2022-10-29

# 基础物理学 2 半期辅导讲义

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho^2}$$

作者：未央书院 鲁睿 潘佳铭 解奕扬

指导教师 陈少敏

# 目　录



[1]本讲义 LaTeX 源代码（github 仓库，如果觉得有帮助，麻烦点个 Star），访问个人博客下载本讲义最新版本

# 1

# 几何光学

## 1.1 临界光线

**性质 1.1 最小偏向角**

当一束光在顶角为 $\alpha$、折射率为 $n$ 的三棱镜中发生两次折射时，其偏向角有极小值，当入射角和出射角相等时取极小值，最小偏向角满足的方程如下

$$n\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{\delta_{\min}+\alpha}{2}\right)$$

$n_1\sin i_1$

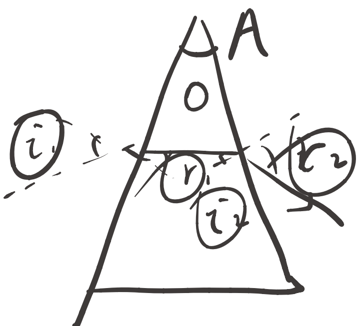
$=n_2\sin i_2$

该性质的一个直观想法是，由于光路可逆原理，对称角附近偏离相同角度时互为可逆光，总偏向角不变，故为极值，至于是极大值还是极小值需要计算二阶导数

**证明.** 设第一次折射对应的入射角和出射角分别为 $i_1, r_1$，第二次折射对应的入射角和出射角分别为 $i_2, r_2$，有几何关系 $\frac{\pi}{2}-r_1+\frac{\pi}{2}-i_2+A=\pi$，总偏折角度

$$\Delta=i_1-r_1+r_2-i_2=i_1+r_2-A$$

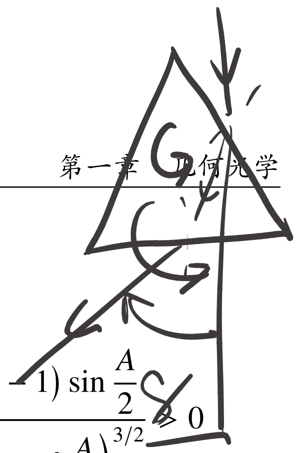
由折射定律关系 $\sin i_1=n\sin r_1, n\sin i_2=\sin r_2$，将总偏折角度转换为 $r_1$ 的函数



$$\Delta(r_1)=\arcsin(n\sin r_1)+\arcsin(n\sin(A-r_1))-A$$

$r_1=\frac{A}{2}$ $f'(r_1)=0$

$f''$



上述函数关系具有对称性 $\Delta(r_1) = \Delta(A - r_1)$，在 $r_1 = \dfrac{A}{2}$ 处求二阶导

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\Delta}{\mathrm{d}r_1^2}\right|_{r_1=\frac{A}{2}} = \frac{n\left(n^2-1\right)\sin r_1}{\left(1-n^2\sin^2 r_1\right)^{3/2}} + \frac{n\left(n^2-1\right)\sin(A-r_1)}{\left(1-n^2\sin^2(A-r_1)\right)^{3/2}} = \frac{2n\left(n^2-1\right)\sin\frac{A}{2}}{\left(1-n^2\sin^2\frac{A}{2}\right)^{3/2}} > 0$$

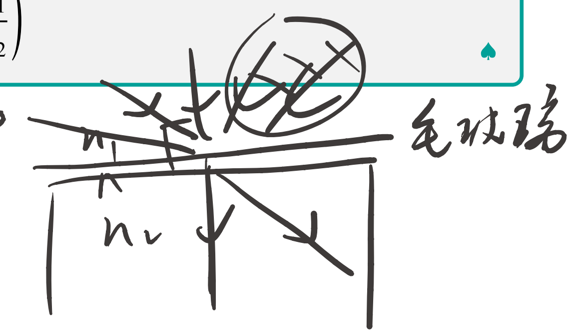
从而对应极小值，代表最小偏向角。 □

**性质 1.2 掠入射**

光从折射率为 $n_1$ 的介质均匀地射入折射率为 $n_2$ 的介质时（$n_1 < n_2$），出射临界角

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\right)$$

由折射定律以及 $\sin i_1 \leq 1$ 易证。

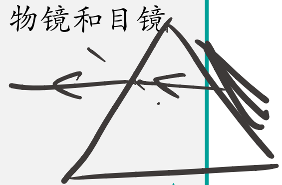



## 1.2 光学仪器

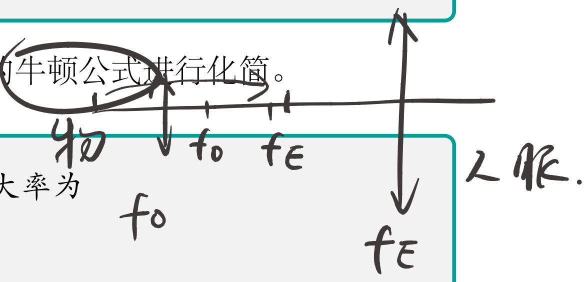
**性质 1.3 显微镜**

设显微镜的光学筒长 $\Delta = d - f_O - f_E$，人眼明视距离为 $s_0 (\approx 25\,\mathrm{cm})$，物镜和目镜的焦距为 $f_O$ 和 $f_E$，其角放大率为

$$\boxed{M = \frac{\Delta s_0}{f_O f_E}}$$



证明中约定物体成像在明视距离，并使用凸透镜的牛顿公式进行化简。




**性质 1.4 望远镜**

设望远镜的物镜和目镜的焦距为 $f_O$ 和 $f_E$，则角放大率为

$$M = \frac{f_O}{f_E}$$

$y_0$

**证明.** 使用凸透镜焦平面的特性，当平行光入射至凸透镜时（可以倾斜），其汇聚于焦平面上的一点（即**焦平面上的点共轭于无穷远**），设汇聚点距离光轴为 $d$，则视场角度和原始角度之比为放大率 $M = \dfrac{d/f_E}{d/f_O} = \dfrac{f_O}{f_E}$。 $>1$ □

$d$

$f_0 > f_E$

# 2

# 波动光学

## 2.1 干涉

### 2.1.1 杨氏双缝及其变形

**性质 2.1 经典杨氏双缝**

当一束光经过两个相距为 $d$（$d$ 很小）的小孔之后，在距离小孔为 $D$ 的干涉屏上出现干涉条纹，其间距为

$$\Delta x = \frac{D}{d}\lambda$$

$\lambda \rightarrow \frac{D}{d}$

从公式上看，相当于把波长放大 $\frac{D}{d}$ 倍，这是一种最典型的**分波前**干涉的方法。

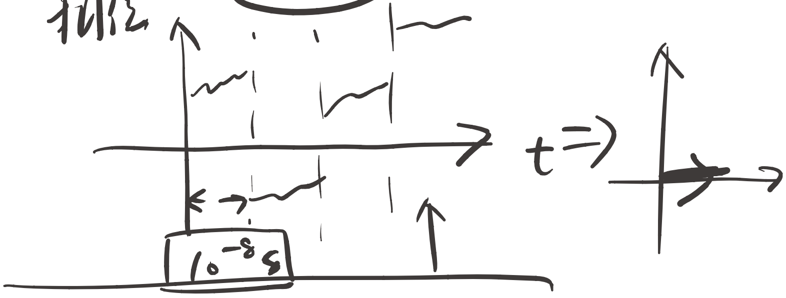
**性质 2.2 杨氏双缝变形**

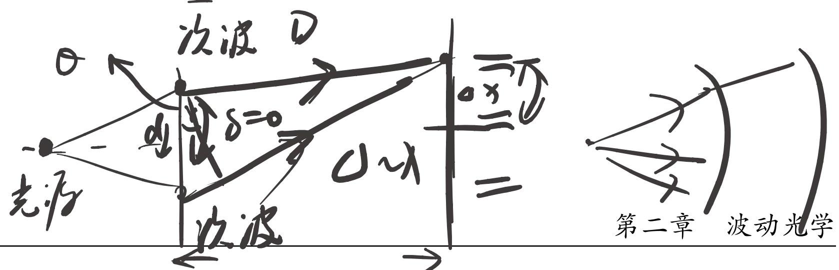
各种杨氏双缝变式本质上也是两个点光源进行干涉，只是前者更加直接

| 干涉名称 | 等效 $d$ | 等效 $D$ |
|---|---|---|
| 双棱镜 | 虚光源距离 $2s_1(n-1)\alpha$ | 虚光源与干涉平面的间距 $s_1+s_2$ |
| 劳埃镜 | 光源与镜面像距离 $2d$ | 光源与干涉平面的间距 $D$ |
| 对切透镜 | 两个半透镜成像距离 $2y'$ | 成像平面与干涉平面的间距 $L-v$ |

以上都是将光束分成两束不同的子波进行干涉，都属于**分波前干涉**，还有一种干涉类型为**分振幅干涉**。

$\boxed{\text{现代}}$






$\theta \approx \Delta x / D \quad \theta \cdot d = \lambda$

**定义 2.3 干涉类型**

- **分波前法**：让光波通过并排的两个小孔或利用反射和折射方法，把光波的波前分割出两个部分（本质上是**惠更斯原理**），形成两个次波重新叠加发生干涉；
- **分振幅法**：利用光在介质表面分割产生两个反射光或两透射光波（反射和透射如何分配，本质上是**菲涅尔衍射公式**），两者走过不同的光程，重新叠加并发生干涉。♣

### 2.1.2 薄膜干涉和迈克尔逊干涉仪

**性质 2.4 等厚干涉光程差**

一束光从空气射入厚度为 $h$ 的薄膜，其折射角为 $i$，则该束光在薄膜上下反射的两束光光程差为

$$\Delta = \boxed{2nh\cos i}$$

♠

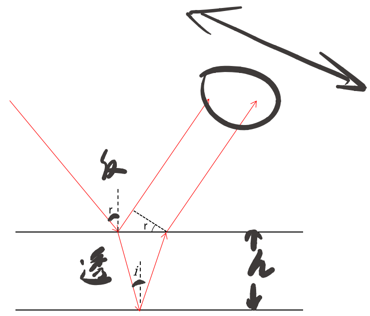
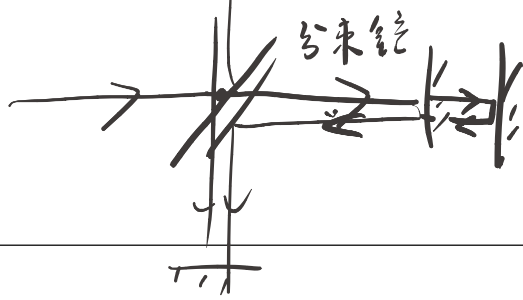



图 2–1 等厚干涉光路图

**证明.** 由折射定律 $\sin r = n\sin i$，而上束光多走了 $x_1 = h \cdot 2\tan i \cdot \sin r$，下束光多走了 $x_2 = n \cdot \dfrac{2h}{\cos i}$，则光程差计算为

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2nh}{\cos i} - 2h\tan i \sin r = 2h\left(\frac{n}{\cos i} - \frac{\sin i \cdot \sin r}{\cos i}\right) \\ &= 2h\left(\frac{n}{\cos i} - \frac{\sin i \cdot n\sin i}{\cos i}\right) = 2nh\frac{1-\sin^2 i}{\cos i} = 2nh\cos i\end{aligned}$$

□



**性质 2.5 迈克尔逊干涉仪光程差**

迈克尔逊干涉仪的结构类似“麻将”局，东西南北方都要经过，其光程差为长度差的两倍

$$\Delta = 2(l_1 - l_2)$$

## 2.2 衍射

- **菲涅尔衍射 (近场衍射)**: 光源或观察屏到衍射屏的距离为**有限**的衍射。
- **夫琅禾费衍射 (远场衍射)**: 光源和观察屏到衍射屏的距离均为**无限**的衍射。

### 2.2.1 半波带法

- **夫琅禾费单缝衍射的半波带法**

把单缝分割成一系列条带,相邻条带之间的光程逐个相差半个波长,称为半波带。相邻半波带贡献的复振幅相位差为 $\pi$，在图示中表现为相邻矢量，$A_k$ 和 $A_{k+1}$ 向。容易知道，每条半波带的贡献相等，不妨记作 $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$

当半波带总数为奇数时，$A_{total} = A$，偶数时，$A_{total} = 0$

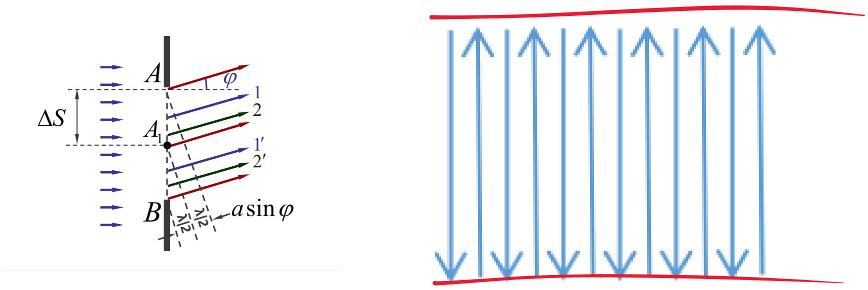
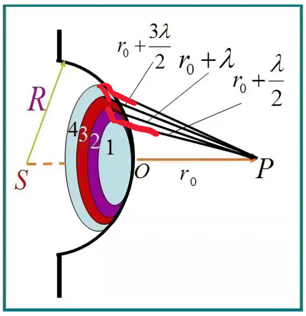



图 2–2 夫琅禾费单缝衍射的半波带法图例

- **菲涅尔圆孔衍射的半波带法**

波前分割为一系列环形带，相邻环形带到像点的距离逐个相差半个波长，称为半波带。相邻半波带贡献的复振幅相位差为 $\pi$，在图示中表现为相邻矢量 $A_k$，和 $A_{k+1}$ 反向。

不同于单缝衍射，由于倾斜因子影响，每条半波带的贡献，逐渐减小 $\lim_{k\to\infty} A_K = 0$



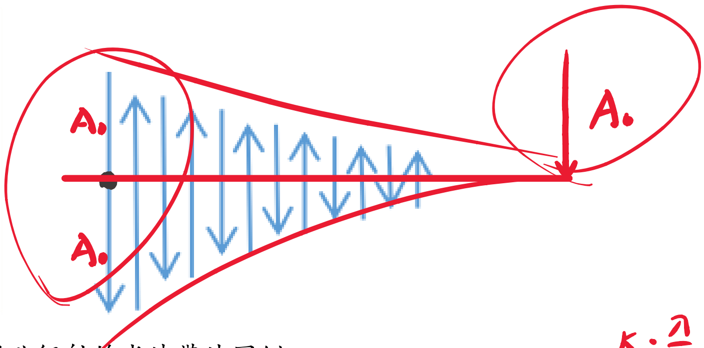




图 2–3 菲涅尔圆孔衍射的半波带法图例

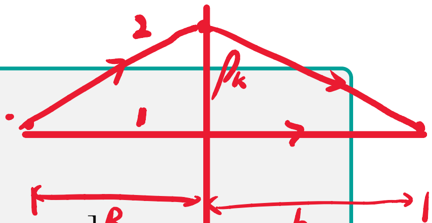
$k\cdot\frac{\lambda}{2}$

**性质 2.6 菲涅尔波带片**

$\rho_k$ $k\cdot\frac{\lambda}{2}$

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{b}=\frac{k\lambda}{\rho_k^2}.$$

$\boxed{\rho_k}$




当物距 $R$, 像距 $b$ 时 $\left[\begin{array}{l}1.\ 通过\rho_k 的光线\\ 2.\ 通过\rho_0=0 的光线(与光轴重合的光线)\end{array}\right]$ 光程差为 $\boxed{\frac{k\lambda}{2}}$

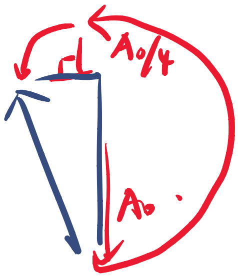
$1\times10^{-10}$ m

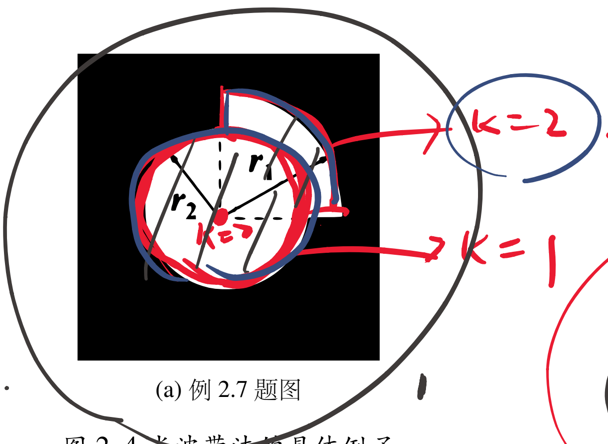
**例 2.7** 单色平面光波波长 5000 Å，正入射到如下图所示的衍射屏上，$r_1=\sqrt{2}$ mm, $r_2=1$ mm，轴上观察点离衍射屏 2 m，计算观察点处的振幅和强度(用 $A_0$ 和 $I_0$ 表示)。

$R\to+\infty$　$b$　$\rho_1$　$\rho_2$

✍

$\to k_1=1$　$k_2=2$




(a) 例 2.7 题图

$k=\frac{3}{2}$.

图 2–4 半波带法的具体例子

$\underline{2}$.

$A_0$　$A_0^2=I_0$　$(\frac{3}{2}A_0)^2=2.25I_0$.

$1+2=0$

$1+2=$ 自由

$(\frac{1}{2}A_0)^2=\frac{1}{4}I_0$

$\frac{3}{2}A_0\uparrow$　$-\frac{1}{2}A_0\downarrow$　$\uparrow A_0$

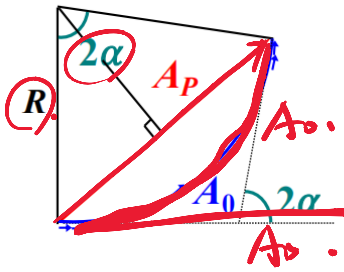
### 2.2.2 振幅矢量法

► **夫琅禾费单缝衍射的振幅矢量法**

振幅矢量法不要求 $\sin\varphi = k\dfrac{\lambda}{2}$，可以视作半波带法的细化 *i.e.* 普适版本。具体说来，它将单缝分割成 $dx \to 0$ 的微元，相位差 $d\theta = \dfrac{2\pi}{\lambda}dx\sin\varphi$，于是总相位差

$$\cancel{2}\,\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}a\sin\varphi$$

因此, 若将 $\varphi = 0 \equiv \theta$ 时的振幅记作 $A_0$, 从而绘制矢量图得到




$A_0 = 2\alpha \cdot R$

$A_p = 2R\sin\alpha$

$\dfrac{A_p}{A_0} = \dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$

图 2–5 光栅振幅矢量法图例

**性质 2.8 单缝衍射因子**

在单缝衍射中，定义 $\alpha = \dfrac{\pi a\sin\theta}{\lambda}$，则振幅和光强分布如下

$$A_\varphi = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)A_0 \Rightarrow I_\theta = \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 I_0$$

♠

► **菲涅尔圆孔衍射的振幅矢量法**

**定理 2.9 菲涅尔衍射公式**

$$\widetilde{U}(P) = K\iint_\Sigma F(\theta_0,\theta)\frac{e^{ikr}}{r}\widetilde{U_0}(Q)\mathrm{d}\Sigma$$

$F$ : 倾斜因子 $\quad \dfrac{e^{ikr}}{r}$ : 距离因子 $\quad \widetilde{U_0}(Q)\mathrm{d}\Sigma$ : 次波源强度

♡

当 $\Sigma$ 代表点波源产生的球面波波前，$\widetilde{U_0}(Q)$ 为常量，$\dfrac{\mathrm{d}\Sigma}{r} \propto \mathrm{d}r$，故上式可写作

$$\widetilde{U}(P) = C\int_\Sigma e^{ik(r-r_0)}F(\theta_0\theta)\,\mathrm{d}r$$

由于 $r$ 变化时 $e^{ik(r-r_0)}$ 变化较快，$F(\theta_0\theta)$ 变化较慢，所以我们先忽略 $F(\theta_0\theta)$ 的变化，此时

$$\widetilde{U}(P) = C' \int_{\Sigma} e^{ik(r-r_0)} \mathrm{d}r$$

这一积分可以用复平面上的矢量图来表示。

至此，与夫琅禾费单缝衍射的振幅矢量法别无二致。接下来考虑倾斜因子，随着 $r$ 的增大 *i.e.* 倾角的增倾斜因子 $F \to 0$，于是图中半径 $R \to 0$，形成菲涅尔螺线。可以发现若将每个半圆用其直径来代替，则退化成半波带法。

### 2.2.3 多缝干涉和艾里斑

若光栅缝间距为 $d$，则缝间相位差

$$2\beta = \delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\varphi$$

Thus，若将单缝振幅记作 $A_1$，矢量图如下

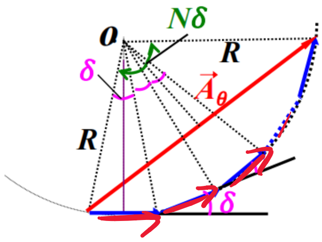



图 2–6 菲涅尔圆孔衍射的振幅矢量法图例

$$A_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right) A_1 \Rightarrow I_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 I_1$$

这正是光栅的缝间干涉因子。于是

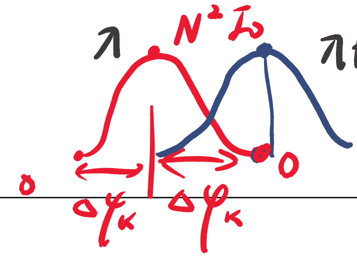
**性质 2.10 光栅衍射因子**

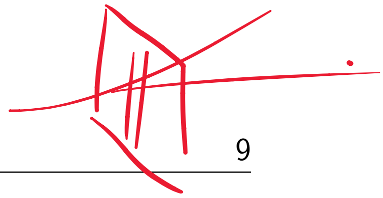
在光栅衍射中，定义 $\alpha = \dfrac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}$，$\beta = \dfrac{\pi d \sin\varphi}{\lambda}$，则振幅和光强分布如下

$$A_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) A_0 \Rightarrow I_\varphi = \left(\frac{\sin N\beta}{\sin\beta}\right)^2 \cancel{\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2} I_0$$

$<d$

$\cancel{\times\frac{5}{2}}$ $\partial = \frac{\pi a \sin\varphi}{\lambda}$. ↑



**定义 2.11 光栅本领**

- $k$ 级主极大条件: $\beta_k = k\pi \Leftrightarrow d\sin\varphi_k = k\lambda$ ( (微分: $d\cos\varphi_k\delta\varphi_k = \delta(k\lambda)$))
- $k$ 级主极大半角宽: $\Delta\beta_k = \frac{\pi}{N} \Leftrightarrow d\cos\varphi_k\Delta\varphi_k = \frac{\lambda}{N} \Leftrightarrow \Delta\varphi_k = \frac{\lambda}{Nd\cos\varphi_k}$
- 分辨本领: $d\sin(\varphi_k \pm \Delta\varphi_k) = k(\lambda \pm \delta\lambda) \Leftrightarrow d\cos\varphi_k\Delta\varphi_k = k\delta\lambda = \frac{\lambda}{N} \Leftrightarrow R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = k$
- 角色散本领: $D_\theta \equiv \frac{\delta\varphi_k}{\delta\lambda} = \frac{k}{d\cos\theta_k}$
- 线色散本领: $D_l = f \cdot D_\theta = \frac{kf}{d\cos\theta_k}$

♣

**例 2.12** 一个三狭缝衍射屏, 缝宽均为 $a$, 彼此间距为 $d$, 中间缝盖有可以引起 180° 相位改变的滤光片, 波长为 $\lambda$ 的单色光正入射, 计算下列各种情况下的衍射角

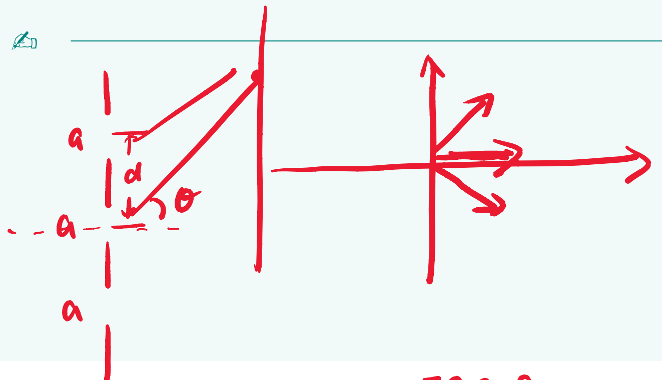
(1) 第一衍射极小;

(2) 第一干涉极小;

(3) 第一干涉极大。

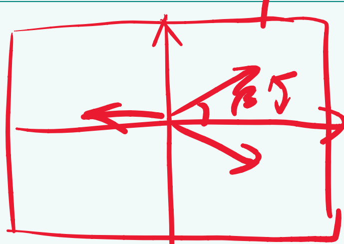
✍

振幅矢量法.




180°

⇒




$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$

$A(\beta) = (2\cos\beta - 1)A_0 = 0$

$\in[-1,1]$

(1) $\frac{2a\sin\theta}{\lambda} = 2 \Rightarrow \theta = \arcsin(\frac{\lambda}{a})$ ⊝ $\frac{\lambda}{d}$ $|-3A_0|_{max}$

(2) $\beta = \pm\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{\lambda} d\sin\theta$

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{6d}$

(3) $\beta = 2\pi \Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{2d}$.

**性质 2.13 艾里斑**

艾里斑是点光源通过理想透镜成像时，由于绕射而在焦点处形成的光斑，其最小分辨角以及分辨本领分别公式为:

$$\delta\theta = \theta_1 \approx 1.22\frac{\lambda}{D}, R \equiv \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

♠

## 2.3 偏振

### 2.3.1 菲涅尔反射折射公式

斯托克斯公式、两个光路图推导公式定性推导、半波损失、全反射、隐失波的解释

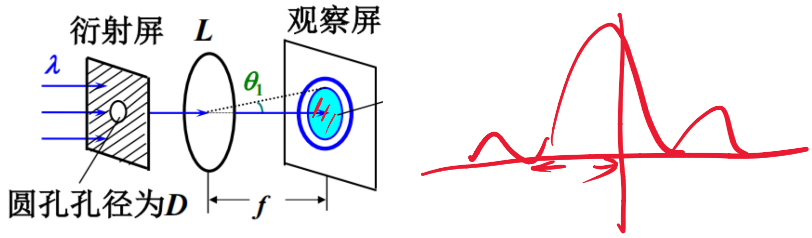



图 2–7 艾里斑示意图

**性质 2.14 斯托克斯倒逆关系**

如下图所示，设光从介质 A 传播到介质 B 的反射系数和透射系数分别为 $r,t$，从介质 B 到介质 A 的反射系数和透射为 $r',t'$，以下关系式成立（四个系数均为复数）

$$\begin{cases} r' = -r \\ r^2 + tt' = 1 \end{cases}$$

**证明.** 如图所示，由于光路可逆，将反射光和透射光按照原路照射返回，对应振幅不变即可。 □

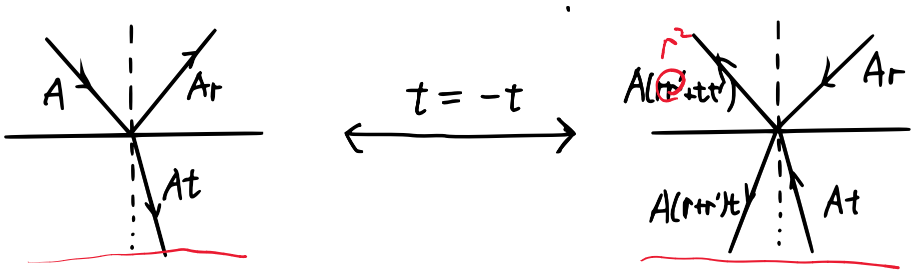



图 2–8 斯托克斯倒逆关系示意图

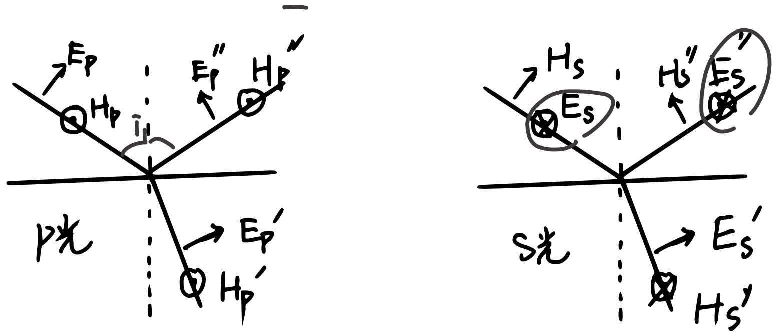
**性质 2.15 菲涅尔公式**

光在两种不同折射率的介质中传播时，其反射光和折射光在垂直平面和平行平面分量（$p$ 光和 $s$ 光）对应系数如下：

$$\begin{cases} r_s = \dfrac{n_1\cos i_1 - n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2} & t_s = \dfrac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2} \\ r_p = \dfrac{n_2\cos i_1 - n_1\cos i_2}{n_1\cos i_2 + n_2\cos i_1} & t_p = \dfrac{2n_1\cos i_1}{n_1\cos i_2 + n_2\cos i_1} \end{cases}$$

$r_p > 0$

**证明.** 该公式推导需要运用到电磁场的边界条件，此处从略，可点击此链接查看。 □




$- = e^{i\pi}$

图 2–9 菲涅尔公式示意图

**性质 2.16 正入射情形**

当 $i_1 = i_2 = 0$ 时，$n_2 > n_1$

$r_s < 0$，$E_s''$ 与 $E_s$ 正方向相同

$r_p > 0$，$E_p''$ 与 $E_p$ 正方向相反，产生严格的半波损失

**注 2.17.** 《光学》教材对于全反射情况相位变化公式推导主要是求复数幅角 $\arg\frac{A-Bi}{A+Bi} = -2\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$

$$|\delta_p| = 2\arctan\frac{n_1}{n_2}\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}, \quad |\delta_s| = 2\arctan\frac{n_2}{n_1}\frac{\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2 i_1 - 1}}{\cos i_1}.$$

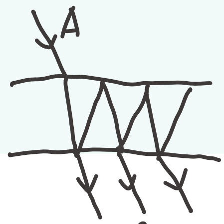
**例 2.18** $s$ 光以 $\theta$ 角从折射率 $n_1$ 介质入射厚度为 $d$、折射率为 $n_2$ 的玻璃平板后回到 $n_1$ 介质（$n_2 > n_1$），求以下两种情况的能量透射率：

(1) $d$ 很小，相邻出射光束间仍有相干性；

(2) $d$ 很大，相邻出射光束间无相干性。（提示：类比法布里-珀罗干涉仪）

① $T = \dfrac{1}{1+\dfrac{(1-R)^2}{4R\sin^2\frac{\delta}{2}}}$ $\qquad R = r^2 = \left(\dfrac{n_1\cos i_1 - n_2\cos i_2}{n_1\cos i_1 + n_2\cos i_2}\right)^2$

② 




$(Att')^2 \ (Ar'^2tt')^2 \ (Ar'^4tt')^2$ $\qquad R = r^2$

$$\frac{A^2(tt')^2}{1-(r'^2)^2} = \frac{A^2(1-r^2)^2}{1-r^4} = \frac{A^2(1-R)^2}{1-R^2} = \frac{A^2(1-R)}{1+R}$$

### 2.3.2 双折射和 $\frac{\lambda}{4}$ 片

**性质 2.19 光学介质**

如下图所示，规定主截面为法线和光轴所在平面，o 光为偏振方向垂直主截面，e 光为偏振方向平行主截面：

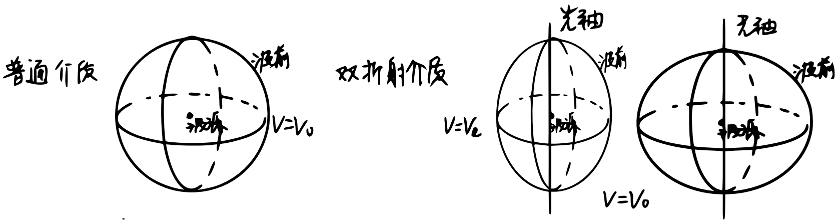


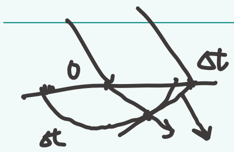

图 2–10 普通介质和光学介质示意图

**例 2.20** 求以下两种情况的折射角 $r$ 和波矢与法线夹角 $\theta$（入射光在主截面内）

(1) 入射角为 $i$，光轴平行法线；

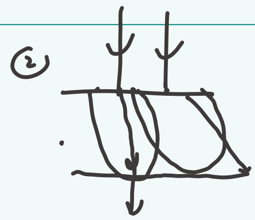
(2) 入射光平行法线，光轴与法线夹角为 $\varphi$。

✍




$r = \arcsin \frac{n_o}{n_e\sqrt{n_e^2 - n_o^2\sin^2 i}}$

$\theta = \arcsin \frac{n_e}{n_o\sqrt{\quad}}$




$\varphi = 0$ $r = \arcsin\left(\frac{n_e^2}{n_o^2}\varphi\right) - \varphi$

**性质 2.21 双折射应用**

以下三种棱镜均使用了 $o$ 光和 $e$ 光双折射性质：

**性质 2.22 $\frac{\lambda}{4}$ 片**

对下图所示波晶片，$o$ 光、$e$ 光在通过波晶片后产生相位差，其满足

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda}(n_o - n_e)\,d$$

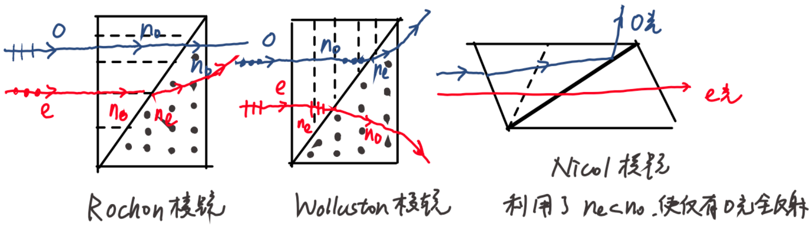



图 2–11 Rochon 棱镜、Wolluston 棱镜、Nicol 棱镜示意图

当 $(n_o - n_e)\,d = \dfrac{\lambda}{4}$ 时，$\Delta = \dfrac{\pi}{2}$，此时波片可以进行线偏振和圆偏振间的转化。♠

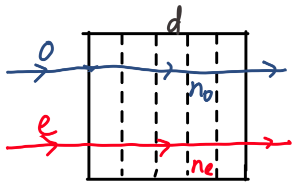



图 2–12 $\dfrac{\lambda}{4}$ 片示意图

**性质 2.23 琼斯矩阵初步**

波晶片不同位置对应变换如下

$$\text{波晶片以光轴方向为}x\text{ 轴:}\quad \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

$$\text{波晶片以偏振方向为}x\text{ 轴:}\quad \begin{bmatrix} A'_x \\ A'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix}$$

♠

### 2.3.3 旋光性

**定义 2.24 旋光性**

当平面偏振光通过手性化合物溶液后，偏振面的方向就被旋转了一个角度，这种能使偏振面旋转的性能称为旋光性。其本质为**存在手性**, 则左右旋光与溶液中分子的作用方式不同。♣

**例 2.25** 令溶液左右旋折射率为 $n_L, n_R$，计算波长为 $\lambda$ 的线偏振光经过长度为 $d$ 的溶液后对应的振幅变换矩阵。

✍

## 2.4 色散

### 2.4.1 相速度、群速度

**性质 2.26 相速度和群速度关系**

只要有色散，相速度和群速度就不相等，其满足以下表达式：

$$n_g = n - \lambda \frac{dn}{d\lambda} \text{ or } v_g = v_p + k\frac{dv_p}{dk}$$

♠

**证明.** 群速度定义 $v_y = \dfrac{d\omega}{dk}$ 利用 $k = \dfrac{\omega}{v_p} = \dfrac{n\omega}{c} = \dfrac{2\pi n}{\lambda}$，$\lambda$ 为真空波长，得到 $n_g = n - \lambda \dfrac{dn}{d\lambda}$ or $v_g = v_p + k\dfrac{dv_p}{dk}$。若 $v_g = \text{Const}$，此时 $\dfrac{dn}{d\lambda} = 0$，即 $n = \text{const}$。 □

**例 2.27** 汞灯的双黄线波长为 $\lambda$ 和 $\lambda + \Delta\lambda$（$\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$）。在最小偏向角附近入射到一个顶角为 $\alpha$ 的三棱镜上，出射时两线角间距为 $\delta$，棱镜对汞双黄线的平均折射率为 $n$，已知 $\dfrac{\delta\lambda}{\Delta\lambda}$ 不是很小：

(1) 求最小偏向角；

(2) 求棱镜对汞灯双黄线的色散率 $\dfrac{dn}{d\lambda}$；

(3) 若一束波长为 $\lambda$ 的黄光脉冲入射到与三棱镜材质相同的玻璃片上，玻璃片厚度为 $d$，求黄光脉冲通过改玻璃片所需要的时间 $t$。

✍

① $\varphi_{min} = 2\arcsin\left(\frac{n\sin\alpha}{2}\right) - \alpha$

② $d\lambda = \Delta\lambda$　$d\varphi_{min} = 0\ \delta n$　$\frac{dn}{d\lambda}$

$= \delta$

③ $n_g = n_p - \lambda\frac{dn}{d\lambda}$

$v_g = \frac{c}{n_g}$

### 2.4.2 柯西公式

**性质 2.28 柯西公式**

光在透明材质下，其折射率和波长之间满足经验公式：

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \cdots$$

**证明.** 假设电子在库仑力的束缚下，在外电场中运动（光是电磁波），其运动方程和弹簧振子在余弦外力作用的运动方程类似，相应系数均为 $\omega^2$ 的函数，严格计算有 $n(\omega) = 1 - \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j\left(\omega^2 - \omega_j^2\right)}{\left(\omega^2 - \omega_j^2\right)^2 + \omega^2\gamma_j^2}$，将其泰勒展开可得上述关系，一般取前两项或者三项就能达到很高精度。 □

# 3

# 量子物理

## 3.1 康普顿散射

**性质 3.1 康普顿散射公式**

康普顿散射是指当 X 射线或伽马射线的光子跟物质相互作用，因失去能量而导致波长变长的现象，其波长变化量公式如下

$$\lambda_f - \lambda_i = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta)$$

♠

**证明.** 其中 $\underset{\longrightarrow}{P}$ 表示四维动量, $i/f$ 代表 initial/final, $\theta$ 是光子偏转角 (能、动量守恒也能做)

$$\underset{\longrightarrow}{P_{\gamma i}} + \underset{\longrightarrow}{P_{ei}} = \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma f}} + \underset{\longrightarrow}{P_{ef}} \Rightarrow \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma i}} + \underset{\longrightarrow}{P_{ei}} - \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma f}} = \underset{\longrightarrow}{P_{ef}} \Rightarrow (\underset{\longrightarrow}{P_{\gamma i}} + \underset{\longrightarrow}{P_{ei}} - \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma f}})^2 = (\underset{\longrightarrow}{P_{ef}})^2$$
$$\Rightarrow 0 + \left(-m_e c^2\right) + 0 + 2\left(-\underset{\longrightarrow}{P_{\gamma i}} \cdot \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma f}} + \underset{\longrightarrow}{P_{ei}} \cdot \left(\underset{\longrightarrow}{P_{\gamma i}} - \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma f}}\right)\right) = -m_e c^2$$
$$\Rightarrow \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma i}} \cdot \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma f}} = \underset{\longrightarrow}{P_{ei}} \cdot \left(\underset{\longrightarrow}{P_{\gamma i}} - \underset{\longrightarrow}{P_{\gamma f}}\right) \Rightarrow \frac{h^2}{\lambda_i \lambda_f}(\cos\theta - 1) = -m_e c \left(\frac{h}{\lambda_i} - \frac{h}{\lambda_f}\right)$$

□

**注 3.2.** 应用康普顿散射公式和能量守恒，可以快速得到电子的动能和散射角度

$$\begin{cases} E_k = \dfrac{hc}{\lambda_0} - \dfrac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} = \dfrac{\dfrac{h^2c^2}{m_e}(1-\cos\theta)}{\lambda_0(\lambda_0 + \dfrac{hc}{m_e}(1-\cos\theta))} \\ \tan\varphi = \dfrac{\lambda_0}{\dfrac{hc}{m_e} + \lambda_0} \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \dfrac{\lambda_0}{\dfrac{hc}{m_e} + \lambda_0} \cot\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

## 3.2 普朗克黑体辐射

$$\left.\begin{array}{r} \text{瑞丽} - \text{金斯公式 (长波)}: \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T \\ \text{维恩公式 (短波)}: \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \dfrac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T}} \end{array}\right\} \xRightarrow[\text{爱因斯坦受激辐射理论}]{\text{普朗克凑出}} \text{普朗克公式}: \dfrac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \dfrac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}$$

## 3.3 波函数、算符和对易性

**定义 3.3 波函数统计解释和归一性**

$|\Psi(\vec{r},t)|^2 = \Psi^*(\vec{r},t) \times \Psi(\vec{r},t)$代表$t$时刻，$\vec{r}$附近的概率密度。

$$\text{概率的归一性}: 1 = \int_{\text{全空间}} dP = \int_{\text{全空间}} |\Psi(\vec{r},t)|^2 dP$$

♣

**定义 3.4 算符的引入**

$$\text{对自由粒子} \begin{cases} \Psi(\vec{r},t) = \Psi_0 e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t\right)} \xlongequal{\text{代入}\vec{p}=\hbar\vec{k}, E=\hbar\omega} \Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})} \\ -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}\Psi(\vec{r},t) = -i\hbar\Psi_0 e^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})} \frac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{i}{\hbar}(Et - \vec{p}\cdot\vec{r})\right) = p_x \Psi(\vec{r},t) \end{cases}$$

因此，我们把 $-i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$称作$x$方向的动量算符，记作$\hat{p}_x = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x}$

同样的，我们有 $\hat{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \hat{p}_x \\ \hat{p}_y \\ \hat{p}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial y} \\ -i\hbar\frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = -i\hbar\nabla$ 称作动量算符 ♣

需要指出的是，虽然我们选择从自由粒子导出，但这些算符对于不同的波函数是普适的。对于其它的算符，下面给出一些例子

**例 3.5** 尝试给出非相对论动能算符、坐标表象下的系统总能量算符、轨道角动量算符、轨道角动量平方算符。

✍

**定义 3.6 算符性质**

- 标量 $A$ 与 $B$ : $AB = BA$
- 矢量 $\vec{A}$ 与 $\vec{B}$ : $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$ $\quad \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$
- 算符 $\hat{p}$ 与 $\hat{x}$ 的关系

$$\hat{p}_x[x\psi(x)] = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}[x\psi(x)] = -i\hbar\psi(x) - i\hbar x\frac{\partial}{\partial x}\psi(x) = -i\hbar\psi(x) + x\hat{p}_x\psi(x)$$

由于波函数 $\psi(x)$ 任意，可以略去不写，记作 $\hat{p}_x\hat{x} = -i\hbar + \hat{x}\hat{x}_x \Leftrightarrow \hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x = -i\hbar$

我们将用 $[\hat{p}_x\hat{x}]$ 来表示 $\hat{p}_x\hat{x} - \hat{x}\hat{p}_x$，则对易关系表示为: $[\hat{p}_x, \hat{x}] = -i\hbar$。 ♣

**定理 3.7 不确定关系**

理论上可以证明，若用 $\sigma_A$ 表达物理量 $A$ 的标准差，$\hat{A}$ 表示 $A$ 对应的算符，则有

$$\sigma_A\sigma_B \geqslant \left|\frac{\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle}{2i}\right|$$

♡

**例 3.8** 取 $A, B$ 为 $p_x, x$，代入定理 3.6 推导测不准原理。

✍