S 为四面体 $x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ 的边界.

解 曲面 S 由四部分组成, 分别为 $S_1: x+y+z=1, x>0, y>0, z>0; S_2: x=0, S_3: y=0, S_4: z=0$. 于

是,我们有

$$\begin{aligned}
 \iint_S \frac{dS}{(1+x+y)^2} &= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
 &+ \int_0^1 dy \int_0^{1-y} \frac{dz}{(1+y)^2} + \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dz}{(1+x)^2} \\
 &+ \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
 &= (\sqrt{3} + 1) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{dy}{(1+x+y)^2} \\
 &+ 2 \int_0^1 dx \int_0^x \frac{dz}{(1+x)^2} \\
 &= (\sqrt{3} + 1) \left(\ln 2 - \frac{1}{2} \right) + 2(1 - \ln 2) \\
 &= \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3} - 1) \ln 2.
 \end{aligned}$$

4346. $\iint_S |xyz| dS$, 式中 S 为曲面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} = \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)},$$

故利用极坐标,并注意对称性,即得

$$\begin{aligned}
 \iint_S |xyz| dS &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 \cos\varphi \sin\varphi \sqrt{1 + 4r^2} r dr \\
 &= 2 \int_0^1 r^5 \sqrt{1 + 4r^2} dr = \int_0^1 t^2 \sqrt{1 + 4t} dt \\
 &= \int_1^{\sqrt{5}} \frac{1}{32} (y^2 - 1)^2 y^2 dy \\
 &= \frac{1}{32} \left(\frac{y^7}{7} - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_1^{\sqrt{5}} = \frac{125\sqrt{5} - 1}{420}.
 \end{aligned}$$

*) 作代换 $r^2 = t$.

* *) 作代换 $\sqrt{1 + 4t} = y$.

4347. $\iint_S \frac{dS}{\rho}$, 式中 S 为椭球表面, ρ 为椭球中心到与椭球表面的元素 dS 相切的平面之间的距离.

解 设椭球面方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

则曲面上任一点 (x, y, z) 的法矢量为 $\left\{ \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right\}$.

从而, 由题设知: $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cos(\vec{n}, \vec{r})$, 其中 \vec{n} , \vec{r} 分别表示点 (x, y, z) 处的法矢量和矢径, 即

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

而法线与 Oz 轴夹角的余弦为

$$\frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dS}{\rho} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \frac{c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} \right)}{|z|} dx dy \\ &= 2 \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c \left[\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right) + \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} \frac{c}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{r^2 \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{c^2} - \frac{r^2}{c^2} \right) abrd\theta^*) \\
&= 2\pi abc \int_0^1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \sqrt{1-r^2} \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + 2 \frac{\sqrt{1-r^2}}{c^2} \right] r dr^{**}) \\
&= -\pi abc \left[2 \sqrt{1-r^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) - \frac{2}{3} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \\
&\quad \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{4}{3c^2} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \\
&= \frac{4\pi}{3} abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).
\end{aligned}$$

*) 作广义极坐标变换: $x = a \cos \theta, y = b r \sin \theta$.

**) 利用关系式: $\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \sqrt{1-r^2}$.

4348. $\iint_S z dS$, 式中 S 为螺旋面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$
($0 < u < 1; 0 < v < 2\pi$) 的一部分.

解 由于

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \\
&= \cos^2 v + \sin^2 v = 1, \\
G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \\
&= u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + 1 = 1 + u^2, \\
F &= \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\
&= -u \sin v \cos v + u \cos v \sin v = 0,
\end{aligned}$$

故得 $\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1 + u^2}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z dS &= \int_0^a du \int_0^{2\pi} v \sqrt{1 + u^2} dv \\ &= 2\pi^2 \int_0^a \sqrt{1 + u^2} du \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{u}{2} \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln(u + \sqrt{1 + u^2}) \right] \Big|_0^a \\ &= \pi^2 [a \sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})]. \end{aligned}$$

4349. $\iint_S z^2 dS$, 式中 S 为圆锥表面的一部分 $x = r \cos \varphi \sin \alpha, y = r \sin \varphi \sin \alpha, z = r \cos \alpha$ ($0 \leq r \leq a; 0 \leq \varphi \leq 2\pi$) 和 α 为常数 ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

解 由于

$$E = \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

$$G = r'^2 \cos^2 \varphi \sin^2 \alpha + r^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \alpha = r^2 \sin^2 \alpha,$$

$$F = (\cos \varphi \sin \alpha)(-r \sin \varphi \sin \alpha) + \sin \varphi \sin \alpha \cdot (r \cos \varphi \sin \alpha) = 0,$$

故得 $\sqrt{EG - F^2} = r \sin \alpha$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_S z^2 dS &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \cos^2 \alpha \cdot r \sin \alpha dr \\ &= \frac{\pi a^4}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

4350. $\iint_S (xy + yz + zx) dS$, 式中 S 为圆锥曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被曲面 $x^2 + y^2 = 2ax$ 所割下的部分.

解 由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}$$

$$= \sqrt{2},$$

又曲面 S 在 Oxy 平面上的射影域为 $x^2 + y^2 \leq 2ax$.

于是, 利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned} & \iint_S (xy + yz + zx) dS \\ &= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} [r^2 \cos\varphi \sin\varphi + r^2 (\cos\varphi + \sin\varphi)] r dr \\ &= \sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} (2a\cos\varphi)^4 \cos\varphi d\varphi \\ &= 8\sqrt{2}a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\varphi d\varphi = \frac{64}{15} \sqrt{2} a^4. \end{aligned}$$

4351. 证明 普阿桑公式

$$\begin{aligned} & \iint_S f(ax + by + cz) dS \\ &= 2\pi \int_0^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du. \end{aligned}$$

式中 S 是球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的表面.

证 取新坐标系 $Ouvw$, 其中原点不变, 平面 $ax + by + cz = 0$ 即为 Ovw 面, u 轴垂直于该面, 则有

$$u = \frac{ax + by + cz}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

在新坐标系下, 公式左端的积分可写为

$$\iint_S f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dS.$$

显然, 球面 S 的方程为

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \text{ 或 } v^2 + w^2 = (\sqrt{1 - u^2})^2.$$

若表示成参数式, 则为

$$u = u, \quad v = \sqrt{1-u^2}\cos\omega, \quad \omega = \sqrt{1-u^2}\sin\omega,$$

其中 $-1 \leq u \leq 1$, $0 \leq \omega \leq 2\pi$. 从而

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{EG - F^2} du d\omega \\ &= \sqrt{\frac{1}{1-u^2} \cdot (1-u^2) - 0} du d\omega = du d\omega. \end{aligned}$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned} \iint_S f(ax + by + cz) dS &= \iint_S f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dS \\ &= \int_0^{2\pi} d\omega \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du. \end{aligned}$$

4352. 求抛物面壳

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad (0 \leq z \leq 1)$$

的质量, 此壳的密度按规律 $\rho = z$ 而变更.

解 质量为

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \rho dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 2} z \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 2} (x^2+y^2) \sqrt{1+x^2+y^2} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr \\ &= \pi \int_0^{\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1+r^2} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} r^2 \sqrt{1+r^2} d(r^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{2}{5} (1+r^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} (1+r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\sqrt{2}} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$$

4353. 求密度为 ρ_0 的均匀球壳

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (z \geq 0)$$

对于 Oz 轴的转动惯量.

解 转动惯量为

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_S (x^2 + y^2) \rho_0 dS \\ &= \rho_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} (x^2 + y^2) \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \frac{r^3}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \\ &= 2\pi a^4 \rho_0 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3} \pi a^4 \rho_0. \end{aligned}$$

4354. 求密度为 ρ_0 的均匀锥面壳

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0 \quad (0 \leq z \leq b)$$

对于直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的转动惯量

解 设 (x, y, z) 为均匀锥面壳上的任一点, 它到直线

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z-b}{0}$$

的距离为

$$|d| =$$

$$\sqrt{\frac{\begin{vmatrix} y-0 & z-b \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z-b & x-0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x-0 & y & 0 \\ 1 & 0 & \end{vmatrix}^2}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}}} \\ = \sqrt{\left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2} - b\right)^2 + y^2}.$$

又因

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

于是,所求的转动惯量为

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2 + y^2 \leq a^2} \left[\left(\frac{b}{a} \sqrt{x^2 + y^2} - b \right)^2 + y^2 \right] \\ &\quad \cdot \rho_0 \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} dx dy \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \rho_0}{a} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \left[\left(\frac{b}{a} r - b \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + r^2 \sin^2 \varphi \right] dr \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \rho_0}{a} \left[2\pi a^2 b^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) + \frac{\pi a^4}{4} \right] \\ &= \frac{\pi a \rho_0 (3a^2 + 2b^2) \sqrt{a^2 + b^2}}{12}. \end{aligned}$$

4355. 求均匀的曲面

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

被曲面 $x^2 + y^2 = ax$ 所割下部分的重心的坐标.

解 质量为

$$M = \iint_S \rho_0 dS = \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2 + y^2 \leq ax} dx dy$$

$$= \sqrt{2} \rho_0 \left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi = \frac{\sqrt{2} \pi a^2 \rho_0}{4}.$$

从而,重心的坐标为

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} x dx dy \\ &= \frac{4}{\pi a^2} \int_0^a x dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} dy \\ &= \frac{8}{\pi a^2} \int_0^a x \sqrt{ax-x^2} dx \\ &= \frac{8}{\pi a^2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} + t \right) \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 - t^2} dt^{(*)} \\ &= \frac{8}{\pi a} \int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\left(\frac{a}{2} \right)^2 - t^2} dt = \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \int_0^a dx \int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}} y dy = 0.$$

$$\begin{aligned} z_0 &= \frac{1}{M} \cdot \sqrt{2} \rho_0 \iint_{x^2+y^2 \leq ax} z dx dy \\ &= \frac{4}{\pi a^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{a \cos \varphi} r^2 dr \\ &= \frac{8a}{3\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{16a}{9\pi}, \end{aligned}$$

即重心的坐标为 $\left(\frac{a}{2}, 0, \frac{16a}{9\pi} \right)$.

*) 作变换 $t = x - \frac{a}{2}$.

4356. 求均匀曲面

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad (x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq a)$$

的重心的坐标.

解 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}},$$

所以,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

由对称性知,重心的横坐标与纵坐标相等,即

$$x_0 = y_0 = \frac{\iint_S x dS}{\iint_S dS} = \frac{\int_0^a \int_0^{a-y} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy}{\int_0^a \int_0^{a-x} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx}.$$

由于

$$\begin{aligned} &\int_0^a \int_0^{a-y} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= a \int_0^a \left(-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \right) \Big|_{x=0}^{x=a-y} dy \\ &= a \left[\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2} dy - \int_0^a \sqrt{2ay - 2y^2} dy \right] \\ &= a \left[\frac{\pi a^2}{4} - \sqrt{2} \cdot \frac{\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} \right]^{**} \\ &= \frac{\pi a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ &\int_0^a \int_0^x \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a \int_0^a \arcsin \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} dx \\
&= -4a^2 \int_1^0 \frac{u}{(1+u^2)^2} \arcsin u du \\
&= 2a^2 \left(\frac{\arcsin u}{1+u^2} \Big|_1^0 - \int_1^0 \frac{du}{(1+u^2)\sqrt{1-u^2}} \right) \\
&= 2a^2 \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{u\sqrt{2}}{\sqrt{1-u^2}} \Big|_1^0 \right)^{**)} \\
&= \pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right),
\end{aligned}$$

故有

$$x_0 = y_0 = \frac{\frac{\pi a^3}{4} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}{\pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} = \frac{a}{2\sqrt{2}}.$$

又由于

$$\begin{aligned}
\iint_S z dS &= \int_0^a \int_0^{a-x} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dy dx \\
&= a \int_0^a (a-x) dx = \frac{a^3}{2},
\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}
z_0 &= \frac{\iint_S z dS}{\iint_S dS} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\pi a^2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right)} \\
&= \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1),
\end{aligned}$$

即重心的坐标为 $\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \frac{a}{\pi} (\sqrt{2} + 1) \right)$.

*) 由定积分的几何意义知:

$$\int_0^a \sqrt{y(a-y)} dy = \int_0^a \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{a}{2}\right)^2} dy$$

$$= \frac{\pi a^2}{8}.$$

* *) 利用 1957 题的结果.

4357. 密度为 ρ_0 的均匀截锥面

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = r (0 \leq \varphi \leq 2\pi),$$

$$0 < b \leq r \leq a)$$

以怎样的力吸引质量为 m 位于该曲面顶点的质点?

解 显然曲面顶点为原点 $O(0,0,0)$. 对应于半径 r 处取斜高为 ds 的锥面带, 其面积为

$$dS = 2\pi r ds = 2\sqrt{2}\pi r dr.$$

它与顶点 O 处质量为 m 的质点的引力在 Ox 轴和 Oy 轴上的射影显见为零, 而在 Oz 轴上的射影为

$$dZ = \frac{km \cdot 2\sqrt{2}\pi r dr \rho_0}{r^2 + z^2} \cdot \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}$$

$$= \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r}.$$

于是, 截圆锥面吸引质量为 m 的质点(在顶点处)的引力在坐标轴上的射影分别为

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

$$Z = \int_b^a \frac{k\pi m \rho_0 dr}{r} = k\pi m \rho_0 \ln \frac{a}{b}.$$

4358. 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的密度为 ρ_0 的均匀球壳 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的位, 即: 计算积分

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r},$$

式中

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

解 记 $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$. 由对称性知, 在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的位, 等于在点 $N_0(0, 0, r_0)$ 的位. 由余弦定理知, 球面上任一点 (x, y, z) 到点 N_0 的距离

$$r = \sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0a\cos\psi} \quad (0 \leq \psi \leq \pi),$$

而球面带 $dS = 2\pi a^2 \sin\psi d\psi$. 于是, 所求的位为

$$u = \iint_S \frac{\rho_0 dS}{r} = 2\pi a^2 \rho_0 \int_0^\pi \frac{\sin\psi d\psi}{\sqrt{a^2 + r_0^2 - 2r_0a\cos\psi}}.$$

令 $u^2 = a^2 + r_0^2 - 2r_0a\cos\psi$, 则

$$2u du = 2r_0 a \sin\psi d\psi,$$

即

$$\sin\psi d\psi = \frac{u}{r_0 a} du.$$

从而, 所求的位为

$$u = \frac{2\pi a \rho_0}{r_0} \int_{|a-r_0|}^{a+r_0} du = \begin{cases} 4\pi a \rho_0, & \text{当 } r_0 < a, \\ \frac{4\pi a^2 \rho_0}{r_0}, & \text{当 } r_0 > a, \\ 4\pi a \rho_0, & \text{当 } r_0 = a. \end{cases}$$

也即

$$u = 4\pi \rho_0 \min\left(a, \frac{a^2}{r_0}\right).$$

上述结果表明: 若 M_0 点在球壳内, 则位是个常量; 若 M_0 在球壳外, 则在该点球壳的位等于将球壳质量集中于球心的位; 当 M_0 点从球壳内通过球面时位具有连续性,

从而当 M_0 点在球面上时,位也是个常量,且等于球内任一点的位.

4359. 计算

$$F(t) = \iint_{x+y+z=t} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{若 } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \\ 0, & \text{若 } x^2 + y^2 + z^2 > 1. \end{cases}$$

作出函数 $u = F(t)$ 的图形.

解 显然,平面

$$x + y + z = \pm \sqrt{3}$$

是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的两个切平面,于是,

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 - z^2, & \text{若 } |t| \leq \sqrt{3}, \\ 0 & \text{若 } |t| > \sqrt{3}. \end{cases}$$

由方程组

$$\begin{cases} x + y + z = t, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

得椭圆方程

$$x^2 + y^2 + [t - (x + y)]^2 = 1,$$

或

$$x^2 + y^2 + xy - t(x + y) = \frac{1 - t^2}{2}, \quad (1)$$

记该椭圆围成的区域为 Ω , 则

$$\begin{aligned} F(t) &= \iint_{\Omega} \{1 - x^2 - y^2 - [t - (x + y)]^2\} \sqrt{3} dx dy \\ &= \sqrt{3} \iint_{\Omega} [1 - t^2 - 2(x^2 + y^2) - 2xy] \end{aligned}$$

$$+ 2t(x + y)] dx dy.$$

作平移变换

$$x = x' + \frac{t}{3}, \quad y = y' + \frac{t}{3},$$

则方程(1)变为

$$x'^2 + y'^2 + x' y' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t^2}{3} \right), \quad (2)$$

记相应的区域为 Ω' , 而函数为

$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x' y'.$$

于是,

$$F(t) = \sqrt{3} \iint_{\Omega'} \left[1 - \frac{t^2}{3} - 2(x'^2 + y'^2) - 2x' y' \right] dx' dy'.$$

再作旋转变换

$$x' = \frac{x'' - y''}{\sqrt{2}}, \quad y' = \frac{x'' + y''}{\sqrt{2}},$$

则方程(2)变为椭圆的标准方程

$$\frac{x''^2}{\left[\frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}} \right]^2} + \frac{y''^2}{\left[\sqrt{1 - \frac{t^2}{3}} \right]^2} = 1. \quad (3)$$

记相应的区域为 Ω'' , 而函数为

$$f = 1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2).$$

于是,

$$F(t) = \sqrt{3} \iint_{\Omega''} \left[1 - \frac{t^2}{3} - (3x''^2 + y''^2) \right] dx'' dy''.$$

最后, 作广义的极坐标变换, 即

$$x^n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}} r \cos \varphi,$$

$$y^n = \sqrt{1 - \frac{t^2}{3}} r \sin \varphi,$$

则有

$$\begin{aligned} F(t) &= \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \frac{t^2}{3}\right) (r - r^3) dr d\varphi \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{3}\right)^2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\varphi = \frac{\pi}{18} (3 - t^2)^2, \end{aligned}$$

其中 $|t| \leq \sqrt{3}$, 而当 $|t| > \sqrt{3}$, 则有

$$F(t) = 0.$$

考虑函数 $u = F(t) (-\infty < t < +\infty)$. 我们有

$$\frac{du}{dt} = -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2)t \quad (|t| < \sqrt{3}).$$

当 $t = \sqrt{3}$ 时, u 的左导数 $= -\frac{2\pi}{9} (3 - t^2) \Big|_{t=\sqrt{3}} = 0$, u 的右导数显然为零 (因为 $t \geq \sqrt{3}$ 时, $u \equiv 0$), 故 $t = \sqrt{3}$ 时 u 的导数存在且等于零. 同理可证, $t = -\sqrt{3}$ 时, u 的导数也存在且等于零. 于是, 曲线 $u = F(t)$ 在 $t = 0$ 处以及 $|t| \geq \sqrt{3}$ 的各 t 处切线都平行于 Ot 轴. 又 $t = 0$ 处达极大值 $u = \frac{\pi}{2}$, 且为最大值.

由于

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{2\pi}{3} (1 - t^2),$$

所以当 $t = \pm 1$ 时为拐点. 显然, 图形关于 Ou 轴是对称的. 函数 $u = F(t)$ 的图形, 如图 8.69 所示.

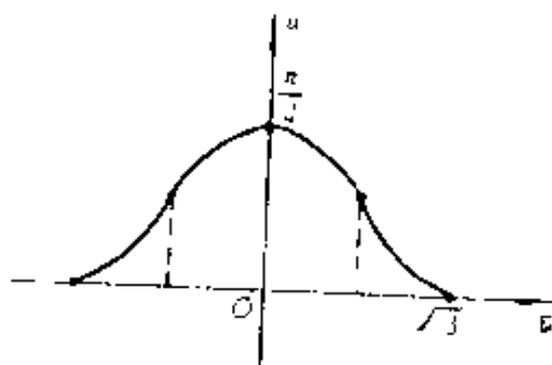


图 8.69

4360. 计算积分

$$F(t) = \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z) dS,$$

式中

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x^2 + y^2, & \text{若 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2}; \\ 0, & \text{若 } z < \sqrt{x^2 + y^2}. \end{cases}$$

解 由球面方程 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 知

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}},$$

而由

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = t^2, \\ z^2 = x^2 + y^2 \end{cases}$$

可得

$$x^2 + y^2 = \frac{t^2}{2} = \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

于是, 积分

$$\begin{aligned}
F(t) &= \iint_{x^2 - y^2 + z^2 = t^2} f(x, y, z) dS \\
&= \iint_{x^2 + y^2 \leq \left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2} (x^2 + y^2) \\
&\quad \cdot \frac{|t|}{\sqrt{t^2 - (x^2 + y^2)}} dx dy \\
&= |t| \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr d\varphi.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
\int \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr &= \frac{1}{2} \int \frac{t^2 - r^2 - t^2}{\sqrt{t^2 - r^2}} d(t^2 - r^2) \\
&= \frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} + C,
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \frac{r^3}{\sqrt{t^2 - r^2}} dr &= \left[\frac{1}{3} (t^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right. \\
&\quad \left. - t^2 \sqrt{t^2 - r^2} \right] \Big|_0^{\frac{|t|}{\sqrt{2}}} \\
&= \frac{-5\sqrt{2}}{12} |t|^3 + \frac{2}{3} |t|^3 \\
&= \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} |t|^3.
\end{aligned}$$

于是,最后得

$$\begin{aligned}
F(t) &= |t| \int_0^{2\pi} \frac{8 - 5\sqrt{2}}{12} |t|^3 d\varphi \\
&= \frac{(8 - 5\sqrt{2})\pi}{6} t^4.
\end{aligned}$$

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS,$$

其中 S 是变球

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2,$$

且假定 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} > a > 0$,

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 < a^2; \\ 0, & \text{若 } \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2. \end{cases}$$

解 记 $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. 旋转坐标轴, 使点 $P(x, y, z)$ 位于 Oy 轴的正方向上的点 $P_0(0, 0, r)$, 如图 8.70 所示.

显然, 当 $0 < t \leq r - a$ 及 $t \geq r + a$ 时, 整个球面上的点满足 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq a^2$, 此时 $f(\xi, \eta, \zeta) = 0$. 从而, 积分

$$F(x, y, z, t) = \iint_S f(\xi, \eta, \zeta) dS = 0.$$

当 $r - a < t < r + a$ 时, 则 $F(x, y, z, t)$

$$= \iint_{S'} dS',$$

其中 S' 为 S 位于 $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = a^2$ 内的部分. 从而, 我们有

$$\begin{aligned} F(x, y, z, t) &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a t^2 \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi t^2 (1 - \cos a) \end{aligned}$$

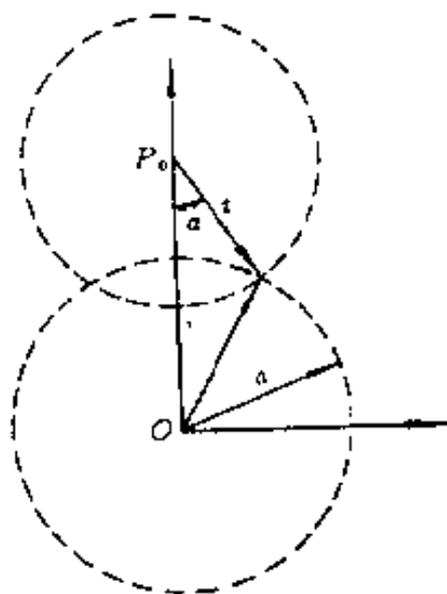


图 8.70

$$\begin{aligned}
&= 2\pi t^2 \left(1 - \frac{t^2 + r^2 - a^2}{2rt} \right) \\
&= \frac{\pi t}{r} [a^2 - (r - t)^2].
\end{aligned}$$

计算下列第二型曲面积分:

4362. $\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy$, 式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面.

解 根据轮换对称, 只要计算 $\iint_S zdxdy$. 注意到上半球

面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取上侧, 下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 应取下侧, 则有

$$\begin{aligned}
\iint_S zdxdy &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy \\
&\quad - \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} (-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dxdy \\
&= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dxdy \\
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r \sqrt{a^2 - r^2} dr = \frac{4}{3} \pi a^3.
\end{aligned}$$

于是, 积分

$$\iint_S xdydz + ydxdz + zdxdy = 3 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = 4\pi a^3.$$

4363. $\iint_S f(x)dydz + g(y)dxdz + h(z)dxdy$, 式中 $f(x)$, $g(y)$, $h(z)$ 为连续函数, S 为平行六面体 $0 < x < a; 0 < y < b; 0 < z < c$ 的外表面.

解 只要计算任何一个积分, 其它两个可类似地写出

结果. 例如, 下面计算 $\iint_S h(z) dx dy$. 由于六面体有四个面垂直于 Oxy 平面, 故面积分应为零. 从而

$$\begin{aligned} \iint_S h(z) dx dy &= \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} h(c) dx dy - \iint_{\substack{0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq a}} h(0) dx dy \\ &= abc \cdot \frac{h(c) - h(0)}{c}. \end{aligned}$$

类似地, 可得到 $\iint_S f(x) dx dz$ 及 $\iint_S g(y) dx dz$ 的值. 于是, 所求的积分为

$$\begin{aligned} &\iint_S f(x) dy dz + g(y) dx dz + h(z) dx dy \\ &= abc \left[\frac{f(a) - f(0)}{a} + \frac{g(b) - g(0)}{b} + \frac{h(c) - h(0)}{c} \right]. \end{aligned}$$

4364. $\iint_S (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy$, 式中 S 为圆锥曲面 $x^2 + y^2 = z^2$ ($0 \leq z \leq h$) 的外表面.

解 方法一:

记 S_1, S_2 分别为锥面的底面和侧面, 而 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为锥面外法线的方向余弦. 一方面, 我们有

$$\begin{aligned} &\iint_{S_1} (y - z) dy dz + (z - x) dx dz + (x - y) dx dy \\ &= \iint_{r^2 + y^2 \leq h^2} (x - y) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r^2 (\cos \varphi - \sin \varphi) dr \end{aligned}$$

$$= \frac{h^3}{3} \int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi) d\varphi = 0.$$

另一方面,在侧面 S_2 上,对于任一点 (x, y, z) , 有

$$\frac{\cos\alpha}{x} = \frac{\cos\beta}{y} = \frac{\cos\gamma}{-z},$$

从而, dS 在各坐标面上的射影分别为

$$\cos\gamma dS = -d\sigma_{xy},$$

$$\cos\alpha dS = -\frac{x}{z} \cos\gamma dS = \frac{x}{z} d\sigma_{xy},$$

$$\cos\beta dS = -\frac{y}{z} \cos\gamma dS = \frac{y}{z} d\sigma_{xy}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} (y-z) dydz - (z-x) dx dz + (x-y) dx dy \\ &= \iint_{S_2} [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta + (x-y)\cos\gamma] dS \\ &= \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} \left[\frac{x}{z}(y-z) + \frac{y}{z}(z-x) - (x-y) \right] d\sigma_{xy} \\ &= -2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} (x-y) dx dy = 0. \end{aligned}$$

综上所述,我们得

$$\begin{aligned} & \iint_S (y-z) dydz + (z-x) dx dz + (x-y) dx dy \\ &= \iint_{S_1} + \iint_{S_2} = 0. \end{aligned}$$

方法二:

记曲面 S 在各坐标面的射影域分别为 S_{xy}, S_{yz} , 和 S_{xz} . 于是,

$$\begin{aligned}
& \iint_S (y - z)dydz + (z - x)dx dz + (x - y)dx dy \\
&= \iint_S (y - z)dydz + \iint_S (z - x)dx dz \\
&\quad + \iint_S (x - y)dx dy \\
&= \left(\iint_{S_{yz}} (y - z)dydz - \iint_{S_{zy}} (y - z)dydz \right) \\
&\quad + \left(\iint_{S_{xz}} (z - x)dx dz - \iint_{S_{zx}} (z - x)dx dz \right) \\
&\quad + \left(\iint_{S_{xy}} (x - y)dx dy - \iint_{S_{yx}} (x - y)dx dy \right) \\
&= 0 + 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

4365. $\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dx dz}{y} + \frac{dx dy}{z}$, 式中 S 为椭球 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的外表面.

解 根据轮换对称, 只要计算一个积分. 例如, 计算

$\iint_S \frac{dx dy}{z}$. 利用广义极坐标, 即得

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{dx dy}{z} &= \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy \\
&\quad - \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{-1}{c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy \\
&= \frac{2}{c} \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} dx dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2ab}{c} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \\
&= \frac{4\pi ab}{c} \left[-\sqrt{1-r^2} \right]_0^1 = 4\pi \cdot \frac{ab}{c}.
\end{aligned}$$

于是,我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_S \frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dxdy}{z} \\
&= 4\pi \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \\
&= \frac{4\pi}{abc} (b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2).
\end{aligned}$$

4366. $\iint_S x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy$, 式中 S 为球壳

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

的外表面.

解 根据轮换对称, 只要计算 $\iint_S z^2 dxdy$.

注意到

$$z - c = \pm \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}.$$

并利用极坐标, 即得

$$\begin{aligned}
\iint_S z^2 dxdy &= \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \\
&[c + \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy \\
&- \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2} \\
&[c - \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2}]^2 dxdy \\
&= 4c \iint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sqrt{R^2 - (x-a)^2 - (y-b)^2} dx dy \\
&= 4c \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr \\
&= 8\pi c \left[-\frac{1}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \right] \Big|_0^R = \frac{8}{3} \pi R^3 c.
\end{aligned}$$

于是,我们有

$$\begin{aligned}
& \iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy \\
&= \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c).
\end{aligned}$$

§ 15. 斯托克斯公式

若 $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ 为连续可微分的函数, C 为包围逐片光滑的有界双面曲面 S 的简单封闭逐段光滑的围线, 则有斯托克斯公式:

$$\begin{aligned}
& \oint_C P dx + Q dy + R dz \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS,
\end{aligned}$$

式中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 的法线的方向余弦, 此法线的方向是这样的, 围线 C 环绕着它依反时针方向(对于右旋坐标系)而回转。

4367. 应用斯托克斯公式, 计算曲线积分

$$\oint_C y dx + z dy + x dz,$$

式中 C 为圆周 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$, 若从 Ox 轴的正向看去, 这圆周是依反时针方向进行的。

用直接计算法检验结果。

解 平面 $x + y + z = 0$ 的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \oint_C ydx + zdy + xdz \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\ &= - \iint_S (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) dS \\ &= -\pi a^2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

下面用直接计算法检验结果. 由方程

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0$$

消去 z , 即得曲线 C 在 Oxy 平面上的射影

$$x^2 + y^2 + xy = \frac{a^2}{2}.$$

作旋转变换

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}},$$

则方程化为

$$3x'^2 + y'^2 = a^2.$$

因而, 曲线 C 的参数方程可取为

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right), \\ y &= \frac{a}{\sqrt{2}} \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right), \end{aligned}$$

$$z = \frac{a}{\sqrt{2}} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \right) \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

于是, 曲线积分为

$$\begin{aligned} & \oint_C ydx + zdy + xdz \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left[- \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} + \sin t \right) \left(\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}} + \cos t \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin t \left(\frac{\cos t}{\sqrt{3}} - \sin t \right) \right] dt \\ &= \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \right) dt \\ &= \frac{a^2}{2} (-\sqrt{3}) \cdot 2\pi = -\sqrt{3} \pi a^2. \end{aligned}$$

可见, 两种算法结果一样.

4368. 计算积分

$$\int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz,$$

此积分是从点 $A(a, 0, 0)$ 至点 $B(a, 0, h)$ 沿着螺线

$$x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi, \quad z = \frac{h}{2\pi} \varphi$$

上所取的.

解 连接 A, B 两点得线段 AB , 它与 AmB 组成封闭曲线并依正向进行, 则由斯托克斯公式知:

$$\begin{aligned} & \oint_{AmBA} (x^2 - yz)dx + (y^2 - zx)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \iint_S 0dydz + 0dxdz + 0dxdy = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned} & \int_{AmB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_{AB} (x^2 - yz)dx + (y^2 - xz)dy + (z^2 - xy)dz \\ &= \int_0^h z^2 dz^{*}) = \frac{h^3}{3}. \end{aligned}$$

*) 在线段 AB 上, $x = a, y = 0, dx = dy = 0$, 而 $0 \leq z \leq h$.

4369. 设 C 为位于平面 $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ ($\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为平面之法线的方向余弦) 上并包围面积为 S 的封闭围线, 求

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix},$$

其中围线 C 是依正方向进行的.

解 若记

$$P = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ y & z \end{vmatrix} = z\cos\beta - y\cos\gamma,$$

$$Q = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ z & x \end{vmatrix} = x\cos\gamma - z\cos\alpha$$

$$R = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ x & y \end{vmatrix} = y\cos\alpha - x\cos\beta,$$

则得

$$\oint_C \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= 2 \iint_S (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) dS = 2 \iint_S dS = 2S.
\end{aligned}$$

应用斯托克斯公式, 计算积分:

4370. $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$, 式中 C 为依参数 t 增大的方向通过的椭圆 $x = a\sin^2 t, y = 2a\sin t \cdot \cos t, z = a\cos^2 t (0 \leq t \leq 2\pi)$.

解 $\oint_C (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz$
 $= \iint_S 0dydz + 0dxdz + 0dxdy = 0.$

4371. $\oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz$, 式中 C 为椭圆 $x^2 + y^2 = a^2, \frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1 (a > 0, h > 0)$, 若从 Ox 轴正向看去, 此椭圆是依反时针方向进行的.

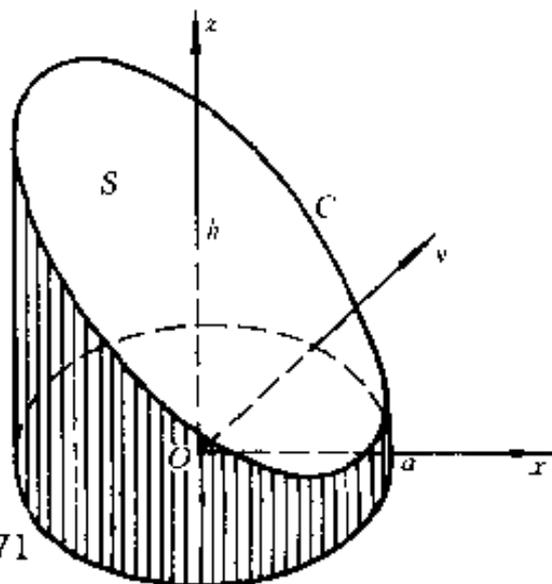


图 8.71

解 椭圆如图 8.71 所示. 把平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 上 C 所包围的区域记为 S , 则 S 的法线方向为 $\{h, 0, a\}$. 注意到 S 的法线方向和曲线 C 的方向是正向联系的, 即得

$$\begin{aligned} & \oint_C (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz \\ &= -2 \iint_S dydz + dxdz + dx dy \\ &= -2(\cos\alpha - \cos\beta + \cos\gamma) \iint_S dS \\ &= -2 \left(\frac{h}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 0 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + h^2}} \right) \\ & \quad \cdot \pi a \sqrt{a^2 + h^2} \\ &= -2\pi a(a+h). \end{aligned}$$

4372. $\oint_C (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, 式中 C 是曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, x^2 + y^2 = 2rx (0 < r < R, z > 0)$, 此曲线是如下进行的: 由它所包围在球 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$ 外表面上的最小区域保持在左方.

解 注意到球面的法线的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{x-R}{R}, \cos\beta = \frac{y}{R}, \cos\gamma = \frac{z}{R},$$

即得

$$\begin{aligned} & \oint_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz \\ &= 2 \iint_S [(y-z)\cos\alpha + (z-x)\cos\beta \\ & \quad + (x-y)\cos\gamma] dS \\ &= 2 \iint_S \left[(y-z) \left(\frac{x}{R} - 1 \right) + (z-x) \frac{y}{R} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + (x - y) \frac{z}{R} \Big] dS \\
 & = 2 \iint_S (z - y) dS.
 \end{aligned}$$

由于曲面 S 关于 Oxy 平面对称, 故 $\iint_S y dS = 0$.

又

$$\iint_S z ds = \iint_S R \cos \gamma dS = R \cdot \pi r^2,$$

于是,

$$\begin{aligned}
 & \oint_C (y^2 + z^2) dx + (z^2 + x^2) dy + (x^2 + y^2) dz \\
 & = 2\pi R r^2.
 \end{aligned}$$

4373. $\oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$, 式中 C

为用平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 切立方体 $0 < x < a, 0 < y < a, 0 < z < a$ 的表面所得的切痕. 若从 Ox 轴的正向看去, 是依反时针前进的方向的.

解 平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 含于立方体内的部分记为 S , 它在 Oxy 平面上的射影域记为 S_{xy} , 其面积显然等于 $\frac{3}{4}a^2$. 当平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 取上侧时, 法线方向的单位矢量为 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$. 于是, 由斯托克斯公式知

$$\begin{aligned}
 & \oint_C (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \\
 & = \iint_S \left[(-2y - 2z) \frac{1}{\sqrt{3}} + (-2z - 2x) \frac{1}{\sqrt{3}} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-2x - 2y) \frac{1}{\sqrt{3}} \Big) dS \\
& = -4 \iint_S (x + y + z) \frac{1}{\sqrt{3}} dS \\
& = -6a \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} dS = -6a \iint_{S_{xy}} dx dy \\
& = -6a \cdot \frac{3}{4} a^2 = -\frac{9}{2} a^3.
\end{aligned}$$

4374. $\oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$, 式中 C 为依参数 t 增大的方向进行的封闭曲线 $x = a \cos t, y = a \cos 2t, z = a \cos 3t$.

解 取 S 为由参数方程

$$\begin{aligned}
x &= u \cos t, y = u \cos 2t, z = u \cos 3t \\
(0 &\leq u \leq a, 0 \leq t \leq 2\pi)
\end{aligned}$$

表示的曲面, 则所给曲线 C 为曲面 S 的边界.

于是, 根据斯托克斯公式, 有

$$\begin{aligned}
& \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz \\
& = 2 \iint_S x^2 (y - z) dy dz + y^2 (z - x) dz dx \\
& \quad + z^2 (x - y) dx dy \\
& = \pm 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a [u^2 \cos^2 t (u \cos 2t - u \cos 3t) \\
& \quad \cdot (y'_u z'_t - z'_t y'_u) + u^2 \cos^2 2t (u \cos 3t - u \cos t) \\
& \quad \cdot (z'_u x'_t - x'_t z'_u) + u^2 \cos^2 3t (u \cos t - u \cos 2t) \\
& \quad \cdot (x'_u y'_t - y'_t x'_u)] du dt \\
& = \pm 2 \int_0^a u^4 du \int_0^{2\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) \\
& \quad \cdot (2 \sin 2t \cos 3t - 3 \cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (3\sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) \\
& \cdot (\sin t \cos 2t - 2\sin 2t \cos t) \Big] dt \\
= & \pm \frac{2}{5} a^5 \int_{-\pi}^{\pi} [\cos^2 t (\cos 2t - \cos 3t) (2\sin 2t \cos 3t \\
& - 3\cos 2t \sin 3t) + \cos^2 2t (\cos 3t - \cos t) \\
& \cdot (3\sin 3t \cos t - \sin t \cos 3t) + \cos^2 3t (\cos t - \cos 2t) \\
& \cdot (\sin t \cos 2t - 2\sin 2t \cos t) \Big] dt = 0,
\end{aligned}$$

上式中正负号应这样选取,使得 S 的侧正好配合 C 的方向 (t 增大的方向),积分 $\int_0^{2\pi}$ 可以换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 是因为被积函数 (t 的函数) 是周期为 2π 的函数,而 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 等于零是因为被积函数为奇函数.

注:本题若不用斯托克斯公式,而直接计算线积分,则较为简单:

$$\begin{aligned}
& \oint_C y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz \\
= & - \int_0^{2\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2\cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t \\
& + 3\cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt \\
= & - \int_{-\pi}^{\pi} a^5 (\cos^2 2t \cos^2 3t \sin t + 2\cos^2 t \cos^2 3t \sin 2t \\
& + 3\cos^2 t \cos^2 2t \sin 3t) dt \\
= & 0,
\end{aligned}$$

$\int_0^{2\pi}$ 可换为 $\int_{-\pi}^{\pi}$ 及 $\int_{-\pi}^{\pi} = 0$ 的理由同上.

4375. 有函数

$$W(x, y, z) = ki \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS \quad (k = \text{常数}),$$

其中 S 为由围线 C 所界的面积, \vec{n} 为曲面 S 的法线, \vec{r} 为

连接空间的点 $M(x, y, z)$ 与曲面 S 上的动点 $A(\xi, \eta, \zeta)$ 所成之矢径, 证明此函数为通过围线 C 的电流 i 所产生磁场 \vec{H} 的位势(参阅 4340 题)。

证 利用 4340 题指出的定律, 并注意到

$$\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \vec{k},$$

其中 $\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k}$, 即得

$$\begin{aligned} \vec{H} &= ki \oint_C \frac{\vec{r} \times d\vec{s}}{r^3} \\ &= ki \left[\left(\oint_C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta \right) \vec{i} \right. \\ &\quad \left. + \left(\oint_C \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\zeta \right) \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + \left(\oint_C \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi \right) \vec{k} \right]. \end{aligned}$$

利用斯托克斯公式, 并注意到

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) &= - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{r} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) = - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) &= - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned}$$

及 $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$, 从而

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial y} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right), \end{aligned}$$

即得

$$H_x = ki \oint_C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) d\zeta - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) d\eta$$

$$\begin{aligned}
&= ki \iint_S \left[\left(\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{1}{r} + \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \right) \vec{i} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \vec{j} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{r} \vec{k} \right] \cdot \vec{n} ds \\
&= ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \vec{k} \right] \cdot \vec{n} dS \\
&= ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\vec{r} \cdot \vec{n}}{r^2} dS = ki \frac{\partial}{\partial x} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS.
\end{aligned}$$

同理,

$$H_y = ki \frac{\partial}{\partial y} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS,$$

$$H_z = ki \frac{\partial}{\partial z} \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS.$$

于是,最后得

$$\vec{H} = \frac{\partial W}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial W}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial W}{\partial z} \vec{k},$$

即函数 $W(x, y, z)$ 是磁场 \vec{H} 的位势.

§ 16. 奥斯特洛格拉德斯基公式

若 S 为包含体积 V 的逐片光滑曲面, $P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$ 和它们的一阶偏导函数均为域 $V + S$ 内的连续函数, 则奥斯特洛格拉德斯基公式真确:

$$\iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz,$$

式中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

应用奥斯特洛格拉德斯基公式以变换下列曲面积分, 设光滑的曲

面 S 包围着有界的体积 V , $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

$$4376. \iint_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy.$$

解 由于 $P = x^3, Q = y^3, R = z^3$. 从而

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iint_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy \\ &= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz. \end{aligned}$$

$$4377. \iint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz.$$

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0,$$

故得

$$\begin{aligned} & \iint_S xy dx dy + xz dx dz + yz dy dz \\ &= \iiint_V 0 dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

$$4378. \iint_S \frac{x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS.$$

解 由于

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad Q = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$R = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

从而

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

于是,

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS \\ &= 2 \iiint_V \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned}$$

$$4379. \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS.$$

解 由于

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u,$$

故得

$$\begin{aligned} & \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \Delta u dx dy dz. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4380. \iint_S & \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] dS. \end{aligned}$$

解 记

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, & Q^* &= \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \\ R^* &= \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}, \end{aligned}$$

则易知:

$$\frac{\partial P^*}{\partial x} + \frac{\partial Q^*}{\partial y} + \frac{\partial R^*}{\partial z} = 0.$$

于是,原面积分等于零.

4381. 证明:若 S 为封闭的简单曲面而 \vec{l} 为任何的固定方向,则

$$\iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l}) dS = 0,$$

式中 \vec{n} 为曲面 S 的外法线.

证 因为

$$\cos(\vec{n}, \vec{l}) = \cos\alpha \cos(\vec{l}, x) + \cos\beta \cos(\vec{l}, y) + \cos\gamma \cos(\vec{l}, z),$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 \vec{n} 的方向余弦,故有

$$\begin{aligned} \iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l}) dS &= \iint_S \cos(\vec{l}, x) dydz \\ &+ \cos(\vec{l}, y) dxdz + \cos(\vec{l}, z) dxdy. \end{aligned}$$

由于 \vec{l} 为固定方向,从而 $\cos(\vec{l}, x), \cos(\vec{l}, y), \cos(\vec{l}, z)$ 均为常数.于是,

$$\begin{aligned} \iint_S \cos(\vec{n}, \vec{l}) dS &= \iiint_V \left(\frac{\partial \cos(\vec{l}, x)}{\partial x} \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \cos(\vec{l}, y)}{\partial y} + \frac{\partial \cos(\vec{l}, z)}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= \iiint_V 0 dxdydz = 0. \end{aligned}$$

4382. 证明:由曲面 S 所包围的体积等于

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS,$$

式中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为曲面 S 的外法线的方向余弦.

证 由奥氏公式,有

$$\begin{aligned}
& \iint_C (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\
&= \int_S x dy dz + y dz dx + z dx dy \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) dx dy dz \\
&= \iiint_V 3 dx dy dz = 3V,
\end{aligned}$$

由此可知

$$V = \frac{1}{3} \iint_C (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS.$$

证毕.

4383. 证明, 由平滑的圆锥曲面 $F(x, y, z) = 0$ 和平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 所包围的锥体体积等于

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

式中 S 为位于已知平面上的锥底之面积, H 为锥的高.

证 方法一:

不失一般性, 设坐标原点位于圆锥曲面 $F(x, y, z) = 0$ 的顶点. 于是 $F(x, y, z)$ 是 x, y, z 的二次齐次函数. 因此, 根据尤拉定理知

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} + z \frac{\partial F}{\partial z} = 2F(x, y, z) \quad (1)$$

由 4382 题的结果, 有

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} \iint_{S+S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\
&= \frac{1}{3} \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{3} \iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (2)$$

其中 S 为锥底(位于平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上), 而 S_1 是圆锥的侧面. 在锥面 S_1 (即 $F(x, y, z) = 0$) 上, 有

$$\cos \alpha = \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}},$$

$$\cos \beta = \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}.$$

于是, 注意到(1)式, 即知在 S_1 上有

$$\begin{aligned} & x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma \\ &= \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} \\ &= \frac{2F(x, y, z)}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} = 0, \end{aligned}$$

从而

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 0. \quad (3)$$

又在平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 上, 有

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \vec{r} \cdot \vec{n} = H,$$

其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 是从原点 $(0, 0, 0)$ 到点 (x, y, z) 的矢径, \vec{n} 为平面(锥底)的外法线单位向量, H 为从原点到平面的距离(即锥的高). 于是,

$$\begin{aligned} & \iint_S (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= H \iint_S dS = HS. \end{aligned}$$

由此,再注意到(2)式与(3)式,即得 $V = \frac{1}{3}SH$.

方法二:

取坐标系 $Ox'y'z'$, 使圆锥的顶点在坐标原点, $Ox'y'$ 平面平行于圆锥的底面, 由于在 z 处的圆锥的截面面积

$$S(z) = \frac{S z'^2}{H^2}$$

故所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_0^H S(z') dz' \\ &= \int_0^H \frac{S}{H^2} z' dz' = \frac{1}{3}SH. \end{aligned}$$

4384. 求由曲面: $z = \pm c$ 及

$$x = a \cos u \cos v + b \sin u \sin v,$$

$$y = a \cos u \sin v - b \sin u \cos v,$$

$$z = c \sin u$$

所界物体的体积.

解 方法一:

我们有

$$x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u, \quad (1)$$

以 $z = c \sin u$ 代入得

$$x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2 = a^2 \quad (2)$$

故所界物体由平面 $z = c, z = -c$ 及曲面(2)围成. 利用

4382 题的结果,即知所求的体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 + S_2 + S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (3)$$

其中 S_1, S_2 分别是平面 $z = c, z = -c$ 上的部分(此时 $u = \frac{\pi}{2}, u = -\frac{\pi}{2}$, 从而 $x^2 + y^2 = b^2$, 故 S_1, S_2 为圆盘 $x^2 + y^2 \leq b^2$), S_3 表曲面(2)的部分, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 表外法线的方向余弦. 显然, 在 S_1 上, $\cos \alpha = \cos \beta = 0, \cos \gamma = \frac{c}{|c|}$. 于是,

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS &= \iint_{S_1} \frac{c^2}{|c|} dS \\ &= |c| \pi b^2. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = |c| \pi b^2.$$

此外

$$\begin{aligned} &\iint_{S_3} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{S_3} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \pm \int_0^{2\pi} d\nu \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(a \cos u \cos \nu + b \sin u \sin \nu) \\ &\quad \cdot (y'_\nu z'_\nu - y'_\nu z'_\nu) \\ &\quad - (a \cos u \sin \nu - b \sin u \cos \nu) (z'_\nu x'_\nu - z'_\nu x'_\nu) \\ &\quad + c \sin u (x'_\nu y'_\nu - x'_\nu y'_\nu)] du \end{aligned}$$

$$- \pm \int_0^{2\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ca^2 \cos u du = \pm 4\pi ca^2, \quad (4)$$

其中的正负号应这样选取,使对应于 S_3 的外侧. 下面确定此正负号. 由(2), S_3 的方程可写为 $F(x, y, z) = a^2$, 其中 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{a^2 - b^2}{c^2} z^2$ 是二次齐次函数. 于是, 在 S_3 上, 有

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{F'_x}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}, \\ \cos\beta &= \frac{F'_y}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}, \\ \cos\gamma &= \frac{F'_z}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}, \end{aligned}$$

其中正号对应于 S_3 的一侧, 负号对应于 S_3 的另一侧. 于是, 根据齐次函数的尤拉定理, 在 S_3 (外侧) 上有

$$\begin{aligned} & x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma \\ &= \frac{x F'_x + y F'_y + z F'_z}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} \\ &= \frac{2F}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}} \\ &= \frac{2a^2}{\pm \sqrt{F_x'^2 + F_y'^2 + F_z'^2}}. \end{aligned} \quad (5)$$

但在 S_3 与 Oxy 平面的交线(即 $x^2 + y^2 = a^2, z = 0$) 的各点上, 对 S_3 的外侧, 显然有(注意到曲面(2)关于 Oxy 坐标平面对称)

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \vec{r} \cdot \vec{n} > 0,$$

(这是因为此时向径 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ 与外法线单位向量 \vec{n} 的方向一致), 由此可知, 在(5)式中应取正号, 于是

$$\begin{aligned} & \iint_{S_3} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS \\ &= \iint_{S_3} \frac{2a^2}{\sqrt{F'_x{}^2 + F'_y{}^2 + F'_z{}^2}} dS > 0. \end{aligned}$$

从而, 由(4)式知

$$\iint_{S_3} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) dS = 4\pi|c|a^2.$$

综上所述, 最后得(注意(3)式)

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} (4\pi|c|a^2 + |c|\pi b^2 + |c|\pi b^2) \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|. \end{aligned}$$

方法二:

不用面积分求体积的公式(3), 而直接计算体积较为简单. 由(1)式知, 平面 $z = \text{常数}$ (即 $u = \text{常数}$) 与曲面(2)的截面 $S(z)$ 是圆, 故所求的体积为

$$\begin{aligned} V &= \int_{-c}^c dz \iint_{S(z)} dx dy = \int_{-c}^c S(z) dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \pi (a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u) |c| d(\sin u) \\ &= |c| \pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [a^2 + (b^2 - a^2) \sin^2 u] d(\sin u) \\ &= \pi |c| \left[2a^2 + \frac{2}{3} (b^2 - a^2) \right] \\ &= \frac{4\pi}{3} \left(a^2 + \frac{b^2}{2} \right) |c|. \end{aligned}$$

4385. 求由曲面

$$x = u \cos v, y = u \sin v, z = -u + a \cos v \quad (u \geq 0)$$

及平面 $x = 0, z = 0 (a > 0)$ 所界物体的体积.

解 方法一:

用 S_1 表物体表面位于平面 $z = 0$ 上的那一部分, S_2 为物体表面由所给参数方程给出的曲面上那一部分, 此外, 物体表面在平面 $x = 0$ 上的那部分显然是一线段 $x = 0, y = 0, 0 \leq z \leq a$. 于是, 利用 4382 题的结果, 即知所求体积为

$$V = \frac{1}{3} \iint_{S_1 + S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS, \quad (1)$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是向外法线的方向余弦. 显然, 在 S_1 上, $\cos \alpha = 0, \cos \beta = 0, \cos \gamma = -1, z = 0$, 故

$$\iint_{S_1} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS = 0. \quad (2)$$

另外, 我们有

$$\begin{aligned} & \iint_{S_2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS \\ &= \iint_{S_2} x dy dz + y dz dx + z dx dy \\ &= \pm \iint_D [-u \cos v (y'_u z'_v - y'_v z'_u) \\ & \quad + u \sin v (z'_u x'_v - z'_v x'_u) \\ & \quad + (-u + a \cos v) (x'_u y'_v - x'_v y'_u)] du dv \\ &= \pm \iint_D [u \cos v (u \cos v - a \sin^2 v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u \sin v (a \sin v \cos v + u \sin v) \\
& + (-u + a \cos v) u] du dv \\
= & \pm \iint_D a u \cos v du dv = \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} a u \cos v du \\
= & \pm \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} a^3 \cos^3 v \right) dv = \pm \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 (1 - \sin^2 v) d(\sin v) \\
= & \pm a^3 \left(\sin v - \frac{\sin^3 v}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pm \frac{2}{3} a^3,
\end{aligned}$$

其中的正负号应这样选取,使对应于 S_2 的外侧, D 为 u, v 的变化区域(对应于 S_2). 由此,再注意到(1)式与(2)

式,即得 $V = \pm \frac{2}{9} a^3$. 但体积恒为正($V > 0$)故必有 $V = \frac{2}{9} a^3$.

方法二:

本题若不利用面积分计算体积的公式(1),而直接计算体积,则较为简单(下面 Ω 表物体在 Oxy 平面上的投影):

$$\begin{aligned}
V &= \iint_{\Omega} z dx dy = \iint_D (-u + a \cos v) \\
&\cdot \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv \\
&= \iint_D (-u + a \cos v) u du dv \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dv \int_0^{a \cos v} (-u + a \cos v) u du \\
&= \frac{a^3}{6} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 v dv
\end{aligned}$$

$$= \frac{a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 v) d(\sin v) = \frac{2}{9} a^3.$$

4386. 证明公式

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS \\ &+ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0). \end{aligned}$$

证 证法一

作变量代换 $x = tu, y = tv, z = tw$ ($t > 0$ 固定), 则
(利用奥氏公式)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 f(tu, tv, tw, t) du dv d\omega \right\} \\ &= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} \left[t^3 \left(\frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w \right) \right. \\ &+ \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right] + 3t^2 f \Big] du dv d\omega \\ &= \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \left\{ \frac{1}{t} \left[\frac{\partial}{\partial x} (fx) + \frac{\partial}{\partial y} (fy) \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial}{\partial z} (fz) \right] \right\} du dv d\omega \\ &+ \iiint_{u^2+v^2+w^2 \leq 1} t^3 \frac{\partial f}{\partial t} du dv d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{t} \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \left(\frac{\partial}{\partial x}(fx) + \frac{\partial}{\partial y}(fy) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}(fz) \right) dx dy dz \\
&\quad + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz \\
&= \frac{1}{t} \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta \\
&\quad + fz \cos \gamma) dS \\
&\quad + \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial x} dx dy dz \quad (t > 0).
\end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$ 上向外法线的方向余弦. 显然

$$\cos \alpha = \frac{x}{t}, \cos \beta = \frac{y}{t}, \cos \gamma = \frac{z}{t},$$

故

$$\begin{aligned}
&\iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} (fx \cos \alpha + fy \cos \beta + fz \cos \gamma) dS \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{t} dS \\
&= t \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f dS.
\end{aligned}$$

于是, 最后得

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\
&= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f dS
\end{aligned}$$

$$+ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz \quad (t > 0).$$

证法二

不利用奥氏公式更简单些. 采用球坐标, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x, y, z, t) dx dy dz \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t \left[\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. r \sin \psi, t) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi \right] dr \right\} \\ &= \int_0^t \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t \cos \varphi \cos \psi, t \sin \varphi \cos \psi, \\ & \quad t \sin \psi, t) t^2 \cos \psi d\psi d\varphi \\ & \quad + \int_t^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial t} f(r \cos \varphi \cos \psi, r \sin \varphi \cos \psi, \\ & \quad r \sin \psi, t) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \\ &= \iint_{x^2+y^2+z^2=t^2} f(x, y, z, t) dS \\ & \quad + \iiint_{x^2+y^2+z^2 < t^2} \frac{\partial f}{\partial t} dx dy dz. \end{aligned}$$

利用奥斯特洛格拉德斯基公式计算下列面积分:

4387. $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$, 式中 S 为立方体 $0 < x$

$< a, 0 < y < a, 0 < z < a$ 的边界的外表面.

解 $\iint_S x^2 dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$

$$= 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a (x + y + z) dz \\
&= 6 \int_0^a dx \int_0^a dy \int_0^a z dz = 3a^4.
\end{aligned}$$

4388. $\iint_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$, 式中 S 为球 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的外表面.

解 $\iint_S x^3 dydz + y^3 dx dz + z^3 dx dy$

$$= 3 \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^a r^4 \cos\psi dr$$

$$= 6\pi \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi \right] \left(\int_0^a r^4 dr \right) = \frac{12}{5} \pi a^5.$$

4389. $\iint_S (x - y + z) dydz + (y - z + x) dx dz + (z - x + y) \cdot dx dy$, 式中 S 为曲面

$|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ 的外表面.

解 $\iint_S (x - y + z) dydz + (y - z + x) dx dz$

$$+ (z - x + y) dx dy$$

$$= \iiint_V 3 dx dy dz,$$

其中 V 为由曲面 $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$ 围成的体积. 作变换

$$u = x - y + z, v = y - z + x, w = z - x + y,$$

则

$$\frac{D(u, v, \omega)}{D(x, y, z)} = 4,$$

且由 $|u| + |v| + |\omega| = 1$ 围成的体积等于 $\frac{4}{3}$. 于是, 所求的积分

$$\begin{aligned} & \iint_S (x - y + z) dy dz + (y - z + x) dx dz \\ & + (z - x + y) dx dy \\ & = \iiint_{|u|+|v|+|\omega|\leq 1} 3 \cdot \frac{1}{4} du dv d\omega \\ & = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1. \end{aligned}$$

*) 由 $|u| + |v| + |\omega| = 1$ 围成的体积是对称于坐标原点的正八面体的体积, 其大小等于由平面 $u + v + \omega = 1, u = 1, v = 0, \omega = 0$ 所围成的四面体体积的 8 倍, 即为 $8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{4}{3}$.

4390. 计算

$$\iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS,$$

式中 S 为圆锥曲面 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \leq z \leq h)$ 的一部分, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为此曲面外法线的方向余弦.

解 并合平面 $S_1: z = h, x^2 + y^2 \leq h^2$ 的部分得一立体 V , 则(利用奥氏公式)

$$\begin{aligned} & \iint_{S+S_1} (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS \\ & = 2 \iiint_V (x + y + z) dx dy dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h r dr \int_0^h [r(\cos\varphi + \sin\varphi) + z] dz \\
&= 2\pi \int_0^h (rh^2 - r^3) dr = \frac{\pi h^4}{2}.
\end{aligned}$$

又因

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_1} (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) dS \\
&= h^2 \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} dx dy = \pi h^4,
\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}
&\iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma) dS \\
&= \frac{\pi h^4}{2} - \pi h^4 = -\frac{\pi h^4}{2}.
\end{aligned}$$

4391. 证明公式

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS,$$

其中 S 为包围体积 V 的封闭曲面, \vec{n} 为封闭曲面 S 上的动点 (ξ, η, ζ) 处的外法线, 而

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

\vec{r} 为从点 (x, y, z) 到点 (ξ, η, ζ) 的矢径.

证 先设曲面 S 不包围点 (x, y, z) (即点 (x, y, z) 在 V 之外), 我们有

$$\begin{aligned}
\cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \cos(\vec{r}, x) \cos\alpha + \cos(\vec{r}, y) \cos\beta \\
&\quad + \cos(\vec{r}, z) \cos\gamma,
\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 为 \vec{n} 的方向余弦. 由于

$$\cos(\vec{r}, x) = \frac{\xi - x}{r}, \quad \cos(\vec{r}, y) = \frac{\eta - y}{r},$$

$$\cos(\vec{r}, z) = \frac{\zeta - z}{r},$$

故

$$\begin{aligned} \cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \frac{\xi - x}{r} \cos\alpha + \frac{\eta - y}{r} \\ &\cdot \cos\beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos\gamma. \end{aligned}$$

于是,利用奥氏公式,得

$$\begin{aligned} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS &= \iint_S \left(\frac{\xi - x}{r} \cos\alpha + \frac{\eta - y}{r} \right. \\ &\left. \cdot \cos\beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos\gamma \right) dS \\ &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - y}{r} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta - z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta \\ &= \iiint_V \frac{2}{r} d\xi d\eta d\zeta, \end{aligned}$$

故

$$\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS.$$

次设曲面 S 包围点 (x, y, z) . 这时,不能对 V 应用奥氏公式,必须用一小区域将点 (x, y, z) 挖掉,即以点 (x, y, z) 为中心, ϵ 为半径作一开球域 V_ϵ (ϵ 充分小),其边界(球面)以 S_ϵ 表示. 对闭域 $V - V_\epsilon$ 应用奥氏公式,仿上可得

$$\iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS + \iint_{S_\epsilon} \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_{V-V_\epsilon} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi - x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\eta - y}{r} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta - z}{r} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta \\
&= 2 \iiint_{V-V_\epsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r}.
\end{aligned}$$

但在 S_ϵ 上, \vec{n} 的方向与 \vec{r} 的方向相反, 故 $\cos(\vec{r}, \vec{n}) = -1$. 于是,

$$\iint_{S_\epsilon} \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS = -4\pi\epsilon^2.$$

由此可知, 在前式中令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限, 即得

$$\begin{aligned}
\iiint_V \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iiint_{V-V_\epsilon} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r} \\
&= \frac{1}{2} \iint_S \cos(\vec{r}, \vec{n}) dS.
\end{aligned}$$

证毕.

4392. 计算高斯积分

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS,$$

式中 S 为包含体积 V 的简单封闭平滑曲面, \vec{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 处的外法线, \vec{r} 为连接点 (x, y, z) 和点 (ξ, η, ζ) 的矢径,

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}.$$

研究两种情形: (a) 当曲面 S 不包围点 (x, y, z) ; (b) 当曲面 S 包围点 (x, y, z) .

解 设法线 \vec{n} 的方向余弦为 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, 则

$$\begin{aligned} \cos(\vec{r}, \vec{n}) &= \cos(\vec{r}, x)\cos\alpha + \cos(\vec{r}, y)\cos\beta \\ &+ \cos(\vec{r}, z)\cos\gamma \\ &= \frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r}\cos\gamma. \end{aligned}$$

因此, 高斯积分

$$\begin{aligned} I(x, y, z) &= \iint_S \frac{\xi - x}{r^3} d\eta d\zeta \\ &+ \frac{\eta - y}{r^3} d\zeta d\xi + \frac{\zeta - z}{r^3} d\xi d\eta, \end{aligned}$$

这里 $P = \frac{\xi - x}{r^3}$, $Q = \frac{\eta - y}{r^3}$, $R = \frac{\zeta - z}{r^3}$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3(\xi - x)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial Q}{\partial \eta} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3(\eta - y)^2}{r^5}, \\ \frac{\partial R}{\partial \zeta} &= \frac{1}{r^3} - \frac{3(\zeta - z)^2}{r^5} \end{aligned}$$

它们仅在点 (x, y, z) 处不连续. 因此

(a) 当曲面 S 不包围点 (x, y, z) 时, 则

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} + \frac{\partial Q}{\partial \eta} + \frac{\partial R}{\partial \zeta} = 0.$$

于是, 利用奥氏公式有

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = 0.$$

(b) 当曲面 S 包围点 (x, y, z) 时, 则我们以点 (x, y, z) 为中心, ϵ 为半径作一球 V_ϵ 包围在 S 内, 此球面记以 S_ϵ . 将奥氏公式用于 $V - V_\epsilon$ 上,

即得

$$\iint_{S+S_\epsilon} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = 0.$$

但因

$$\iint_{S_\epsilon} \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = \iint_{S_\epsilon} \left(-\frac{1}{\epsilon^2} \right) dS = -4\pi,$$

故得

$$I(x, y, z) = \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS = 4\pi.$$

4393. 证明: 若

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

及 S 为包围有界体积 V 的光滑曲面, 则下列公式正确:

$$(a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz;$$

$$(b) \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS \\ - \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ + \iiint_V u \Delta u dx dy dz,$$

式中 u 和它的直到二阶的偏导函数是在域 $V + S$ 内连续的函数, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为沿曲面 S 的外法线的导函数.

证 由于

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma,$$

因此, 利用奥氏公式即得

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \right. \\ \left. + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS$$

$$\begin{aligned}
 &= \iiint_V \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) dx dy dz \\
 &= \iiint_V \Delta u dx dy dz.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iint_S \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha \right. \\
 &\quad \left. + u \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + u \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\
 &= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\
 &= \iiint_V u \Delta u dx dy dz + \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz.
 \end{aligned}$$

4394. 证明空间的格林第二公式

$$\iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz = \iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS,$$

式中体积 V 是由曲面 S 所包围的, \vec{n} 是曲面 S 的外法线方向, 而函数 $u = u(x, y, z), v = v(x, y, z)$ 为域 $V + S$ 内可微分两次的函数.

$$\begin{aligned}
 \text{证} \quad &\iint_S \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} dS \\
 &= \iint_S \left[\left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \alpha + \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cos \beta \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cos \gamma \Big] dS \\
= & \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] dx dy dz \\
= & \iiint_V \left[v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right. \\
& \left. - u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \right] dx dy dz \\
= & \iiint_V \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy dz.
\end{aligned}$$

4395. 函数 $u = u(x, y, z)$ 在某一域内具有直到二阶的连续导函数, 若

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

则 $u(x, y, z)$ 在这个域内称为调和函数.

证明: 若 u 是被平滑曲面 S 所包围的有界闭域 V 内的调和函数, 则下列公式是正确的.

$$(a) \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0;$$

$$\begin{aligned}
(b) \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\
= \iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS,
\end{aligned}$$

式中 \vec{n} 为曲面 S 的外法线.

试用公式 (b), 证明在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定.

证 (a) 由于 $\Delta u = 0$, 故利用 4393 题(a) 的结果, 即得

$$\int_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V 0 dx dy dz = 0.$$

(6) 利用 4393 题(σ) 的结果, 即得

$$\begin{aligned} \int_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS &= \iiint_V u \cdot 0 dx dy dz \\ &+ \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz \\ &= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz. \end{aligned}$$

与 4333 题一样, 只要证明: 若在界限 S 上调和函数 $u = 0$, 则它在域 V 上也恒有 $u = 0$. 事实上, 利用本题 (6), 得

$$\iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz = 0.$$

因此,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial u}{\partial y} \equiv \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0,$$

即在域 V 上 $u \equiv$ 常数. 但在 S 上 $u = 0$, 故在域 V 上 $u = 0$. 这就是证明: 在域 V 内的调和函数由它在界限 S 上的值唯一地确定.

4396. 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 是在由光滑曲面 S 所包围着的有界闭域 V 内的调和函数, 则

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[u \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right] dS,$$

式中 \vec{r} 是从域 V 的内面的点 (x, y, z) 引至曲面 S 上的动点 (ξ, η, ζ) 的矢径, 而

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2},$$

\vec{n} 为曲面 S 上在点 (ξ, η, ζ) 的外法线向量.

证 在 4394 题中令 $v = \frac{1}{r}$, 则当 $(\xi, \eta, \zeta) \neq (x, y, z)$ 时, 有 $\Delta v = 0$. 现以点 $P(x, y, z)$ 为中心, ρ 为半径作一球面 S_ρ 含于曲面 S 内, 再将 4394 题应用到由曲面 $S + S_\rho$ 所包围的体积 V 内, 即得

$$\iint_{S+S_\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS = 0,$$

或

$$\begin{aligned} & \iint_{S+S_\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS \\ &= - \iint_{S_\rho} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS. \end{aligned}$$

显然, S 上的法线是向外的, 而 S_ρ 上的法线是指向球心的, 即指向半径减少一方. 因此,

$$\frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} = - \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} \Big|_{r=\rho} = \frac{1}{\rho^2}.$$

于是, 我们有

$$\iint_{S_\rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{u}{\rho^2} \right) dS = - \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS.$$

但

$$\iint_{S_\rho} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = \frac{1}{\rho} \iint_{S_\rho} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0,$$

又利用中值定理,得

$$\begin{aligned} \iint_{S_\rho} \frac{u}{\rho^2} dS &= \frac{1}{\rho^2} u(x', y', z') \cdot 4\pi\rho^2 \\ &= 4\pi u(x', y', z'), \end{aligned}$$

其中 $u(x', y', z')$ 为函数 u 在球面 S_ρ 上某点之值. 从而

$$u(x', y', z') = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS.$$

上式右端与 ρ 无关. 而 $\lim_{\rho \rightarrow +0} u(x', y', z') = u(x, y, z)$.

因而,令 $\rho \rightarrow +0$, 即得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} \right] dS.$$

又由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial n} &= \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \cos\alpha \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial r}{\partial \eta} \cos\beta + \frac{\partial r}{\partial \zeta} \cos\gamma \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \cos\alpha + \frac{\eta - y}{r} \cos\beta + \frac{\zeta - z}{r} \cos\gamma \right) \\ &= -\frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2}. \end{aligned}$$

故最后得

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{u \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS.$$

4397. 证明,若 $u = u(x, y, z)$ 为在以 R 为半径,以点 (x_0, y_0, z_0) 为球心的球 S 内的调和函数,则

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u(x, y, z) dS$$

(中值定理).

证 在球 S 上应用 4396 题的结果, 即得

$$\begin{aligned} u(x_0, y_0, z_0) &= \iint_S \left(\frac{u \cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{u}{R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS \\ &= \frac{1}{4\pi R^2} \int_S u(x, y, z) dS^*, \end{aligned}$$

*) 利用 4395 题的结果, 有

$$\frac{1}{4\pi R} \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0.$$

4398. 证明, 在有界闭域 V 内连续且在其内部是调和的函数 $u = u(x, y, z)$, 若它不是常数, 则在域内的点函数不能达到最大和最小的值(极大值原则).

证 证明与 4337 题(平面情形)完全类似. 设有界闭域为 $\bar{\Omega}$, 它是由有界开域 Ω 及其边界 $\partial\Omega$ 构成. 我们要证明: 如果 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 的某内点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 达到其最大值或最小值(例如, 设达到最大值), 则 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上必为常数, 下分三步证明:

(1) 先证: 若球域 $V_\rho = \{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \rho^2\}$ 完全属于 Ω , 则 $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上必为常数.

对任何的 $0 < r \leq \rho$, 用 S_r 表球面 $\{(x, y, z) | (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$. 由 4397 题的结果知

$$u(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} u(x, y, z) dS,$$

故

$$\frac{1}{4\pi r^2} \iint_{S_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS = 0, \quad (1)$$

但因 $u(x_0, y_0, z_0)$ 是最大值, 故在 S_r 上恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq 0.$$

由此, 根据(1), 即易知在 S_r 上 $u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0$. 因为, 若有某点 $(x_1, y_1, z_1) \in S_r$ 使

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x_1, y_1, z_1) = \tau > 0,$$

则由 $u(x, y, z)$ 的连续性知, 必有以 (x_1, y_1, z_1) 为中心的某小球域 σ 存在, 使当 $(x, y, z) \in \sigma$ 时, 恒有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \geq \frac{\tau}{2}.$$

用 S' 表 S_r 含于 σ 内的部分, 则

$$\begin{aligned} & \iint_{S_r} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS \\ & \geq \iint_{S'} [u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z)] dS \\ & \geq \iint_{S'} \frac{\tau}{2} dS = \frac{1}{2} \tau D_r > 0, \end{aligned}$$

其中 D_r 表 S' 的面积, 此显然与(1)式矛盾. 于是, 在 S_r 上有

$$u(x_0, y_0, z_0) - u(x, y, z) \equiv 0.$$

再根据 r 的任意性 ($0 < r \leq \rho$), 即知对任何 $(x, y, z) \in V_\rho$, 都有 $u(x, y, z) = u(x_0, y_0, z_0)$; 换句话说, $u(x, y, z)$ 在 V_ρ 上是常数.

(2) 次证: 设 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 为 $\bar{\Omega}$ 的任一内点 (即 $P^* \in \Omega$), 则必有

$$u(x^*, y^*, z^*) = u(x_0, y_0, z_0).$$

用完全含于 Ω 内的折线 l 将点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 与点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 连接起来, 用 δ 表 $\partial\Omega$ 与 l 之间的距离, 即

$$\delta = \min \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

其中的 \min 是对一切 $(x, y, z) \in \partial\Omega, (x', y', z') \in l$ 来取的 (由于 $\partial\Omega, l$ 是互不相交的有界闭集, 可证 \min 一定能达到, 从而 $\delta > 0$). 取 $0 < \delta' < \delta$. 以点 P_0 为中心, δ' 为半径作一球, 得球域 $V_0 = \{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq \delta'^2\}$. 此球域完全含于 Ω 内, 则 (1) 段已证的结果知, $u(x, y, z)$ 在 V_0 中为常数. 特别是 $u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0)$. 这里点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 代表球面 $S_0 = \{(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \delta'^2\}$ 与折线 l 的交点 (参看 4337 题的图). 又以点 P_1 为中心, δ' 为半径作一球, 得球域 $V_1 = \{(x, y, z) \mid (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \leq \delta'^2\}$. 于是, V_1 也完全含于 Ω 内. 由于 $u(x, y, z)$ 也在点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 达到最大值, 故将 (1) 段的结果用于 V_1 , 可知 $u(x, y, z)$ 在 V_1 上是常数. 特别是 $u(x_2, y_2, z_2) = u(x_1, y_1, z_1)$. 这里点 $P_2(x_2, y_2, z_2)$ 为球面 $S_1 = \{(x, y, z) \mid (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \delta'^2\}$ 与 l 的交点 (除 P_0 外的另一交点). 再以点 P_2 为中心, δ' 为半径作一球域 V_2, \dots 这样继续作下去. 显然, 至多经过 n 次 (n 为大于 $\frac{S}{\delta'}$ 的最小正

整数, s 表折线 l 的长), 点 $P^*(x^*, y^*, z^*)$ 必属于 V_{n-1} . 从而

$$\begin{aligned} u(x^*, y^*, z^*) &= u(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}) = \cdots \\ &= u(x_1, y_1, z_1) = u(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

(3) 由(2)段的结果知, $u(x, y, z)$ 在 Ω 上是常数, 根据 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上的连续性, 通过由 Ω 的点趋向 $\partial\Omega$ 的点取极限, 即知 $u(x, y, z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上是常数. 证毕.

注: 从证明过程中看出, 需假定区域 Ω (从而 $\bar{\Omega}$) 是连通的. 事实上, 若 Ω 不连通, 则结论不一定成立. 例如, 设 $\bar{\Omega} = V_1 + V_2$, 其中 V_1 与 V_2 是两个互无公共点的闭球域, 而令

$$u(x, y, z) = \begin{cases} C_1, & (x, y, z) \in V_1, \\ C_2, & (x, y, z) \in V_2, \end{cases}$$

其中 $C_1 \neq C_2$ 是两个常数, 则 $u(x, y, z)$ 显然是 $\bar{\Omega}$ 上的调和函数且在 Ω 上不是常数, 但它却在其内点达到最大值与最小值.

4399. 物体 V 全部浸溺于液体中, 从巴斯葛耳定律出发, 证明液体的浮力等于物体同体积液体之重而方向垂直向上 (阿基米德定律).

证 将 Oxy 坐标面取在液面上, 而 Oz 轴垂直液面向下. 设液体比重为 ρ , 浸入液体的物体 V 的表面积为 S . 若对应于面积元素 dS 液体的深度为 z , 则在 dS 上所受的壓力为 $\rho z dS$. 由于此压力总是垂直于 dS 面的, 故压力在各坐标轴上的射影为

$$-\rho z \cos\alpha dS, \quad -\rho z \cos\beta dS, \quad -\rho z \cos\gamma dS.$$

利用奥氏公式, 即得作用于物体整个表面的总压力在各

坐标轴上的射影

$$P_x = -\rho \int_S z \cos \alpha dS = -\rho \int_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_y = -\rho \int_S z \cos \beta dS = -\rho \int_V 0 dx dy dz = 0,$$

$$P_z = -\rho \int_S z \cos \gamma dS = -\rho \int_V dx dy dz = -\rho V.$$

因此,压力的主向量即合力,朝着垂直向上的方向,其大小等于被物体排出的液体的重量.这就是阿基米德定律.

4400. 设 S_t 是变动的球 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = t^2$, 而函数 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 是连续的, 证明函数

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t$$

满足波动方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

和初值条件 $u|_{t=0} = 0, \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z)$.

证 首先指出, 本题应设 $f(\xi, \eta, \zeta)$ 具有连续的二阶偏导函数. 先验证函数 u 满足初值条件 $u|_{t=0} = 0$ (意即 $\lim_{t \rightarrow +0} u = 0$) 及 $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = f(x, y, z)$ (意即 $\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z)$). 今固定 (x, y, z) . 由连续性知, 存在常数 $M > 0$, 使当 $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 \leq 1$ 时恒有

$$\begin{aligned} |f(\xi, \eta, \zeta)| &\leq M, |f'_\xi(\xi, \eta, \zeta)| \leq M, \\ |f'_\eta(\xi, \eta, \zeta)| &\leq M, |f'_\zeta(\xi, \eta, \zeta)| \leq M. \end{aligned}$$

当 $0 < t < 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
|u(x, y, z, t)| &\leq \frac{1}{4\pi t} \iint_{S_t} |f(\xi, \eta, \zeta)| dS_t \\
&\leq \frac{1}{4\pi t} \iint_S M dS_t = \frac{1}{4\pi t} \cdot M4\pi t^2 \\
&= Mt,
\end{aligned}$$

由此可知, $\lim_{t \rightarrow +0} u(x, y, z, t) = 0$.

又作变量代换 $\xi = x + ut, \eta = y + vt, \zeta = z + wt$, 则有

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) \\
&\quad \cdot t dS, \tag{1}
\end{aligned}$$

其中 S 是单位球面 $u^2 + v^2 + w^2 = 1$. 于是,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS \\
&= \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} u + \frac{\partial f}{\partial \eta} v + \frac{\partial f}{\partial \zeta} w \right) t dS \\
&\quad + \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) dS \\
&= I_1 + I_2. \tag{2}
\end{aligned}$$

显然, 当 $0 < t < 1$ 时,

$$|I_1| \leq \frac{t}{4\pi} \iint_S 3M dS = 3Mt,$$

故 $\lim_{t \rightarrow +0} I_1 = 0$, 又显然(由于连续性)

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow +0} I_2 &= \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x, y, z) dS \\
&= \frac{f(x, y, z)}{4\pi} \iint_S dS = f(x, y, z).
\end{aligned}$$

因此,得

$$\lim_{t \rightarrow +0} \frac{\partial u}{\partial t} = f(x, y, z).$$

下面再验证 u 满足波动方程. 由(2)式,利用奥氏公式,有(V 为球体 $u^2 + v^2 + \omega^2 \leq 1$, V_t 为球体 $u_1^2 + v_1^2 + \omega_1^2 \leq t^2$)

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{t}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma \right) dS \\ &= \frac{t^2}{4\pi} \iiint_{V_t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x + ut, y + vt, \\ &\quad z + \omega t) du dv d\omega \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x + u_1, y + v_1, \\ &\quad z + \omega_1) du_1 dv_1 d\omega_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \iiint_{V_t} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) f(x + u_1, y + v_1, \\ &\quad z + \omega_1) du_1 dv_1 d\omega_1 \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\iiint_{V_t} f(x + u_1, y + v_1, \right. \\ &\quad \left. z + \omega_1) du_1 dv_1 d\omega_1 \right) \\ &= \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, y \right. \\ &\quad \left. + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right) \\ &= \frac{I_3}{4\pi t}, \end{aligned}$$

其中 $\cos \alpha = u, \cos \beta = v, \cos \gamma = \omega$ 为 S 的外法线的方向余弦, 又由(2)式及(1)式,有

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{4\pi t} \iint_S f(x + ut, y + vt, z + wt) t dS \\
 &= \frac{u}{t},
 \end{aligned}$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t} \quad (t > 0).$$

于是,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \frac{\partial u}{\partial t} \\
 &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} - \frac{I_3}{4\pi t^2} - \frac{u}{t^2} + \frac{1}{t} \left(\frac{I_3}{4\pi t} + \frac{u}{t} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi t} \frac{\partial I_3}{\partial t} \quad (t > 0). \tag{3}
 \end{aligned}$$

但

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_3}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \Delta \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, \right. \\
 &\quad \left. y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right) \\
 &= \Delta \left[\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + r \cos \psi \cos \varphi, \right. \\
 &\quad \left. y + r \cos \psi \sin \varphi, z + r \sin \psi) r^2 \cos \psi d\psi d\varphi dr \right] \\
 &= \Delta \left[\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x + t \cos \psi \cos \varphi, \right. \\
 &\quad \left. y + t \cos \psi \sin \varphi, z + t \sin \psi) t^2 \cos \psi d\psi d\varphi \right] \\
 &= \Delta \left(\iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right)
 \end{aligned}$$

故

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi t} \Delta \left(\iint_{S_t} f(\xi, \eta, \zeta) dS_t \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \Delta \left(\frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{f(\xi, \eta, \zeta)}{t} dS_t \right) \\
&= \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (t > 0).
\end{aligned}$$

证毕.

§ 17. 场论初步

1° 梯度 若 $\vec{u}(r) = u(x, y, z)$ (其中 $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) 是连续可微分的数量场, 则称向量

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

为 $u(\vec{r})$ 的梯度, 或简记为 $\text{grad} u = \nabla u$, 其中 $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$.

于已知点 (x, y, z) 场 u 的梯度的方向是与过此点的等位面 $u(x, y, z) = C$ 的法线方向一致. 对于场的每一点此向量给出函数 u 变化之最大速度的大小

$$|\text{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$$

与方向.

在某方向 $\vec{l} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 上场 u 的导数等于

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \text{grad} u \cdot \vec{l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

2° 场的散度与场的旋度 若

$$\vec{a}(\vec{r}) = a_x(x, y, z) \vec{i} + a_y(x, y, z) \vec{j} + a_z(x, y, z) \vec{k}$$

是连续可微分的向量场, 则称数量

$$\text{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

为这个场的散度.

向量

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

名为场的旋度。

3° 穿过曲面的流量 若向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 在域 Ω 内产生向量场, 则称积分

$$\iint_S \vec{a} n dS = \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS$$

为穿过位于域 Ω 内的已知曲面 S 的流向法线上单位向量 $\vec{n} \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ 所指的那一面的流量。在向量的论述中 奥斯特洛格拉德斯基公式 具有下面的形状:

$$\iint_S \vec{a} n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dx dy dz,$$

式中 S 为包围体积 V 的曲面, \vec{n} 为曲面 S 的外法线单位向量。

4° 向量的环流 数

$$\int_C \vec{a} d\vec{r} = \int_C a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

称为向量 $\vec{a}(\vec{r})$ 沿某曲线 C 所取的线积分 (场作的功)。

若围线 C 是封闭的, 则称线积分为向量 \vec{a} 沿围线 C 的环流。

在向量的形式上 斯托克斯公式 为

$$\oint_C \vec{a} d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \operatorname{rot} \vec{a} dS,$$

式中 C 为包围曲面 S 的封闭围线, 并且对曲面 S 的法线 \vec{n} 之方向应当这样来选择: 使得立于曲面 S 上的观察者, 以头向着法线的方向, 围线 C 的回绕是依反时针前进的方向作成的 (对于右旋坐标系)。

5° 有势场 向量场 $\vec{a}(\vec{r})$ 是某数量 u 的梯度即 $\operatorname{grad} u = \vec{a}$, \vec{a} 名为有势场, 而数量 u 名为场的势。

若势 u 为单值函数, 则

$$\int_{AB} \vec{a} d\vec{r} = u(B) - u(A).$$

特别是, 在这个情形向量 \vec{a} 的环流等于零.

给定在单联通域内的场 \vec{a} 为有势场的充要条件, 是条件 $\text{rot} \vec{a} = \vec{0}$ 满足, 就是说, 这样的场应当是无旋场.

4401. 求场

$$u = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$

在: (a) $O(0, 0, 0)$; (b) $A(1, 1, 1)$; (B) $B(2, 1, 1)$ 诸点梯度的大小和方向. 在场的怎样的点, 梯度等于零?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + y + 3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 4y + x - 2$, $\frac{\partial u}{\partial z} = 6z - 6$.

(a) 在 O 点, 有

$$\text{grad} u = 3\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}, |\text{grad} u| = 7,$$

方向: $\cos \alpha = \frac{3}{7}$, $\cos \beta = -\frac{2}{7}$, $\cos \gamma = -\frac{6}{7}$;

(b) 在 A 点, 有

$$\text{grad} u = 6\vec{i} + 3\vec{j}, |\text{grad} u| = 3\sqrt{5},$$

方向: $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos \gamma = 0$;

(B) 在 B 点, 有

$$\text{grad} u = 7\vec{i}, |\text{grad} u| = 7,$$

方向: $\cos \alpha = 1$, $\cos \beta = \cos \gamma = 0$.

一般地说, 我们有

$$|\text{grad} u| = \sqrt{(2x + y + 3)^2 + (4y + x - 2)^2 + (6z - 6)^2}.$$

要 $|\text{grad} u| = 0$, 只要

$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ 4y + x - 2 = 0, \\ 6z - 6 = 0. \end{cases}$$

解之,得 $x = -2, y = 1, z = 1$,即在点 $(-2, 1, 1)$ 梯度为零.

4402. 在空间 $Oxyz$ 的那些点,场

$$u = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

的梯度 (a) 垂直于 Oz 轴; (b) 平行于 Oz 轴; (c) 等于零?

解 $\text{grad}u = (3x^2 - 3yz)\vec{i} + (3y^2 - 3xz)\vec{j}$
 $+ (3z^2 - 3xy)\vec{k}.$

(a) 要 $\text{grad}u \perp Oz$, 只要 $\text{grad}u \cdot \vec{k} = 0$, 即 $3z^2 - 3xy = 0$ 或 $z^2 = xy$. 因此, 在满足 $z^2 = xy$ 的点 (x, y, z) , 其梯度垂直于 Oz 轴.

(b) 要 $\text{grad}u \parallel Oz$, 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0. \end{cases}$$

解之得 $x = y = 0$ 及 $x = y = z$. 因此, 在点 $(0, 0, z)$ 及 (x, y, z) (其中 $x = y = z$), 其梯度平行于 Oz 轴.

(c) 要 $|\text{grad}u| = 0$, 只要

$$\begin{cases} 3x^2 - 3yz = 0, \\ 3y^2 - 3xz = 0, \\ 3z^2 - 3xy = 0. \end{cases}$$

解之, 得 $x = y = z$. 因此, 在满足 $x = y = z$ 的点 (x, y, z) , 其梯度等于零.

4403. 已给数量场

$$u = \ln \frac{1}{r},$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$, 在空间 $Oxyz$ 的哪些点下面等式成立

$$|\operatorname{grad} u| = 1?$$

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x-a}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y-b}{r^2}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z-c}{r^2}.$

于是,

$$\begin{aligned} |\operatorname{grad} u| &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{r^4}[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]} \\ &= \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

要 $|\operatorname{grad} u| = 1$, 只要 $r = 1$ 即在以点 (a, b, c) 为中心, 1 为半径的球面上, 均有

$$\left| \operatorname{grad} \left(\ln \frac{1}{r} \right) \right| = 1,$$

其中 $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$.

4404. 作数量场

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

的等位面. 求通过点 $M(9, 12, 28)$ 的等位面. 在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内 $\max u$ 等于什么?

解 等位面可由

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2} + \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2}$$

化简得到, 显然有

$$u \geq \sqrt{(z+8)^2} + \sqrt{(z-8)^2} \geq z+8 - (z-8) = 16.$$

于是,当 $u \geq 16$ 时,有

$$\begin{aligned} u - \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2} \\ = \sqrt{x^2 + y^2 + (z+8)^2}. \end{aligned}$$

平方化简可得

$$u^2 - 32z = 2u \sqrt{x^2 + y^2 + (z-8)^2},$$

再平方化简,即得等位面方程

$$\frac{4(x^2 + y^2)}{u^2 - 256} + \frac{4z^2}{u^2} = 1 \quad (u \geq 16),$$

这是绕 Oz 轴旋转的一个旋转面. 图形省略.

当 $x=9, y=12, z=28$ 时, $u=64$. 因此,等位面方程为

$$\frac{x^2 + y^2}{960} + \frac{z^2}{1024} = 1.$$

在域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ 内,由于

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 16z + 64} \\ &+ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 16z + 64} \\ &\leq \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z} \quad (0 \leq z \leq 6), \end{aligned}$$

故函数 $f(z) = \sqrt{100 + 16z} + \sqrt{100 - 16z}$ 在 $[0, 6]$ 上

的最大值即 u 的最大值. 但是,

$$f'(z) = 8 \left(\frac{1}{\sqrt{100 + 16z}} - \frac{1}{\sqrt{100 - 16z}} \right) < 0 \quad (0 < z \leq 6),$$

故 $f(z)$ 在 $[0, 6]$ 上是严格减函数,从而

$$\max_{0 \leq z \leq 5} f(z) = f(0) = 20.$$

因此,有

$$\max u = 20.$$

4405. 求场

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

在点 $A(1, 2, 2)$ 及 $B(-3, 1, 0)$ 的梯度之间

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{2xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

在 A, B 点的梯度分别为

$$\operatorname{grad} u(A) = \frac{7}{81} i - \frac{4}{81} j - \frac{4}{81} k,$$

$$\operatorname{grad} u(B) = -\frac{2}{25} i + \frac{3}{50} j.$$

于是,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\operatorname{grad} u(A) \cdot \operatorname{grad} u(B)}{|\operatorname{grad} u(A)| \cdot |\operatorname{grad} u(B)|} \\ &= \frac{-\frac{4}{405}}{\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{10}} = -\frac{8}{9} \end{aligned}$$

4406. 设已知数量场

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

作出场的等位面 and 梯度的等模面.

在域 $1 < z < 2$ 内求 $\inf u, \sup u, \inf |\operatorname{grad} u|,$

$\sup |\operatorname{grad} u|$.

解 将 $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ 化简整理, 即得

$$x^2 + y^2 + \frac{u^2 - 1}{u^2} z^2 = 0.$$

其中显然有 $0 < |u| < 1$. 由此可知, 等位面是一个以原点为顶点, Oz 轴为旋转轴的圆锥, 但要去掉原点 $O(0, 0, 0)$. 因此, 它是一个圆锥孔, 又

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{xz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{yz}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &\quad - \frac{z^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}.\end{aligned}$$

故有

$$|\operatorname{grad} u| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = c.$$

显见此等模面是一个以 Oz 轴为旋转轴的旋转面. 现在令 $y = 0$, 得

$$x = cx^2 + cz^2 \text{ 或 } \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4c^2} (c \neq 0),$$

它是 Oxz 面上的圆. 因此, 梯度的等模面是一个旋转环面.

当 $1 < z < 2$ 时, 显然有 $0 < u \leq 1$; 且当 $x = y = 0$ 时, $u = 1$, 而当 $x^2 + y^2$ 充分大时 u 可任意小, 故

$$\inf_{1 < z < 2} u = 0, \quad \sup_{1 < z < 2} u = 1.$$

另外,显然

$$\inf_{1 < z < 2} |\text{grad} u| = \inf_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = 0.$$

由于对于常数 $a > 0$, 函数 $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{t+a}$ ($0 \leq t < +\infty$)

当 $t = a$ 时达最大值 $f(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}$ (这可从讨论 $f(t)$ 简

单地得知), 故对于固定的 z , $\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}$ 的最大值是

$$\frac{1}{2\sqrt{z^2}} = \frac{1}{2z} \quad (z > 0 \text{ 时}), \text{ 由此可知}$$

$$\sup_{1 < z < 2} |\text{grad} u| = \sup_{1 < z < 2} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}.$$

4407. 求在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处之二无限接近的等位面

$$u(x, y, z) = c \text{ 及 } u(x, y, z) = c + \Delta c$$

之间的距离准确到高阶无穷小, 其中 $u(x_0, y_0, z_0) = c$,

解 过点 M_0 作等位面 $u(x, y, z) = c$ 的垂线, 交等位面 $u(x, y, z) = c + \Delta c$ 于点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 则显然二等位面 $u(x, y, z) = c$ 和 $u(x, y, z) = c + \Delta c$ 之间的距离 $d = |\overline{M_0 M_1}|$. 由于梯度垂直于等位面, 因此 $\text{grad} u(x_0, y_0, z_0)$ 的方向与 $\overline{M_0 M_1}$ 的方向或者重合, 或者相反. 于是, 注意到 $u(x_0, y_0, z_0) = c, u(x_1, y_1, z_1) = c + \Delta c$, 知

$$\begin{aligned} \Delta c &= u(x_1, y_1, z_1) - u(x_0, y_0, z_0) \\ &\doteq \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (x_1 - x_0) + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} \\ &\quad \cdot (y_1 - y_0) \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{(x_0, y_0, z_0)} (z_1 - z_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [\text{grad } u(x_0, y_0, z_0)] \cdot \overline{M_0 M_1} \\
&= \pm |\text{grad } u(x_0, y_0, z_0)| \cdot |\overline{M_0 M_1}| \\
&= \pm |\text{grad } u(x_0, y_0, z_0)| d.
\end{aligned}$$

由此可知(准确到高阶无穷小)

$$d \doteq \frac{|\Delta c|}{|\text{grad } u(x_0, y_0, z_0)|}.$$

4408. 证明公式

(a) $\text{grad}(u + c) = \text{grad} u$ (c 为常数);

(b) $\text{grad} cu = c \text{grad} u$ (c 为常数);

(c) $\text{grad}(u + v) = \text{grad} u + \text{grad} v$;

(d) $\text{grad} uv = v \text{grad} u + u \text{grad} v$;

(e) $\text{grad}(u^2) = 2u \text{grad} u$;

(f) $\text{grad} f(u) = f'(u) \text{grad} u$.

证 (a) 由于 $\frac{\partial(u+c)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(u+c)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}$,

$$\frac{\partial(u+c)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}, \text{故得}$$

$$\text{grad}(u+c) = \text{grad} u.$$

(b) 由于 $\frac{\partial(cu)}{\partial x} = c \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(cu)}{\partial y}$

$$= c \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial(cu)}{\partial z} = c \frac{\partial u}{\partial z}, \text{故得}$$

$$\text{grad} cu = c \text{grad} u.$$

(c) 由于 $\frac{\partial(u+v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial(u+v)}{\partial y}$

$$= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial(u+v)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial z}, \text{故得}$$

$$\text{grad}(u+v) = \text{grad} u + \text{grad} v.$$

(d) 由于 $\frac{\partial(uv)}{\partial x} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial y} = u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial(uv)}{\partial z}$

$$= u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x}, \text{故得}$$

$$\operatorname{grad} uv = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u.$$

(1) 在(1)中令 $v = u$, 即得

$$\operatorname{grad}(u^2) = 2u \operatorname{grad} u.$$

$$(c) \text{ 由于 } \frac{\partial f(u)}{\partial x} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial f(u)}{\partial y} = f'(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial f(u)}{\partial z} = f'(u) \frac{\partial u}{\partial z}, \text{故得}$$

$$\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u.$$

4409. 计算: (a) $\operatorname{grad} r$, (b) $\operatorname{grad} r^2$, (c) $\operatorname{grad} \frac{1}{r}$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 (a) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$. 于是,

$$\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}, \text{其中 } \vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k},$$

$$(b) \operatorname{grad}(r^2) = 2r \operatorname{grad} r = 2r \cdot \frac{\vec{r}}{r} = 2\vec{r},$$

$$(c) \operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2} \operatorname{grad} r = -\frac{\vec{r}}{r^3}.$$

4410. 求 $\operatorname{grad} f(r)$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解 $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \operatorname{grad} r = f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}$.

*) 利用 4408 题的结果.

**) 利用 4409 题的结果.

4411. 求 $\operatorname{grad}(\vec{c} \cdot \vec{r})$, 其中 \vec{c} 为常向量, \vec{r} 为从坐标原点起的向量.

解 设 $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, 其中 c_x, c_y, c_z 为常数.

由于

$$\vec{c} \cdot \vec{r} = c_x x + c_y y + c_z z$$

$$\text{及 } \frac{\partial(\vec{c} \cdot \vec{r})}{\partial x} = c_x, \frac{\partial(\vec{c} \cdot \vec{r})}{\partial y} = c_y, \frac{\partial(\vec{c} \cdot \vec{r})}{\partial z} = c_z,$$

$$\text{故 } \text{grad}(\vec{c} \cdot \vec{r}) = \vec{c}.$$

4412. 求 $\text{grad}\{|\vec{c} \times \vec{r}|^2\}$ (\vec{c} 为常向量).

解 $|\vec{c} \times \vec{r}|^2 = (c_y z - c_z y)^2 + (c_z x - c_x z)^2 + (c_x y - c_y x)^2$. 于是,

$$\begin{aligned} \text{grad}\{|\vec{c} \times \vec{r}|^2\} &= [2c_z(c_y x - c_x z) - 2c_y(c_x y - c_y x) \\ &\quad + 2c_x(c_y z - c_z y)] \vec{i} + [-2c_z(c_x z - c_z x) \\ &\quad + 2c_y(c_x y - c_y x)] \vec{j} \\ &\quad + [2c_y(c_y z - c_x y) - 2c_x(c_z x - c_x z)] \vec{k} \\ &= 2[x(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) - c_x(c_x x + c_y y + c_z z)] \vec{i} \\ &\quad + 2[y(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) - c_y(c_x x + c_y y + c_z z)] \vec{j} \\ &\quad + 2[z(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) - c_z(c_x x + c_y y + c_z z)] \vec{k} \\ &= 2\vec{r}(\vec{c} \cdot \vec{c}) - 2\vec{c}(\vec{r} \cdot \vec{c}). \end{aligned}$$

4413. 证明公式

$$\text{grad}f(u, v) = \frac{\partial f}{\partial u} \text{grad}u + \frac{\partial f}{\partial v} \text{grad}v.$$

证 由于

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z},$$

故有

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial v}{\partial z} \vec{k} \right) \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \operatorname{grad} u + \frac{\partial f}{\partial v} \operatorname{grad} v.\end{aligned}$$

4414. 证明公式

$$\nabla^2(uv) = u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\nabla u\nabla v,$$

其中 $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z},$

$$\nabla^2 = \nabla\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

证 由于 $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u,$ 故

$$\begin{aligned}\nabla^2(uv) &= \nabla(\nabla(uv)) = \nabla(u\nabla v + v\nabla u) \\ &= \nabla(u\nabla v) + \nabla(v\nabla u) \\ &= (u\nabla^2v + \nabla u\nabla v) + (v\nabla^2u + \nabla u\nabla v) \\ &= u\nabla^2v + v\nabla^2u + 2\nabla u\nabla v.\end{aligned}$$

4415. 证明: 若函数 $u = u(x, y, z)$ 在凸形域 Ω 内可微分且 $|\operatorname{grad} u| \leq M,$ 其中 M 为常数, 则对于 Ω 中任意两点 A, B 有:

$$|u(A) - u(B)| \leq M\rho(A, B),$$

式中 $\rho(A, B)$ 为 A 与 B 两点间之距离.

证 由于 Ω 为凸形域, 故线段 \overline{AB} 整个属于 $\Omega.$ 设 B 的坐标为 $(x_0, y_0, z_0),$ A 的坐标为 $(x_1, y_1, z_1),$ 且令 $x_1 - x_0 = \Delta x, y_1 - y_0 = \Delta y, z_1 - z_0 = \Delta z.$ 并考虑一元函数 $f(t) = u(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z) (0 \leq t \leq 1),$ 显然 $f(0) = u(B), f(1) = u(A),$ 且 $f(t)$ 在 $[0, 1]$ 可微, 并且

$$\begin{aligned}
 f'(t) &= u'_x(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z) \Delta x \\
 &\quad + u'_y(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z) \Delta y \\
 &\quad + u'_z(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y, z_0 + t\Delta z) \Delta z.
 \end{aligned}$$

于是,由微分学中值定理知

$$\begin{aligned}
 u(A) - u(B) &= f(1) - f(0) = f(\xi) \\
 &= u'_x(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z) \Delta x \\
 &\quad + u'_y(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z) \Delta y \\
 &\quad + u'_z(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z) \Delta z \\
 &= [\text{gradu}(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \overrightarrow{BA},
 \end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}
 |u(A) - u(B)| &= |[\text{gradu}(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, \\
 &\quad z_0 + \xi\Delta z)] \cdot \overrightarrow{BA}| \\
 &\leq |\text{gradu}(x_0 + \xi\Delta x, y_0 + \xi\Delta y, z_0 + \xi\Delta z)| \\
 &\quad \cdot |\overrightarrow{BA}| \leq M\rho(A, B).
 \end{aligned}$$

4416. 求场 $u = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ 在已知点 $M(x, y, z)$ 沿此点的向径 \vec{r} 之方向的导数.

在什么情况下,此导数将等于梯度的大小?

解 $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos\gamma$, 其中 $\cos\alpha$

$= \frac{x}{r}$, $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 于是

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{2x}{a^2} \cdot \frac{x}{r} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{y}{r} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{z}{r} = \frac{2u}{r}.$$

$$\text{又 } |\text{gradu}| = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}.$$

要 $|\operatorname{grad} u| = \frac{\partial u}{\partial r}$, 只要 $\frac{u}{r} = \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}$, 即只要 $a = b = c$, 此即所求之解.

4417. 求场 $u = \frac{1}{r}$ (其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$) 在方向 $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ 上的导数.

在什么情况下, 此导数等于零?

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{x}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}, \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$. 于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial l} &= -\frac{x}{r^3}\cos\alpha - \frac{y}{r^3}\cos\beta - \frac{z}{r^3}\cos\gamma \\ &= -\frac{1}{r^2}[\cos(\vec{r}, x)\cos\alpha + \cos(\vec{r}, y)\cos\beta \\ &\quad + \cos(\vec{r}, z)\cos\gamma] \\ &= -\frac{\cos(l, \vec{r})}{r^2}. \end{aligned}$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 只要 $\cos(l, \vec{r}) = 0$, 即 $l \perp \vec{r}$, 此即所求之解.

4418. 求场 $u = u(x, y, z)$ 在场 $v = v(x, y, z)$ 的梯度方向的导数.

在什么情况下, 此导数等于零?

解 $\vec{l} = \operatorname{grad} v, \vec{l}_0 = \frac{\operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}$. 于是,

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \operatorname{grad} u \cdot \vec{l}_0 = \frac{\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v}{|\operatorname{grad} v|}.$$

要 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 只要 $\operatorname{grad} u \perp \operatorname{grad} v$, 此即所求之解.

4419⁺. 设:

$$u = \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ 及 } \vec{c} = i + j + k,$$

计算 $\vec{a} = \vec{c} \times \operatorname{grad} u.$

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \left(- \frac{xz}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &= - \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

于是,

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{c} \times \text{grad} u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} [(x^2 + y^2 + yz) \vec{i} \\ &\quad - (x^2 + y^2 + xz) \vec{j} + (x - y)z \vec{k}]. \end{aligned}$$

4420. 确定向量场

$$\vec{a} = x \vec{i} + y \vec{j} + 2z \vec{k}$$

的力线.

解 力线系这样的一条曲线 C , 在 C 上每一点的切线与向量场在该点的方向重合, 因此, 有 $d\vec{r} \parallel \vec{a}$, 即

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z},$$

其中 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$.

今有 $a_x = x, a_y = y, a_z = 2z$, 故得

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{2z}.$$

解之,得 $y = c_1x, z = c_2x^2$.

4421. 用直接计算的方向证明向量 \vec{a} 的散度与直角坐标系的选择无关.

证 设除直角坐标系 $Oxyz$ (坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) 外, 另有直角坐标系 $O'x'y'z'$ (坐标轴方向的单位向量为 $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$). 我们要证

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}$$

设

$$\begin{cases} \vec{i}' = \cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k}, \\ \vec{j}' = \cos\alpha_2 \vec{i} + \cos\beta_2 \vec{j} + \cos\gamma_2 \vec{k}, \\ \vec{k}' = \cos\alpha_3 \vec{i} + \cos\beta_3 \vec{j} + \cos\gamma_3 \vec{k}. \end{cases}$$

又设 $\vec{r}_0 = O\vec{O}' = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. 于是, 空间一点 P 在两个坐标系中的坐标 (x, y, z) 与 (x', y', z') 之间的关系为 (令 $\vec{r} = \overrightarrow{OP}, \vec{r}' = \overrightarrow{O'P}$):

$$\begin{aligned} x' &= \vec{r}' \cdot \vec{i}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{i}' \\ &= (x - a)\cos\alpha_1 + (y - b)\cos\beta_1 + (z - c)\cos\gamma_1, \\ y' &= \vec{r}' \cdot \vec{j}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{j}' \\ &= (x - a)\cos\alpha_2 + (y - b)\cos\beta_2 + (z - c)\cos\gamma_2, \\ z' &= \vec{r}' \cdot \vec{k}' = (\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{k}' \\ &= (x - a)\cos\alpha_3 + (y - b)\cos\beta_3 + (z - c)\cos\gamma_3. \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_{x'} \vec{i}' + a_{y'} \vec{j}' + a_{z'} \vec{k}' \\ &= a_{x'} (\cos\alpha_1 \vec{i} + \cos\beta_1 \vec{j} + \cos\gamma_1 \vec{k}) \\ &\quad + a_{y'} (\cos\alpha_2 \vec{i} + \cos\beta_2 \vec{j} + \cos\gamma_2 \vec{k}) \end{aligned}$$

$$+ a_z' (\cos\alpha_3 \vec{i} + \cos\beta_3 \vec{j} + \cos\gamma_3 \vec{k}).$$

由此可知

$$a_x = a_x' \cos\alpha_1 + a_y' \cos\alpha_2 + a_z' \cos\alpha_3$$

$$a_y = a_x' \cos\beta_1 + a_y' \cos\beta_2 + a_z' \cos\beta_3$$

$$a_z = a_x' \cos\gamma_1 + a_y' \cos\gamma_2 + a_z' \cos\gamma_3.$$

于是,

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_x}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial a_x}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial x} \\ &= \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_x'}{\partial x} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_y'}{\partial x'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_z'}{\partial x} \right) \cos\alpha_1 \\ &\quad + \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_x'}{\partial y'} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_y'}{\partial y'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_z'}{\partial y'} \right) \cos\alpha_2 \\ &\quad + \left(\cos\alpha_1 \frac{\partial a_x'}{\partial z'} + \cos\alpha_2 \frac{\partial a_y'}{\partial z'} + \cos\alpha_3 \frac{\partial a_z'}{\partial z'} \right) \cos\alpha_3. \end{aligned}$$

同理,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_y}{\partial y} &= \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_x'}{\partial x'} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_y'}{\partial x'} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_z'}{\partial x'} \right) \cos\beta_1 \\ &\quad + \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_x'}{\partial y'} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_y'}{\partial y'} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_z'}{\partial y'} \right) \cos\beta_2 \\ &\quad + \left(\cos\beta_1 \frac{\partial a_x'}{\partial z'} + \cos\beta_2 \frac{\partial a_y'}{\partial z'} + \cos\beta_3 \frac{\partial a_z'}{\partial z'} \right) \cos\beta_3, \\ \frac{\partial a_z}{\partial z} &= \left(\cos\gamma_1 \frac{\partial a_x'}{\partial x'} + \cos\gamma_2 \frac{\partial a_y'}{\partial x'} + \cos\gamma_3 \frac{\partial a_z'}{\partial x'} \right) \cos\gamma_1 \\ &\quad + \left(\cos\gamma_1 \frac{\partial a_x'}{\partial y'} + \cos\gamma_2 \frac{\partial a_y'}{\partial y'} + \cos\gamma_3 \frac{\partial a_z'}{\partial y'} \right) \cos\gamma_2 \\ &\quad + \left(\cos\gamma_1 \frac{\partial a_x'}{\partial z'} + \cos\gamma_2 \frac{\partial a_y'}{\partial z'} + \cos\gamma_3 \frac{\partial a_z'}{\partial z'} \right) \cos\gamma_3. \end{aligned}$$

将这三式相加,得

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = (\vec{i}' \cdot \vec{i}') \frac{\partial a_x'}{\partial x'}$$

$$\begin{aligned}
& + (j' \cdot i') \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + (k' \cdot i') \frac{\partial a_{z'}}{\partial x'} \\
& + (i' \cdot j') \frac{\partial a_{x'}}{\partial y'} + (j' \cdot j') \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + (k' \cdot j') \frac{\partial a_{z'}}{\partial y'} \\
& + (i' \cdot k') \frac{\partial a_{x'}}{\partial z'} + (j' \cdot k') \frac{\partial a_{y'}}{\partial z'} + (k' \cdot k') \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'} \\
& = \frac{\partial a_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial a_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial a_{z'}}{\partial z'}.
\end{aligned}$$

证毕.

4422. 证明

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS,$$

其中 S 为围绕点 M 和界有体积 V 的封闭曲面, \vec{n} 为曲面 S 之外法线, $d(S)$ 为曲面 S 的直径.

证 由于

$$\vec{a} \cdot \vec{n} = a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma,$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是 \vec{n} 之方向余弦. 应用奥氏公式以及积分中值定理, 得

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS &= \iint_S (a_x \cos \alpha + a_y \cos \beta + a_z \cos \gamma) dS \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dx dy dz \\
&= \iiint_V (\operatorname{div} \vec{a}) dx dy dz \\
&= \operatorname{div} \vec{a}(M_1) \cdot V,
\end{aligned}$$

其中 M_1 是 V 中某点, 即

$$\operatorname{div} \vec{a}(M_1) = \frac{1}{V} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS.$$

令 $d(S) \rightarrow 0$, 这时 V 缩向点 M , 从而点 $M_1 \rightarrow M$, 取极限, 即得

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS.$$

证毕.

4423. 求:

$$\operatorname{div} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}.$$

解

$$\begin{aligned} & \operatorname{div} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{div} \left[\left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \vec{j} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \vec{k} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} - \frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} - \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right) \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} - \frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4424. 证明:

$$(a) \operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b};$$

$$(\sigma) \operatorname{div}(u \vec{c}) = \vec{c} \cdot \operatorname{grad} u \quad (\vec{c} \text{ 为常量, } u \text{ 为数量});$$

$$(b) \operatorname{div}(u \vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u.$$

证 (a) 设 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$.

$$\begin{aligned} \text{由于 } \frac{\partial(a_x + b_x)}{\partial x} &= \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial b_x}{\partial x}, \frac{\partial(a_y + b_y)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial b_y}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial(a_z + b_z)}{\partial z} = \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial b_z}{\partial z}, \text{ 故得} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{div} \vec{a} + \operatorname{div} \vec{b}.$$

(σ) 设 $\vec{c} = c_x \vec{i} + c_y \vec{j} + c_z \vec{k}$, 其中 c_x, c_y, c_z 为常数.

$$\text{由于 } \frac{\partial(uc_x)}{\partial x} = c_x \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial(uc_y)}{\partial y} = c_y \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial(uc_z)}{\partial z} = c_z \frac{\partial u}{\partial z},$$

故得

$$\operatorname{div}(u \vec{c}) = \vec{c} \cdot \operatorname{grad} u.$$

$$\begin{aligned} \text{(b) 由于 } \frac{\partial(ua_x)}{\partial x} &= u \frac{\partial a_x}{\partial x} + a_x \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial(ua_y)}{\partial y} \\ &= u \frac{\partial a_y}{\partial y} + a_y \frac{\partial u}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial(ua_z)}{\partial z} = u \frac{\partial a_z}{\partial z} + a_z \frac{\partial u}{\partial z}, \text{ 故得} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}(u \vec{a}) = u \operatorname{div} \vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} u.$$

4425. 求 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ &= \Delta u \text{ (或记成 } \nabla^2 u \text{)}. \end{aligned}$$

4426. 求 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)]$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. 在什么情况下 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$?

解 由 4410 题的结果知,

$$\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r}.$$

于是,

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[f'(r) \frac{x}{r} \right] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left[f'(r) \frac{y}{r} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[f'(r) \frac{z}{r} \right] \\
&= f''(r) \left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} \right) + f'(r) \\
&\quad \left(\frac{r^2 - x^2}{r^3} + \frac{r^2 - y^2}{r^3} + \frac{r^2 - z^2}{r^3} \right) \\
&= f''(r) + \frac{2}{r} f'(r).
\end{aligned}$$

要 $\operatorname{div}[\operatorname{grad} f(r)] = 0$, 只要 $f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0$.

将上述方程写成下述形式:

$$r f''(r) + 2 f'(r) = 0.$$

或 $(r f''(r) + f'(r)) + f'(r) = 0$.

积分之, 即得

$$r f'(r) + f(r) = C \quad (C \text{ 为常数}).$$

再积分之, 得

$$r f(r) = Cr + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数}).$$

于是, 最后得

$$f(r) = C + \frac{C_1}{r},$$

此即所求之解.

4427. 计算: (a) $\operatorname{div} \vec{r}$; (b) $\operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r}$.

解 (a) $\operatorname{div} \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \operatorname{div} \frac{\vec{r}}{r} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r} \right) \\
&= \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} \right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3} \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{3}{r} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}.$$

4428. 计算 $\operatorname{div}[f(r) \vec{c}]$, 式中 \vec{c} 为常向量.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \operatorname{div}[f(r) \vec{c}] &= \vec{c} \cdot \operatorname{grad} f(r)^{*}) \\ &= \vec{c} \cdot f'(r) \frac{\vec{r}^{**})}{r} = \frac{f'(r)}{r} (\vec{c} \cdot \vec{r}). \end{aligned}$$

*) 利用 4424 题(6) 的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4429. 求 $\operatorname{div}[f(r) \vec{r}]$. 在什么情况下此向量的散度等于零?

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \operatorname{div}[f(r) \vec{r}] &= f(r) \operatorname{div} \vec{r} + \vec{r} \cdot \operatorname{grad} f(r)^{*}) \\ &= 3f(r) + \vec{r} \cdot f'(r) \frac{\vec{r}^{**})}{r} \\ &= 3f(r) + rf'(r). \end{aligned}$$

要 $\operatorname{div}[f(r) \vec{r}] = 0$, 只要 $3f(r) + rf'(r) = 0$, 即

$$\frac{f'(r)}{f(r)} = -\frac{3}{r}.$$

积分之, 即得

$$f(r) = \frac{C}{r^3} \quad (C \text{ 为常数}),$$

此即所求之解.

*) 利用 4424 题(B) 的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4430. 求: (a) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} u)$; (b) $\operatorname{div}(u \operatorname{grad} v)$.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \text{(a)} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} u) &= u \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} u^{*}) \\ &= u \Delta u + (\operatorname{grad} u)^{2^{**})} \\ \text{(b)} \operatorname{div}(u \operatorname{grad} v) &= u \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) + \operatorname{grad} v \cdot \operatorname{grad} u^{*}) \\ &= u \Delta v + \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v^{**}). \end{aligned}$$

*) 利用 4424 题(B) 的结果.

* *) 利用 4425 题的结果.

4431. 物体以一定的角速度 ω 依逆时针方向绕 Oz 轴旋转. 求速度向量 \vec{v} 和加速度向量 \vec{w} 在空间的点 $M(x, y, z)$ 和在已知时刻的散度.

解 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$. 微分之, 即得

$$\begin{aligned}\dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{r}} \\ &= \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{v}} \\ &= \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\dot{\vec{v}}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}) \\ &= \dot{\vec{v}}_0 + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \dot{\vec{v}}_0 + (\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{r}) \vec{\omega} \quad (\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}^{**}).\end{aligned}$$

为了计算 $\text{div } \vec{v}$ 和 $\text{div } \dot{\vec{v}}$, 先计算 $\text{div}(\vec{a} \times \vec{r})$, 此处 \vec{a} 为常向量. 由于

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{r})_x &= a_y z - a_z y, & (\vec{a} \times \vec{r})_y &= a_z x - a_x z, \\ (\vec{a} \times \vec{r})_z &= a_x y - a_y x,\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}\text{div}(\vec{a} \times \vec{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z x - a_x z) \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x) = 0.\end{aligned}$$

于是, 即得

$$\text{div } \dot{\vec{v}} = \text{div } \dot{\vec{v}}_0 + \text{div}(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) = 0.$$

$$\begin{aligned}\text{div } \dot{\vec{w}} &= \text{div } \dot{\vec{w}}_0 + \text{div}(\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}) + \text{div}(\vec{\omega} \times \dot{\vec{v}}_0) \\ &+ \text{div}[(\dot{\vec{\omega}} \cdot \vec{r}) \vec{\omega}] - \text{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{而 } \text{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{r}) \vec{\omega}] &= \vec{\omega} \cdot \vec{r} \text{div } \vec{\omega} + \vec{\omega} \cdot \text{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{r})^{***}) \\ &= \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}^{****}) = \omega^2\end{aligned}$$

$$\text{及 } \text{div}[(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}] = \vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \text{div } \vec{r} + \vec{r} \cdot \text{grad}(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})$$

$$= 3\omega^2,$$

从而,最后得

$$\operatorname{div} \dot{\omega} = \omega^2 - 3\omega^2 = -2\omega^2.$$

*) 利用向量代数中的公式(二重外积展开式):

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}.$$

**) 利用 4424 题(B) 的结果.

***) 利用 4411 题的结果.

4432. 求由引力中心的有限系统所产生的动力场之散度.

解 引力 $\vec{F} = \frac{k \vec{r}}{r^3}$ (k 为常数). 于是,

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{kx}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{ky}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{kz}{r^3} \right) \\ &= k \left[\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right) + \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5} \right) \right] \\ &= k \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right] \\ &= k \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0. \end{aligned}$$

4433⁺. 求由极坐标 r 与 φ 所表的平面向量 $\vec{a} = \vec{a}(r, \varphi)$ 之散度的表示式.

解 设极坐标的 r 线与 φ 线的单位矢量为 \vec{e}_r 与 \vec{e}_φ , 且

$$\vec{a}(r, \varphi) = a_r(r, \varphi) \vec{e}_r + a_\varphi(r, \varphi) \vec{e}_\varphi.$$

这里自然假定 a_r, a_φ 都具有连续的偏导函数. 取面积元素 $\Delta S = r \Delta \varphi \Delta r$, 记其界线为 ΔC . 首先, 推导矢量 \vec{a} 经过界线 ΔC 的通量, 即矢流. 通量可分两部分: 一部分是经过 r 线的; 另一部分是经过 φ 线的. 它们分别是

$$\int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r, \varphi + \Delta \varphi) dr - \int_r^{r+\Delta r} a_\varphi(r, \varphi) dr$$

$$\begin{aligned}
&= \int_r^{r+\Delta r} [a_\varphi(r, \varphi + \Delta\varphi) - a_\varphi(r, \varphi)] dr \\
&= \int_r^{r+\Delta r} \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Delta\varphi dr \\
&= \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} \Delta\varphi \Delta r, \\
\int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r + \Delta r, \varphi)(r + \Delta r) d\varphi - \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} a_r(r, \varphi)r d\varphi \\
&= \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} [a_r(r + \Delta r, \varphi)(r + \Delta r) \\
&\quad - a_r(r, \varphi)r] d\varphi \\
&= \int_\varphi^{\varphi+\Delta\varphi} \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \Delta r d\varphi \\
&= \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \Delta r \Delta \varphi,
\end{aligned}$$

且由于 a_r, a_φ 的偏导函数的连续性, 当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 取得愈小时, 上述近似等式愈精确. 于是, 矢量 \vec{a} 经过 ΔC 的通量

$$\oint_{\Delta C} \vec{a} \cdot \vec{n} ds = \left[\frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right] \Delta\varphi \Delta r,$$

其中 \vec{n} 为曲线 ΔC 的外法线方向, 而且当 $\Delta r, \Delta\varphi$ 愈小时此近似等式愈精确.

于是, 根据散度的定义, 并注意到 ΔS 收缩为一点 (r, φ) 与 $\Delta r \rightarrow 0, \Delta\varphi \rightarrow 0$ 等价, 从而即得

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{a} &= \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta C} \vec{a} \cdot \vec{n} ds}{\Delta S} \\
&= \lim_{\substack{\Delta r \rightarrow 0 \\ \Delta\varphi \rightarrow 0}} \frac{\left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} \Delta r \Delta \varphi}{r \Delta r \Delta \varphi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial a_\varphi(r, \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial [a_r(r, \varphi)r]}{\partial r} \right\} \\
&= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right].
\end{aligned}$$

4434. 设

$$x = f(u, v, w), y = g(u, v, w), z = h(u, v, w),$$

用直交曲线坐标 u, v, w 表示 $\operatorname{div} \vec{a}(x, y, z)$.

作为特殊的情形, 求用柱坐标和球坐标表示 $\operatorname{div} \vec{a}$ 的表示式.

解 考虑向量 \vec{a} 通过由曲面 $u =$ 常数, $v =$ 常数, $w =$ 常数所界的小立体 (接近于长方体) V 的表面 S 的流量 (图

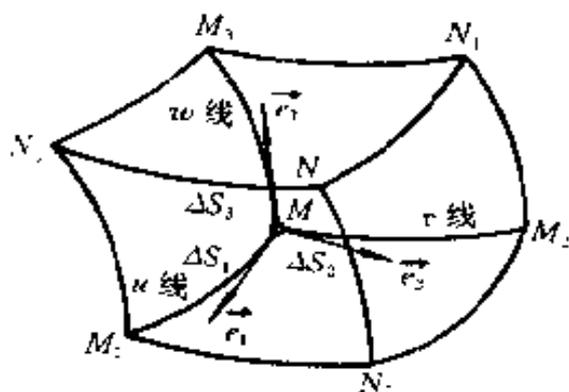


图 8.72

8.72), 我们有 $\vec{a} = a_u \vec{e}_1 + a_v \vec{e}_2 + a_w \vec{e}_3$.

在 u 曲线上, 只有 u 变化 (v 和 w 都是常数), 故

$$d\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial u} du \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} du \vec{k},$$

从而

$$ds = |d\vec{r}| = L du,$$

$$\begin{aligned}
\text{其中 } L &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2},
\end{aligned}$$

ds_1 为 u 曲线上的弧元素, 同理可得

$$dx_2 = Mdv, ds_3 = Ndw,$$

其中 dx_2, ds_3 分别为 v, ω 曲线上的弧元素, 而

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2},$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial \omega}\right)^2}.$$

由于坐标曲线互相垂直, $\Delta s_1, \Delta s_2, \Delta s_3$ 都很小, 故 V 接近于长方体. 因此, 其体积为

$$\begin{aligned} V &\doteq \Delta s_1 \Delta s_2 \Delta s_3 \doteq ds_1 ds_2 ds_3 \\ &= LMN du dv d\omega. \end{aligned}$$

现计算 \vec{a} 通过 V 的表面 S 向外的流量 $\iint_S a_n dS$, S 共包括

六块小曲面(图 8.72), 记垂直于 \vec{e}_1 方向的两块为 S_1 与 S_2 (即图中的 $MM_2N_1M_3$ 与 $M_1N_3NN_2$), 垂直于 \vec{e}_2 方向的两块为 S_3 与 S_4 , 垂直于 \vec{e}_3 方向的两块为 S_5 与 S_6 . 显然, 由于曲面很小, 有

$$\begin{aligned} &\iint_{S_2} a_n dS + \iint_{S_1} a_n dS \\ &\doteq a_u \Delta S_2 \Delta S_3 | (u + \Delta u, v, \omega) \\ &\quad - a_u \Delta S_2 \Delta S_3 | (u, v, \omega) \\ &\doteq a_u MN dv d\omega | (u + \Delta u, v, \omega) \\ &\quad - a_u MN dv d\omega | (u, v, \omega) \\ &\doteq \frac{\partial(a_u MN dv d\omega)}{\partial u} du \\ &= \frac{\partial(MN a_u)}{\partial u} du dv d\omega. \end{aligned}$$

同理可得

$$\iint_{S_1} a_x dS + \iint_{S_3} a_x dS \doteq \frac{\partial(NLa_v)}{\partial u} dudvd\omega,$$

$$\iint_{S_5} a_x dS + \iint_{S_7} a_x dS \doteq \frac{\partial(LMa_w)}{\partial \omega} dudvd\omega.$$

相加即得

$$\iint_S a_x dS \doteq \left[\frac{\partial(MNa_x)}{\partial u} + \frac{\partial(NLa_v)}{\partial v} + \frac{\partial(LMa_w)}{\partial \omega} \right] dudvd\omega.$$

于是,

$$\frac{\iint_S a_x dS}{V} \doteq \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_x) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial \omega}(LMa_w) \right].$$

显然,当小立体 V 愈缩向点 $M(V$ 愈小) 时,上述各近似等式都愈精确. 于是,令 V 缩向 M (即 S 的直径 $d(S)$ 趋于零) 取极限,利用 4422 题的结果,得

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \lim_{d(S) \rightarrow 0} \frac{\iint_S a_x dS}{V} \\ &= \frac{1}{LMN} \left[\frac{\partial}{\partial u}(MNa_x) + \frac{\partial}{\partial v}(NLa_v) + \frac{\partial}{\partial \omega}(LMa_w) \right]. \end{aligned}$$

特别是在柱坐标情形下,有

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z \\ (u &= r, v = \varphi, \omega = z). \end{aligned}$$

从而

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = 1,$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = r,$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = 1.$$

于是,

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ra_r) + \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} + r \frac{\partial a_z}{\partial z} \right].$$

在球坐标情形下,有

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = \rho \cos \theta (u = \rho, v = \theta, w = \varphi).$$

于是,

$$L = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = 1,$$

$$M = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} = \rho$$

$$N = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \rho \sin \theta.$$

由此可知

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{a} &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho^2 \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \rho \sin \theta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (a_\varphi \rho) \right] \\ &= \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} (a_\rho \rho^2) \right. \\ &\quad \left. + \rho \frac{\partial}{\partial \theta} (a_\theta \sin \theta) + \rho \frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \right]. \end{aligned}$$

4435. 证明:

$$(a) \operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) = \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b};$$

$$(b) \operatorname{rot}(u \vec{a}) = u \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} u \times \vec{a}.$$

证 (a) 设 $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$, $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$, 则有

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\vec{a} + \vec{b}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x + b_x & a_y + b_y & a_z + b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{rot} \vec{b}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \operatorname{rot}_y(u \vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial y}(ua_z) - \frac{\partial}{\partial z}(ua_y) \\ &= u \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) + \left(a_z \frac{\partial u}{\partial y} - a_y \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= u \operatorname{rot}_y \vec{a} + (\operatorname{grad} u \times \vec{a})_y, \end{aligned}$$

同法可得

$$\operatorname{rot}_y(u \vec{a}) = u \operatorname{rot}_y \vec{a} + (\operatorname{grad} u \times \vec{a})_y,$$

$$\operatorname{rot}_z(u \vec{a}) = u \operatorname{rot}_z \vec{a} + (\operatorname{grad} u \times \vec{a})_z.$$

于是,

$$\operatorname{rot}(u \vec{a}) = u \operatorname{rot} \vec{a} + \operatorname{grad} u \times \vec{a}.$$

4436. 求: (a) $\operatorname{rot} \vec{r}$; (b) $\operatorname{rot}[f(r) \vec{r}]$.

$$\begin{aligned} \text{解 (a) } \operatorname{rot} \vec{r} &= \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \vec{k} = \vec{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (5) \operatorname{rot}[f(r) \vec{r}] &= f(r) \operatorname{rot} \vec{r} + \operatorname{grad} f(r) \times \vec{r} \\
 &= \vec{0} + f'(r) \frac{\vec{r}}{r} \times \vec{r} \\
 &= \vec{0}.
 \end{aligned}$$

*) 利用 4435 题(6) 的结果.

**) 利用 4410 题的结果.

4437. 求: (a) $\operatorname{rot} \vec{c} f(r)$, (6) $\operatorname{rot}[\vec{c} \times f(r) \vec{r}]$ (\vec{c} 为定向量).

解 (a) $\operatorname{rot} \vec{c} f(r) = f(r) \operatorname{rot} \vec{c} + \operatorname{grad} f(r) \times \vec{c}$
 $= \frac{f'(r)}{r} (\vec{r} \times \vec{c}).$

(6) $\operatorname{rot}[\vec{c} \times f(r) \vec{r}] = f(r) \operatorname{rot}(\vec{c} \times \vec{r})$
 $+ \operatorname{grad} f(r) \times (\vec{c} \times \vec{r}).$ 但是,

$$\operatorname{rot}(\vec{c} \times \vec{r}) =$$

$$\begin{vmatrix}
 \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\
 \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\
 c_y x - c_z y & c_z x - c_x z & c_x y - c_y x
 \end{vmatrix} = 2 \vec{c}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{grad} f(r) \times (\vec{c} \times \vec{r}) &= \frac{f'(r)}{r} \vec{r} \times (\vec{c} \times \vec{r}) \\
 &= \frac{f'(r)}{r} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{c} - (\vec{r} \cdot \vec{c}) \vec{r}],
 \end{aligned}$$

故最后得

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot}[\vec{c} \times f(r) \vec{r}] &= 2f(r) \vec{c} \\
 &+ \frac{f'(r)}{r} [(\vec{r} \cdot \vec{r}) \vec{c} - (\vec{r} \cdot \vec{c}) \vec{r}]
 \end{aligned}$$

4438. 证明 $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.$

证 $\operatorname{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_y b_z - a_z b_y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z b_x - a_x b_z)$
 $+ \frac{\partial}{\partial z}(a_x b_y - a_y b_x)$

$$\begin{aligned}
&= b_x \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + b_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
&+ b_z \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) - a_x \left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z} \right) \\
&- a_y \left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x} \right) - a_z \left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} \right) \\
&= \vec{b} \cdot \operatorname{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \operatorname{rot} \vec{b}.
\end{aligned}$$

4439. 求: (a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u)$; (b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a})$.

解 (a) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} u) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \end{vmatrix} = \vec{0}.$

$$\begin{aligned}
\text{(b) } \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{a}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) = 0.
\end{aligned}$$

4440. 物体以一定的角速度 ω 围绕轴 $l(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 旋转. 求速度向量 \vec{v} 在空间的点 $M(x, y, z)$ 和在已知时刻的旋度.

解 $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$. 从而有

$$\begin{aligned}
v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y, & v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z, \\
v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x.
\end{aligned}$$

由于 $\operatorname{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 2\omega_x$, $\operatorname{rot}_y \vec{v} = 2\omega_y$ 及 $\operatorname{rot}_z \vec{v} = 2\omega_z$, 故 $\operatorname{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$.

4441. 求向量 \vec{r} 的流量: (a) 穿过圆锥形 $x^2 + y^2 \leq z^2 (0 \leq z \leq$

h 的侧表面; (6) 穿过此圆锥形的底.

解 (a) 在侧面上, 点的向径的方向与圆锥的母线重合. 因此, 点的向径与圆锥在该点的法线互相垂直, 即 \vec{r} 在法线方向上的射影 $\vec{r}^n = 0$. 于是, 向量 r 穿过侧面 D 的流量为

$$\iint_D r_n dS = 0.$$

(6) 在圆锥形的底面上, $r_n = h$. 于是, 所求的流量为

$$\iint_{x^2+y^2 \leq h^2} r_n dS = h \cdot \pi h^2 = \pi h^3.$$

4442. 求向量 $\vec{a} = yz\vec{i} + zx\vec{j} + xy\vec{k}$ 的流量: (a) 穿过圆柱 $x^2 + y^2 \leq a^2 (0 \leq z \leq h)$ 的侧表面; (6) 穿过此圆柱的全表面.

解 先求 (6), 由于

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = \iiint_V 0 dV = 0,$$

故向量 \vec{a} 穿过圆柱的全表面的流量为零.

再求 (a), 又由于 $S = S_{\text{侧}} + S_{\text{上、下底}}$ 及在上、下底上 $a_n = xy$, 故有

$$\begin{aligned} \iint_{S_{\text{上、下底}}} a_n dS &= \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} xy dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^3 \sin\varphi \cos\varphi dr = 0. \end{aligned}$$

于是,

$$\iint_{S_{\text{侧}}} a_n dS = 0,$$

即向量 \vec{a} 穿过侧面的流量也为零.

4443. 求向径 \vec{r} 穿过曲面

$$z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (0 \leq z \leq 1)$$

的流量

解 设 S 为所给的曲面(锥), D 为锥的底面(即 Oxy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq 1$). 由于

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{r}_n dS + \iint_D \vec{r}_n dS &= \iiint_V \operatorname{div} \vec{r} dV \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_0^1 r dz = \pi \end{aligned}$$

及在 D 上, $\vec{r} \perp \vec{n}$, 故 $r_n = 0$, $\iint_D \vec{r}_n dS = 0$, 从而, 得

$$\iint_S \vec{r}_n dS = \pi.$$

4444. 求向量 $\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ 穿过球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x > 0, y > 0, z > 0$ 的正八分之一的流量.

解 设 S 为所给的曲面, S_1, S_2 及 S_3 为球内三个坐标平面上的部分, 则有

$$\begin{aligned} & \iint_S \vec{a}_n dS + \iint_{S_1} \vec{a}_n dS + \iint_{S_2} \vec{a}_n dS + \iint_{S_3} \vec{a}_n dS \\ &= \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x>0, y>0, z>0}} \operatorname{div} \vec{a} dV = 2 \iiint_{\substack{x^2+y^2+z^2 \leq 1 \\ x>0, y>0, z>0}} (x+y+z) dx dy dz \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^1 r^2 \cos\psi \cdot r (\cos\varphi \cos\psi \\ & \quad + \sin\varphi \cos\psi + \sin\psi) dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \cdot \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{3}} [\cos\psi \sin\psi + \cos^2\psi (\cos\varphi + \sin\varphi)] d\psi \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} (\cos\varphi + \sin\varphi) \right] d\varphi \\
&= \frac{3}{8}\pi.
\end{aligned}$$

但在 $S_i (i = 1, 2, 3)$ 上, 显然有 $\vec{a} \perp \vec{n}$, 故 $a_n = 0$, 从而 $\iint_{S_i} a_n dS = 0 (i = 1, 2, 3)$. 于是, 所求的流量为

$$\iint_S a_n dS = \frac{3}{8}\pi.$$

4445. 求向量 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$ 穿过由诸平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a (a > 0)$ 所包围角锥的全表面的流量.

利用奥斯特洛格拉德斯基公式, 验证结果.

解 方法一:

由于 $\operatorname{div} \vec{a} = 0$,

故所求的流量为

$$\iint_S a_n dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{a} dV = 0.$$

方法二:

如图 8.73 所示.

在平面 $z = 0 (S_1)$ 上,

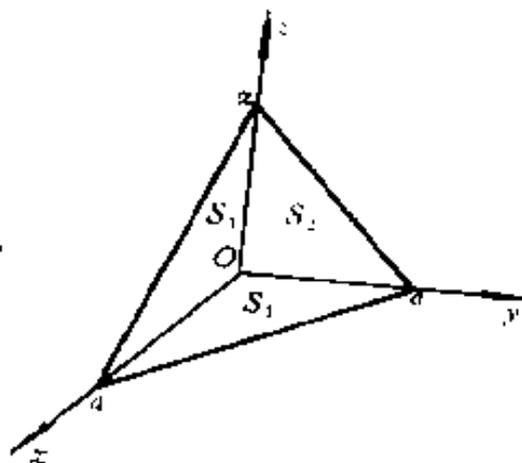


图 8.73

$\vec{n} = \{0, 0, -1\}$; 在平面 $y = 0 (S_2)$ 上, $\vec{n} = \{0, -1, 0\}$;

在平面 $x = 0 (S_3)$ 上, $\vec{n} = \{-1, 0, 0\}$.

于是, 向量 \vec{a} 穿过曲面 S_1 的流量为

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{a}_n dS &= \iint_{S_1} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\substack{r: x=y=z \\ 0 \leq x \leq a}} (x) dx dy \\ &= -\frac{a^3}{6}. \end{aligned}$$

同法可求得向量 \vec{a} 穿过 S_2 及 S_3 面的流量也为 $-\frac{a^3}{6}$.

对于平面 $x + y + z = a (S_4)$, 其法向量为 $\vec{n} = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, 故流量为

$$\begin{aligned} \iint_{S_4} \vec{a}_n dS &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{S_4} (y + z + x) dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\substack{r: x=y=z \\ 0 \leq x \leq a}} a \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} dx dy = \frac{a^3}{2}. \end{aligned}$$

因此, 最后得向量 \vec{a} 穿过角锥全表面的流量为

$$\sum_{i=1}^4 \iint_{S_i} \vec{a}_n dS = \frac{a^3}{2} + 3\left(-\frac{a^3}{6}\right) = 0.$$

4446. 证明: 向量 \vec{a} 穿过由方程式 $\vec{r} = \vec{r}(u, v) ((u, v) \in \Omega)$ 所给出的曲面 S 的流量等于

$$\iint_{\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \iint_{\Omega} \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) du dv,$$

式中 \vec{n} 为曲面 S 的法线之单位向量.

证 设曲面 S 的方程为

$$\vec{r} = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},$$

则有

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \vec{k},$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \vec{k}.$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial u} \right) \vec{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

因此, 易得

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right| = \sqrt{EG - F^2}$$

又 $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ 的方向显然是法线 \vec{n} 的方向. 于是, 我们有

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS &= \iint_{\Omega} \vec{a} \cdot \sqrt{EG - F^2} \vec{n} dudv \\ &= \iint_{\Omega} \vec{a} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dudv \\ &= \iint_{\Omega} \left(\vec{a} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right) dudv. \end{aligned}$$

4447. 求向量 $\vec{a} = m \frac{\vec{r}}{r^3}$ (m 为常数) 穿过围绕坐标原点的封闭

曲面 S 的流量.

解 所求的流量为

$$\begin{aligned}\iint_S a_n dS &= m \iint_S \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \vec{n} dS = m \iint_S \frac{\cos(\vec{r}, \vec{n})}{r^2} dS \\ &= m \cdot 4\pi \cdot 1 = 4\pi m.\end{aligned}$$

*) 利用 4392 题(σ) 的结果.

4448. 已知向量

$$\vec{a}(\vec{r}) = \vec{a} \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right),$$

其中 e_i 为常数, r_i 为点 M_i (起点) 距动点 $M(\vec{r})$ 的距离. 求此向量穿过围绕点 M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的封闭曲面 S 的流量.

解 首先, 我们有

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \text{grad} \left(-\frac{e_i}{4\pi r_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{e_i \vec{r}_i}{4\pi r_i^3}.$$

其次, 我们考虑这样一个立体 (V), 它由曲面 S 及包围点 M_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的 n 个小球所围成 (这些小球的球心在点 M_i , 半径为 ρ_i). 由于 $\text{div} \vec{a}$ 在 V 内为零, 故

$$\iint_S a_n dS = \sum_{j=1}^n \iint_{S_j} a_n dS,$$

其中 S_j 为第 j 个小球面. 但是

$$\iint_{S_j} a_n dS = \iint_{S_j} \left(\sum_{i=1}^n \frac{e_i \vec{r}_i}{4\pi r_i^3} \right) \cdot \vec{n} dS.$$

由于

$$\begin{aligned} \iint_{S_j} \frac{1}{r_j^3} (\vec{r}_j \cdot \vec{n}) dS &= \iint_{S_j} \frac{\cos(\vec{r}_j, \vec{n})}{r_j^2} dS \\ &= \begin{cases} 0, & \text{当 } j \neq i \text{ 时;} \\ 4\pi, & \text{当 } j = i \text{ 时,} \end{cases} \end{aligned}$$

故得

$$\iint_{S_j} a_n dS = e_j.$$

从而

$$\iint_S a_n dS = \sum_{j=1}^n e_j.$$

*) 利用 4392 题的结果.

4449. 证明:

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \nabla^2 u dx dy dz,$$

其中曲面 S 包围体积 V .

证 参看 4393 题(a).

4450. 在单位时间内经过曲面元素 dS 而进入温度场 u 的热量等于

$$dQ = -kn \cdot \text{grad}u dS,$$

其中 k 为内热的传导系数, n 为曲面 S 的法线之单位向量. 求在单位时间内物体 V 所积累的热量. 研究温度上升的速度以推出为物体温度所满足的方程式(热传导方程式).

解 由于

$$dQ = -kn \cdot \text{grad}u dS = -k \text{grad}_n u dS,$$

故由奥氏公式, 即得

$$Q = - \iint_S k \text{grad}_n u dS = \iiint_V k \text{div}(\text{grad} u) dV.$$

因此, 每单位时间内向立体内部流入的热量为

$$\iiint_V \text{div}(k \text{grad} u) dV. \quad (1)$$

这一热量引起立体内部温度的增加, 现在我们从另一方面再来计算此热量. 在时间 dt 内温度 u 增加

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt.$$

需要对体积元素 dV 输入热量

$$c \rho u dt dV = c \frac{\partial u}{\partial t} \rho dt dV,$$

其中 c 为物体在所考察的点处的热容量. 于是, 在时间 dt 内整个立体就要吸收热量

$$dt \iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV,$$

而在每单位时间内所吸收的热量即为

$$\iiint_V c \rho \frac{\partial u}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较(1)式及(2)式, 便得等式

$$\iiint_V \left\{ c \rho \frac{\partial u}{\partial t} - \text{div}(k \text{grad} u) \right\} dV = 0.$$

由于上式对取在所考察境域内的任何立体 V 都适合, 且被积函数显见连续, 故根据 4097 题的结果, 当点属于所考察的境域时, 恒有

$$c \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{grad} u),$$

此即所求的热传导方程.

4451. 在运动中不可压缩的液体占有体积 V . 假定在域 V 内源

泉和漏孔都不存在,试推出连续性的方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0,$$

式中 $\rho = \rho(x, y, z, t)$ 为液体密度, \vec{v} 为速度向量, t 为时间.

解 首先,我们已知:在每单位时间内自 V 中的任一立体 V' 的表面 S' 向外流出的流量 Q 为

$$Q = \iint_{S'} \rho v_n dS = \iiint_{V'} \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV. \quad (1)$$

现在我们用另一法来计算 Q ,如考虑到在时间 dt 内密度 ρ 增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt$,则立体元素 dV 的质量就增加 $\frac{\partial \rho}{\partial t} dt dV$,而整个所考察的立体 V' 的质量就增加

$$dt \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

因此,每单位时间内 V' 中质量减少

$$- \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV.$$

由于 V 内无源泉和漏孔,故这个减少的质量正好就是从 V' 的表面 S' 流出的质量流量 Q ,即

$$Q = - \iiint_{V'} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2)$$

比较(1)式和(2)式,便得等式

$$\iiint_{V'} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right\} dV = 0.$$

由于上式对 V 中任一立体 V' 均成立,且被积函数连续,故根据 4097 题的结果,当 $(x, y, z) \in V$ 时,恒有

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

4452. 求向量 $\vec{a} = \vec{r}$ 沿着螺线

$$\vec{r} = a \cos t \vec{i} + a \sin t \vec{j} + b t \vec{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的一段的功效.

解 由于

$$d\vec{r} = (-a \sin t \vec{i} + a \cos t \vec{j} + b \vec{k}) dt,$$

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = b^2 t dt,$$

故所求的功效为

$$W = \int_0^{2\pi} b^2 t dt = 2\pi^2 b^2.$$

4453. 求向量 $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ (其中 f 是连续函数) 沿着弧 AB 的功效.

解 所求的功效为

$$\begin{aligned} W &= \int_{r_A}^{r_B} f(r) \vec{r} \cdot d\vec{r} = \int_{r_A}^{r_B} f(r) \vec{r} \cdot \vec{t}^0 ds \\ &= \int_{r_A}^{r_B} f(r) r dr, \end{aligned}$$

其中 \vec{t}^0 是单位切向量.

4454. 求向量

$$\vec{a} = -y \vec{i} + x \vec{j} + c \vec{k}$$

(c 为常数) 的环流: (a) 沿着圆周 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

(b) 沿着圆周 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$.

解 (a) 圆 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ 的向径 \vec{r} 适合方程

$$\vec{r} = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot d\vec{r} &= (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + c \vec{k}) \cdot \\ &(-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j} + 0 \vec{k}) dt \\ &= dt,\end{aligned}$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

(σ) 对于圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1, z = 0$, 有

$$\vec{r} = (2 + \cos t) \vec{i} + \sin t \vec{j} + 0 \vec{k} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

由于

$$\vec{a} \cdot d\vec{r} = (2\cos t + 1) dt,$$

故所求的环流为

$$\int_0^{2\pi} (2\cos t + 1) dt = 2\pi.$$

4455. 求向量 $\vec{a} = \text{grad} \left\{ \arctg \frac{y}{x} \right\}$ 沿着围线 C 的环流 Γ ; (a) C 不围绕 Oz 轴; (σ) C 围绕 Oz 轴.

解 我们有

$$\vec{a} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \vec{j}.$$

于是, 易知

$$\text{rot} \vec{a} = \vec{0} \quad (\text{除 } x = y = 0, \text{ 即 } Oz \text{ 轴上的点}).$$

(a) 若 C 不围绕 Oz 轴, 则可于 C 上张一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交, 于是, 根据斯托克斯公式, 得

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{a} \, dS = 0.$$

(σ) 若 C 围绕 Oz 轴. 先设 C 正好围绕 Oz 轴旋转一周, 取常数 $\tau < 0$ 充分小, 使 C 位于平面 $z = \tau$ 的上方. 在

平面 $z = \tau$ 上围绕 Oz 轴取一圆周 $C_r(x^2 + y^2 = r^2, z = \tau)$ 充分小, 使半径 r 小于 C 到 Oz 轴的距离. 以 C 与 C_r 为边界张上一曲面 S , 使 S 与 Oz 轴不相交. 由斯托克斯公式, 得

$$\oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_r} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{n} \cdot \text{rot} \vec{a} \, dS = 0,$$

其中 $-C_r$ 表示沿顺时针方向取向. 于是

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_r} \vec{a} \cdot d\vec{r}.$$

但取 C_r 的参数方程 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \tau$ 后, 得

$$\begin{aligned} \oint_{C_r} \vec{a} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\frac{r \sin \theta}{r^2} \right) (-r \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{r \cos \theta}{r^2} \right) (r \cos \theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

从而

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

现设 C 围绕 Oz 轴旋转了 n 圈. 为叙述简单起见, 假定 $n = 2$. 在平面

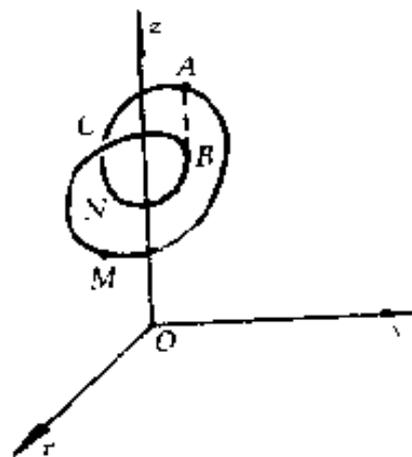


图 8.74

Ozx 上引辅助线(直线段) AB , 将 C 分解成两个只绕 Oz 轴转一周的闭曲线 $C_1 = ABMA$ 与 $C_2 = ANBA$ (图 8.74). 根据前面已证的结果可知

$$\oint_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi, \quad \oint_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi.$$

于是,注意到 \overline{AB} 上的线积分(第二型)与 \overline{BA} 上的线积分相消,即得

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} \vec{a} \cdot d\vec{r} + \oint_{C_2} \vec{a} \cdot d\vec{r} = 4\pi.$$

完全类似地,可得一般情况(C 围绕 Oz 轴转 n 圈)时,有

$$\Gamma = \oint_C \vec{a} \cdot d\vec{r} = 2\pi n.$$

4456^{*}). 平面的不可压缩稳流由速度向量

$$\vec{\omega} = u(x, y)\vec{i} + v(x, y)\vec{j}$$

描写出来,求出:(1) 经过包围域 S 的封闭围线 C 所流出液体的量 Q (液体的消耗);(2) 速度向量沿着围线 C 的环流 Γ . 若流场无源泉、无漏孔且无旋度,则函数 u 和 v 满足什么样的方程式?

解 (1) 考虑包含着点 $D(x, y)$ 的两边长分别为 Δx 与 Δy 的小矩形元 $ABCD$ (图 8.75).

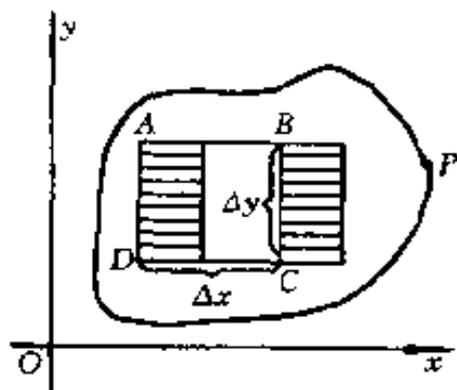


图 8.75

在单位时间内沿 Ox 轴方向从 AD 边流入的量

为 $u(x, y) \cdot \Delta y$ (为简单起见,设密度 $\rho = 1$),而同时从 BC 边流出的量为 $u(x + \Delta x, y) \Delta y$. 于是,在单位时间内,沿 Ox 轴方向从单位面积的小正方形内流出的量为

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x \Delta y} \Delta y.$$

当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, 此比值的极限 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 就是在点 (x, y) 沿 Ox 轴方向的发散强度. 类似地, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 就是在点 (x, y) 沿 Oy 轴方向的发散强度. 于是, 在点 (x, y) 处液体的发散强度为 $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, 而对于面积元 $dxdy$ 的流量即为

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

因此, 总的流量为

$$Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy.$$

另一解法: 令点 P 为围线 C 上的任一点, \vec{n} 为向外法线, 考虑曲线元素 ds . 单位时间内通过 ds 弧段的流量为

$$dQ = \omega_n ds,$$

其中 ω_n 为点 P 处的流速 $\vec{\omega}$ 在法向量 \vec{n} 上的投影: $\omega_n = \vec{\omega} \cdot \vec{n}$. 于是, 所求的通过曲线 C 的流量为

$$Q = \int_C \omega_n ds.$$

但是, $\omega_n = \vec{\omega} \cdot \vec{n} = u \cos(n, x) + v \cos(n, y) = u \frac{dy}{ds} - v \cdot \frac{dx}{ds}$, 故得

$$Q = \int_C u dy - v dx.$$

应用格林公式, 即得

$$Q = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

(2) $d\Gamma = \vec{\omega} \cdot d\vec{r} = u dx + v dy$, 故

$$\Gamma = \int_C u dx + v dy = \iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy.$$

若流场无源泉无漏孔及无旋度, 则对于流场中任何围线 C 及其所包围的域 S , 均有

$$Q = 0 \text{ 及 } \Gamma = 0.$$

于是, 在流场中的每一点, 均有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ 及 } \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

或
$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} \text{ 及 } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

这就是 u, v 所应满足的方程.

*) 编者注: 从原书答案来看, 本题叙述有误. 最后的问题中“流体是不可压缩”应改为“流场无源泉、无漏孔”, 而在题目开始, 应假定流体不可压缩.

**) 参看 4324 题的推导.

4457. 证明: 场

$$\vec{a} = yz(2x + y + z)\vec{i} + xz(x + 2y + z)\vec{j} + xy(x + y + 2z)\vec{k}$$

是有势场, 并求这个场的势.

解 由于对空间任一点 (x, y, z) 均有

$$\text{rot } \vec{a} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [xy(x + y + 2z)] - \frac{\partial}{\partial x} [xz(x + 2y + z)] \right\} \vec{i}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial z} [yz(2x + y + z)] \right. \\
& - \left. \frac{\partial}{\partial x} [xy(x + y + 2z)] \right\} \dot{j} \\
& + \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [xz(x + 2y + z)] \right. \\
& - \left. \frac{\partial}{\partial y} [yz(2x + y + z)] \right\} \dot{k} \\
& = 0,
\end{aligned}$$

故 \vec{a} 为有势场.

又由于势 u 满足

$$\begin{aligned}
du &= \vec{a} \cdot d\vec{r} \\
&= yz(2x + y + z)dx + xz(x + 2y + z)dy \\
&\quad + xy(x + y + 2z)dz \\
&= xyz(dx + dy + dz) + (x + y + z) \\
&\quad \cdot (yzdx + zxdy + xydz) \\
&= xyzd(x + y + z) + (x + y + z)d(xyz) \\
&= d[xyz(x + y + z)],
\end{aligned}$$

故势 $u = xyz(x + y + z) + C$, 其中 C 为任意常数.

4458. 求由位于坐标原点的质量 m 所产生的引力场

$$\vec{a} = -\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

的势.

解 由于

$$\begin{aligned}
du &= \vec{a} \cdot d\vec{r} = -\frac{m}{r^3}(xdx + ydy + zdz) \\
&= -\frac{m}{2r^3}d(r^2)
\end{aligned}$$

$$= -\frac{m}{r^2}dr = d\left(\frac{m}{r}\right),$$

故势 $u = \frac{m}{r} + C$ (C 为任意常数), 通常取 $u = \frac{m}{r}$ ($r \neq 0$).

4459. 求位置在 $M_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 各点的质量系 $m_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 所产生引力场的势.

解 引力场 $\vec{a} = -\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i^3} \vec{r}_i$, 其中 r_i 为动点 M 与 M_i 之间的距离. 由于

$$du = \vec{a} \cdot d\vec{r} = d\left(\sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}\right),$$

故势 $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i} + C$ (C 为任意常数), 通常取 $u = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{r_i}$.

4460. 证明: 场 $\vec{a} = f(r)\vec{r}$ (其中 $f(r)$ 是单值连续函数) 是有势场. 求这个场的势.

解 利用 4436 题 (σ) 的结果, 即知 $\text{rot}(f(r)\vec{r}) = \vec{0}$. 故 \vec{a} 为有势场. 又由于

$$\begin{aligned} du &= \vec{a} \cdot d\vec{r} = xf(r)dx + yf(r)dy + zf(r)dz \\ &= \frac{1}{2}f(r)d(r^2) = rf(r)dr, \end{aligned}$$

故势 $u = \int_{r_0}^r tf(t)dt$, 其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4461. 证明公式

$$\text{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} = - \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r^2}$$

$$+ \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r},$$

其中 S 为包含体积 V 的曲面, \vec{n} 为曲面 S 的外法线, r 为点 $P(x, y, z)$ 与点 $Q(\xi, \eta, \zeta)$ 两点间的距离.

证 首先指出, 题中需假定 $\rho(Q)$ 在 V 上具有连续的导函数.

i) 先设点 $P(x, y, z)$ 在 V 之外. 令

$$f(x, y, z) = \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r}. \quad (1)$$

显然, 右端积分的被积函数对参变量 x, y, z 都具有连续的偏导函数, 故可在积分号下求导数, 得

$$\text{grad}_P f = \iiint_V \rho(Q) \text{grad}_P \frac{1}{r} dV. \quad (2)$$

又由于

$$\text{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3} = -\text{grad}_Q \frac{1}{r}, \vec{r} = \vec{QP}.$$

代入(2)式, 得

$$\text{grad}_P f = - \iiint_V \rho(Q) \text{grad}_Q \frac{1}{r} dV. \quad (3)$$

在公式(4408 题(I))

$$\text{grad}_Q(\varphi\psi) = \varphi \text{grad}_Q \psi + \psi \text{grad}_Q \varphi$$

中, 令 $\varphi = \rho(Q)$, $\psi = \frac{1}{r}$, 再代入(3)式, 得

$$\begin{aligned} \text{grad}_P f &= - \iiint_V \text{grad}_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r} \right) dV \\ &\quad + \iiint_V \text{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

根据奥氏公式, 有

$$\iiint_V \operatorname{grad}_Q \left| \frac{\rho(Q)}{r} \right| dV = \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r}. \quad (5)$$

将上式代入(4)式,即得

$$\operatorname{grad}_P f = - \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r} + \iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}.$$

ii) 现设点 $P(x, y, z)$ 在 V 的内部. 仍按(1)式令 $f(x, y, z)$. 注意, 这时(1)式右端的积分为广义重积分(点 P 为瑕点); 但易知它收敛, 因为在以 P 点为中心, ε 为半径的球域 V_ε 上的积分满足 ($M = \max_{Q \in V} |\rho(Q)|$)

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{V_\varepsilon} \frac{\rho(Q)}{r} dV \right| &\leq \iiint_{V_\varepsilon} \frac{|\rho(Q)|}{r} dV \leq M \iiint_{V_\varepsilon} \frac{dV}{r} \\ &= M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\varepsilon \frac{r^2}{r} dr = 2M\pi\varepsilon^2 \rightarrow 0 \quad (\text{当 } \varepsilon \rightarrow +0 \end{aligned}$$

时).

我们证明: 这时仍可将(1)式的积分在积分号下求导数而得(2)式. 事实上, 由于

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{V_\varepsilon} \rho(Q) \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} dV \right| &\leq \iiint_{V_\varepsilon} \left| \rho(Q) \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} \right| dV \\ &= \iiint_{V_\varepsilon} \left| -\rho(Q) \frac{x-\xi}{r^3} \right| dV \leq M \iiint_{V_\varepsilon} \frac{dV}{r^2} \\ &= M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^\varepsilon \frac{r^2}{r^2} dr = 4M\pi\varepsilon, \end{aligned}$$

故积分

$$\iiint_V \rho(Q) \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} dV$$

关于 x 一致收敛. 于是, (1)式右端的积分可在积分号下

关于 x 求偏导函数, 得

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial x} dV. \quad (6)$$

同理可得

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial y} dV, \quad (7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \iiint_V \rho(Q) \frac{\partial(\frac{1}{r})}{\partial z} dV. \quad (8)$$

由(6), (7), (8)三式, 即得(2)式, 仿i)段办法, 可得(3)式与(4)式(注意, 仿前, 可知(4)式右端两个积分都收敛). 但不能直接对 V 应用奥氏公式而得(5)式, 因为有瑕点 P , 但显然可对 $V - V_\epsilon$, 应用奥氏公式, 得

$$\iiint_{V-V_\epsilon} \text{grad}_Q \left(\frac{\rho(Q)}{r} \right) dV = \iint_{S+S_\epsilon} \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r}, \quad (9)$$

其中 S_ϵ 为球域 V_ϵ 的边界(球面), 在 S_ϵ 上的 \vec{n} 是指向点 P 的. 由于

$$\begin{aligned} \left| \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \vec{n} \frac{dS}{r} \right| &\leq \sqrt{3} \iint_{S_\epsilon} |\rho(\theta)| \frac{dS}{r} \leq \sqrt{3} M \iint_{S_\epsilon} \frac{dS}{r} \\ &= \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} \iint_{S_\epsilon} dS = \frac{\sqrt{3} M}{\epsilon} \cdot 4\pi\epsilon^2 = 4\sqrt{3}\pi M\epsilon, \end{aligned}$$

故

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \iint_{S_\epsilon} \rho(\theta) \vec{n} \frac{dS}{r} = 0.$$

于是, 在(9)式两端令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限, 即得(5)式. 以

(5) 式代入(4)式,最后得所要证的公式

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_P \left\{ \iiint_V \rho(Q) \frac{dV}{r} \right\} &= - \iint_S \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r} \\ &+ \iiint_V \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}. \end{aligned}$$

证毕.

4462. 证明:若 $\vec{a} = \operatorname{grad} u$, 其中

$$u(x, y, z) = - \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta$$

及 $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$,

则 $\operatorname{div} \vec{a} = \rho(x, y, z)$

(假定对应的积分有意义).

证 首先指出,为保证题述的广义重积分(既是无穷积分,又是瑕积分)的存在性以及下面要用到的积分号下求导数的合理性,一般我们需假定: $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ 在全空间具有连续的偏导函数,并且当 $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ 充分大时($R \geq R_0$),有

$$|\rho(\xi, \eta, \zeta)| \leq \frac{M}{R^{2+\alpha}}, \quad (1)$$

其中 $M > 0, \alpha > 0$ 是两个常数.

考虑空间任一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 用 V_0 表示以 P_0 为中心,1 为半径的单位球域.我们先限制点 $P(x, y, z)$ 只在 V_0 中变动. 又用 V_1 表示以 P_0 为中心,2 为半径的球域, V_2 表示整个空间去掉 V_1 所剩下的部分(无界域). 令

$$u_1(x, y, z) = \iiint_{V_1} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \quad (2)$$

$$u_2(x, y, z) = \iiint_{V_2} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta. \quad (3)$$

于是,

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} [u_1(x, y, z) + u_2(x, y, z)]. \quad (4)$$

(2) 式右端为瑕积分, 在 4461 题证明的第 ii) 段中已证它是收敛的; (3) 式右端为无穷积分, 下面证明它收敛.

令

$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$, $R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}$, 则当 $R \geq R_1$ 时, 有 $R \geq R_0$ (从而 (1) 式满足), 且 $R \geq 2(r_0 + 1)$. 以 Q 表示点 (ξ, η, ζ) , O 表示原点 $(0, 0, 0)$. 由于三角形两边之和大于第三边, 故 (注意 $P \in V_0$).

$$R = \overline{OQ} \leq \overline{OP} + \overline{PQ} \leq r_0 + 1 + r \leq \frac{R}{2} + r,$$

从而

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_1^2} \left| \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)}{r} \right| d\xi d\eta d\zeta \\ & \leq M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r R^{2+\sigma}} \\ & \leq 2M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_1^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{3+\sigma}} \\ & = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{R^2}{R^{3+\sigma}} dR \\ & = 2M \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_{R_1}^{+\infty} \frac{dR}{R^{1+\sigma}} \end{aligned}$$

$$= \frac{8M\pi}{\alpha R_1^{\alpha}} < +\infty, \quad (5)$$

故(3)式右端的无穷积分收敛.

由(4)式知 $u(x, y, z)$ 有定义. 由于 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = \Delta u$, 故我们只要证明

$$\Delta u = \rho(x, y, z). \quad (6)$$

我们证明(3)式右端的无穷积分可在积分号下求导数两次:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (8)$$

为此, 只要证明(7)式右端的积分和(8)式右端的积分都关于 $(x, y, z) \in V_0$ 一致收敛. 由于

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\xi - x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^3} + \frac{3(\xi - x)^2}{r^5},$$

故仿(5)式之推导, 可得: 当 $R_2 > R_1 = \max\{R_0, 2(r_0 + 1)\}$ 时, 对一切 $(x, y, z) \in V_0$, 有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \leq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \\ & \leq M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^2 R_2^{2+\alpha}} \leq 4M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R_2^{4+\alpha}} \\ & = \frac{16M\pi}{(1+\alpha)R_2^{1+\alpha}}, \\ & \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \left| \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1}{r} \right) \right| d\xi d\eta d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq 4M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{r^3 R^{2+\alpha}} \\ &\leq 32M \iiint_{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq R_2^2} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{R^{5+\alpha}} \\ &= \frac{128M\pi}{(2+\alpha)R_2^{2+\alpha}} \end{aligned}$$

由此可知, (7) 式右端的积分和 (8) 式右端的积分都关于 $(x, y, z) \in V_0$ 一致收敛. 因此, (7) 式与 (8) 式当 $(x, y, z) \in V_0$ 时成立. 同理可证, 当 $(x, y, z) \in V_0$ 时, 有

$$\frac{\partial u_2}{\partial y^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial y^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta, \quad (9)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z^2} = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial z^2} \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta. \quad (10)$$

将 (8), (9), (10) 三式相加, 即得 (注意到 $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = 0$)

$$\Delta u_2 = \iiint_{V_2} \rho(\xi, \eta, \zeta) \Delta \left(\frac{1}{r} \right) d\xi d\eta d\zeta = 0. \quad (11)$$

下面再求 $\Delta u_1 = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1)$. 由 4461 题的结果知

$$\operatorname{grad} u_1 = - \int_{S_1} \rho(Q) \vec{n} \frac{dS}{r} + \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \frac{dV}{r}, \quad (12)$$

其中 S_1 表示 V_1 的边界 (球面). 显然, 当 $P(x, y, z) \in V_0$ 时, (12) 式右端的第一个积分 (面积分) 的被积函数具有对于 x, y 及 z 的连续偏导函数, 故可在积分号下求对于 x, y 及 z 的偏导函数. 另外, 仿照 4461 题 ii) 段之证可知 (12) 式右端的第二个积分 (三重积分) 也可在积分号下求对于 x, y 及 z 的偏导函数. 于是, 得

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{grad} u_1) = & - \iint_{S_1} \operatorname{div}_P \left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r} \right] dS \\ & + \iiint_{V_1} \operatorname{div}_P \left[\frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] dV. \quad (13) \end{aligned}$$

利用公式 $\operatorname{div}(va) = v \operatorname{div} a + \vec{a} \cdot \operatorname{grad} v$ (4424 题(B)), 可知(注意到 $\rho(Q)\vec{n}$ 及 $\operatorname{grad}_Q \rho(Q)$ 均与 P 无关)

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_P \left[\frac{\rho(Q)\vec{n}}{r} \right] &= \rho(Q)\vec{n} \cdot \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= - \rho(Q)\vec{n} \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) = - \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \operatorname{div}_P \left[\frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \right] &= \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_P \left(\frac{1}{r} \right) \\ &= - \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

代入(13)式, 得

$$\begin{aligned} \Delta u_1 = & \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS - \iiint_{V_1} \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \\ & \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) dV. \quad (14) \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] &= \rho(Q) \Delta_Q \left(\frac{1}{r} \right) + \operatorname{grad}_Q \rho(Q) \\ & \cdot \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right), \text{ 而 } \Delta_Q \left(\frac{1}{r} \right) = 0 (Q \neq P), \text{ 故 (14) 式可写} \\ & \text{为} \end{aligned}$$

$$\Delta u_1 = \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS$$

$$- \iiint_{V_1} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV. \quad (15)$$

下面计算(15)式中的三重积分,用 Ω_ϵ 表示以点 $P(x, y, z)$ 为中心, ϵ 为半径的球域,其边界(球面)记为 S_ϵ .对 $V_1 - \Omega_\epsilon$ 应用奥氏公式,得

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_1 - \Omega_\epsilon} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV \\ &= \iint_{S_1 + S_\epsilon} \rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \vec{n} dS \\ &= \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS, \quad (16) \end{aligned}$$

其中 \vec{n} 是向外法线,从而在 S_ϵ 上是指向点 $P(x, y, z)$ 的.由中值定理知

$$\begin{aligned} & \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = - \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS \\ &= \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) \frac{dS}{r^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \iint_{S_\epsilon} \rho(Q) dS \\ &= \frac{1}{\epsilon^2} \cdot \rho(Q_\epsilon) \cdot 4\pi\epsilon^2 \\ &= 4\pi\rho(Q_\epsilon), \end{aligned}$$

其中 Q_ϵ 是球面 S_ϵ 上的某一点.代入(16)式,得

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_1 - \Omega_\epsilon} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV \\ &= \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(Q_\epsilon), \end{aligned}$$

两端令 $\epsilon \rightarrow +0$ 取极限,得

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_1} \operatorname{div}_Q \left[\rho(Q) \operatorname{grad}_Q \left(\frac{1}{r} \right) \right] dV \\ &= \iint_{S_1} \rho(Q) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS + 4\pi\rho(P), \end{aligned}$$

再以此式代入(15)式,得

$$\Delta u_1 = -4\pi\rho(x, y, z). \quad (17)$$

由(17)式,(11)式以及(4)式,即得(6)式.于是,(6)式对一切点 $P(x, y, z) \in V_0$ 成立.由于 V_0 的中心 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是任意的(可为空间任一点),故知(6)式对空间任一点都成立.证毕.