运动学和牛顿定律

第一次习题讨论课

运动学

内容提要：

1. 参考系：用以确定物体位置所用的物体称为参考系。

2. 运动方程：

   - 位置矢量：用以确定质点位置的矢量

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = x(t)\hat{\boldsymbol{x}} + y(t)\hat{\boldsymbol{y}} + z(t)\hat{\boldsymbol{z}}$$

   - 位移矢量： 质点在一段时间Δt 内位置的改变

$$\Delta\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(t + \Delta t) - \vec{\boldsymbol{r}}\,(t)$$

3. 速度：质点位置矢量对时间的变化率

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{dt}}$$

   - 加速度：质点速度对时间的变化率

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{dt}}$$

4. 抛体运动：

- 位置 $x = v_0\cos\theta \cdot t,\quad y = v_0\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$
- 速度 $v_x = v_0\cos\theta,\quad v_y = v_0\sin\theta - gt$
- 加速度 $a_x = 0,\quad a_y = -g$

5. 圆周运动：

- 角速度 $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = \frac{v}{R}$
- 角加速度 $a = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{dt}}$
- 加速度 $a = a_t + a_n$
- 法向加速度 $a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$, 方向沿着半径指向圆心
- 切向加速度 $a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{dt}}$ 方向沿着轨道切线

6. 伽利略速度相加定理：

一质点相对于两个相对作平动的参考系的速度之间的关系为：

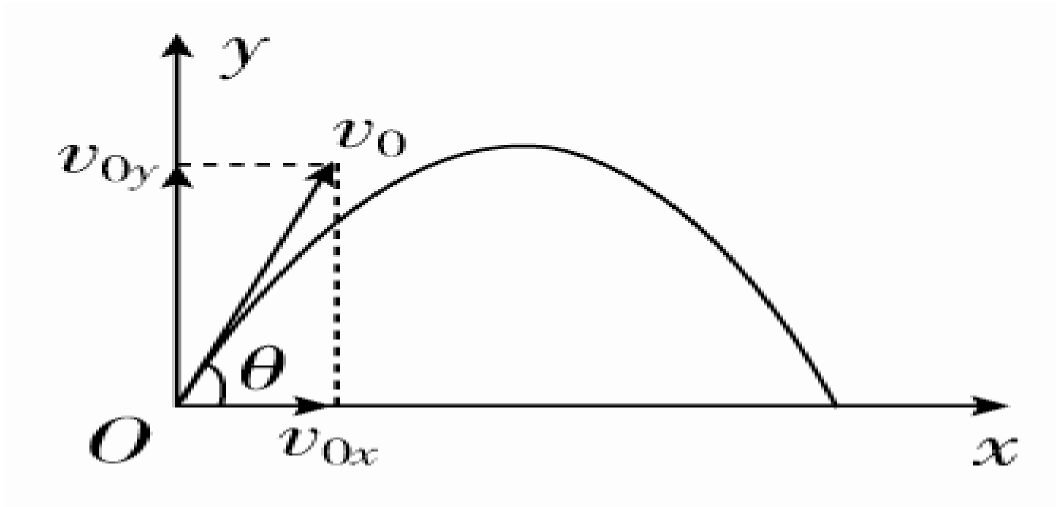
$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{u}$$

其中，$\boldsymbol{v}$与$\boldsymbol{v}'$分别表示质点相对参照系 xOy 与参照系 $x'O'y'$的速度；$\boldsymbol{u}$表示参照系$x'O'y'$相对于xOy的速度。

讨论题

1. 一质点做抛体运动（忽略空气阻力）如图所示

（深入理解质点曲线加速度的物理意义）

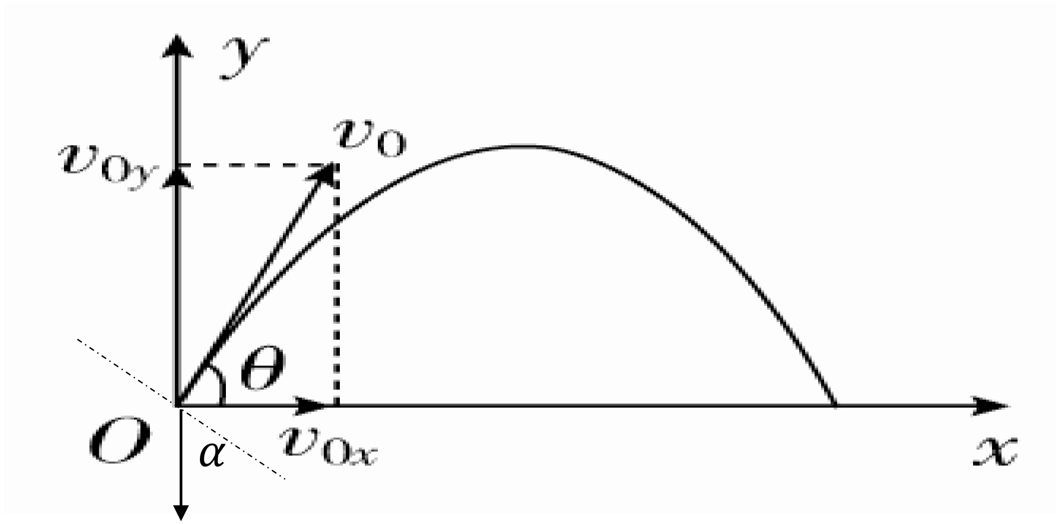


（1）$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是否变化？

（2）$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$是否变化？

（3）法向加速度的方向，及是否变化？

1. 一质点做抛体运动（忽略空气阻力）如图所示



（1）$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$是否变化？ **是 （速度大小在变）**

（2）$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$是否变化？ 否 （加速度不变）

（3）法向加速度的方向，是否变化？ 是

2. （1） $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = 0$ 的运动为何种运动？

（2） $\frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t} = 0$ 的运动呢？

2.（1）$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right| = 0$ 的运动为何种运动？

匀速直线运动

（2）$\frac{\mathrm{d}|\vec{v}|}{\mathrm{d}t} = 0$ 的运动呢？

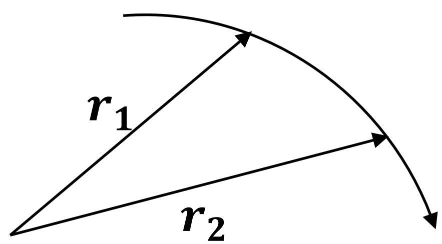
速度大小不变，但方向可以改变。如匀速圆周运动

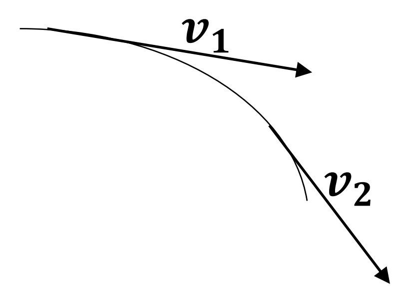
3. 设质点的运动方程为 $x = x(t)$，$y = y(t)$。在计算质点的速度和加速度时有人先求出$r = \sqrt{x^2 + y^2}$，然后根据$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$和$a = \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}$求出结果；也有人线计算出分量，再合成求解，即$v = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}, a = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$。你认为哪种方法正确？为什么？

3. 设质点的运动方程为 $x=x(t)$, $y=y(t)$。在计算质点的速度和加速度时有人先求出$r=\sqrt{x^2+y^2}$,然后根据$v=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$和$a=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}$求出结果;也有人线计算出分量,再合成求解,即$v=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}$, $a=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\right)^2}$。你认为哪种方法正确?为什么?

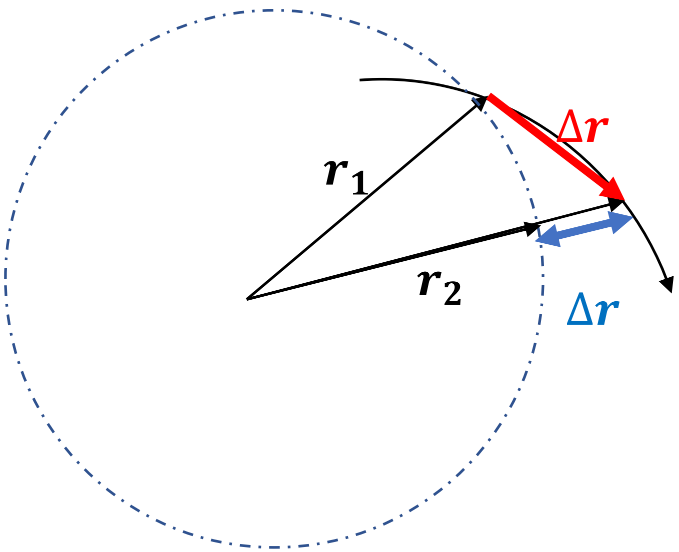
$v=\frac{dr}{dt}$和$a=\frac{d^2r}{dt^2}$不能反应速度和加速度的方向性。反例:匀速圆周运动。
第二种做法正确。

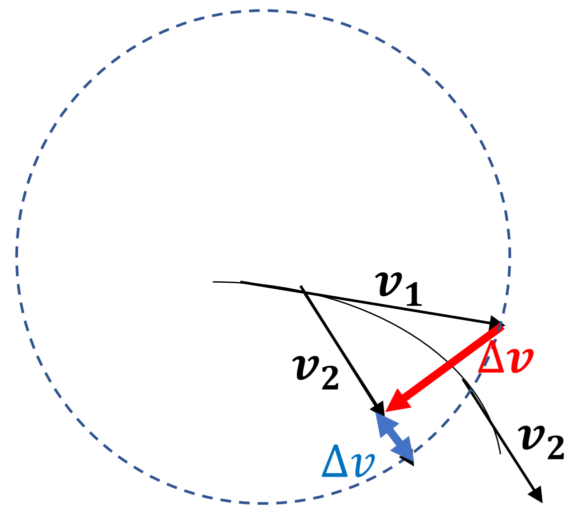
4. 在图中标出$\Delta\boldsymbol{r}$, Δr 与 $\Delta\boldsymbol{v}$, Δv



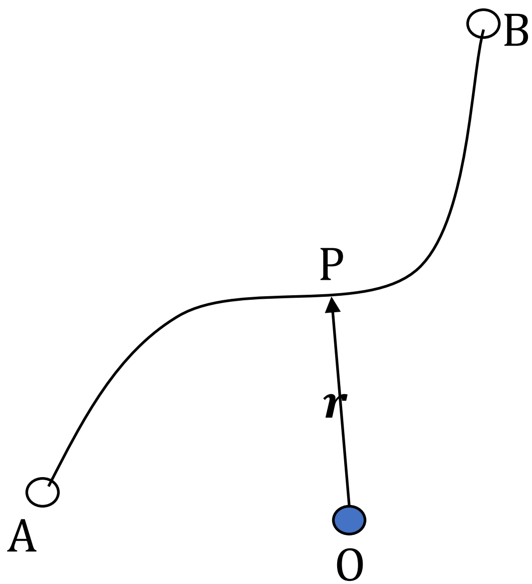


4. 在图中标出$\Delta\boldsymbol{r}$, Δr 与 $\Delta\boldsymbol{v}$, Δv





5. 质点P沿着所示曲线运动，轨迹由A至B，$\boldsymbol{r}$为某时刻的位失，下列各式代表什么，在图中标出。

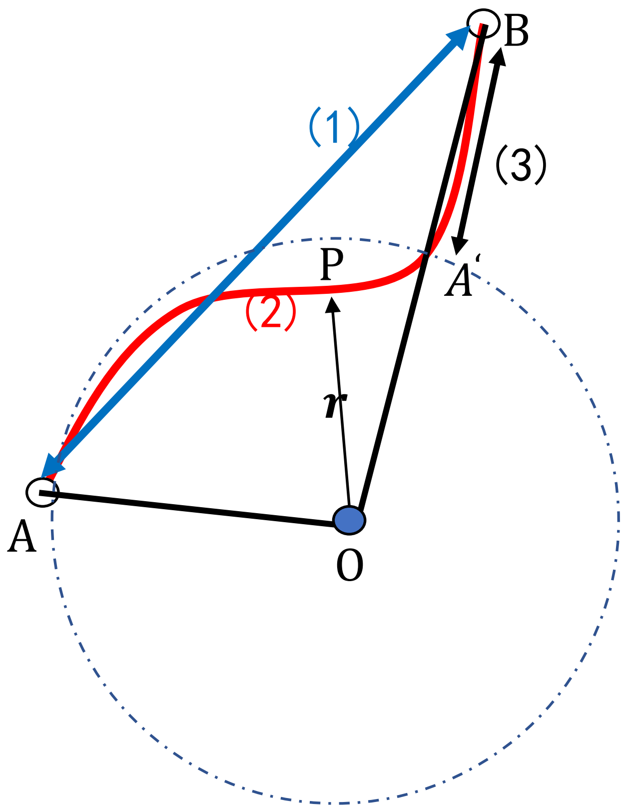


(1) $\left|\int_{A}^{B} \mathrm{d}\vec{r}\right|$

(2) $\int_{A}^{B} |\mathrm{d}\vec{r}|$

(3) $\int_{A}^{B} \mathrm{d}r$

5. 质点P沿着所示曲线运动，轨迹由A至B，$\boldsymbol{r}$为某时刻的位矢，下列各式代表什么，在图中标出。



(1) $\left|\int_{A}^{B} \mathrm{d}\vec{r}\right|$ 直线$\overline{AB}$

(2) $\int_{A}^{B} |\mathrm{d}\vec{r}|$ 曲线AB

(3) $\int_{A}^{B} \mathrm{d}r$ 直线$A'B$

6. 对曲线运动的认识有下面两种说法，试判断其是否正确。

（1）物体作曲线运动时，速度方向必定沿着运动轨道的切线方向。

（2）物体作曲线运动时必定有加速度，加速度的法向分量必定不为0。

7. 对曲线运动的认识有下面两种说法，试判断其是否正确。

（2）物体作曲线运动时，速度方向必定沿着运动轨道的切线方向。 正确。

（1）物体作曲线运动时必定有加速度，加速度的法向分量必定不为0。**正确**

牛顿定律

内容摘要

- 牛顿定律：
  - 第一定律　任何物体都保持静止或沿着一直线作匀速运动的状态，直到作用在它上面的力迫使他改变这种状态为止。
  - 第二定律　运动的变化与所加的动力成正比，并且发生在这力所沿的直线方向上。即

$$\vec{\boldsymbol{F}}=\frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{dt}}=\frac{\mathrm{d}(m\vec{\boldsymbol{v}})}{\mathrm{d}t}$$

当质量为m为常量时，可得

$$\vec{\boldsymbol{F}}=m\vec{\boldsymbol{a}}\ ,$$

对于平面曲线运动有

$$F_x=ma_x,\ \ F_y=ma_y,\ F_z=ma_z$$

对于平面曲线运动，有

$$F_t=ma_t,F_n=ma_n$$

- 第三定律 对于每一个作用总有一个与之相等的反作用，或者说，两个物体之间对各自对方的相互作用总是相等的，而且指向相反的方向。即：
  - $\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{12}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{21}}$
- 应用问题中常见的几种力为：
  - 重力 $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$
  - 正压力与支持力 $\boldsymbol{N} = -\boldsymbol{N}'$
  - 绳的拉力 $\boldsymbol{T}$
  - 弹簧的弹力 $f = -kx$
  - 滑动摩擦力 $f_k = \mu_k N$
  - 静摩擦力 $f_s \le \mu_k N$
- 非惯性系与惯性力
  - 质量为m的物体，在平动加速为$\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{0}}$的参照系中受的惯性力为

$$F_0 = -m\vec{\boldsymbol{a}}_{\mathbf{0}}$$

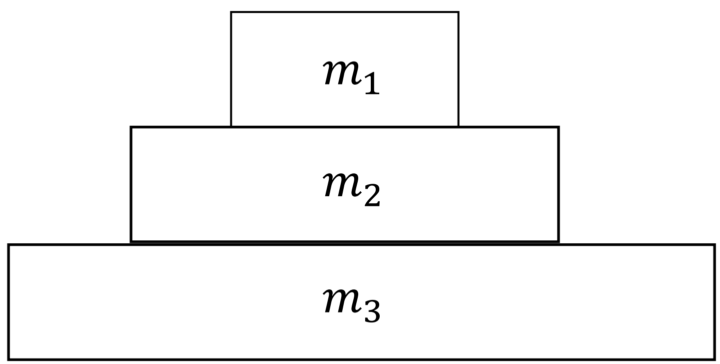
  - 在转动角速度为ω的参照系中，惯性离心力为

$$F_0 = mr\omega^2\hat{\boldsymbol{r}}$$

  - 科里奥利力 $F = 2m\overrightarrow{v'} \times \vec{\omega}$

讨论题

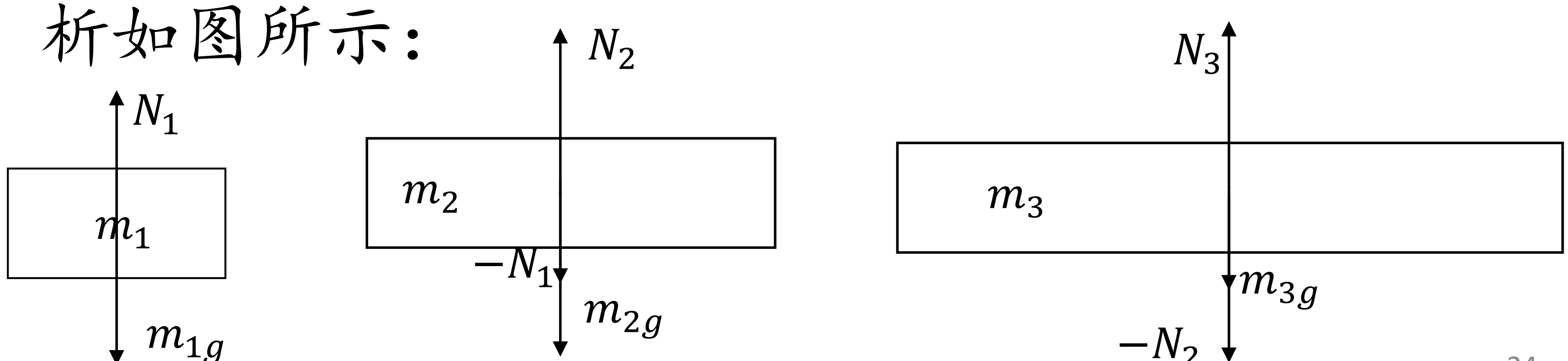
- 质量分别为m_1，m_2，m_3的三个物体如图所示放置，求：
  1. 当它们静止在桌面上时，每个物体受力的情况如何？
  2. 当它们匀速下降时，每个物体各受多大合力？匀速上升时又各受多大合力。
  3. 当它们自由下落时，每个物体各受多大合力？如以匀加速度a 上升或者下降时，又各受多大合力？



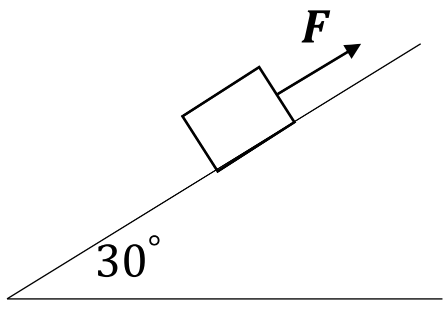
1. 无论匀速上升或者匀速下降，根据牛顿定律，每个物体受到合外力均为0。

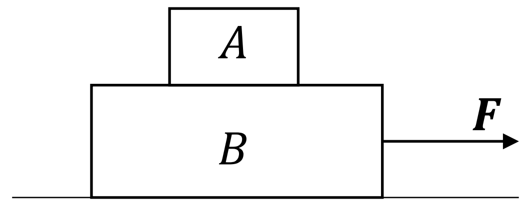
2. 自由下落时，每个物体所受的合外力均等于自身重力。若以加速度$\boldsymbol{a}$下降，各个物体所受的合外力分别为：$F_1 = m_1 a$，$F_2 = m_2 a$，$F_3 = m_3 a$, 方向竖直向下。若以加速度$\boldsymbol{a}$上升，各物体所受的合力大小相同，方向相反。

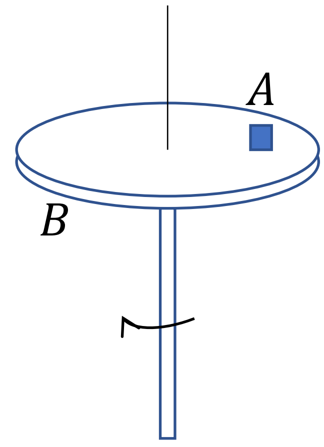
3. 静止在桌面上时，各物体所受的外力为0，受力分析如图所示：



- 如图所示的各种情况中，作用在物体A上的静摩擦力的方向，并由此总结出应如何判断静摩擦力的方向。

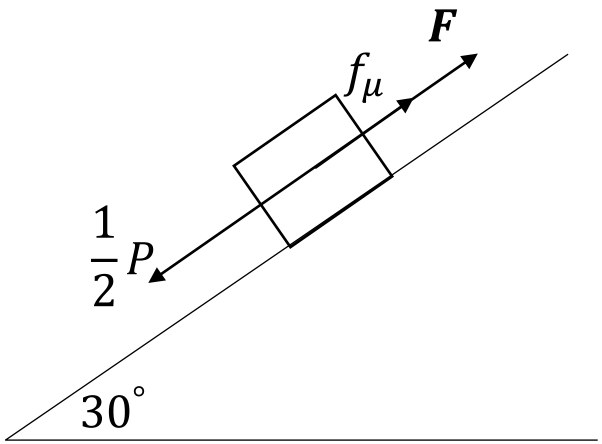




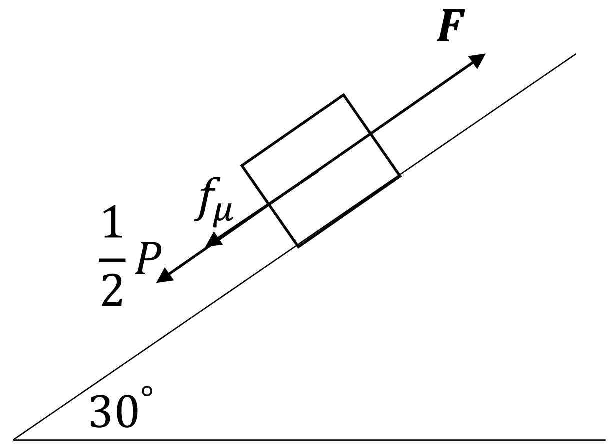


1. 如一图所示，拉而未拉动，但F小于A的物体重量的一半；或者拉而未拉动，但F大于A物体重量的一半。
2. A随着B一起做加速运动。
3. 小木块A随着圆盘B一起匀速转动，或A随B一起加速运动。

1.

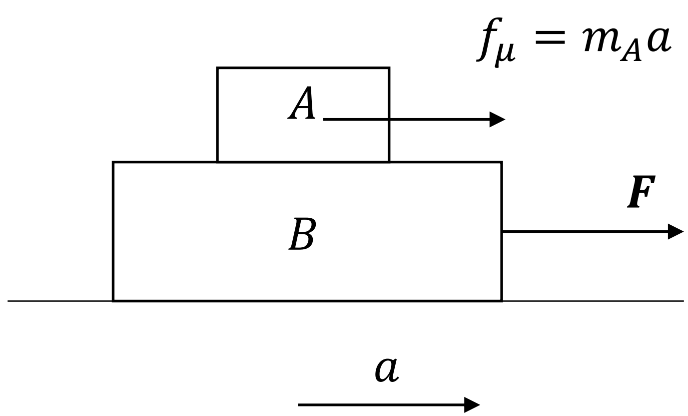


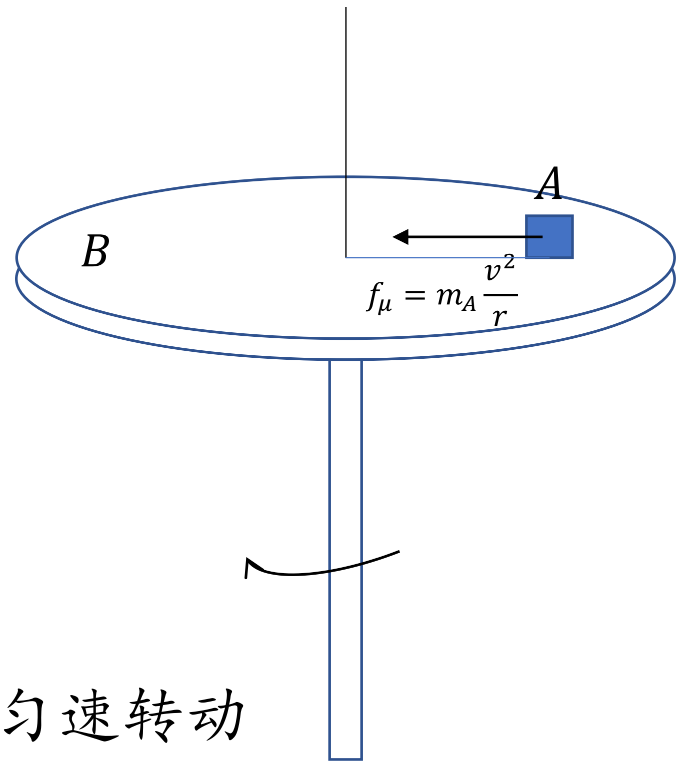
F小于重量P一半
无摩擦将下滑



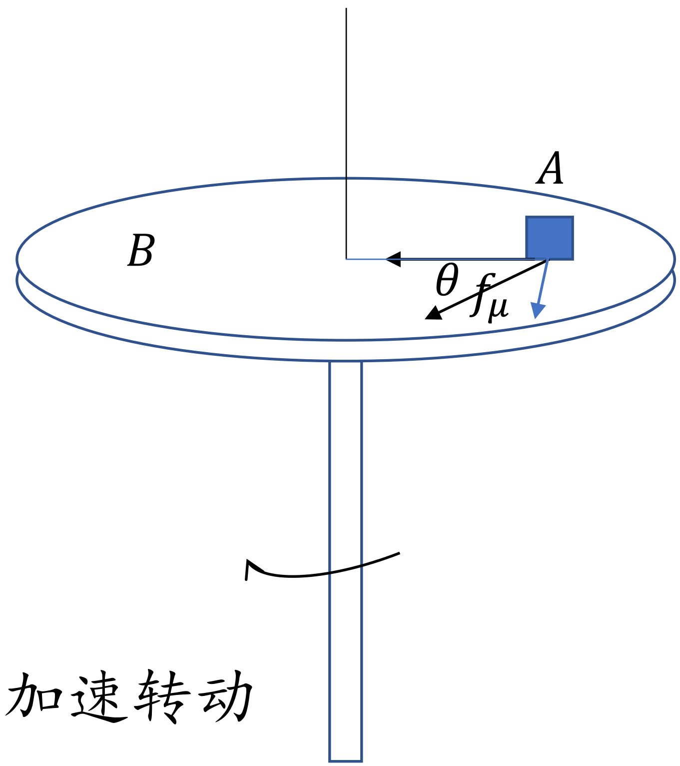
F大于重量P一半
无摩擦将上滑

2.





B作匀速转动

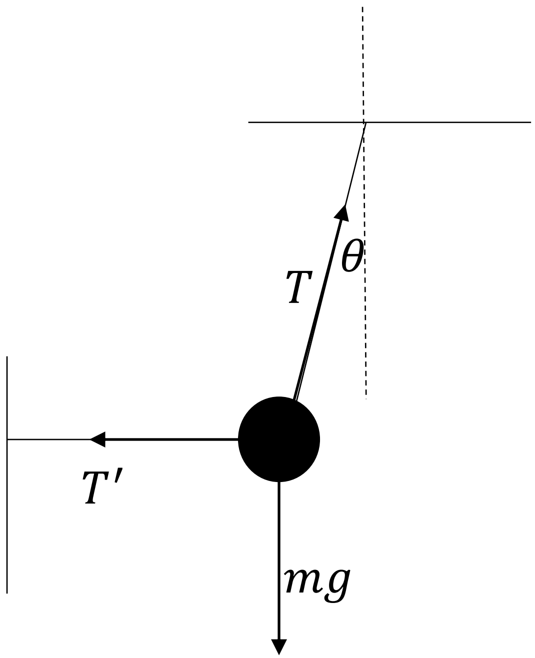


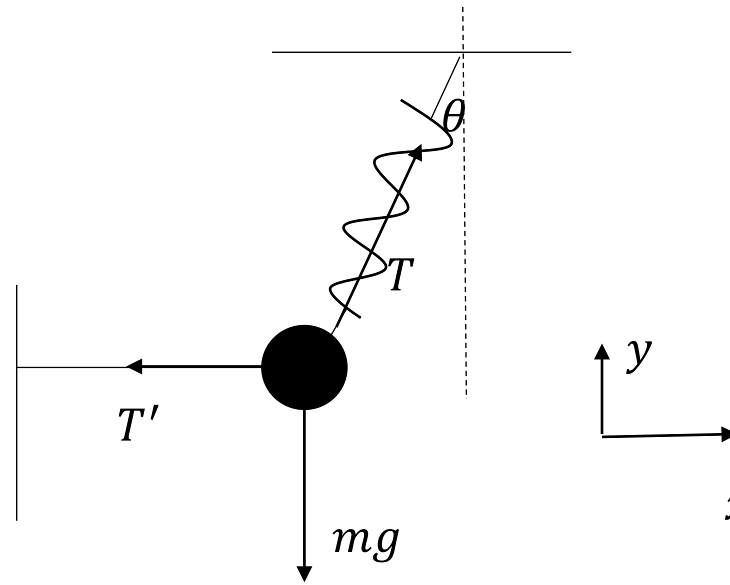
B作加速转动

$$f_\mu = \sqrt{\left(m_A \frac{v^2}{r}\right)^2 + \left(m_A \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}$$

$$\theta = \arctan \frac{r \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}{v^2}$$

- 质量为m的小球如图所示悬挂，并且处于平衡状态，图一中小球上端为绳索，图二中小球上端为弹簧，二者的水平方向皆为绳索，试着分析剪断水平绳索的瞬间小球未运动时，两种情况小球m所受力如何？





剪短绳瞬间m未移动，在径向方程为：

$$T - mg\cos\theta = m\frac{v^2}{R} = 0$$

$$T = mg\cos\theta$$

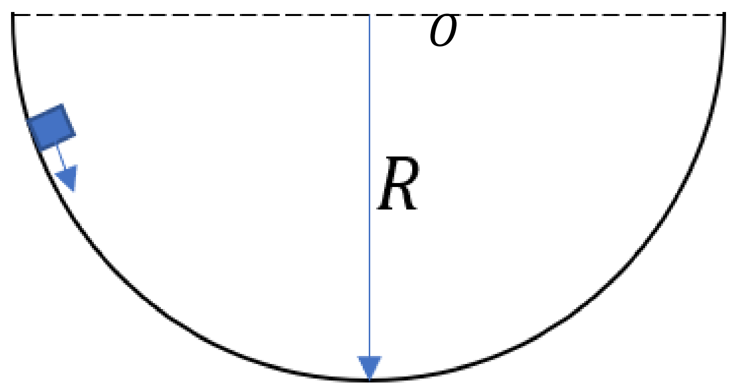
在$\hat{x}$向， $T\sin\theta - T' = 0$

在$\hat{y}$向， $T\cos\theta - mg = 0$

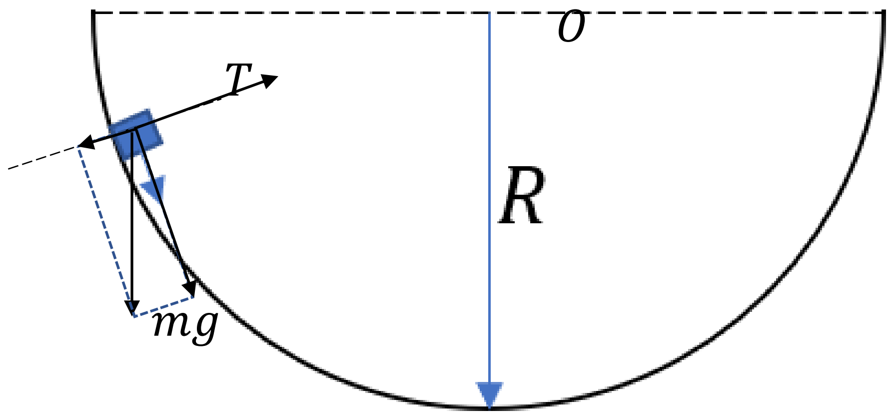
剪断绳瞬间m未移动，根据$\hat{y}$向方程：

$$T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

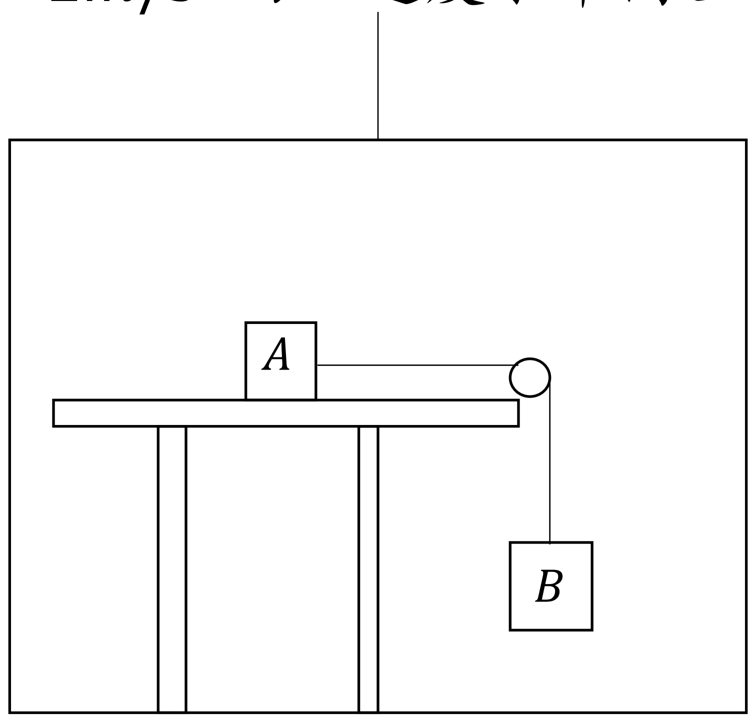
- 如图所示，设物体沿着光滑的圆形轨道下滑，在下滑过程中，下面哪种说法时正确的？
  1. 物体的加速度方向永远指向圆心O
  2. 物体的速率均匀增加
  3. 物理所受的合外力大小变化，但方向永远指向圆心。
  4. 轨道的支持力大小不断增大。



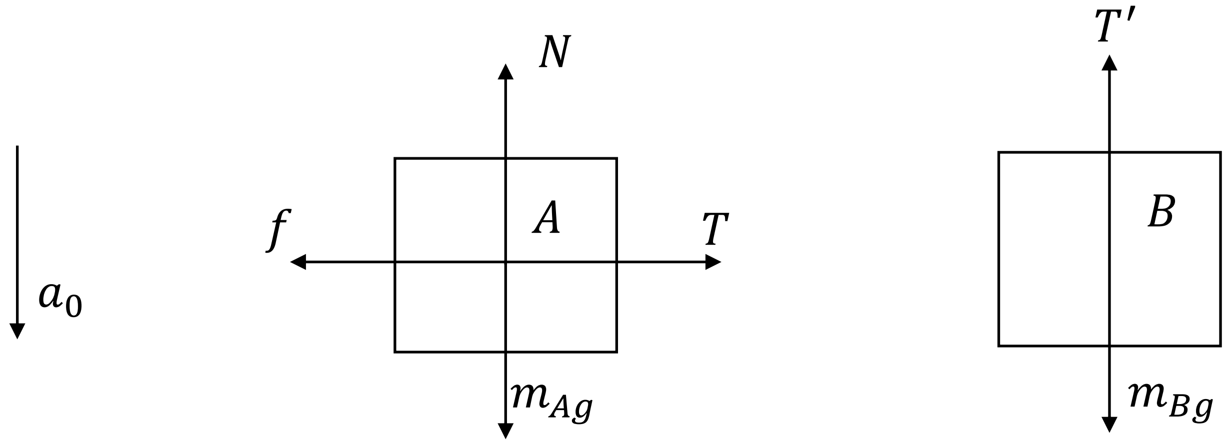
- 如图所示，设物体沿着光滑的圆形轨道下滑，在下滑过程中，下面哪种说法时正确的？
  1. 物体的加速度方向永远指向圆心O　不正确
  2. 物体的速率均匀增加　不正确
  3. 物理所受的合外力大小变化，但方向永远指向圆心。不正确
  4. 轨道的支持力大小不断增大。正确



- 如图所示，物体A, B的质量分别为$m_A = 2kg$，$m_B = 3kg$. 物体A放在水平桌面上，它与桌面的摩擦系数为$\mu = 0.25$，物体B和物体A用轻质量的细绳并跨过一质量不计的定滑轮相连。桌子固定在一吊车内，如图所示。试求下列两种情况下绳子的张力。
  1. 吊车以 $a_0 = 2m/s^2$的加速度竖直向下。
  2. 吊车以 $a_0 = 2m/s^2$的加速度水平向左运动。



- 地面参考系。吊车的加速度为a_0，竖直向下。



对于A物体 $T-\mu N=m_Aa_A$ $-m_Ag+N=-m_Aa_0$

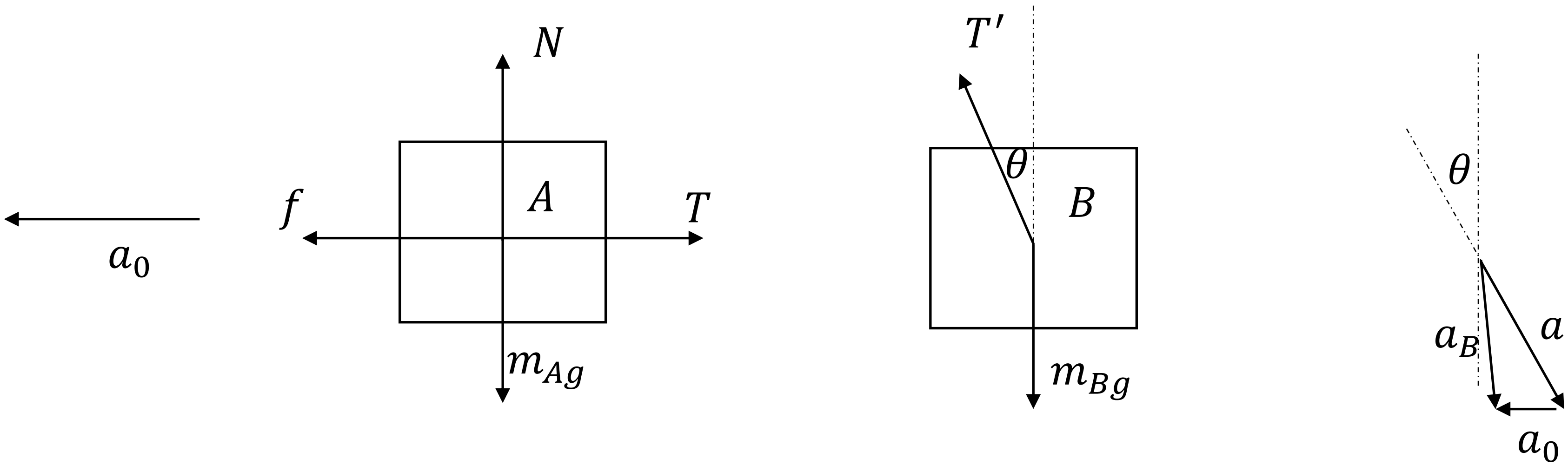
对于B物体 $-m_Bg+T'=-m_Ba_B$ $T'=T$ $a_B=a_A+a_0$

联立上五个式，可解出：

$$a_A=\frac{(m_B-\mu m_A)(g-a_0)}{m_A+m_B}=3.90m/s^2$$

$$T=m_B(g-a_0-a_A)=11.7N$$

- 选地面为参考系。吊车的加速度为a_0，水平向左。



对于A物体 $T-\mu N=m_A a_A \quad N-m_A g=0 \quad a_A=a-a_0$

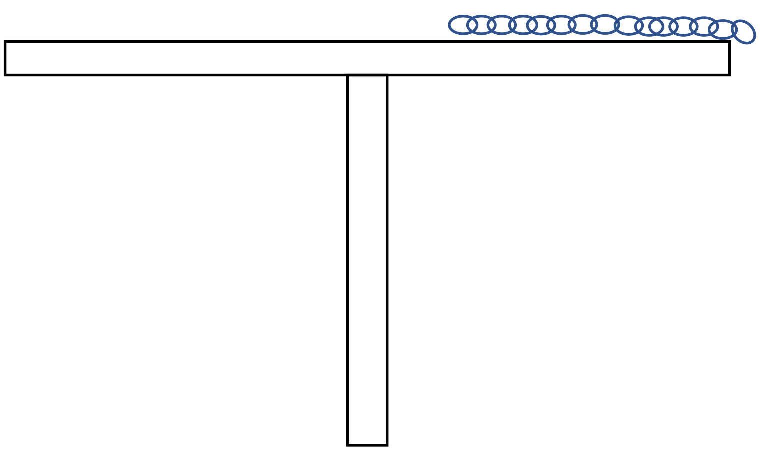
对于B物体 $-T'\sin\theta=m_B a_{Bx} \quad a_{Bx}=a\sin\theta-a_0$

$$T'\cos\theta-m_B g=-m_B a_{By} \quad a_{By}=a\cos\theta \quad T'=T$$

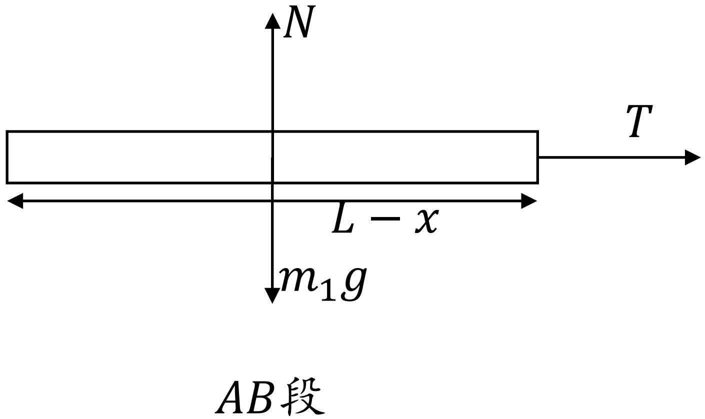
联立上式:

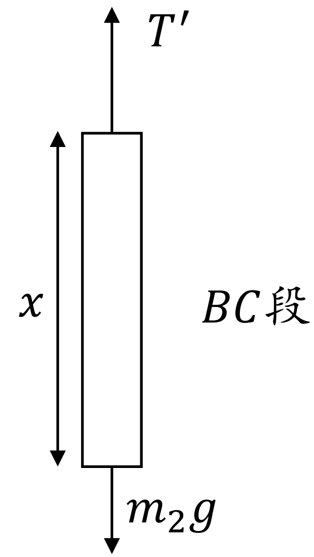
$$T=\frac{m_A m_B(\sqrt{a_0^2+g^2}+\mu g-a_0)}{m_A+m_B}=12.1N$$

- 如图所示，有一条长为L，质量为M的均匀分布的链条成直线状放在光滑的水平桌面上，链子的一端有极小的一端被推出桌子边缘，在重力的作用下从静止开始下落，试求：
  1. 链条刚离开桌面时的速度。
  2. 若链条与桌面有摩擦并设摩擦系数为μ，问链条必须下垂多长才能开始下滑。



- 在t时刻，留在桌子上的链条为AB段，已下垂x长，为BC段。





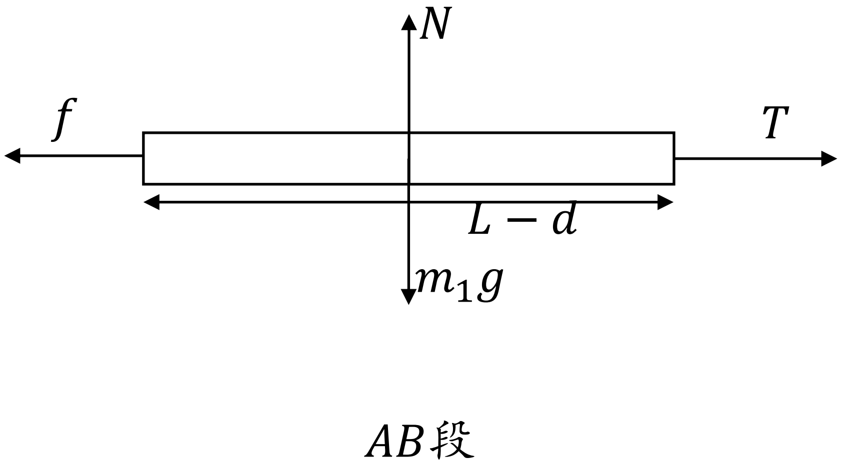
对AB段有： $T = m_1 a_1 = m_1 \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$ 对BC段有： $m_2 g - T' = m_2 \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$

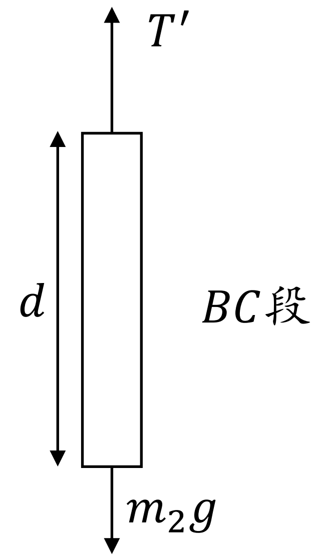
且 $\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 得 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{x}{L} g$

两边同乘以$\mathrm{d}x$ $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x = \frac{x}{L} g\mathrm{d}x$ 得 $v\mathrm{d}v = \frac{x}{L} g\mathrm{d}x$

积分 $\int_0^v v\mathrm{d}v = \int_0^L \frac{g}{L} x dx$ 得 $v = \sqrt{gL}$

设当下垂长度为d时，链条开始下滑，因为桌面摩擦存在





对AB段有： $T-f=m_1 a_1=m_1\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$ 对BC段有： $m_2 g-T'=m_2\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}$

且 $\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 得 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{m_2 g-f}{m_1+m_2}=\dfrac{m_2 g-\mu m_1 g}{m_1+m_2}$

要求 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\geq 0$ 即 $m_2 g-\mu m_1 g\geq 0$

且 $\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{d}{L-d}$ 得 $d\geq\dfrac{\mu}{1+\mu}L$